МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

А.М. ДЕНИСОВ, А.В. РАЗГУЛИН

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 2

МОСКВА – 2008 г.

Пособие написано для студентов 2 курса факультета вычислительной математики и кибернетики как дополнение к лекционному курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения". В пособии охвачен материал курса 4 семестра, а также часть материала 3 семестра, не вошедшая в программу коллоквиума по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Оглавление

Глава 1

Зависимость решения задачи Коши от исходных данных и параметров

1.1 Непрерывная зависимость решения задачи Коши от исходных данных

1.1.1 Непрерывная зависимость решения задачи Коши от исходных данных

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{1.1}$$
$$y(t_0) = y_0. \tag{1.2}$$

Решение этой задачи зависит от функции $f(t,y)$ и начального состояния y_0, которые можно называть *исходными данными* задачи Коши (1.1)-(1.2). Как зависит решение этой задачи от изменения исходных данных, то-есть функции $f(t,y)$ и начального состояния y_0? Покажем, что небольшие изменения исходных данных приводят к небольшим изменениям решения задачи Коши. Таким образом, можно говорить о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных.

Теорема 1.1.1. *Пусть функции $f_i(t,y)$, $i = 1, 2$, непрерывны в прямоугольнике*

$$Q = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |t - t_0| \le T, \quad a \le y \le b\}$$

и $f_1(t,y)$ удовлетворяет в Q условию Липшица по y, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что

$$|f_1(t,y) - f_1(t,\widetilde{y})| \le L|y - \widetilde{y}|, \quad \forall (t,y), (t,\widetilde{y}) \in Q.$$

Тогда, если функции $y_i(t)$, $i = 1, 2$, на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ являются решениями задач Коши

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

то имеет место неравенство

$$\max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y_1(t) - y_2(t)| \le \left(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)| \right) \exp\{LT\}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Из леммы об эквивалентности задачи Коши интегральному уравнению следует, что функции $y_i(t) \in C^1[t_0 - T, t_0 + T]$, $a \le y_i(t) \le b$, $i = 1, 2$, и являются решениями интегральных уравнений

$$y_1(t) = y_{01} + \int\limits_{t_0}^{t} f_1(\tau, y_1(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

$$y_2(t) = y_{02} + \int\limits_{t_0}^{t} f_2(\tau, y_2(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая по модулю, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^{t} \big(f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau)) \big) d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Вычитая и прибавляя в правой части этого неравенства интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t} f_1(\tau, y_2(\tau)) d\tau,$$

получим

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^{t} \big| f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau)) \big| d\tau \right| +$$
$$+ \left| \int_{t_0}^{t} \big| f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau)) \big| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \tag{1.4}$$

Учитывая то, что функция $f_1(t,y)$ удовлетворяет условию Липшица, а также оценку

$$\left| \int_{t_0}^{t} \big(f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau)) \big) d\tau \right| \le T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

неравенство (1.4) можно переписать так

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le \big(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)| \big) +$$
$$+ L \left| \int\limits_{t_0}^{t} |y_1(\tau)) - y_2(\tau))| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Применив к функции $|y_1(t) - y_2(t)|$ лемму Гронуолла-Беллмана, получим неравенство

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le \big(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)| \big) \exp\{L|t - t_0|\}, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

из которого следует оценка (1.3). Теорема 1.1.1 доказана. □

1.1.2 Теорема сравнения

Рассмотрим теперь вопрос о том при каких условиях решение одной задачи Коши будет больше или равно решению другой задачи Коши. Теоремы такого типа часто называют теоремами сравнения.

Рассмотрим прямоугольник

$$Q_+ = \{(t, y) : \quad t_0 \le t \le t_0 + T, \quad a \le y \le b\}.$$

Далее мы используем следующее простое утверждение из математического анализа, представляющее собой формулу конечных приращений в интегральном виде.

Утверждение. Пусть функция $f(t,y)$ непрерывна в Q_+ и имеет в Q_+ непрерывную частную производную $f_y(t,y)$. Тогда для любых $(t, y_1), (t, y_2) \in Q_+$ справедливо равенство

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \int\limits_{0}^{1} f_y(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2)) d\theta \, (y_1 - y_2). \tag{1.5}$$

Докажем теперь теорему о сравнении решений двух задач Коши, которую также часто называют неравенством Чаплыгина.

Теорема 1.1.2. *(Теорема сравнения.) Пусть функции $f_i(t,y)$, $i = 1, 2$ непрерывны в Q_+ и $f_1(t,y)$ имеет в Q_+ непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(t,y)$. Тогда, если функции $y_i(t)$, $i = 1, 2$, на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ являются решениями задач Коши*

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

причем

$$f_1(t,y) \ge f_2(t,y), \quad (t,y) \in Q_+, \qquad y_{01} \ge y_{02},$$

то справедливо неравенство

$$y_1(t) \ge y_2(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Доказательство. Так как функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ являются решениями соответствующих уравнений, то $y_i(t) \in C^1[t_0, t_0 + T]$, $a \le y_i(t) \le b$, и справедливо равенство

$$y_1'(t) - y_2'(t) = f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{1.6}$$

Преобразуем правую часть этого равенства, использовав формулу конечных приращений (1.5),

$$f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = f_1(t, y_1(t)) - f_1(t, y_2(t)) + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)) =$$
$$= \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial f_1}{\partial y} \big(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t)) \big) d\theta \big(y_1(t) - y_2(t) \big) + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)).$$

Введем обозначения

$$v(t) = y_1(t) - y_2(t),$$
$$p(t) = \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial f_1}{\partial y} \big(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t)) \big) d\theta,$$
$$h(t) = f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)).$$

Тогда $f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = p(t)v(t) + h(t)$ и равенство (1.6) можно переписать так

$$v'(t) = p(t)v(t) + h(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Решив это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием $v(t_0) = y_{01} - y_{02}$, получим

$$v(t) = (y_{01} - y_{02}) \exp\Big\{ \int\limits_{t_0}^{t} p(\xi) d\xi \Big\} + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\Big\{ \int\limits_{\tau}^{t} p(\xi) d\xi \Big\} h(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Так как из условий теоремы следует, что $(y_{01} - y_{02}) \ge 0$ и $h(t) \ge 0$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$, то $v(t) = y_1(t) - y_2(t) \ge 0$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ и теорема 1.1.2 доказана. □

1.2 Зависимость решения задачи Коши от параметра

В этом параграфе мы рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, в которой правая часть уравнения и начальное условие зависят от параметра μ, и выясним при каких условиях решение этой задачи Коши будет непрерывно и дифференцируемо по параметру.

Обозначим

$$Q_\mu = \{(t, y, \mu) : \quad |t - t_0| \le T, \quad a \le y \le b \quad \mu_1 \le \mu \le \mu_2\}.$$

Пусть функция $f(t, y, \mu)$ определена на множестве Q_μ, а функция $y_0(\mu)$ определена на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) = f(t, y(t), \mu), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{1.7}$$
$$y(t_0) = y_0(\mu). \tag{1.8}$$

Так как при различных значениях параметра μ мы будем получать различные решения задачи Коши (1.7)-(1.8), то, очевидно, что решение этой задачи зависит не только от переменной t, но и от параметра μ. В связи с этим далее решение задачи Коши (1.7), (1.8) мы будем обозначать $y(t, \mu)$. При каких условиях решение задачи Коши $y(t, \mu)$ будет непрерывно по параметру μ ?

1.2.1 Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметра

Теорема 1.2.1. *Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и удовлетворяет в Q_μ условию Липшица по y, то-есть*

$$|f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \le L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1, \mu), (t, y_2, \mu) \in Q_\mu,$$

а функция $y_0(\mu)$ непрерывна на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Тогда, если $y(t, \mu)$ – решение задачи Коши (1.7)-(1.8) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ непрерывна по μ при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Доказательство. По условию решение задачи Коши $y(t, \mu)$ существует для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и $a \le y(t, \mu) \le b$ для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Пусть μ_0 и $\mu_0 + \Delta\mu$ две произвольные точки отрезка $[\mu_1, \mu_2]$. Рассмотрим решения задачи Коши $y(t, \mu_0)$ и $y(t, \mu_0 + \Delta\mu)$, соответствующие этим значениям параметров. Введем обозначения

$$y_1(t) = y(t, \mu_0), \quad y_2(t) = y(t, \mu_0 + \Delta\mu),$$
$$f_1(t, y) = f(t, y, \mu_0), \quad f_2(t, y) = f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu),$$
$$y_{01} = y_0(\mu_0), \quad y_{02} = y_0(\mu_0 + \Delta\mu).$$

Для функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполнены условия теоремы 1.1.1 о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных. Применяя эту теорему, получим

$$\max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y(t, \mu_0) - y(t, \mu_0 + \Delta\mu)| = \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y_1(t) - y_2(t)| \le$$
$$\le \left(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y) \in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)| \right) \exp\{LT\} =$$
$$= \left(|y_0(\mu_0) - y_0(\mu_0 + \Delta\mu)| + T \max_{(t,y) \in Q} |f(t, y, \mu_0) - f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu)| \right) \exp\{LT\}, \tag{1.9}$$

где $Q = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \le T, \quad a \le y \le b\}$.

Покажем, что из неравенства (1.9) следует непрерывность функции $y(t, \mu)$ в точке μ_0 . Пусть ε – произвольное положительное число. Покажем, что найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$|y(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y(t, \mu_0)| \le \varepsilon \tag{1.10}$$

при $|\Delta\mu| \le \delta(\varepsilon)$.

Так как непрерывная на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$ функция $y_0(\mu)$ равномерно непрерывна на этом отрезке, то существует $\delta_1(\varepsilon)$ такое, что

$$|y_0(\mu_0 + \Delta\mu) - y_0(\mu_0)| \le \frac{\varepsilon \exp\{-LT\}}{2} \tag{1.11}$$

при $|\Delta\mu| \le \delta_1(\varepsilon)$.

Так как непрерывная на ограниченном замкнутом множестве Q_μ функция $f(t, y, \mu)$ равномерно непрерывна на этом множестве, то существует $\delta_2(\varepsilon)$ такое, что для любых $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ и $y \in [a, b]$

$$|f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu) - f(t, y, \mu_0)| \le \frac{\varepsilon \exp\{-LT\}}{2T} \tag{1.12}$$

при $|\Delta\mu| \le \delta_2(\varepsilon)$.

Из неравенств (1.9), (1.11) и (1.12) следует, что при $|\Delta\mu| \le \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ справедливо неравенство (1.10), которое означает непрерывность функции $y(t, \mu)$ по μ. Теорема 1.2.1 доказана. □

Заметим, что в теореме 1.2.1 фактически доказана равномерная на множестве $[t_0 - T, t_0 + T] \times [\mu_1, \mu_2]$ непрерывность решения задачи Коши по параметру μ. Отсюда нетрудно показать, что функция $y(t, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных (t, μ) на множестве $[t_0 - T, t_0 + T] \times [\mu_1, \mu_2]$.

1.2.2 Дифференцируемость решения задачи Коши по параметру

Покажем теперь, что при определенных условиях, решение задачи Коши (1.7)-(1.8) $y(t, \mu)$ будет дифференцируемым по параметру μ.

Теорема 1.2.2. *Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и имеет в Q_μ непрерывные частные производные $f_y(t, y, \mu)$, $f_\mu(t, y, \mu)$, а функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.*

Тогда, если $y(t, \mu)$ – решение задачи Коши (1.7)-(1.8) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ имеет при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ производную по μ.

Доказательство. По условию решение задачи Коши $y(t, \mu)$ существует для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и $a \le y(t, \mu) \le b$ для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Пусть μ и $\mu + \Delta\mu$ две произвольные точки отрезка $[\mu_1, \mu_2]$. Рассмотрим соответствующие этим параметрам решения задачи Коши $y(t, \mu)$ и $y(t, \mu + \Delta\mu)$. Определим функцию

$$v(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)}{\Delta\mu}.$$

Так как функции $y(t, \mu + \Delta\mu)$, $y(t, \mu)$ являются решениями уравнения (1.7) при соответствующих значениях параметров, то

$$v'(t, \mu, \Delta\mu) = (\Delta\mu)^{-1} [f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)], \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \tag{1.13}$$

Преобразуем выражение, стоящее в правой части этого равенства

$$(\Delta\mu)^{-1}[f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)]=$$
$$(\Delta\mu)^{-1}[f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)]$$
$$+(\Delta\mu)^{-1}[f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)].$$

Применяя формулу конечных приращений (1.5), получим

$$(\Delta\mu)^{-1}[f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)]=$$
$$=\int_0^1 f_y(t,y(t,\mu)+\theta(y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu)),\mu+\Delta\mu)d\theta\times$$
$$\times(y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu))(\Delta\mu)^{-1}.$$

Введем функции

$$p(t,\mu,\Delta\mu)=\int_0^1 f_y(t,y(t,\mu)+\theta(y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu)),\mu+\Delta\mu)d\theta,$$

$$q(t,\mu,\Delta\mu)=(\Delta\mu)^{-1}[f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)].$$

Учитывая сделанные обозначения, имеем

$$(\Delta\mu)^{-1}[f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)]=$$
$$=p(t,\mu,\Delta\mu)v(t,\mu,\Delta\mu)+q(t,\mu,\Delta\mu).$$

Подставляя это равенство в правую часть (1.13), получим, что функция $v(t,\mu,\mu+\Delta\mu)$ является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$v'(t,\mu,\Delta\mu)=p(t,\mu,\Delta\mu)v(t,\mu,\Delta\mu)+q(t,\mu,\Delta\mu),\quad t\in[t_0-T,t_0+T].\tag{1.14}$$

Из определения $v(t,\mu,\mu+\Delta\mu)$ следует, что она удовлетворяет начальному условию

$$v(t_0,\mu,\Delta\mu)=(\Delta\mu)^{-1}[y_0(\mu+\Delta\mu)-y_0(\mu)].\tag{1.15}$$

Решив задачу Коши (1.14)-(1.15), имеем

$$v(t,\mu,\Delta\mu)=(\Delta\mu)^{-1}[y_0(\mu+\Delta\mu)-y_0(\mu)]\exp\left\{\int_{t_0}^t p(\xi,\mu,\Delta\mu)d\xi\right\}+$$
$$+\int_{t_0}^t q(\tau,\mu,\Delta\mu)\exp\left\{\int_\tau^t p(\xi,\mu,\Delta\mu)d\xi\right\}\quad t\in[t_0-T,t_0+T].\tag{1.16}$$

Для доказательства существования производной $\frac{\partial y}{\partial\mu}(t,\mu)$ достаточно доказать, что функция $v(t,\mu,\Delta\mu)$ имеет предел при $\Delta\mu\longrightarrow0$. Покажем, что существует предел правой части формулы (1.16) при $\Delta\mu\longrightarrow0$.

Так как функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема, то

$$\lim_{\Delta\mu\longrightarrow0}(\Delta\mu)^{-1}[y_0(\mu+\Delta\mu)-y_0(\mu)]=\frac{dy_0}{d\mu}(\mu).$$

Найдем предел функции $p(t,\mu,\Delta\mu)$ при $\Delta\mu\longrightarrow0$. Из непрерывности частной производной $f_y(t,y,\mu)$ и определения функции $p(t,\mu,\Delta\mu)$ следует, что

$$\lim_{\Delta\mu\longrightarrow0}p(t,\mu,\Delta\mu)=\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t,\mu),\mu).$$

Из существования частной производной $f_\mu(t,y,\mu)$ имеем

$$\lim_{\Delta\mu\longrightarrow0}q(t,\mu,\Delta\mu)=\frac{\partial f}{\partial\mu}(t,y(t,\mu),\mu).$$

Следовательно предел правой части формулы (1.16) существует и переходя в этой формуле к пределу при $\Delta\mu\longrightarrow0$, получим

$$\frac{\partial y}{\partial\mu}(t,\mu)=\lim_{\Delta\mu\longrightarrow0}v(t,\mu,\Delta\mu)=\frac{dy_0}{d\mu}(\mu)\exp\left\{\int_{t_0}^t f_y(\xi,y(\xi,\mu)\mu)d\xi\right\}+$$
$$+\int_{t_0}^t f_\mu(\tau,y(\tau,\mu),\mu)\exp\left\{\int_\tau^t p(\xi,\mu,\Delta\mu)d\xi\right\}\quad t\in[t_0-T,t_0+T].\tag{1.17}$$

Теорема доказана. □

Введем обозначение $\varphi(t,\mu)=\frac{\partial y}{\partial\mu}(t,\mu)$, а через $\varphi'(t,\mu)$ обозначим производную $\varphi(t,\mu)$ по переменной t. Из формулы (1.17) следует, что функция $\varphi(t,\mu)$ является решением задачи Коши

$$\varphi'(t,\mu)=f_y(t,y(t,\mu),\mu)\varphi(t,\mu)+f_\mu(t,y(t,\mu),\mu),\quad t\in[t_0-T,t_0+T],$$
$$\varphi(t_0,\mu)=y_0'(\mu).$$

Глава 2

Теория устойчивости

2.1 Основные понятия. Устойчивость точки покоя линейной системы

В теории устойчивости изучается вопрос о зависимости решения задачи Коши для дифференциального уравнения или системы от заданных при $t=t_0$ начальных данных на бесконечном промежутке изменения независимой переменной $t\in[t_0;+\infty)$. Далее без ограничения общности полагаем $t_0=0$.

Пример 2.1.1. *Исследовать зависимость решения задачи Коши*

$$y'=ay,\quad y(0)=y_0,$$

от начального состояния y_0 при $t\in[0;+\infty)$, где $a\in\mathbb{R}$ – параметр.

Решение задачи Коши находится по формуле $y(t;y_0)=y_0\exp\{at\}$.

Для $a<0$ имеем

$$|y(t;y_0)-y(t;\widetilde{y}_0)|=|y_0-\widetilde{y}_0|\exp\{at\}\le|y_0-\widetilde{y}_0|\to0$$

при $y_0-\widetilde{y}_0\to0$ равномерно по $t\ge0$, причем $|y(t;y_0)-y(t;\widetilde{y}_0)|\to0$ при $t\to+\infty$.

Для $a=0$ имеем

$$|y(t;y_0)-y(t;\widetilde{y}_0)|=|y_0-\widetilde{y}_0|\to0$$

при $y_0-\widetilde{y}_0\to0$ равномерно $t\ge0$, но $|y(t;y_0)-y(t;\widetilde{y}_0)|\nrightarrow0$ при $t\to+\infty$.

Для $a>0$ имеем

$$|y(t;y_0)-y(t;\widetilde{y}_0)|=|y_0-\widetilde{y}_0|\exp\{at\}\nrightarrow0$$

при $y_0-\widetilde{y}_0\to0$ равномерно по $t\ge0$, траектории расходятся как бы близки они не были в начальный момент времени.

В тоже время, для любого конечного $T>0$ имеет место непрерывная зависимость от начальных данных на всем отрезке $[0,T]$:

$$\max_{t\in[0,T]}|y(t;y_0)-y(t;\widetilde{y}_0)|\le|y_0-\widetilde{y}_0|\exp\{|a|T\}\to0$$

при $y_0-\widetilde{y}_0\to0$. Таким образом, при определении устойчивости на бесконечном промежутке времени необходимо более точно учитывать особенности поведения решений на всей полупрямой $t\ge0$.

2.1.1 Основные понятия теории устойчивости

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно искомой вектор функции $\overline{y}(t)=(y_1(t),y_1(t),\ldots,y_n(t))^\top$.

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt}=\overline{f}(t,\overline{y}(t)),\tag{2.1}$$
$$\overline{y}(t_0)=\overline{y}_0,\tag{2.2}$$

где $\overline{f}(t,\overline{y})=(f_1(t,\overline{y}),f_2(t,\overline{y}),\ldots,f_n(t,\overline{y}))^\top$, $\overline{y}_0=(y_{10},y_{20},\ldots,y_{n0})^\top$. Далее предполагается, что $f_i(t,\overline{y})$ определены и непрерывны вместе с частными производными $\partial f_i(t,\overline{y})/\partial y_j$

на множестве $\Pi=[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ для всех $i,j=1,2,\ldots,n$. Тогда по теореме существования и единственности решения задачи Коши для любых начальных данных $\overline{y}_0\in\mathbb{R}^n$ система (2.1)-(2.2) имеет на некотором отрезке $[0,T]$ единственное решение $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$, в обозначении которого отражена зависимость от начального состояния $\overline{y}_0$. Если же в начальном условии (2.2) берутся начальные данные $\widetilde{y}_0$, тогда соответствующее решение обозначается как $\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)$. Далее $\|\overline{y}\|=\left(\sum\limits_{j=1}^n y_j^2\right)^{1/2}$ обозначает евклидову норму вектора $\overline{y}=(y_1,\ldots,y_n)^\top\in\mathbb{R}^n$.

Определение 2.1.1. *Решение $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1)-(2.2) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon,\overline{y}_0)>0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0-\overline{y}_0\|<\delta(\varepsilon,\overline{y}_0)$, соответствующие решения $\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t\ge0$ и удовлетворяют неравенству*

$$\|\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)-\overline{y}(t;\overline{y}_0)\|<\varepsilon,\quad\forall t\in[0,+\infty).\tag{2.3}$$

Заметим, что неравенство (2.3) должно быть выполнено сразу для всех $t\ge t_0$, поэтому вместо (2.3) можно использовать также неравенство $\sup\limits_{t\ge t_0}\|\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)-\overline{y}(t;\overline{y}_0)\|<\varepsilon$.

Определение 2.1.2. *Решение $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1)-(2.2) называется **асимптотически устойчивым по Ляпунову**, если оно устойчиво по Ляпунову, и существует $\delta_0>0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0-\overline{y}_0\|<\delta_0$, существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)-\overline{y}(t;\overline{y}_0)\right)=0.\tag{2.4}$$

Пример 2.1.2. *В примере 2.1.1 решение $y(t)=y_0\exp\{at\}$ асимптотически устойчиво при $a<0$, устойчиво (не асимптотически) при $a=0$, неустойчиво – при $a>0$.*

2.1.2 Редукция к задаче устойчивости нулевого решения

В случае $\overline{f}(t,0,\ldots,0)=\overline{\theta}$, $\overline{y}_0=\overline{\theta}$ задача Коши (2.1)-(2.2) имеет нулевое решение $\overline{\theta}=(0,\ldots,0)^\top$. Переформулируем определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости для этого важного для дальнейшего изложения случая.

Определение 2.1.3. *Нулевое решение $\overline{y}(t)=\overline{\theta}$ задачи Коши (2.1)-(2.2) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0\|<\delta(\varepsilon)$, соответствующие решения $\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t\ge0$ и*

$$\|\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)\|<\varepsilon,\quad\forall t\in[0,+\infty).\tag{2.5}$$

Определение 2.1.4. *Нулевое решение $\overline{y}(t)=\overline{\theta}$ задачи Коши (2.1)-(2.2) называется **асимптотически устойчивым по Ляпунову**, если оно устойчиво по Ляпунову, и существует $\delta_0>0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0\|<\delta_0$, существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)=0.\tag{2.6}$$

Проблему исследования устойчивости заданного решения $\overline{\varphi}(t)$ задачи Коши нетрудно свести к аналогичной проблеме для нулевого решения. Для этого обозначим $\overline{y}_0=\widetilde{y}_0-\overline{\varphi}(0)$

– отклонение начальных данных, $\overline{y}(t)=\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)-\overline{\varphi}(t)$ – отклонение траекторий, стартовавших из начальных данных $\widetilde{y}_0$, $\overline{\varphi}(0)$. Тогда функция $\overline{y}(t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt}=\overline{F}(t,\overline{y}(t)),\quad\overline{y}(0)=\overline{y}_0,\tag{2.7}$$

где $\overline{F}(t,\overline{y}(t))=\overline{f}(t,\overline{\varphi}(t)+\overline{y}(t))-\overline{f}(t,\overline{\varphi}(t))$. При этом решению $\overline{\varphi}(t)$ соответствует тривиальное решение $\overline{y}(t)=\overline{\theta}$ задачи (2.7).

2.1.3 Вспомогательные утверждения

Лемма 2.1.1. *Пусть $B(t)=(b_{ij}(t))$ – функциональная матрица, элементы которой мажорируются одной и той же функцией $b(t)$:*

$$|b_{ij}(t)|\le b(t),\quad i,j=1,\ldots,n.$$

Если вектор функции $\overline{x}(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))^\top$, $\overline{y}(t)=(y_1(t),\ldots,y_n(t))^\top$ связаны соотношением $\overline{y}(t)=B(t)\overline{x}(t)$, тогда справедлива оценка

$$\|\overline{y}(t)\|\le nb(t)\|\overline{x}(t)\|.$$

Доказательство. Так как $y_j(t)=\sum_{k=1}^n b_{jk}(t)x_k(t)$, то оценивая модули компонент и применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$|y_j(t)|=\sum_{k=1}^n|b_{jk}(t)|\cdot|x_k(t)|\le b(t)\sum_{k=1}^n|x_k(t)|\le$$
$$\le b(t)\left(\sum_{k=1}^n1^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^n x_k^2(t)\right)^{1/2}=b(t)\sqrt{n}\|x(t)\|.$$

Возводя в квадрат обе части полученного неравенства и суммируя по $j=1,\ldots,n$, приходим к утверждению леммы 2.1.1. □

Лемма 2.1.2. *Для любой непрерывной при $t\ge0$ вектор функции $\overline{y}(t)=(y_1(t),\ldots,y_n(t))^\top$ справедливо неравенство*

$$\left\|\int_0^t\overline{y}(\xi)d\xi\right\|\le\sqrt{n}\int_0^t\|\overline{y}(\xi)\|d\xi.$$

Доказательство. По определению интеграла от вектор функции имеем

$$\int_0^t\overline{y}(\xi)d\xi=(I_1(t),\ldots,I_n(t))^\top,\quad I_j(t)=\int_0^t y_j(\xi)d\xi,\quad j=1,\ldots,n.$$

При $t\ge0$ справедливо покомпонентное неравенство

$$|I_j(t)|=\left|\int_0^t y_j(\xi)d\xi\right|\le\int_0^t|y_j(\xi)|d\xi\le\int_0^t\|\overline{y}(\xi)\|d\xi.$$

Возводя в квадрат обе части полученного неравенства и суммируя по $j=1,\ldots,n$, приходим к утверждению леммы 2.1.2 □

Лемма 2.1.3. *Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица линейной однородной системы ОДУ $d\overline{y}/dt=A\overline{y}$ с постоянными коэффициентами $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $i,j=1,\ldots,n$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ – собственные значения матрицы A с учетом кратностей, $p=\max\limits_{k=1,\ldots,n}\operatorname{Re}\lambda_k$.*

Тогда для матриканта $Z(t,\tau)=Y(t)Y(\tau)^{-1}$ справедливы соотношения

1. *$Z(t,\tau)=Z(t-\tau,0)$;*
2. *для любого $\gamma>0$ найдется $C_\gamma>0$ такое, что справедливо неравенство*

$$|Z_{ij}(t,\tau)|\le C_\gamma\exp\{(p+\gamma)(t-\tau)\},\quad\forall t\ge\tau.$$

Доказательство. Матрицант является решением матричной задачи Коши

$$\frac{dZ(t,\tau)}{dt}=AZ(t,\tau),\quad Z(\tau,\tau)=E.$$

Обозначим $s=t-\tau$, τ – фиксировано, и введем функцию $\widetilde{Z}(s)=Z(\tau+s,\tau)$. Очевидно, что

$$\frac{d\widetilde{Z}(s)}{ds}=A\widetilde{Z}(s),\quad\widetilde{Z}(0)=E.$$

Но тогда в силу единственности решения матричной задачи Коши справедливо равенство $\widetilde{Z}(s)=Z(s,0)$. Возвращаясь к переменной t, получаем $Z(t,\tau)=Z(t-\tau,0)$.

Оценим компоненты матрицы $Z(s,0)=Y(s)Y(0)^{-1}$. Так как столбцы фундаментальной матрицы состоят из вектор функций фундаментальной системы решений, тогда в общем случае компоненты матриканта $Z(s,0)$ являются квазимногочленами аргумента s:

$$Z_{ij}(s,0)=z_{ij}(s)\exp\{\lambda s\},\quad\deg z_{ij}(s)\le n-1,\tag{2.8}$$

где $\lambda\in\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ – одно из собственных значений. Так как для любого $\gamma>0$ с соответствующими константами $C_{ij}>0$ выполнены неравенства

$$|z_{ij}(s)|\le C_{ij}\exp\{\gamma s\},\quad\forall s\ge0,$$

и поскольку для модуля комплексной экспоненты справедлива оценка

$$|\exp\{\lambda s\}|=\exp\{\operatorname{Re}\lambda s\}\le\exp\{ps\},$$

тогда из (2.8) получаем

$$|Z_{ij}(s,0)|\le|z_{ij}(s)|\cdot|\exp\{\lambda s\}|\le C_\gamma\exp\{(p+\gamma)s\},\quad C_\gamma=\max_{i,j=1,\ldots,n}C_{ij}.$$

Полагая в этом неравенстве $s=t-\tau$, убеждается в справедливости второго утверждения леммы 2.1.3. □

2.1.4 Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными вещественными коэффициентами

$$\frac{d\overline{y}}{dt}=A\overline{y},\quad A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}.\tag{2.9}$$

В данном пункте $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ обозначают собственные значения матрицы A с учетом их кратностей.

Теорема 2.1.1. *Если вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны,*

$$\operatorname{Re}\lambda_k<0,\qquad\forall k=1,\ldots,n,$$

тогда нулевое решение $\overline{y}(t)=\overline{\theta}$ является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Пусть $\overline{y}(t)=\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}}{dt}=A\overline{y},\quad\overline{y}(0)=\overline{y}_0.$$

Тогда в силу определению матриканта решение этой задачи можно представить в виде

$$\overline{y}(t)=Z(t,0)\overline{y}_0.\tag{2.10}$$

Обозначим $p=\max\limits_{k=1,\ldots,n}\operatorname{Re}\lambda_k<0$. Выберем и зафиксируем настолько малое $\gamma>0$, чтобы

$$\alpha=p+\gamma<0.$$

Тогда согласно части 2 леммы 2.1.3 найдется константа C_γ такая, что справедлива оценка

$$|Z_{ij}(t,0)|\le C_\gamma\exp\{\alpha t\},\quad t\ge0.$$

В силу леммы 2.1.1 с матрицей $B(t)=Z(t,0)$ и функцией $b(t)=C_\gamma\exp\{\alpha t\}$ имеет место оценка

$$\|\overline{y}(t)\|\le nC_\gamma\exp\{\alpha t\}\|\overline{y}_0\|.$$

Если положить $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2nC_\gamma}$, тогда из неравенства $\|\overline{y}_0\|<\delta(\varepsilon)$ будет вытекать неравенство $\|\overline{y}(t)\|<\varepsilon$ для всех $t\ge0$. Асимптотическая устойчивость вытекает из предельного соотношения $\exp\{\alpha t\}\to0$ при $t\to+\infty$. □

2.1.5 Теорема об устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

Теорема 2.1.2. *Пусть вещественные части всех собственных значений матрицы A неположительны,*

$$\operatorname{Re}\lambda_k\le0,\qquad\forall k=1,\ldots,n,$$

и существуют собственные значения с нулевой вещественной частью, причем размерность каждого собственного подпространства, отвечающего $\operatorname{Re}\lambda=0$, совпадает с его кратностью.

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t)=\overline{\theta}$ системы (2.9) является устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически.

Доказательство. Уточним зависимость матриканта $Z(t,0)=Y(t)Y(0)^{-1}$ от переменной $t\ge0$ в рассматриваемом случае. Элементы $Y_{ij}(t)$ фундаментальной матрицы, отвечающие собственным значениям с отрицательной вещественной частью $\alpha=\operatorname{Re}\lambda<0$, являются квазимногочленами и подчиняются оценке

$$|Y_{ij}(t)|\le|y_{ij}(t)|\exp\{\alpha t\}\le C_{ij},\quad\forall t\ge0.$$

По условию теоремы, элементы $Y_{ij}(t)$ фундаментальной матрицы, отвечающие собственным значениям $\lambda=iq$ с нулевой вещественной частью являются компонентами вектор функций из фундаментальной системы решений вида $\overline{y}(t)=\overline{h}\exp\{\lambda t\}$, где $\overline{h}$ – собственный

вектор (присоединенные векторы для таких собственных значений отсутствуют). Очевидно, что и в этом случае элементы фундаментальной матрицы ограничены:

$$|Y_{kl}(t)|=|h_l|\cdot|\exp\{iqt\}|\le C_{kl},\quad\forall t\ge0.$$

Умножение на постоянную матрицу $Y(0)^{-1}$ оставляет коэффициенты произведения матриц ограниченными

$$|Z_{ij}(t,0)|\le\widetilde{C}_{ij},\quad\forall t\ge0.$$

Тогда из представления решения (2.10) в силу леммы 2.1.1 с матрицей $B(t)=Z(t,0)$ и функцией $b(t)=\widetilde{C}=\max\limits_{i,j=1,\ldots,n}\widetilde{C}_{ij}$ имеет место оценка

$$\|\overline{y}(t)\|\le n\widetilde{C}\|\overline{x}_0\|.$$

Если положить $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2n\widetilde{C}}$, тогда устойчивость нулевого решения проверяется аналогично доказательству теоремы 2.1.2.

Докажем отсутствие асимптотической устойчивости. Пусть $\overline{h}\in\mathbb{C}^n$ – какой-либо собственный вектор,соответствующий собственному значению $\lambda=iq$. Без ограничения общности можем считать, что $\|\overline{h}\|=1$. Вектор функция

$$\overline{y}(t)=0.5\delta_0\operatorname{Re}\overline{h}\exp\{iqt\},\quad\delta_0>0,$$

является решением системы (2.9) как вещественная часть комплексного решения $\overline{h}\exp\{iqt\}$. В начальный момент $t=0$ имеем

$$\overline{y}(0)=0.5\delta_0\operatorname{Re}\overline{h},\quad\|\overline{y}(0)\|\le0.5\delta_0\|\overline{h}\|=0.5\delta_0.$$

При $q\ne0$ для любого $\delta_0>0$ из δ_0-окрестности нулевого решения стартует построенное выше решение $\overline{y}(t)$, но $\overline{y}(t)\not\longrightarrow\overline{\theta}$ при $t\to+\infty$, поскольку, например, $\overline{y}(t_k)=0.5\delta_0\operatorname{Re}\overline{h}\ne\overline{\theta}$ при $t_k=2\pi k/q$, $k\in\mathbb{N}$. Более простой случай $q=0$ рассматривается аналогично. □

2.1.6 Теорема о неустойчивости нулевого решения линейной системы

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий:*

1. *Матрица A имеет собственное значение с положительной вещественной частью.*
2. *Матрица A имеет собственное значение λ_m такое, что $\operatorname{Re}\lambda_m=0$, причем размерность собственного подпространства, отвечающего λ_m, меньше кратности этого собственного значения.*

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t)=\overline{\theta}$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть у матрицы A имеется собственное значение $\lambda=p+iq$, $p>0$. Обозначим через $\overline{h}=\overline{h}_R+i\overline{h}_I$ – соответствующий собственный вектор, $\overline{h}_R,\overline{h}_I\in\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можем считать, что $\|\overline{h}\|=1$. Вектор функция

$$\overline{y}(t)=0.5\delta\operatorname{Re}\overline{h}\exp\{(p+iq)t\}=$$
$$=0.5\delta\exp\{pt\}\left(\overline{h}_R\cos qt-\overline{h}_I\sin qt\right),\quad\delta>0,\tag{2.11}$$

является решение системы (2.9) как вещественная часть комплексного решения $\overline{h}\exp\{(p+iq)t\}$. В начальный момент $t=0$ имеем

$$\overline{y}(0)=0.5\delta\overline{h}_R,\quad\|\overline{y}(0)\|\le0.5\delta\|\overline{h}\|=0.5\delta.$$

При $q\ne0$ для любого $\delta>0$ из δ-окрестности нулевого решения стартует построенное в (2.11) решение $\overline{y}(t)$, которое неограничено при $t\to+\infty$, поскольку, например,

$$\overline{y}(t_k)=0.5\delta\overline{h}_R\exp\{2\pi kp/q\},\quad\|\overline{y}(t_k)\|=0.5\delta\|\overline{h}_R\|\exp\{2\pi kp/q\}\to+\infty$$

при $t_k=2\pi k/q$, $k\to+\infty$, $k\in\mathbb{N}$. Более простой случай $q=0$ рассматривается аналогично.

Если у матрицы A имеется собственное значение $\lambda=iq$, $q\in\mathbb{R}$, кратность которого превосходит размерность собственного подпространства, тогда для любого $\delta>0$ существует решение системы (2.9) вида

$$\overline{y}(t)=0.5\delta\operatorname{Re}(\overline{g}+t\overline{h})\exp\{iqt\}=$$
$$=0.5\delta\left((\overline{g}_R+t\overline{h}_R)\cos qt-(\overline{g}_I+t\overline{h}_I)\sin qt\right),\quad\delta>0,$$
$$\overline{y}(0)=0.5\delta\operatorname{Re}\overline{g},\quad\|\overline{y}(0)\|\le0.5\delta,$$

где $\overline{h}=\overline{h}_R+i\overline{h}_I$ – собственный вектор, $\overline{g}=\overline{g}_R+i\overline{g}_I$ – присоединенный вектор, $\|\overline{g}\|=1$. Построенное решение $\overline{y}(t)$ стартует при $t=0$ из δ-окрестности нулевого решения и неограничено при $t\to+\infty$, поскольку, например, при $q\ne0$, имеем

$$\overline{y}(t_k)=0.5\delta(\overline{g}_R+2\pi kp/q\overline{h}_R),\quad\|\overline{y}(t_k)\|\sim k\|\overline{h}_R\|\to+\infty$$

при $t_k=2\pi k/q$, $k\to+\infty$, $k\in\mathbb{N}$. Более простой случай $q=0$ рассматривается аналогично. □

2.2 Исследование на устойчивость по первому приближению. Первый метод Ляпунова

Рассмотрим автономную систему ОДУ

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt}=\overline{f}(\overline{y}(t)),\tag{2.12}$$

где $\overline{f}(\overline{y})=(f_1(\overline{y}),f_2(\overline{y}),\ldots,f_n(\overline{y}))^\top$. Предполагается, что система (2.12) имеет нулевое решение $\overline{y}(t)=\overline{\theta}$, т.е. $\overline{f}(\overline{\theta})=\overline{\theta}$. В данном параграфе будем считать, что все решения, вышедшие при $t=0$ из некоторой окрестности нулевого решения, определены при любых $t\ge0$. Этот факт заведомо имеет место в случае, когда компоненты $f_j(\overline{y})$ правой части (2.12) удовлетворяют условию Липшица на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Возможны также и другие менее ограничительные случаи.

Пусть функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат. Тогда имеет место представление

$$\overline{f}(\overline{y})=A\overline{y}+\overline{R}(\overline{y}),\quad A=\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0,\ldots,0)\right),\quad i,j=1,\ldots,n,\quad\overline{R}(\overline{y})=\bar{o}(\|\overline{y}\|).\tag{2.13}$$

Напомним, что условие $\overline{R}(\overline{y})=\bar{o}(\|\overline{y}\|)$ означает, что

$$\forall\sigma>0\quad\exists\rho>0:\ \|\overline{y}\|<\rho\Rightarrow\left\|\overline{R}(\overline{y})\right\|<\sigma\|\overline{y}\|.\tag{2.14}$$

Лемма 2.2.1. *Пусть выполнено условие (2.13) и все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части:*

$$\operatorname{Re}\lambda_k<0\quad\forall k=1,\ldots,n.$$

Тогда найдутся $\delta_0 > 0$ и $\rho_0 \geq \delta_0 > 0$ такие, что все определенные при $t \geq 0$ решения $\overline{y}(t)$ задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A\overline{y}(t) + \overline{R}(\overline{y}(t)), \quad \overline{y}(0) = \overline{y}_0, \tag{2.15}$$

стартовавшие при $t = 0$ из начальной точки $\overline{y}_0$, удовлетворяющей условию $\|\overline{y}_0\| < \delta_0$, при $t \geq 0$ подчиняются неравенству $\|\overline{y}(t)\| < \rho_0$.

Доказательство. Сначала убедимся в том, что решение $\overline{y}(t)$ задачи Коши (2.15) удовлетворяет интегральному уравнению

$$\overline{y}(t) = Z(t,0)\overline{y}_0 + \int_0^t Z(t,\tau)\overline{R}(\overline{y}(\tau))d\tau. \tag{2.16}$$

Действительно, обозначая

$$\overline{F}(t) = \overline{R}(\overline{y}(\tau)), \tag{2.17}$$

мы видим, что $\overline{y}(t)$ является решением задачи Коши для линейной неоднородной системы ОДУ с известной правой частью $\overline{F}(t)$

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A\overline{y}(t) + \overline{F}(t), \quad \overline{y}(0) = \overline{y}_0,$$

По известной формуле для решения неоднородной системы имеем

$$\overline{y}(t) = Z(t,0)\overline{y}_0 + \int_0^t Z(t,\tau)\overline{F}(\tau)d\tau.$$

Учитывая формулу (2.17), приходим к (2.16).

Оценим слагаемые в правой части (2.16). В силу лемм 2.1.1, 2.1.3 аналогично доказательству теоремы 2.1.1 об асимптотической устойчивости положения равновесия линейной системы заключаем, что найдутся не зависящие от $\overline{y}_0$ константы $\alpha < 0$ и $M > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\|Z(t,0)\overline{y}_0\| \leq M\exp\{\alpha t\}\|\overline{y}_0\|.$$

Аналогично оценивается подынтегральное выражение в (2.16):

$$\|Z(t,\tau)\overline{R}(\overline{y}(\tau))\| \leq M\exp\{\alpha(t-\tau)\}\|\overline{R}(\overline{y}(\tau))\|.$$

Применяя лемму 2.1.1 для оценки нормы интеграла от вектор функции приходим к неравенству

$$\|\overline{y}(t)\| \leq M\exp\{\alpha t\}\|\overline{y}_0\| + M\int_0^t \exp\{\alpha(t-\tau)\}\|\overline{R}(\overline{y}(\tau))\|d\tau. \tag{2.18}$$

Зафиксируем величину $\sigma > 0$ настолько малой, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{M\sigma}{|\alpha|} \leq \frac{1}{4}.$$

Для данного σ согласно (2.14) найдется $\rho_0 > 0$ такое, что при $\|\overline{y}\| < \rho_0$ имеет место оценка

$$\|\overline{R}(\overline{y})\| < \sigma\|\overline{y}\|. \tag{2.19}$$

Наконец положим

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{\rho_0}{4M}, \frac{\rho_0}{2}\right\}.$$

Итак, выбор фигурирующих в условии теоремы констант δ_0 и ρ_0 осуществлен.

Решение $\overline{y}(t)$ задачи Коши (2.15) при $t = 0$ удовлетворяет неравенству $\|\overline{y}(0)\| < \delta_0$, тогда $\|\overline{y}(0)\| < \rho_0$, и в силу непрерывности решения неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \rho_0$ будет иметь место на некотором полуинтервале $[0, t_1)$. Остается убедиться, что $t_1 = +\infty$. Предполагая противное, мы для некоторого конечного $t_1 \in (0, +\infty)$ имеем

$$\|\overline{y}(t)\| < \rho_0 \quad \forall t \in [0, t_1), \quad \|\overline{y}(t_1)\| = \rho_0.$$

Тогда $\|\overline{R}(\overline{y}(\tau))\| \leq \sigma\|\overline{y}(\tau)\| \leq \sigma\rho_0$ при $0 \leq \tau \leq t_1$. Учитывая, что $\|\overline{y}_0\| \leq \delta_0 \leq \dfrac{\rho_0}{4M}$, в силу (2.18) имеем

$$\rho_0 = \|\overline{y}(t_1)\| \leq \frac{\rho_0}{4}\exp\{\alpha t_1\} + M\sigma\rho\int_0^{t_1}\exp\{\alpha(t_1-\tau)\}d\tau \leq \frac{\rho_0}{4} + \frac{\rho_0}{4}\int_0^{t_1}\exp\{\alpha(t_1-\tau)\}d\tau \leq \frac{\rho_0}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.2.1. □

Теорема 2.2.1. *Пусть функции $f_j(\overline{y})$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат, $j = 1, \ldots, n$.*

Если все собственные значения матрицы $A = (\partial f_i(0,\ldots,0)/\partial y_j)$ в разложении (2.13) имеют отрицательные вещественные части,

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n,$$

тогда нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = (\partial f_i(0,\ldots,0)/\partial y_j)$ с положительной вещественной частью,

$$\exists\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} : \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

тогда нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Ограничимся доказательством первой части теоремы об устойчивости. Возьмем найденные в доказательстве леммы 2.2.1 константы δ_0 и ρ_0. Возьмем из δ_0-окрестности положения равновесия произвольную начальную точку $\overline{y}_0$ и обозначим $\overline{y}(t)$ – решение задачи Коши (2.15) и соответствующего интегрального уравнения (2.16). В силу леммы 2.2.1 при $t \geq 0$ справедливо неравенство $\|\overline{y}(t)\| \leq \rho_0$, и тогда согласно (2.19) имеет место оценка

$$\|\overline{R}(\overline{y}(\tau))\| < \sigma\|\overline{y}(\tau)\|, \quad \forall\tau \geq 0.$$

Тогда из (2.18) вытекает неравенство

$$\|\overline{y}(t)\| \leq M\exp\{\alpha t\}\|\overline{y}_0\| + M\sigma\exp\{\alpha t\}\int_0^t \exp\{-\alpha\tau)\}\|\overline{y}(\tau)\|d\tau,$$

после почленного умножения которого на $\exp\{-\alpha t\}$ и введения обозначения для скалярной функции $u(t) = \exp\{-\alpha t\}\|\overline{y}(t)\|$ приходим к неравенству

$$0 \leq u(t) \leq M\|\overline{x}_0\| + M\sigma\int_0^t u(\tau)d\tau.$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана, получаем $u(t) \leq M\|\overline{y}_0\|\exp\{M\sigma t\}$. Возвращаясь к старым обозначениям, с учетом соотношения $M\sigma \leq \alpha/4$ имеем

$$\|\overline{y}(t)\| \leq M\|\overline{y}_0\|\exp\{(M\sigma + \alpha)t\} \leq M\|\overline{y}_0\|\exp\{3\alpha t/4\}.$$

В силу отрицательности α отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения. □

2.3 Исследование на устойчивость с помощью функций Ляпунова. Второй метод Ляпунова

2.3.1 Положительно определенные функции.

Определение 2.3.1. *Функция $V(\overline{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной на множестве Ω ($\overline{\theta} \in \Omega$), если выполнены следующие два условия:*

1. *$V(\overline{y}) \geq 0\ \forall\ \overline{y} \in \Omega$;*
2. *$V(\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{y} = \overline{\theta}$.*

Далее для определенности будем считать, что множество Ω является шаром радиуса $R > 0$ с центром в начале координат: $\Omega = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{y}\| \leq R\}$.

Лемма 2.3.1. *Пусть $V(\overline{y})$ – непрерывная и положительно определенная на Ω функция. Тогда*

1. *Для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что из условий $\overline{x} \in \Omega$, $\|\overline{y}\| \geq \varepsilon_1$ вытекает неравенство $V(\overline{y}) \geq \varepsilon_2$;*
2. *Для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\varepsilon_3 > 0$ такое, что из условий $\overline{y} \in \Omega$, $V(\overline{y}) \geq \varepsilon_2$ вытекает неравенство $\|\overline{y}\| \geq \varepsilon_3$.*

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного.

1. Предположим, что первое из доказываемых утверждений неверно. Тогда $\exists\ \varepsilon_1 > 0$, что $\forall\ \varepsilon_2 > 0\ \exists\ \overline{y}$, $\varepsilon_1 \leq \|\overline{y}\| \leq R$, для которого $V(\overline{y}) < \varepsilon_2$. В силу произвольности ε_2 можно взять последовательность $0 < \varepsilon_{2,k} \to 0$, и тогда найдется последовательность точек $\overline{y}_k$, для которой $\varepsilon_1 \leq \|\overline{y}_k\| \leq R$, $V(\overline{y}_k) \to 0$. Поскольку последовательность $\overline{y}_k$ принадлежит замкнутому ограниченному множеству, тогда некоторая ее подпоследовательность является сходящейся, $\overline{y}_{k_m} \to \widetilde{y}$, $\varepsilon_1 \leq \|\widetilde{y}\| \leq R$. В силу непрерывности $V(\overline{y}_{k_m}) \to V(\widetilde{y}) = 0$, откуда благодаря положительной определенности имеем $\widetilde{y} = \overline{\theta}$. Противоречие.

2. Предположим, что второе из доказываемых утверждений неверно. Аналогично проведенным выше рассуждениям $\exists\ \varepsilon_2 > 0$, что для последовательности $0 < \varepsilon_{3,k} \to 0$ найдется последовательность точек $\overline{y}_k$, для которой $\|\overline{y}_k\| \leq \varepsilon_{3,k}$, $V(\overline{y}_k) \geq \varepsilon_2$. В силу непрерывности имеем $V(\overline{y}_k) \to V(0) = 0$, что противоречит предыдущему неравенству. □

Геометрический смысл леммы состоит в том, что поверхность уровня функции $V(\overline{y}) = \varepsilon_2$ находится в шаровом слое, ограниченном изнутри сферой $\|\overline{y}\| = \varepsilon_3$ и снаружи – сферой $\|\overline{y}\| = \varepsilon_1$.

Следствие 2.3.1. *Если последовательность точек $\overline{y}_k \in \Omega$, тогда при $k \to +\infty$*

$$\overline{y}_k \to \overline{\theta} \Leftrightarrow V(\overline{y}_k) \to 0.$$

Если вектор функция $\overline{y}(t) \in \Omega$, $\forall\ t \geq 0$, тогда при $t \to +\infty$

$$\overline{y}(t) \to \overline{\theta} \Leftrightarrow V(\overline{y}(t)) \to 0.$$

Доказанные утверждения показывают, что непрерывная положительно определенная функция может использоваться в качестве меры близости точки $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ к началу координат. Ясно, что $V(\overline{y}) = \|\overline{y}\|$ является непрерывной положительно определенной функцией. Приведем примеры положительно определенных функций, не являющихся нормами.

Пример 2.3.1. *Функция $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ является положительно определенной, но не удовлетворяет условию однородности для нормы. Вместе с тем, ее линиями уровня являются окружности.*

Пример 2.3.2. *Функция $V(y_1, y_2) = \sqrt{\dfrac{y_1^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2}}$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$) является положительно определенной, но не удовлетворяет неравенству треугольника для нормы. Линиями уровня этой функции являются эллипсы с длинами полуосей, пропорциональными a, b.*

2.3.2 Производная в силу системы. Функция Ляпунова.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)), \qquad (*)$$

где $\overline{f}(\overline{y}) = (f_1(y_1, \ldots, y_n), f_2(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n))^\top$ определена на множестве Ω, причем $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть функция $V(\overline{y})$ непрерывно дифференцируема на Ω. Производной этой функции в силу системы $(*)$ называется функция

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\overline{y})}{\partial y_j} f_j(\overline{y}).$$

Определение 2.3.2. *Непрерывно дифференцируемая и положительно определенная на Ω функция $V(\overline{y})$ называется **функцией Ляпунова** системы $(*)$, если ее производная в силу системы $(*)$ неотрицательна,*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}) \leq 0, \quad \forall\overline{y} \in \Omega. \tag{2.20}$$

2.3.3 Теорема об устойчивости

Теорема 2.3.1. *Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова для системы $(*)$. Тогда нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ системы $(*)$ является устойчивым по Ляпунову.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $0 < \varepsilon < R$. В силу леммы 2.3.1 найдется $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon)$ такое, что как только для $\overline{y} \in \Omega$ выполнено неравенство $\|\overline{y}\| \geq \varepsilon$, то

$$V(\overline{y}) \geq \varepsilon_2. \tag{2.21}$$

В силу непрерывности функции $V(\overline{y})$ для ε_2 найдется $\delta = \delta(\varepsilon_2(\varepsilon))$ такое, что из неравенства $\|\overline{y}\| < \delta$ вытекает оценка

$$V(\overline{y}) \leq \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{2.22}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\delta \leq \varepsilon$.

Рассмотрим произвольную начальную точку $\overline{y}_0$ из δ-окрестности нулевого решения, $\|\overline{y}_0\| < \delta$, и покажем, что при $t \geq 0$ соответствующее решение $\overline{y}(t)$ системы $(*)$ удовлетворяет неравенству $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon$. При $t = 0$ это неравенство выполнено, $\|\overline{y}(0)\| < \delta \leq \varepsilon$, и в силу (2.22) имеем

$$V(\overline{y}(0)) \leq \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{2.23}$$

В силу непрерывности неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon$ остается справедливым на некотором полуинтервале $t \in [0; t_1)$. Если $t_1 = +\infty$, тогда устойчивость доказана. Если же для некоторого момента $0 < t_1 < +\infty$ окажется выполненным противоположное неравенство, $\|\overline{y}(t_1)\| \geq \varepsilon$, тогда в силу (2.21) получаем $V(\overline{y}(t_1)) \geq \varepsilon_2$. Принимая во внимание неравенство (2.23), имеем

$$V(\overline{y}(t_1)) - V(\overline{y}(0)) \geq \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0. \tag{2.24}$$

С другой стороны, в силу (2.20)

$$\frac{dV(\overline{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\overline{y}(t))}{\partial y_j} y_j'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\overline{y}(t))}{\partial y_j} f_j(\overline{y}(t)) \leq 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Следовательно, функция $V(\overline{y}(t))$ не возрастает на отрезке $[0, t_1]$, что противоречит (2.24).

Таким образом, по произвольному $\varepsilon > 0$ найдено $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенства $\|\overline{y}_0\| < \delta$ вытекает оценка $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$, означающая устойчивость нулевого решения. □

Пример 2.3.3. *Исследуем устойчивость решения $(0,0)$ системы*

$$\begin{cases} dx/dt = -xy^4, \\ dy/dt = yx^4. \end{cases}$$

Имеем $f_1(x,y) = -xy^4$, $f_2(x,y) = yx^4$,

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый метод Ляпунова неприменим, так как матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Положительно определенная функция $V(x,y) = x^4 + y^4$ является функцией Ляпунова рассматриваемой системы, поскольку ее производная в силу системы равна нулю,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)} = 4x^3 \cdot (-xy^4) + 4y^3 \cdot (yx^4) \equiv 0.$$

Следовательно, выполнено условие (2.20). Согласно теореме 2.3.1 нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

2.3.4 Теорема об асимптотической устойчивости

Теорема 2.3.2. *Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова $V(\overline{y})$ системы $(*)$, удовлетворяющая неравенству*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}) \leq -W(\overline{y}), \quad \forall\overline{y} \in \Omega, \tag{2.25}$$

где $W(\overline{y})$ – некоторая непрерывная положительно определенная на Ω функция.

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ системы $(*)$ является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Доказательство. Устойчивость по Ляпунову нулевого решения следует из теоремы 2.3.1. Остается доказать, что $\overline{y}(t) \to \overline{\theta}$ при $t \to +\infty$, если только в начальный момент $\overline{y}(0)$ находится в некоторой окрестности нулевого решения.

Из доказательства теоремы 3.3.2 вытекает ограниченность траектории $\overline{y}(t)$, поскольку она принадлежит ε-окрестности положения равновесия. Поэтому и функция $V(\overline{y}(t))$, являясь скалярной функцией аргумента t, ограничена и не возрастает благодаря неравенству

$$\frac{dV(\overline{y}(t))}{dt} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}(t)) \leq -W(\overline{y}(t)) \leq 0,$$

которое следует из (2.25). Тогда существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} V(\overline{y}(t)) = \alpha \geq 0.$$

Убедимся, что $\alpha = 0$. Действительно, если $\alpha > 0$, тогда из очевидного (в силу невозрастания $V(\overline{y}(t))$) неравенства $V(\overline{y}(t)) \geq \alpha$ согласно п. 2 леммы 2.3.1 вытекает оценка $\|\overline{y}(t)\| \geq \varepsilon_3 > 0$ для всех $t \geq 0$, где $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\alpha)$. Применяя лемму 2.3.1 п. 1 для положительно определенной функции $W(\overline{y})$, убеждаемся в справедливости неравенства $W(\overline{y}(t)) \geq \beta$ для всех $t \geq 0$, где $\beta = \beta(\varepsilon_3) > 0$. Тогда при $t \to +\infty$ в силу (2.25) и формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$V(\overline{y}(t)) - V(\overline{y}(0)) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}(\xi))t \leq -W(\overline{y}(\xi))t \leq -\beta t \to -\infty,$$

что противоречит положительной определенности $V(\overline{y})$.

Таким образом $V(\overline{y}(t)) \to \alpha = 0$, и в силу следствия из леммы 2.3.1 окончательно убеждаемся, что $\overline{y}(t) \to \overline{\theta}$ при $t \to +\infty$. □

Пример 2.3.4. *Исследуем устойчивость решения $(0,0)$ системы*

$$\begin{cases} dx/dt = -y - x^3, \\ dy/dt = x - y^3. \end{cases}$$

Имеем $f_1(x,y) = -y - x^3$, $f_2(x,y) = x - y^3$, $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Первый метод Ляпунова неприменим, так как матрица A имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i$. Функции Ляпунова $V(x,y) = (x^2 + y^2)/2$ имеет производную в силу системы

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)} = x \cdot (-y - x^3) + y \cdot (x - y^3) = -(x^4 + y^4),$$

которая удовлетворяет условию (2.25) с непрерывной положительно определенной функцией $W(x,y) = x^4 + y^4$. Поэтому согласно теореме 2.3.2 нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

2.3.5 Теорема Четаева о неустойчивости

Теорема 2.3.3. *Пусть в некотором шаре $\Omega_\varepsilon = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{y}\| \leq \varepsilon\}$ радиуса $\varepsilon > 0$ найдется область $D \subset \Omega_\varepsilon$ с границей $\Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon$, $\overline{\theta} \in \Gamma_0$, $\|\overline{y}\| = \varepsilon$ при $\overline{y} \in \Gamma_\varepsilon$. Пусть на замыкании $\overline{D} = D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_\varepsilon$ этой области определена непрерывно дифференцируемая функция $U(\overline{y})$, обладающая свойствами:*

1. *$U(\overline{y}) = 0$ при $\overline{y} \in \Gamma_0$, $U(\overline{y}) > 0$ при $\overline{y} \in D$;*

2. *для любого $\alpha > 0$ найдется $\beta = \beta(\alpha) > 0$ такое, что из условий $\overline{y} \in D$ и $U(\overline{y}) \geq \alpha$ вытекает неравенство*

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}) \geq \beta,$$

где $\left.\dfrac{dU}{dt}\right|_{(*)}$ – производная функции U в силу системы $(*)$

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ системы $(*)$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Предположим противное, т.е. нулевое решение устойчиво по Ляпунову. Согласно определению устойчивости по Ляпунову для взятого из условия теоремы $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой траектории $\overline{y}(t)$, для которой при $t = 0$ выполнено неравенство $\|\overline{y}(0)\| < \delta$, при $t \geq 0$ справедливо неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon$, то есть $\overline{y}(t) \in \Omega_\varepsilon$. Так как $\overline{\theta} \in \Gamma_0$, то можем выбрать $\overline{y}(0) \in D$, тогда $U(\overline{y}(0)) = u_0 > 0$, поэтому $\left.\dfrac{dU}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}(0)) > 0$.

Пока стартовавшая при $t = 0$ из области D траектория $\overline{y}(t)$ остается в этой области, $\overline{y}(t) \in D$, справедливо неравенство $\left.\dfrac{dU}{dt}\right|_{(*)} > 0$. Тогда функция $U(\overline{y}(t))$ возрастает и, следовательно,

$$U(\overline{y}(t)) > U(\overline{y}(0)) = u_0 > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Поэтому траектория не может выйти за пределы замкнутого ограниченного множества

$$D_0 = \{\overline{y} \in \overline{D} : U(\overline{y}) \geq u_0\}.$$

Тогда по условию теоремы для $\alpha = u_0$ найдется $\beta_0 > 0$ такое, что во всех точках траектории $\overline{y}(t)$ справедливо неравенство

$$\frac{dU(\overline{y}(t))}{dt} = \left.\frac{dU}{dt}\right|_{(*)} \geq \beta_0.$$

Почленно интегрируя на отрезке $[0, t]$, при $t \to +\infty$ имеем

$$U(\overline{y}(t)) \geq U(\overline{y}(0)) + \beta_0 t \to +\infty, \quad \overline{y}(t) \in D_0,$$

что противоречит ограниченности непрерывной функции $U(\overline{x})$ на замкнутом ограниченном множестве D_0. Поэтому исходное предположение неверно. Неустойчивость по Ляпунову нулевого решения доказана. □

Пример 2.3.5. *Исследуем устойчивость решения $(0,0)$ системы*

$$\begin{cases} dx/dt = xy^4, \\ dy/dt = x^4 y. \end{cases}$$

Имеем $f_1(x,y) = xy^4$, $f_2(x,y) = x^4 y$, $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Первый метод Ляпунова неприменим, так как матрица A имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = 0$.

Рассмотрим функцию $U(x,y) = xy$, пусть D – совокупность двух секторов, отсекаемых от единичного круга первой и третьей координатными четвертями, граница Γ_0 состоит лежащих на осях OX и OY радиусов. Производная в силу системы

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{(*)} = y \cdot xy^4 + x \cdot x^4 y = xy(x^4 + y^4) = xy((x-y)^2 + 2(xy)^2) \geq 2(xy)^3 \geq 2\alpha^3$$

при условии $xy \geq \alpha > 0$. Таким образом, выполнены условия теоремы 2.3.3 с $\beta(\alpha) = 2\alpha^3$, и нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.

2.3.6 Устойчивость точек покоя

Точка $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой покоя (положением равновесия) автономной системы

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)), \tag{2.26}$$

если $\overline{f}(\overline{y}_0) = 0$. Таким образом, координаты точек покоя находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Если $\overline{y}_0$ – точка покоя, то функция $\overline{y}(t) = \overline{y}_0$ является не зависящим от переменной t решением системы (2.26). Траектория такого решения представляет собой прямую линию в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, а в фазовом пространстве переменных $(y_1, \ldots, y_n)$ – одну точку. Будем называть точку покоя $\overline{y}_0$ устойчивой (асимптотически устойчивой) по Ляпунову, если соответствующее решение $\overline{y}(t) = \overline{y}_0$ устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову.

Для исследования устойчивости точки покоя можно сделать замену переменных $\overline{y}(t) = \widehat{y}(t) + \overline{y}_0$ и перейти к исследованию устойчивости нулевого решения системы

$$\frac{d\widehat{y}(t)}{dt} = \widehat{f}(\widehat{y}(t)), \quad \widehat{f}(\overline{y}) = \overline{f}(\overline{y} + \overline{y}_0).$$

Для применения теоремы 2.2.1 вычислим элементы матрицы производных $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \frac{\partial\widehat{f}_i}{\partial y_j}(0, \ldots, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{y}_0).$$

В результате приходим к утверждению об устойчивости по первому приближению произвольной (не обязательно нулевой) точки покоя.

Теорема 2.3.4. *Пусть $\overline{y}_0$ – точка покоя системы (2.26), функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\overline{y}_0$, $j = 1, \ldots, n$.*

Если все собственные значения матрицы $A = (\partial f_i(\overline{y}_0)/\partial y_j)$ имеют отрицательные вещественные части,

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n,$$

тогда точка покоя $\overline{y}_0$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = (\partial f_i(\overline{y}_0)/\partial y_j)$ с положительной вещественной частью,

$$\exists\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} : \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

тогда точка покоя $\overline{y}_0$ неустойчива по Ляпунову.

2.4 Классификация точек покоя

2.4.1 Классификация точек покоя линейной системы

Доказанные выше теоремы 2.1.1-2.1.3 позволяют исследовать на устойчивость точки покоя линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами и ответить на вопрос, что происходит со стартующей из окрестности точки покоя траекторией: остается ли она в этой окрестности при $t \to +\infty$, либо покидает ее за конечное время. Вместе с тем часто

бывает необходимо уточнить характерный вид траекторий в окрестности точки покоя и, по возможности, вне ее. В данном параграфе мы приведем классификацию фазовых траекторий линейной системы на плоскости ($n = 2$).

Рассмотрим линейную систему ОДУ с постоянными вещественными коэффициентами относительно вектор функции $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{2.27}$$

Нас будут интересовать фазовые (т.е. в плоскости (y_1, y_2)) траектории системы (2.27). Заметим, что фазовые траектории этой системы являются интегральными кривыми обыкновенного дифференциального уравнения, полученного после исключения переменной t из (2.27)

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}. \tag{2.28}$$

Точка покоя $(0,0)$ является особой для уравнения (2.28), поскольку в ней нарушены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Поэтому через точку $(0,0)$ может проходить как несколько фазовых кривых, так и ни одной. Таким образом, точка покоя $(0,0)$ исходной системы ОДУ (2.27) является особой точкой уравнения (2.28) в фазовых переменных.

Классификацию точек покоя будем проводить в зависимости от собственных значений и собственных векторов матрицы A. В рассматриваемом случае $n = 2$ имеется два собственных значения λ_1, λ_2. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда соответствующие собственные векторы $\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}$ и $\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}$ линейно независимы и составляют базис $\mathbb{C}^2$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, тогда возможно существование как двух, так и одного линейно независимого собственного вектора; в последнем случае существует один присоединенный вектор, линейно независимый с собственным. Рассмотрим типы точек покоя в случае невырожденной матрицы A: $\det A \neq 0$.

2.4.2 Узел: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.

Общее решение системы (2.27) имеет вид

$$\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}\exp\{\lambda_1 t\} + C_2\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}\exp\{\lambda_2 t\}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Рассмотрим сначала случай, когда собственные значения отрицательны и различны: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Тогда нулевая точка покоя асимптотически устойчива по Ляпунову и называется устойчивым узлом. Фазовые кривые при $t \to +\infty$ стремятся к устойчивому узлу: $\overline{y}(t) \to \overline{\theta}$. Выясним, по какому направлению фазовые траектории входят в узел. Для этого вычислим производную

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{12}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 h_{21}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{22}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1 h_{11}\lambda_1 + C_2 h_{12}\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{C_1 h_{21}\lambda_1 + C_2 h_{22}\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}. \tag{2.30}$$

Так как $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, то при $C_1 \neq 0$ имеем $\dfrac{dy_1}{dy_2} \to \dfrac{h_{11}}{h_{21}}$ при $t \to +\infty$, т.е. касательный вектор фазовой траектории в окрестности точки покоя коллинеарен собственному вектору $\overline{h}_1$. Если же $C_1 = 0$, тогда $\overline{y}(t) = C_2\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}$ при $C_2 \neq 0$ лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_2$, и приближается к точке покоя при $t \to +\infty$.

Выясним направление фазовых траекторий при $t \to -\infty$. В этом случае фазовые траектории, отличные от положения равновесия, стремятся к бесконечно удаленной точке. В силу (2.29) при $C_2 \neq 0$ имеем

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11}\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2 h_{12}\lambda_2}{C_1 h_{21}\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2 h_{22}\lambda_2} \to \frac{h_{12}}{h_{22}}, \quad t \to -\infty, \quad (\lambda_1 - \lambda_2 > 0),$$

т.е. траектории в окрестности бесконечно удаленной точки выстраиваются параллельно вектору $\overline{h}_2$. Если же $C_2 = 0$, тогда $\overline{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$ при $C_1 \neq 0$ лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_1$. Проведенные выкладки иллюстрируются рисунком, изображающим фазовые траектории в случае устойчивого узла, стрелки на траекториях указывают направление движения при увеличении t.

Для положительных собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ точка покоя называется неустойчивым узлом, расположение и вид траекторий остаются теми же, что и для отрицательных собственных значений, но направление движения по траекториям меняется на противоположное.

Полезно помнить следующее общее правило узла: фазовые траектории входят в узел касаясь собственного вектора с наименьшим по модулю собственным значением.

2.4.3 Дикритический узел: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\dim\ker(A - \lambda_1 E) = 2$.

В случае дикритического узла двукратному собственному значению $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ отвечают два линейно независимых собственных вектора $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$ матрицы A. Тогда выражение (2.29) для общего решения принимает вид

$$\overline{y}(t) = (C_1\overline{h}_1 + C_2\overline{h}_2)\exp\{\lambda t\}$$

и определяет на плоскости (y_1, y_2) совокупность всевозможных лучей, входящих в точку покоя для $\lambda < 0$ (устойчивый дикритический узел) и выходящих из точки покоя для $\lambda > 0$ (неустойчивый дикритический узел), если $t \to +\infty$.

2.4.4 Вырожденный узел: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\dim\ker(A - \lambda_1 E) = 1$.

В случае вырожденного узла двукратному собственному значению $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ отвечают один собственный вектор $\overline{h}_1$ матрицы A и один присоединенный вектор $\overline{p}_1$. Общее решение системы (2.27) записывается в виде

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1\exp\{\lambda t\} + C_2(\overline{p}_1 + t\overline{h}_1)\exp\{\lambda t\}.$$

Если $C_2 = 0$, тогда фазовые траектории решения $\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1\exp\{\lambda t\}$ состоят из двух лучей, входящих в точку покоя для $\lambda < 0$ (выходящих из точки покоя для $\lambda > 0$) при $t \to +\infty$ по направлению собственного вектора. Если $C_2 \neq 0$, тогда вынося множитель t за скобки, имеем

$$\overline{y}(t) = t\exp\{\lambda t\}(C_2\overline{h}_1 + \overline{o}(1)), \quad t \to +\infty.$$

Видно, что решение касается собственного вектора в точке покоя при $t \to +\infty$ для $\lambda < 0$, либо при $t \to -\infty$ для $\lambda > 0$. На бесконечности при $t \to -\infty$ для $\lambda > 0$, либо при $t \to +\infty$ для $\lambda < 0$ фазовая траектория опять выстраивается по направлению собственного вектора, но в противоположном направлении благодаря смене знака множителя t. Типичная картина фазовых траекторий для вырожденного узла приведена на рисунке.

2.4.5 Седло: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Ясно, что седло является неустойчивой точкой покоя. Воспользуемся для анализа поведения траекторий формулой (2.29). Для $C_1 \neq 0$ при $t \to +\infty$ получаем представление

$$\overline{y}(t) = \exp\{\lambda_1 t\}\Big(C_1\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}\exp\{(\lambda_2-\lambda_1)t\}\Big) = \exp\{\lambda_1 t\}\Big(C_1\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} + \overline{o}(1)\Big).$$

Кроме того, из (2.30) нетрудно видеть, что $\dfrac{dy_1}{dy_2} \to \dfrac{h_{11}}{h_{21}}$, т.е. фазовые траектории при $t \to +\infty$ стремятся к бесконечно удаленной точке и имеют асимптоту, задаваемую собственным вектором $\overline{h}_1$. Если же $C_1 = 0$, тогда $\overline{y}(t) = C_2\overline{h}_2\exp\{\lambda_2 t\}$ при $C_2 \neq 0$ лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_2$, и приближается к точке покоя при $t \to +\infty$.

Для $t \to -\infty$ картина противоположная: фазовые траектории стремятся к бесконечно удаленной точке при $C_2 \neq 0$ и имеют асимптоту, задаваемую собственным вектором $\overline{h}_2$; при $C_2 = 0$ решение $\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1\exp\{\lambda_1 t\}$ при $C_1 \neq 0$ лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_1$, и приближается к точке покоя при $t \to -\infty$. Проведенные выкладки иллюстрируются рисунком.

2.4.6 Фокус: $\lambda_{1,2} = \delta \pm i\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, $\delta \neq 0$.

Точка покоя называется фокусом, если матрица A имеет комплексно сопряженные собственные значения с ненулевыми действительной и мнимой частями. Пусть $\overline{h} = \overline{h}_1 + i\overline{h}_2$ – собственный вектор с линейно независимыми $\overline{h}_{1,2}$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = \delta + i\omega$. Тогда действительная и мнимая части комплекснозначной вектор функции $\overline{z}(t) = \overline{h}\exp\{\lambda_1 t\}$ составляют вещественную фундаментальную систему решений системы:

$$\overline{y}_1(t) = \operatorname{Re}\overline{z}(t) = \exp\{\delta t\}\big(\overline{h}_1\cos\omega t - \overline{h}_2\sin\omega t\big), \quad \overline{y}_2(t) = \operatorname{Im}\overline{z}(t) = \exp\{\delta t\}\big(\overline{h}_1\sin\omega t + \overline{h}_2\cos\omega t\big).$$

Поэтому общее вещественное решение имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{y}_1(t) + C_2\overline{y}_2(t) = \exp\{\delta t\}\big(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\big)\overline{h}_1 + \exp\{\delta t\}\big(C_2\cos\omega t - C_1\sin\omega t\big)\overline{h}_2.$$

Обозначая $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \neq 0$ и вводя вспомогательный угол ψ из условий

$$\sin\psi = C_1/C, \quad \cos\psi = C_2/C,$$

приходим к разложению решения по базису, составленному из векторов $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$:

$$\overline{y}(t) = \xi_1(t)\overline{h}_1 + \xi_2(t)\overline{h}_2.$$

Коэффициенты разложения определяются из соотношений

$$\xi_1(t) = C\exp\{\delta t\}\sin(\omega t + \psi), \quad \xi_2(t) = C\exp\{\delta t\}\cos(\omega t + \psi),$$

задающих логарифмическую спираль, которая при $t \to +\infty$ скручивается для $\delta < 0$ (устойчивый фокус, $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) \to 0$) и раскручивается для $\delta > 0$ (неустойчивый фокус, $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) \to +\infty$).

2.4.7 Центр: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$.

Точка покоя называется центром, если матрица A имеет чисто мнимые комплексно сопряженные собственные значения. Таким образом, центр – устойчивая точка покоя, не

являющаяся асимптотически устойчивой. С помощью комплекснозначного собственного вектора $\overline{h} = \overline{h}_1 + i\overline{h}_2$ с линейно независимыми вещественными составляющими $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$ аналогично случаю фокуса запишем общее решение в виде разложения $\overline{y}(t) = \xi_1(t)\overline{h}_1 + \xi_2(t)\overline{h}_2$ с коэффициентами

$$\xi_1(t) = C\sin(\omega t + \psi), \quad \xi_2(t) = C\cos(\omega t + \psi),$$

удовлетворяющими равенству $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) = C^2$. Тогда вектор коэффициентов $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ описывает периодическое движение по окружности, которому в исходных координатах соответствует в общем случае движение по эллипсу.

2.4.8 Случай вырожденной матрицы A: $\det A = 0$.

У вырожденной матрицы одно или оба собственных значения равны нулю. Рассмотрим возникающие здесь случаи.

Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, и $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ – соответствующие линейно независимые собственные векторы. Тогда общее решение имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 + C_2\overline{h}_2\exp\{\lambda_2 t\}.$$

Вся прямая, проходящая через начало координат параллельно вектору $\overline{h}_1$, состоит из точек покоя. Из остальных точек плоскости движение происходит по прямым, параллельным второму собственному вектору $\overline{h}_2$, приближаясь к точке покоя при $t \to +\infty$ в случае $\lambda_2 < 0$ и при $t \to -\infty$ в случае $\lambda_2 > 0$. Характер фазовых траекторий представлен на рисунке.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\dim\ker A = 2$, т.е. существуют линейно независимые собственные векторы $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$. Тогда матрица A состоит из одних нулей, а общее решение (2.27) имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 + C_2\overline{h}_2.$$

Все точки плоскости являются точками покоя в рассматриваемом случае (см. рисунок).

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\dim\ker A = 1$, т.е. существует один линейно независимый собственный вектор $\overline{h}$. Тогда найдется соответствующий присоединенный вектор $\overline{p}$. Общее решение (2.27) имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h} + C_2(\overline{p} + t\overline{h}) = (C_1 + C_2 t)\overline{h} + C_2\overline{p}.$$

Вся прямая, проходящая через начало координат параллельно собственному вектору $\overline{h}$, состоит из неустойчивых точек покоя. Из остальных точек плоскости движение происходит по прямым, параллельным собственному вектору $\overline{h}$, причем направление движения противоположно в полуплоскостях, отвечающих $C_2 > 0$ и $C_2 < 0$. Характер фазовых траекторий представлен на рисунке.

2.4.9 Классификация точек покоя нелинейной системы

Точку покоя $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ автономной системы

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)) \tag{2.31}$$

будем называть грубой, если матрица производных

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{y}_0), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.32}$$

имеет ровно n попарно различных собственных значений с ненулевой вещественной частью. Устойчивость по Ляпунову грубой особой точки всегда однозначно определяется с помощью первого метода Ляпунова согласно теореме 2.3.4. Оказывается, что и качественное поведение фазовых траекторий системы (2.31) достаточно полно описывается с помощью линейной системы

$$\frac{d\widehat{y}(t)}{dt} = A\widehat{y}(t) \tag{2.33}$$

в малой окрестности каждой грубой точки покоя.

На плоскости ($n = 2$) грубой точке покоя соответствует линейная система вида (2.33), имеющая нулевую точку покоя только одного из следующих типов: узел, седло или фокус. Будем называть грубую точку покоя нелинейной системы узлом, седлом или фокусом, если этот тип имеет нулевая точка покоя соответствующий линейной системы (2.33) с матрицей (2.32).

Пример 2.4.1. *Определить тип точек покоя системы*

$$\begin{cases} dx/dt = x - 1, \\ dy/dt = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Точки покоя определяются из алгебраической системы

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ x^2 - y^2 = 0, \end{cases}$$

имеющей два решения: $(1, \pm 1)^\top$. Так как для данной системы $f_1(x, y) = x - 1$, $f_2(x, y) = x^2 - y^2$, то

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2y.$$

Для точки покоя $(1, 1)^\top$ матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Тогда $(1, 1)^\top$ – седло.

Для точки покоя $(1, -1)^\top$ матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда $(1, -1)^\top$ – неустойчивый узел.

Глава 3

Краевые задачи для дифференциального уравнения второго порядка

3.1 Постановка краевых задач

В предыдущих параграфах много внимания было уделено исследованию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В задаче Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, в качестве дополнительных условий для выделения единственного решения задаются значения функции и ее производных до $(n-1)$-го порядка в некоторой точке. Возможны и другие постановки задач, в которых дополнительные условия задаются при двух значениях независимой переменной. Приведем два примера.

Рассмотрим движение материальной точки единичной массы вдоль прямой y . Движение определяется известной силой F, зависящей от времени t, положения точки $y(t)$ и ее скорости $y'(t)$. В соответствии с законом Ньютона, получим дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции $y(t)$

$$y''(t) = F(t, y(t), y'(t)), \quad t_0 \le t \le t_1. \tag{3.1}$$

Если мы знаем положение точки в начальный момент времени и конечный момент времени ,то

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1. \tag{3.2}$$

Таким образом, нам нужно решить следующую задачу: найти функцию $y(t)$, удовлетворяющую обыкновенному дифференциальному уравнению (3.1) и краевым условиям (3.2).

Другим примером краевой задачи может служить задача, описывающая распределение температуры $u(x)$ в тонком стержне

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.3}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(l) = 0. \tag{3.4}$$

Краевое условие $u(0) = u_0$ соответствует тому, что на левом конце стержня известна температура , а краевое условие $u'(l) = 0$ означает, что правый конец стержня теплоизолирован. Функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ заданы. Нужно найти распределение температуры в стержне $u(x)$, то есть решить краевую задачу (3.3)-(3.4).

В общем случае, краевой задачей для дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, рассматриваемого на отрезке $[0, l]$, называется задача в которой значения неизвестной функции $y(x)$, ее производных, или их линейная комбинация, задаются как в точке $x = 0$, так и в точке $x = l$.

Мы ограничимся исследованием краевых задач для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Важной особенностью краевых задач является то, что их решение не всегда существует, а если существует, то может быть неединственно. Действительно, рассмотрим уравнение

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{3.5}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = y_1. \tag{3.6}$$

Общее решение уравнения (3.5) имеет вид $c_1\sin x + c_2\cos x$. Из краевого условия $y(0) = 0$ получим, что $y(x) = c_1\sin x$. Если $y_1 \neq 0$, то решение задачи (3.5)-(3.6) не существует. Если же $y_1 = 0$, то решением задачи (3.5)-(3.6) является функция $y(x) = c_1\sin x$, где c_1 -произвольная постоянная, то-есть решение краевой задачи неединственно. Отметим, что решение задачи Коши для уравнения (3.5) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ существует и единственно при любых фиксированных y_0, y_1 и $x_0 \in [0, \pi]$.

3.1.1 Преобразование уравнения

Рассмотрим краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f_1(x), \quad 0 \le x \le l \tag{3.7}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_1, \tag{3.8}$$

где функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, $f_1(x)$ и постоянные $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ заданы. Требуется найти функцию удовлетворяющую (3.7)-(3.8). Далее предполагаем, что функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, $f_1(x)$ непрерывны на отрезке, $a_0(x) \neq 0$, а постоянные $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ таковы, что $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$.

Преобразуем уравнение (3.7). Сначала почленно разделим его на $a_0(x)$, а затем умножим на $p(x) = \exp\Big(\int\limits_0^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\Big)$. Выделяя полную производную, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.9}$$

где $p(x) \in C^1[0, l]$, $p(x) > 0$, $q(x) = -p(x)a_2(x)/a_0(x) \in C[0, l]$, $f_2(x) = p(x)f_1(x)/a_0(x) \in C[0, l]$.

3.1.2 Редукция к однородным краевым условиям

Рассмотрим краевые условия (3.8). Если $u_0 = u_1 = 0$, то краевые условия называются однородными, в противном случае - неоднородными. Покажем, что задачу (3.9)-(3.8) можно свести к задаче с однородными краевыми условиями. Пусть $y(x)$ - решение задачи (3.9)-(3.8). Рассмотрим функцию $z(x) = y(x) - v(x)$, где $v(x)$ - известная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая краевым условиям (3.8). Подставив в (3.9)-(3.8) $y(x) = z(x) + v(x)$, получим для функции $z(x)$ краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) - q(x)z = f(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0, \quad \alpha_2 z'(l) + \beta_2 z(l) = 0,$$

где

$$f(x) = f_2(x) - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv}{dx}\right) + q(x)v.$$

Функцию $v(x)$, удовлетворяющую неоднородным краевым условиям (3.8) можно выбрать различными способами, одним из самых простых является ее поиск в виде многочлена.

Мы показали, что краевую задачу можно свести к краевой задаче с однородными краевыми условиями

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.10}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0. \tag{3.11}$$

Далее эту задачу будем называть основной краевой задачей. Краевая задача (3.10)-(3.11) называется *однородной*, если $f(x) = 0$ и *неоднородной* в противном случае.

3.1.3 Тождество Лагранжа и его следствие

Выведем некоторые соотношения, которые будут нам полезны в дальнейшем. Введем дифференциальный оператор

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y.$$

Пусть функции $y(x) \in C^2[0, l]$ и $z(x) \in C^2[0, l]$, тогда можно вычислить $L[y]$ и $L[z]$, а также выражение

$$z(x)L[y] - y(x)L[z] = z(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - y(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right).$$

Так как

$$z(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - y(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy}{dx} - y(x)\frac{dz}{dx}\right)\right],$$

то

$$z(x)L[y] - y(x)L[z] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy}{dx} - y(x)\frac{dz}{dx}\right)\right], \quad 0 \le x \le l. \tag{3.12}$$

Это равенство называется тождеством Лагранжа.

Получим одно важное следствие из тождества Лагранжа. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения $L[y] = 0$, то-есть $L[y_1] = L[y_2] = 0$. Записывая для функций $y_1(x), y_2(x)$ тождество Лагранжа (3.12), получим

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_1(x)\frac{dy_2}{dx} - y_2(x)\frac{dy_1}{dx}\right)\right] = 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{3.13}$$

Следовательно для определителя Вронского $W(y_1, y_2) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ справедлива формула $p(x)W(y_1, y_2) = c$, $0 \le x \le l$, где c - постоянная, или

$$W(y_1, y_2) = \frac{c}{p(x)}, \quad 0 \le x \le l. \tag{3.14}$$

3.1.4 Формула Грина и ее следствия

Интегрируя тождество Лагранжа (3.12) от 0 до l, получим

$$\int\limits_0^l (z(x)L[y] - y(x)L[z])\,dx = p(x)\big(z(x)y'(x) - y(x)z'(x)\big)\Big|_{x=0}^{x=l}. \tag{3.15}$$

Эта формула называется формулой Грина.

Покажем, что если функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям (3.11), то справедливо равенство

$$\int\limits_0^l (z(x)L[y] - y(x)L[z])\,dx = 0. \tag{3.16}$$

Действительно, из формулы Грина следует, что достаточно доказать равенство

$$p(l)\big(z(l)y'(l) - y(l)z'(l)\big) - p(0)\big(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)\big) = 0.$$

Покажем, что

$$z(0)y'(0) - y(0)z'(0) = 0. \tag{3.17}$$

Если $\alpha_1 = 0$, тогда $\beta_1 \neq 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, и (3.17) выполнено. При $\alpha_1 \neq 0$ запишем граничные условия

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0,$$

умножим первое равенство на $z(0)$, второе – на $y(0)$. Вычитая почленно полученные равенства, имеем

$$\alpha_1(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)) = 0,$$

откуда вытекает (3.17). Аналогично доказывается, что

$$z(l)y'(l) - y(l)z'(l) = 0.$$

Тем самым равенство (3.16) доказано.

3.2 Функция Грина. Существование решения краевых задач

Рассмотрим краевую задачу

$$L[y] \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.18}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \tag{3.19}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \tag{3.20}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – известные функции, а α_1, β_1, α_2, β_2 – известные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0, l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0, l]$, $q(x), f(x) \in C[0, l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$.

Определение 3.2.1. *Функция $y(x)$ называется решением краевой задачи (3.18)-(3.20), если $y(x) \in C^2[0, l]$ и удовлетворяет (3.18)-(3.20).*

3.2.1 Функция Грина.

Введем функцию Грина, которая далее будет использована для решения краевой задачи (3.18)-(3.20).

Определение 3.2.2. *Функция $G(x, \xi)$ называется функцией Грина краевой задачи (3.18)-(3.20), если она определена в квадрате $[0, l] \times [0, l]$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) Для любого $\xi \in (0, l)$ функция $G(x, \xi)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x на множестве $[0, \xi) \cup (\xi, l]$ и удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x, \xi)}{dx}\right) - q(x)G(x, \xi) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad x \neq \xi.$$

2) Функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет однородным граничным условиям по переменной x:

$$\alpha_1 G_x(0, \xi) + \beta_1 G(0, \xi) = 0, \quad \alpha_2 G_x(l, \xi) + \beta_2 G(l, \xi) = 0, \quad \forall\xi \in [0, l].$$

3) Функция $G(x, \xi)$ непрерывна в квадрате $[0, l] \times [0, l]$, а частная производная $G_x(x, \xi)$ при $\xi = x$ имеет конечные предельные значения

$$G_x(x, x-0) = \lim_{\xi \to x-0} G_x(x, \xi), \quad G_x(x, x+0) = \lim_{\xi \to x+0} G(x, \xi),$$

связанные соотношением

$$G_x(x, x-0) - G_x(x, x+0) = \frac{1}{p(x)}, \quad \forall x \in (0, l).$$

3.2.2 Нахождение решения неоднородной краевой задачи с помощью функции Грина

Докажем теорему существования и единственности решения краевой задачи (3.18)-(3.20).

Теорема 3.2.1. *Пусть существует функция Грина $G(x, \xi)$. Если однородная краевая задача*

$$L[v] = 0, \quad \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0, \quad \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0 \tag{3.21}$$

имеет только нулевое решение, то решение краевой задачи (3.18)-(3.20) существует, единственно и задается формулой

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x, \xi)f(\xi)d\xi, \quad 0 \le x \le l. \tag{3.22}$$

Доказательство. Покажем, что функция $y(x)$ из формулы (3.22) является решением краевой задачи (3.18)-(3.20).

Зафиксируем произвольное $x \in (0, l)$ и убедимся, что в этой точке выполнено дифференциальное уравнение (3.18). Для выполнения операции дифференцирования в интеграле (3.22) по параметру x предварительно представим его в виде суммы двух интегралов по множествам $[0, x)$ и $(x, l]$, соответственно:

$$y(x) = \int\limits_0^x G(x, \xi)f(\xi)d\xi + \int\limits_x^l G(x, \xi)f(\xi)d\xi.$$

При таком разбиении подынтегральные функции в каждом интеграле являются дважды непрерывно дифференцируемыми по переменной x. Согласно правилу дифференцирования интеграла с переменными пределами интегрирования, имеем

$$y'(x) = \int\limits_0^x G_x(x, \xi)f(\xi)d\xi + G(x, x-0)f(x) + \int\limits_x^l G_x(x, \xi)f(\xi)d\xi - G(x, x+0)f(x).$$

В силу непрерывности функции $G(x,\xi)$ справедливо равенство $G(x,x-0)-G(x,x+0)=0$. Тогда

$$y'(x)=\int\limits_0^x G_x(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int\limits_x^l G_x(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

и поэтому

$$p(x)y'(x)=\int\limits_0^x p(x)G_x(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int\limits_x^l p(x)G_x(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Еще раз дифференцируя по переменной x, получаем

$$\big(p(x)y'(x)\big)'=\int\limits_0^x (p(x)G_x(x,\xi))_x f(\xi)d\xi+p(x)G_x(x,x-0)f(x)$$

$$+\int\limits_x^l (p(x)G_x(x,\xi))_x f(\xi)d\xi-p(x)G_x(x,x+0)f(x).$$

Поскольку согласно третьей аксиоме функции Грина имеем

$$p(x)(G_x(x,x-0)-G_x(x,x+0))=1,$$

то приходим к равенству

$$\big(p(x)y'(x)\big)'=\int\limits_0^x (p(x)G_x(x,\xi))_x f(\xi)d\xi+\int\limits_x^l (p(x)G_x(x,\xi))_x f(\xi)d\xi+f(x).$$

Тогда в силу первой аксиомы находим

$$L[y]=\int\limits_0^x L[G(x,\xi)]f(\xi)d\xi+\int\limits_x^l L[G(x,\xi)]f(\xi)d\xi+f(x)=f(x),$$

т.е. выполнено уравнение (3.18).

Убедимся в выполнении граничных условий (3.19)-(3.20). При $0<x<\xi$ имеем

$$\alpha_1 y'(x)+\beta_1 y(x)=\int\limits_0^l \big(\alpha_1 G_x(x,\xi)+\beta_1 G(x,\xi)\big)f(\xi)d\xi.$$

Переходя под знаком интеграла к пределу при $x\to 0+0$, получаем равенство (3.19). Аналогично проверяется (3.20).

Докажем единственность полученного решения. Пусть имеется еще одно решение $\widetilde{y}(x)$ краевой задачи (3.18)-(3.20). Тогда их разность $v(x)=y(x)-\widetilde{y}(x)$ будет решением однородной краевой задачи (3.21) и по условию теоремы равна нулю, то-есть $y(x)-\widetilde{y}(x)\equiv 0$, и теорема 3.2.1 доказана. □

3.2.3 Существование и единственность функции Грина

Теорема 3.2.2. *Если однородная краевая задача (3.21) имеет только нулевое решение, то функция Грина краевой задачи (3.18)-(3.20) существует и единственна.*

Доказательство. Определим функцию $y_1(x)$ как решение задачи Коши $L[y_1]=0,\quad 0\le x\le l$, $y_1(0)=-\alpha_1$, $y_1'(0)=\beta_1$, а функцию $y_2(x)$ как решение задачи Коши $L[y_2]=0,\quad 0\le x\le l$, $y_2(l)=-\alpha_2$, $y_2'(l)=\beta_2$. Очевидно, что функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевому условию (3.19), а $y_2(x)$ краевому условию (3.20). Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы так как в противном случае однородная краевая задача имела бы ненулевое решение.

Будем искать функцию Грина в следующем виде

$$G(x,\xi)=\begin{cases} c_1(\xi)y_1(x), & 0\le x\le\xi,\\ c_2(\xi)y_2(x), & \xi\le x\le l,\end{cases}$$

где $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ неизвестные функции. Из этого представления следует, что функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) определения функции Грина. Выберем $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ так, чтобы выполнялось и условие 3). Из непрерывности $G(x,\xi)$ в точке $x=\xi$ следует, что

$$c_1(\xi)y_1(\xi)=c_2(\xi)y_2(\xi).$$

Из условия разрыва производной $G_x(x,\xi)$ в точке $x=\xi$ имеем

$$c_2(\xi)y_2'(\xi)-c_1(\xi)y_1'(\xi)=\frac{1}{p(\xi)}.$$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений относительно неизвестных функций $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$. Решив эту систему найдем, что

$$c_1(\xi)=\frac{y_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)},\quad c_2(\xi)=\frac{y_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)},$$

$W(\xi)=y_1(\xi)y_2'(\xi)-y_2(\xi)y_1'(\xi)$ – определитель Вронского. Как следует из формулы (3.14) $W(\xi)p(\xi)=g_0$ – известная постоянная. В результате получим окончательную формулу для функции Грина

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0\le x\le\xi,\\[2mm] \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi\le x\le l.\end{cases}\tag{3.23}$$

Мы доказали существование функции Грина. Докажем теперь ее единственность. Предположим, что существуют две функции Грина $G(x,\xi)$, $\widehat{G}(x,\xi)$. Пусть ξ – произвольная фиксированная точка из интервала $(0,l)$. Рассмотрим функцию $z(x)=G(x,\xi)-\widehat{G}(x,\xi)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0,l]$ и имеет на нем непрерывную производную $z'(x)$, поскольку $G_x(x,\xi)$ и $\widehat{G}_x(x,\xi)$ имеют в точке $x=\xi$ один и тот же разрыв. Записывая далее из уравнения $L[z]=0$, $x\ne\xi$, выражение

$$z''(x)=\frac{q(x)z(x)-p'(x)z'(x)}{p(x)},$$

убеждаемся в непрерывности второй производной при $x=\xi$ благодаря равенству ее предельных значений при $x\to\xi\pm 0$. Тогда функция $z(x)$ является решением уравнения также и при $x=\xi$,

$$L[z]=0,\quad 0\le x\le l,$$

и удовлетворяет условиям (3.19)-(3.20). По условию теоремы однородная краевая задача на отрезке $[0,l]$ имеет только тривиальное решение. Поэтому $z(x)=0$, а значит $G(x,\xi)=\widehat{G}(x,\xi)$, и теорема 3.2.2 доказана. □

Пример 3.2.1. *Построить функцию Грина для краевой задачи*

$$y''(x)+a^2y(x)=f(x),\quad 0\le x\le l,$$
$$y(0)=0,\quad y(l)=0,$$

где $a\ne\pi n l^{-1}$, $n=1,2,\ldots$.

Возьмем $y_1(x)=\sin ax$, а $y_2(x)=\sin a(x-l)$. Очевидно, что $y_i''(x)+a^2y_i(x)=0, i=1,2$ и $y_1(0)=y_2(l)=0$. Постоянная

$$g_0=p(x)W(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=a\sin al.$$

Из формулы (3.23) следует, что для данной краевой задачи функция Грина равна

$$G_a(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax\sin a(\xi-l)}{a\sin al}, & 0\le x\le\xi,\\[2mm] \dfrac{\sin a\xi\sin a(x-l)}{a\sin al}, & \xi\le x\le l.\end{cases}\tag{3.24}$$

3.2.4 О применении функции Грина в нелинейных дифференциальных уравнениях

Приведем пример применения функции Грина для доказательства существования и единственности решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения.

Рассмотрим краевую задачу

$$y''(x)+a^2y(x)=F(x,y(x)),\quad 0\le x\le l,\tag{3.25}$$

$$y(0)=y(l)=0.\tag{3.26}$$

Теорема 3.2.3. *Пусть функция $F(x,y)$ определена и непрерывна при $x\in[0,l]$ и $y\in R$ и удовлетворяет условию Липшица*

$$|F(x,y_1)-F(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\quad \forall x\in[0,l], y_1,y_2\in R.$$

Если $lL(a|\sin al|)^{-1}<1$, то решение краевой задачи (3.25),(3.26) существует и единственно.

Доказательство. Пусть $y(x)$ - решение краевой задачи (3.25)-(3.26). Введем функцию $f(x)=F(x,y(x))$. Тогда функция $y(x)$ является решением краевой задачи

$$y''(x)+a^2y(x)=f(x),\quad 0\le x\le l,$$
$$y(0)=0,\quad y(l)=0,$$

Функция Грина для решения этой задачи имеет вид (3.24). Применяя функцию Грина, получим

$$y(x)=\int\limits_0^l G_a(x,\xi)f(\xi)d\xi,\quad 0\le x\le l.$$

Учитывая определение функции $f(x)$, имеем

$$y(x)=\int\limits_0^l G_a(x,\xi)F(\xi,y(\xi))d\xi,\quad 0\le x\le l.\tag{3.27}$$

Таким образом, мы показали, что если функция $y(x)$ – решение краевой задачи (3.25)-(3.26) , то она является решением интегрального уравнения (3.27).

Справедливо и обратное. Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$ и является решением интегрального уравнения (3.27). Из формул (3.24), (3.27) следует, что функция $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.26). Дифференцируя уравнение (3.27) два раза и подставляя $y(x)$ и $y''(x)$ в уравнение (3.25), легко убедиться в том, что $y(x)$ является решением этого уравнения. Следовательно непрерывное решение уравнения (3.27) является решением краевой задачи (3.25)-(3.26). Таким образом, мы показали, что краевая задача (3.25)-(3.26) эквивалентна интегральному уравнению (3.27).

Докажем существование решения уравнения (3.27), непрерывного на отрезке $[0,l]$. Рассмотрим последовательность функций $y_0(x)=0$,

$$y_{n+1}(x)=\int\limits_0^l G_a(x,\xi)F(\xi,y_n(\xi))d\xi,\quad 0\le x\le l,\quad n=0,1,2\ldots\tag{3.28}$$

Все функции $y_n(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[0,l]$.

Покажем, что справедлива оценка

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\le M\left(\frac{lL}{a|\sin al|}\right)^n,\quad 0\le x\le l,\quad n=0,1,2...,\tag{3.29}$$

где

$$M=\max_{0\le x\le l}|y_1(x)|=\max_{0\le x\le l}\left|\int\limits_0^l G_a(x,\xi)F(\xi,0)d\xi\right|.$$

Действительно, при $n=0$ она верна. Пусть она верна при $n=m-1$. Покажем, что она справедлива и при $n=m$. Оценим $|y_{m+1}(x)-y_m(x)|$. Так как

$$|G_a(x,\xi)|\le(a|\sin al|)^{-1}\quad 0\le x,\xi\le l,$$

то

$$|y_{m+1}(x)-y_m(x)|\le\int\limits_0^l|G_a(x,\xi)||F(\xi,y_m(\xi))-F(\xi,y_{m-1}(\xi))|d\xi\le$$

$$\le(a|\sin al|)^{-1}L\int\limits_0^l|y_m(\xi)-y_{m-1}(\xi)|d\xi\le M\left(\frac{lL}{a|\sin al|}\right)^m,\quad 0\le x\le l.$$

Следовательно оценка (3.29) доказана по индукции.

Так как

$$y_k(t)=\sum_{n=1}^k(y_n(t)-y_{n-1}(t)),$$

то равномерная сходимость последовательности $y_k(t)$ на отрезке $[0,l]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^\infty(y_n(t)-y_{n-1}(t)).$$

Из оценки (3.29)и признака Вейерштрасса следует, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0,l]$. Следовательно последовательность функций $y_k(x)$ также сходится равномерно на отрезке $[0,l]$ к некоторой функции $y(x)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны,

то и $y(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$. Переходя в формуле (3.28) к пределу при n стремящемся к бесконечности, получим, что функция $y(x)$ является решением уравнения (3.27). Следовательно она является решением краевой задачи (3.25)-(3.26).

Докажем единственность решения краевой задачи (3.25),(3.26). Для этого достаточно доказать, что уравнение (3.27) имеет единственное непрерывное решение. Предположим, что это не так и существуют две непрерывные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, являющиеся решениями уравнения (3.27). Тогда

$$y_1(x)-y_2(x)=\int\limits_0^l G_a(x,\xi)[F(\xi,y_1(\xi))-F(\xi,y_2(\xi))]d\xi,\quad 0\le x\le l.$$

Используя оценку для функции Грина $G_a(x,\xi)$, получим

$$|y_1(x)-y_2(x)|=\int\limits_0^l|G_a(x,\xi)|L|y_1(\xi))-y_2(\xi)|d\xi<\max_{0\le x\le l}|y_1(x)-y_2(x)|,\quad 0\le x\le l.$$

Из этого неравенства вытекает что $y_1(x)=y_2(x)$. Таким образом, решение краевой задачи единственно и теорема 3.2.3 доказана. □

3.2.5 Случай нетривиального решения однородной краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу (3.18)-(3.20) в случае, когда соответствующая ей однородная краевая задача имеет ненулевое решение.

Пусть уравнение $L[y]=0$ с краевыми условиями (3.19)-(3.20) имеет ненулевое решение $\varphi(x)$. Очевидно, что функция $c\varphi(x)$, где c -произвольная постоянная, также будет решением однородной краевой задачи. Покажем, что других решений нет. Предположим что функция $\psi(x)$ также решение, то есть $L[\psi]=0$ и $\psi(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.19)-(3.20). Покажем, что $\psi(x)=c_1\varphi(x)$, где c_1 – некоторая постоянная. Действительно функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ являются решением однородного уравнения $L[\varphi]=L[\psi]=0$. Найдем значение определителя Вронского $W(\varphi,\psi)(x)=\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)$ при $x=0$. Если $\alpha_1=0$, то $\varphi(0)=\psi(0)=0$ и $W(\varphi,\psi)(0)=0$. Если , $\alpha_1\ne 0$, то $\varphi'(0)=-\beta_1(\alpha_1)^{-1}\varphi(0)$, $\psi'(0)=-\beta_1(\alpha_1)^{-1}\psi(0)$ и $W(\varphi,\psi)(0)=0$. Таким образом, $W(\varphi,\psi)(0)=0$ во всех случаях, следовательно он равен нулю на всем отрезке $[0,l]$ и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно зависимы, то есть $\psi(x)=c_1\psi(x)$.

Докажем теорему о необходимом условии разрешимости краевой задачи (3.18)-(3.20)в случае, когда соответствующая ей однородная краевая задача имеет ненулевое решение.

Теорема 3.2.4. *Пусть функция $\varphi(x)$ является решением уравнения $L[\varphi]=0$ с краевыми условиями (3.19)-(3.20), а функция $y(x)$ – решением решением уравнения $L[y]=f(x)$ с краевыми условиями (3.19)-(3.20). Тогда*

$$\int\limits_0^l f(x)\varphi(x)dx=0.\tag{3.30}$$

Доказательство. Запишем следствие из формулы Грина (3.16) для функций $y(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\int\limits_0^l(y(x)L[\varphi]-\varphi(x)L[y])dx=0.$$

Так как $L[y]=f(x)$ и $L[\varphi]=0$, то получаем (3.30). Теорема 3.2.4 доказана. □

3.3 Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу

$$L[y]=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y=-\lambda y,\quad 0\le x\le l,\tag{3.31}$$

$$\alpha_1y'(0)+\beta_1y(0)=0,\tag{3.32}$$

$$\alpha_2y'(l)+\beta_2y(l)=0,\tag{3.33}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – известные действительные функции, α_1, β_1, α_2, β_2 – известные действительные постоянные такие, что $p(x)\in C^1[0,l]$, $p(x)>0$, $x\in[0,l]$, $q(x),f(x)\in C[0,l]$, $\alpha_i^2+\beta_i^2>0$, $i=1,2$ и λ – комплексный параметр.

Очевидно, что при любом значении параметра λ краевая задача (3.31)-(3.33) имеет решение $y(x)=0$.

Определение 3.3.1. *Если для некоторого λ_1 краевая задача (3.31)-(3.33) имеет нетривиальное решение $y_1(x)$, то λ_1 называется собственным значением, а $y_1(x)$ собственной функцией.*

Задача поиска собственных значений и собственных функций называется задачей Штурма-Лиувилля.

Очевидно, что собственные функции определены с точностью до произвольной постоянной, а именно, если $y(x)$ -собственная функция, то и $cy(x)$, где c -произвольная отличная от нуля постоянная, является собственной функцией.

Задача решения уравнения (3.31) представляет собой задачу поиска собственных значений и собственных функций дифференциального оператора $L[y]=-\lambda y(x)$. Важно отметить, что без краевых условий (3.32)-(3.33) эта задача бессмысленна. Действительно уравнение $L[y]=-\lambda y(x)$ при любом λ имеет нетривиальное решение, поскольку при любом λ оно является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка.

Из курса алгебры известно, что собственные значения и собственные вектора действительной матрицы могут быть комплекснозначными. Так и в случае задачи Штурма-Лиувилля возможно появление комплекснозначных собственных значений и собственных функций. Поэтому мы должны рассматривать комплекснозначные значения параметра λ и комплекснозначные решения задачи (3.31)-(3.33).

Установим некоторые свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

Теорема 3.3.1. *Все собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля действительны.*

Доказательство. Пусть λ_1 – собственное значение, а $y_1(x)$ – соответствующая ему собственная функция. Предположим, что они комплекснозначные, то-есть $\lambda_1=a+ib$, $y_1(x)=u(x)+iv(x)$. Так как функция $y_1(x)$ является решением уравнения (3.31), то $L[y_1]=-\lambda_1y_1(x)$. Записывая это равенство отдельно для действительных и мнимых частей получим

$$L[u]=-au(x)+bv(x),\tag{3.34}$$

$$L[v]=-bu(x)-av(x).\tag{3.35}$$

Так как функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.32)-(3.33), то и функции $u(x)$, $v(x)$ удовлетворяют этим краевым условиям.

Умножим уравнение (3.34) на $v(x)$, а уравнение (3.35) на $u(x)$, проинтегрируем затем оба уравнения от 0 до l и вычтем из первого второе. В результате получим

$$\int\limits_0^l(v(x)L[u]-u(x)L[v])dx=b\int\limits_0^l((u(x))^2+(v(x))^2)dx.$$

Применяя следствие из формулы Грина

$$\int\limits_0^l(v(x)L[u]-u(x)L[v])\,dx=0,\tag{3.36}$$

имеем

$$b\int\limits_0^l((u(x))^2+(v(x))^2)dx=0.$$

Следовательно $b=0$. Значит λ_1 действительно и $y_1(x)$ также действительна. □

Теорема 3.3.2. *Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.*

Доказательство. Пусть собственному значению λ соответствуют две собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$. Это значит, что они являются решениями уравнения (3.31) и удовлетворяют краевым условиям (3.32)-(3.33). Из краевого условия (3.32) следует, что определитель Вронского $W(y_1,y_2)(0)=0$. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ – решения одного и того же линейного однородного дифференциального уравнения (3.31), то $y_2(x)=cy_1(x)$. □

Введем скалярное произведение функций $v(x)$ и $w(x)$

$$(v,w)=\int\limits_0^l v(x)w(x)dx.$$

Будем называть функции $v(x)$ и $w(x)$ ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, то-есть $(v,w)=0$.

Теорема 3.3.3. *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1\ne\lambda_2$ – различные собственные значения, а $y_1(x)$, $y_2(x)$ – соответствующие им собственные функции. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют краевым условиям (3.32)-(3.33), то из следствия из формулы Грина (3.16) получим, что

$$(L[y_1],y_2)-(y_1,L[y_2])=\int\limits_0^l(L[y_1]y_2(x)-y_1(x)L[y_2])dx=0.$$

Так как $L[y_1]=-\lambda_1y_1(x)$, $L[y_2]=-\lambda_2y_2(x)$, то

$$(\lambda_1-\lambda_2)(y_1,y_2)=\lambda_1(y_1,y_2)-\lambda_2(y_1,y_2)=$$
$$=(\lambda_1y_1,y_2)-(y_1,\lambda_2y_2)=-(L[y_1],y_2)+(y_1,L[y_2])=0.$$

Следовательно $(\lambda_1-\lambda_2)(y_1,y_2)=0$, а значит $(y_1,y_2)=0$ и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ ортогональны. □

Теорема 3.3.4. *Пусть $\alpha_1=\alpha_2=0$. Тогда, если λ – собственное значение, то*

$$\lambda\ge\min_{0\le x\le l}q(x).\tag{3.37}$$

Доказательство. Предположим, что λ_1 – собственное значение, $y_1(x)$ – соответствующая собственная функция и

$$\lambda_1<\min_{0\le x\le l}q(x).$$

Тогда $q(x)-\lambda_1>0$ на отрезке $[0,l]$. Из уравнения (3.31) следует, что

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right)=(-\lambda_1+q(x))y_1(x).$$

Интегрируя от 0 до x, получим

$$p(x)y_1'(x)=p(0)y_1'(0)+\int\limits_0^x(q(s)-\lambda_1)y_1(s)ds.\tag{3.38}$$

Так как $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.32), (3.33) и $\alpha_1=\alpha_2=0$, то $y_1(0)=y_1(l)=0$. Так как $y_1(x)$ – ненулевое решение (3.31), то $y_1'(0)\ne 0$. Пусть для определенности $y_1'(0)>0$. Тогда $y_1'(x)>0$ при $x\in[0,l]$. Предположим, что это не так. Обозначим через x_0 минимальное число, при котором $y_1'(x_0)=0$. Тогда для $x\in[0,x_0)$ производная $y_1'(x)>0$, а значит и $y_1(x)>0$. Положив в (3.38) $x=x_0$ и учитывая положительность $q(x)-\lambda_1$, получим, что $y_1'(x_0)>0$. Это противоречие доказывает положительность $y_1'(x)$ при $x\in[0,l]$. Но тогда $y_1(x)>0$ при $x\in(0,l]$, что противоречит краевому условию $y_1(l)=0$. Следовательно исходное предположение неверно и неравенство (3.37) доказано. □

Рассмотрим простой пример задачи Штурма- Лиувилля.

Пример 3.3.1. *Пусть $p(x)=1$, $q(x)=0$, $\alpha_1=\alpha_2=0$, $l=\pi$. Тогда задача Штурма-Лиувилля приобретает следующий вид*

$$y''(x)+\lambda y(x)=0,\quad 0\le x\le\pi,\tag{3.39}$$

$$y(0)=y(\pi)=0.\tag{3.40}$$

Требуется найти собственные значения и собственные функции этой задачи.

Пусть λ меньше нуля. Тогда общее решение уравнения (3.39) имеет вид

$$y(x)=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Положив $x=0$, $x=l$ и использовав краевые условия (3.40), получим систему уравнений для определения c_1 и c_2

$$c_1+c_2=0$$
$$c_1e^{\sqrt{\lambda}\pi}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}\pi}=0,$$

из которой следует, что $c_1=c_2=0$. Таким образом отрицательные λ не являются собственными значениями. Отметим, что этот факт следует из теоремы 3.3.4. Легко видеть, что $\lambda=0$ также не является собственным значением.

Пусть λ больше нуля. Тогда общее решение уравнения (3.39) имеет вид

$$y(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Из краевого условия в нуле следует, что $c_2=0$. Тогда из краевого условия в π получим уравнение для определения собственных значений $\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$. Его решениями являются собственные значения $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,\ldots$. Соответствующие им собственные функции $y_n(x)=c\sin nx$, где c – произвольная отличная от нуля постоянная.

3.3.1 Теорема Стеклова.

Сформулируем, в заключение, теорему, подчеркивающую важность задачи Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (3.31)-(3.33). Можно показать, что их счетное число. Следовательно все их можно занумеровать $y_n(x), n=1,2,\ldots$. Чтобы устранить неопределенность, связанную с тем, что они содержат произвольный сомножитель будем считать, что

$$\int\limits_0^l(y_n(x))^2dx=1.$$

Теперь все собственные функции определены однозначно. Пусть $f(x)$ некоторая непрерывная на $[0,l]$ функция. Введем обозначение

$$f_n=\int\limits_0^l f(x)y_n(x)dx,\quad n=1,2,\ldots$$

Сформулируем теорему имеющую важное значение во многих областях математики и ее приложений

Теорема 3.3.5. *(Теорема Стеклова) Если $f(x)\in C^2[0,l]$ и удовлетворяет краевым условиям (3.32)-(3.33), то ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty f_ny_n(x)$$

сходится равномерно на отрезке $[0,l]$ к функции $f(x)$, то есть

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty f_ny_n(x),\quad 0\le x\le l.$$

Глава 4

Уравнения в частных производных первого порядка

4.1 Первые интегралы нормальной системы ОДУ

4.1.1 Определение первого интеграла

Рассмотрим нормальную систему ОДУ n-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \tag{4.1}$$

где функции $f_i(t, \overline{x})$ являются непрерывными в области $D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ вместе со всеми частными производными $\partial f_i(t, \overline{x})/\partial x_j$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 4.1.1. *Первым интегралом (ПИ) системы (4.1) в области D_1 называется функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой лежащей в D_1 интегральной кривой системы (4.1).*

Таким образом, для каждого решения $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ системы (4.1) найдется константа C такая, что

$$v(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \equiv C. \tag{4.2}$$

В физических моделях первые интегралы возникают как отражения различных законов сохранения (энергии, импульса и т.д.).

4.1.2 Производная первого интеграла в силу системы

С производной в силу системы мы уже встречались при определении функции Ляпунова для автономной системы. Дадим определение производной в силу системы для общего случая нормальной системы (4.1).

Определение 4.1.2. *Производной функции $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ в силу системы (4.1) называется функция*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.1)} = \frac{\partial v(t, \overline{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x})}{\partial x_j} f_j(t, \overline{x}), \quad (t, \overline{x}) \in D_1.$$

Лемма 4.1.1. *Функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1 тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы (4.1) равна нулю в D_1:*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.1)} = 0, \quad \forall (t, \overline{x}) \in D_1. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1. Тогда на лежащей в D_1 интегральной кривой $(t, \overline{x}(t))$, где

$\overline{x}(t)$ – решение (4.1), справедливо равенство (4.2). Дифференцируя (4.2) почленно по t и подставляя выражения для производных $dx_j(t)/dt$ из (4.1), имеем

$$0 \equiv \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt} = \\ = \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial x_j} f_j(t, \overline{x}(t)).$$

Таким образом, производная в силу системы (4.1) равна нулю вдоль интегральной кривой. Однако через любую точку $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1$ по теореме существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы (4.1) с начальным условием $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ проходит единственная интегральная кривая, поэтому выполнено (4.3).

Обратно, пусть для некоторой функции $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ справедливо (4.3). В частности, (4.3) будет выполнено и на любой интегральной кривой $(t, \overline{x}(t)) \in D_1$. Тогда

$$0 \equiv \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial x_j} f_j(t, \overline{x}(t)) = \\ = \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(v(t, \overline{x}(t))\big).$$

Производная непрерывно дифференцируемой функции $v(t, \overline{x}(t))$ скалярного аргумента t равна нулю только когда функция является константой, т.е. $v(t, \overline{x}(t)) \equiv C$. Поэтому $v(t, \overline{x})$ – первый интеграл системы (4.1). □

4.1.3 Геометрический смысл первого интеграла

Лемма 4.1.2. *Функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1, C_0 – любое значение, которое эта функция принимает в D_1, и для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$ производная $\partial v(t, \overline{x})/\partial x_j \neq 0$ в D_1.*

Тогда уравнение $v(t, x_1, \dots, v_n) = C_0$ определяет в $\mathbb{R}^{n+1}$ n-мерную поверхность, целиком состоящую из интегральных кривых системы (4.1).

Доказательство. Пусть точка $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1$ лежит на поверхности $v(t, \overline{x}) = C_0$, т.е. $v(t_0, \overline{x}_0) = C_0$. В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (4.1) с начальным условием $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ существует единственная интегральная кривая $(t, \overline{x}(t))$, проходящая через точку $(t_0, \overline{x}_0)$. Так как $v(t, \overline{x})$ – первый интеграл, то на рассматриваемой интегральной кривой справедливы равенства

$$v(t, \overline{x}(t)) = v(t_0, \overline{x}(t_0)) = v(t_0, \overline{x}_0) = C_0$$

показывающие, что интегральная кривая остается на поверхности $v(t, \overline{x}) = C_0$ и при всех допустимых $t \neq t_0$. □

4.1.4 Независимые первые интегралы

Пусть $v_1(t, \overline{x}), \dots, v_k(t, \overline{x})$ – первые интегралы системы (4.1). Тогда для любой непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{R}^k$ функции $\varphi(y_1, \dots, y_k)$ суперпозиция

$$\Phi(t, \overline{x}) = \varphi(v_1(t, \overline{x}), \dots, v_k(t, \overline{x}))$$

также является первым интегралом системы (4.1).

Определение 4.1.3. *Первые интегралы $v_1(t, \overline{x}), \dots, v_k(t, \overline{x})$ системы (4.1) называются функционально независимыми в области D_1, если ранг матрицы производных равен количеству функций k:*

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial v_i(t, \overline{x})}{\partial x_j}\right) = k, \quad \forall (t, \overline{x}) \in D_1.$$

Важность функционально независимых интегралов для решения нормальной системы проясняет следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Пусть в области D_1 существует n функционально независимых первых интегралов $v_1(t, \overline{x}), \dots, v_n(t, \overline{x})$ системы (4.1). Тогда для любой точки $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1$ решение задачи Коши*

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = \overline{f}(t, \overline{x}), \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 \tag{4.4}$$

однозначно определяется как неявная функция из системы функциональных уравнений

$$\begin{cases} v_1(t, \overline{x}) = c_1^0, \\ \qquad \vdots \\ v_n(t, \overline{x}) = c_n^0, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $c_j^0 = v_j(t_0, \overline{x}_0)$, $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Рассмотрим систему функциональных уравнений (4.5) в окрестности точки $(t_0, \overline{x}_0)$. В самой точке уравнения очевидно удовлетворяются, причем в силу функциональной независимости первых интегралов (см. теорему 5.6.3 в дополнении) якобиан по переменным $(x_1, \dots, x_n)$ отличен от нуля: $\det\big(\partial v_i(t_0, \overline{x}_0)/\partial x_j\big) \neq 0$. Тогда по теореме о неявных функциях (см. теорему 5.6.1 в дополнении) в некоторой окрестности точки t_0 существуют непрерывно дифференцируемые функции $x_j(t) = g_j(t, c_1^0, \dots, c_n^0)$, $j = 1, \dots, n$, такие, что при подстановке $\overline{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ в (4.5) получается тождество:

$$\begin{cases} v_1(t, \overline{g}(t)) = c_1^0, \\ \qquad \vdots \\ v_n(t, \overline{g}(t)) = c_n^0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Пусть $\overline{x}(t)$ – решение задачи Коши (4.4). По определению первых интегралов имеем

$$v_j(t, \overline{x}(t)) = v_j(t_0, \overline{x}(t_0)) = v_j(t_0, \overline{x}_0) = c_j^0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, $\overline{x}(t)$ удовлетворяет той же самой системе функциональных уравнений (4.6), что и $\overline{g}(t)$. В силу единственности неявной функции в окрестности t_0 найденные функции совпадают: $\overline{x}(t) \equiv \overline{g}(t)$. □

Оказывается, в окрестности произвольной точки $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ существует ровно n функционально независимых интегралов системы (4.1). Далее нам потребуется частный случай этого утверждения

Теорема 4.1.2. *В случае автономной системы (4.1) (т.е. $f_j = f_j(\overline{x})$, $j = 1, \dots, n$) в окрестности любой точки $\overline{x}_0$, для которой $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j^2(\overline{x}_0) \neq 0$, существует ровно $(n-1)$ не содержащих переменную t функционально независимых первых интегралов системы (4.1).*

4.2 Уравнения в частных производных первого порядка

4.2.1 Классификация дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Пусть $u(\overline{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ – неизвестная функция переменных $(x_1, \dots, x_n) \in D_0$, D_0 – область в $\mathbb{R}^n$. Уравнение

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

называется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, если заданная функция $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ существенно зависит от последних n аргументов.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называется квазилинейным, если в это уравнение частные производные входят линейно, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(\overline{x}, u),$$

где функции $a_j(\overline{x}, u)$, $b(\overline{x}, u)$ считаются заданными на некотором множестве $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, причем всюду в D_1 выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}, u) \neq 0$.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называется линейным однородным, если коэффициенты этого уравнения не зависят от u, а правая часть равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

где функции $a_j(\overline{x})$ заданы на некотором множестве $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, причем всюду в D_0 выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}) \neq 0$. Очевидно, что линейное однородное уравнение в частных производных является частным случаем квазилинейного уравнения.

Определение 4.2.1. *Функция $u = u(\overline{x})$ называется решением квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в области $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, если*

1. *$u(\overline{x}) \in C^1(D_0)$,*
2. *для любого $\overline{x} \in D_0$ точка $(\overline{x}, u(\overline{x})) \in D_0$,*
3. *при подстановке функции $u(\overline{x})$ в обе части квазилинейного уравнения получается тождество в области D_0.*

4.2.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в области $D_0 \subset \mathbb{R}^n$

$$a_1(\overline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\overline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(\overline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{4.7}$$

$$a_j(\overline{x}) \in C^1(D_0),\ j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}) \neq 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0. \tag{4.8}$$

По коэффициентам уравнения (4.7) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \tag{4.9}$$

Определение 4.2.2. *Решения $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ системы (4.9) определяют фазовые кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые называются характеристиками уравнения в частных производных (4.7).*

Связь системы (4.9) и уравнения (4.7) проясняется в следующей лемме.

Лемма 4.2.1. *Функция $u(\overline{x}) \in C^1(D_0)$ является решением линейного однородного уравнения в частных производных (4.7) тогда и только тогда, когда $u(\overline{x})$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.9) в области D_0.*

Доказательство. Пусть $u(\overline{x})$ является не содержащим t первым интегралом нормальной системы (4.9) в области D_0. Тогда по лемме 4.1.1 о свойствах первого интеграла его производная в силу системы (4.9) равна нулю в области D_0:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{(4.9)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} a_j(\overline{x}) = 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0.$$

Поэтому $u(\overline{x})$ – решение уравнения в частных производных (4.7).

Обратно, пусть $u(\overline{x})$ – решение уравнения в частных производных (4.7). Тогда его левая часть представляет собой выражение для производной $u(\overline{x})$ в силу системы (4.9), и это выражение равно нулю в области D_0. Согласно лемме 4.1.1 отсюда заключаем, что $u(\overline{x})$ является первым интегралом (4.9) в области D_0. □

Теорема 4.2.1. *Пусть в области D_0 система (4.9) имеет ровно $n-1$ не содержащих t функционально независимых первых интегралов*

$$v_1(x_1, \dots, x_n), \quad v_2(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad v_{n-1}(x_1, \dots, x_n).$$

Тогда в некоторой окрестности любой точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D_0$ общее решение линейного однородного УЧП (4.7) имеет вид

$$u(\overline{x}) = F(v_1(\overline{x}), v_2(\overline{x}), \dots, v_{n-1}(\overline{x})), \tag{4.10}$$

где $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Если $v_j(\overline{x})$ – первые интегралы системы (4.9), $j = 1, \dots, n-1$, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ функция $u(\overline{x})$, определенная из формулы (4.10), также является первым интегралом, не зависящим от t. Тогда по лемме 4.2.1 $u(\overline{x})$ – решение линейного однородного УЧП (4.7).

Убедимся, что формулой (4.10) описываются все решения линейного однородного уравнения (4.7) в окрестности каждой точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D_0$. Пусть $u(\overline{x})$ – произвольное фиксированное решение уравнения (4.10). Так как функции $v_1(\overline{x}), \dots, v_{n-1}(\overline{x})$ являются

первыми интегралами системы (4.9), то согласно лемме 4.2.1) эти функции являются решениями уравнения (4.7). Таким образом,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial v_1(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \\ \qquad \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial v_{n-1}(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \end{cases} \quad \forall \overline{x} \in D_0. \tag{4.11}$$

В силу условия (4.8) в каждой точке $\overline{x} \in D_0$ система (4.11) представляет собой имеющую нетривиальное решение $a_1(\overline{x}), \dots, a_n(\overline{x})$ однородную систему линейных алгебраических уравнений. Тогда определитель этой системы, представляющий собой определитель функциональной матрицы, равен нулю

$$\frac{D(u, v_1, \dots, v_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0.$$

При этом в силу функциональной независимости $v_1(\overline{x}), \dots, v_{n-1}(\overline{x})$ соответствующий минор порядка $(n-1)$ отличен от нуля. Тогда по теореме о функциональных матрицах в окрестности каждой точки M_0 найдется непрерывно дифференцируемая функция $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ такая, что в окрестности M_0 справедливо равенство (4.10). □

4.2.3 Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка в области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$$a_1(\overline{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\overline{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(\overline{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\overline{x}, u), \tag{4.12}$$

$$a_j(\overline{x}, u) \in C^1(D),\ j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}, u) \neq 0, \quad \forall (\overline{x}, u) \in D. \tag{4.13}$$

По коэффициентам и правой части уравнения (4.12) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $(n+1)$-го порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(\overline{x}, u), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(\overline{x}, u), \\ \dfrac{du}{dt} = b(\overline{x}, u). \end{cases} \tag{4.14}$$

Определение 4.2.3. *Решения $(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))$ системы (4.14) определяют фазовые кривые в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, которые называются характеристиками уравнения в частных производных (4.12).*

Связь первых интегралов системы (4.14) и квазилинейного уравнения (4.12) проясняется в следующей теореме.

Теорема 4.2.2. *Пусть $v(\overline{x}, u)$ – не содержащий t первый интеграл системы (4.14) в области D, и в некоторой точке $N_0(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in D$ выполнены условия*

$$v(N_0) = C_0, \quad \frac{\partial v}{\partial u}(N_0) \neq 0. \tag{4.15}$$

Тогда в некоторой окрестности точки N_0 уравнение

$$v(x_1, \dots, x_n, u) = C_0 \tag{4.16}$$

определяет неявную функцию $u = u(x_1, \dots, x_n)$, являющуюся решением квазилинейного уравнения (4.12).

Доказательство. Пусть $v(\overline{x}, u)$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.14). Тогда по лемме 4.1.1 о свойствах первого интеграла его производная в силу системы (4.14) равна нулю в области D:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.14)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(\overline{x}, u)}{\partial x_j} a_j(\overline{x}, u) + \frac{\partial v(\overline{x}, u)}{\partial u} b(\overline{x}, u) = 0, \quad \forall (\overline{x}, u) \in D. \tag{4.17}$$

Для функционального уравнения (4.16) в силу (4.15) по теореме о неявной функции существует окрестность точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$, обращающая уравнение (4.16) в тождество в этой окрестности:

$$v(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \equiv C_0.$$

По формуле дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = -\frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial u}, \quad j = 1, \dots, n.$$

После подстановки этих равенств в (4.17) и деления на $\partial v/\partial u \neq 0$ приходим к равенству

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(\overline{x}, u)$$

в рассматриваемой окрестности точки M_0. То есть $u(\overline{x})$ – решение квазилинейного УЧП (4.12). □

Система характеристик квазилинейного УЧП (4.14) имеет порядок $(n+1)$. Поэтому согласно следствию из теоремы **??** в окрестности каждой точки области D существует ровно n не содержащих t функционально независимых первых интегралов

$$v_1(\overline{x}, u), \quad \dots, \quad v_n(\overline{x}, u).$$

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(y_1, \dots, y_n)$ суперпозиция

$$w(\overline{x}, u) = F(v_1(\overline{x}, u), \dots, v_n(\overline{x}, u))$$

также является первым интегралом системы характеристик (4.14). В силу теоремы 4.2.2 при выполнении условия $\partial w/\partial u \neq 0$ неявная функция $u(\overline{x})$, полученная из функционального уравнения

$$F(v_1(\overline{x}, u), \dots, v_n(\overline{x}, u)) = 0 \tag{4.18}$$

также является решением квазилинейного УЧП (4.12). Можно показать, что формула (4.18) задает общее решение квазилинейного УЧП (4.12) в окрестности каждой точки N_0. Доказательство этого факта можно найти, например, в [].

4.2.4 Геометрический смысл квазилинейного УЧП

График решения $u = f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_0)$ квазилинейного УЧП (4.12) является n-мерной поверхностью в пространстве координат $(x_1, \dots, x_n, u)$. Уточним структуру этой поверхности.

Теорема 4.2.3. *Функция $u = f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_0)$ является решением квазилинейного УЧП (4.12) тогда и только тогда, когда задаваемая этой функцией поверхность целиком состоит из характеристик, определяемых системой (4.14) (т.е. через любую точку поверхности проходит характеристика, целиком лежащая на этой поверхности).*

Доказательство. Пусть через любую точку поверхности

$$\mathcal{P} = \{(x_1, \dots, x_n, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : u = f(x_1, \dots, x_n)\}, \tag{4.19}$$

задаваемой с помощью некоторой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_0)$, проходит характеристика

$$\Gamma = \{(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))\} \subset \mathcal{P},$$

целиком лежащая на этой поверхности. В каждой точке характеристики ее касательный вектор в силу (4.14) имеет вид

$$\overline{\tau} = (\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}, \frac{du(t)}{dt}) = (a_1(\overline{x}(t), u(t)), \dots, a_n(\overline{x}(t), u(t)), b(\overline{x}(t), u(t))),$$

где $u(t) = f(\overline{x}(t))$. Поскольку характеристика лежит на поверхности $\mathcal{P}$, то построенный вектор $\overline{\tau}$ является касательным одновременно и к поверхности $\mathcal{P}$. Тогда этот вектор ортогонален к вектору нормали

$$\overline{n} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}(t)), -1).$$

Таким образом, $(\overline{\tau}, \overline{n})_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$, или

$$a_1(\overline{x}, u) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}) + \dots + a_n(\overline{x}, u) \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}) - b(\overline{x}, u) = 0, \quad \forall (\overline{x}, u) \in \Gamma. \tag{4.20}$$

Полученное равенство показывает, что $u = f(\overline{x})$ удовлетворяет квазилинейному УЧП (4.12) в каждой точке характеристики Γ. Поскольку по условию через каждую точку поверхности проходит некоторая характеристика, тогда (4.12) выполнено во всех точках D_0.

Обратно, пусть $u = f(\overline{x})$ – решение квазилинейного УЧП (4.12) в D_0. Покажем, что через любую точку $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in \mathcal{P}$ проходит лежащая в $\mathcal{P}$ характеристика с касательным вектором $\overline{\tau}(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$. Рассмотрим задачу Коши с начальными данными $(x_1^0, \dots, x_n^0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(\overline{x}, f(\overline{x})), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(\overline{x}, f(\overline{x})), \quad x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{4.21}$$

которая имеет единственное решение $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. По этому решению построим кривую

$$\Gamma = \{(x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), u(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)))\}. \tag{4.22}$$

По построению $\Gamma \subset \mathcal{P}$. Убедимся, что Γ – характеристика, т.е. удовлетворяет системе (4.14). Первые n уравнений этой системы выполнены в силу (4.21). Осталось проверить

последнее равенство в (4.14). Учитывая то, что $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, являются решениями системы (4.21), а $u = f(\overline{x})$ является решением квазилинейного уравнения (4.12), имеем

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}(t)) \cdot \frac{dx_j}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{x}(t))}{\partial x_j} a_j(\overline{x}(t), u(t)) = b(\overline{x}(t), u(t)).$$

Следовательно, кривая Γ – характеристика. Итак, показано, что через любую точку поверхности $\mathcal{P}$ проходит принадлежащая этой поверхности характеристика Γ. □

4.2.5 Задача Коши для квазилинейного УЧП

Рассмотрим в случае $n = 2$, имеющим наиболее наглядную геометрическую интерпретацию, квазилинейное УЧП

$$a_1(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y, u), \tag{4.23}$$

где $a_j(x, y, u) \in C^1(D)$, $j = 1, 2$, $a_1^2(x, y, u) + a_2^2(x, y, u) \neq 0$, $\forall (x, y, u) \in D$, D – область из $\mathbb{R}^3$.

Задачи Коши для квазилинейного УЧП (4.23) состоит в нахождении поверхности $u = f(x, y)$, задаваемой решением квазилинейного УЧП (4.23) и проходящей через заданную линию $\ell = \{(x, y, u) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)),\ s \in [s_0, s_1]\}$, т.е.

$$\psi_3(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s)), \quad \forall s \in [s_0, s_1]. \tag{4.24}$$

Теорема 4.2.4. *Пусть выполнено условие*

$$\det\begin{pmatrix} a_1(s) & \psi_1'(s) \\ a_2(s) & \psi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in [s_0, s_1], \tag{4.25}$$

где $a_j(s) = a_j(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s))$, $j = 1, 2$.

Тогда в некоторой окрестности каждой точки линии ℓ существует единственное решение задачи Коши (4.23)-(4.24).

Доказательство. Рассмотрим систему характеристик для квазилинейного УЧП (4.23):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(x, y, u), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(x, y, u), \\ \dfrac{du}{dt} = b(x, y, u). \end{cases} \tag{4.26}$$

Задача Коши для системы (4.26) с начальными при $t = 0$ данными на кривой ℓ

$$x|_{t=0} = \psi_1(s), \quad y|_{t=0} = \psi_2(s), \quad u|_{t=0} = \psi_3(s) \tag{4.27}$$

имеет единственное решение

$$x = \varphi_1(t, s), \quad y = \varphi_2(t, s), \quad u = \varphi_3(t, s). \tag{4.28}$$

В силу (4.27)-(4.28) имеем

$$\varphi_1(0, s) = \psi_1(s), \quad \varphi_2(0, s) = \psi_2(s), \quad \varphi_3(0, s) = \psi_3(s), \quad \forall s \in [s_0, s_1]. \tag{4.29}$$

Формула (4.28) задает параметрическое представление некоторой поверхности $\mathcal{P}$. Линия ℓ лежит на этой поверхности по построению в силу (4.27).

Покажем, что в окрестности каждой точки линии ℓ эта состоящая из характеристик поверхность может быть записана в виде $u = f(x,y)$, и тогда, по теореме 4.2.3, $f(x,y)$ – решение УЧП (4.23). Для этого достаточно в вытекающей из (4.28) системе функциональных уравнений

$$x = \varphi_1(t,s), \quad y = \varphi_2(t,s), \tag{4.30}$$

выразить параметры (t,s) как непрерывно дифференцируемые функции от (x,y). Имея в виду применение теоремы о неявной функции, вычислим значения частных производных на линии ℓ, т.е. при $t = 0$. В силу (4.26) имеем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(0,s) = \frac{dx}{dt}|_{t=0} = a_1(s), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(0,s) = \frac{dy}{dt}|_{t=0} = a_2(s).$$

Из равенств (4.27) находим, что

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(0,s) = \psi_1'(s), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(0,s) = \psi_2'(s).$$

Тогда для якобиана в силу условия (4.25) справедливо соотношение

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\end{pmatrix}(0,s) = \det\begin{pmatrix} a_1(s) & \psi_1'(s) \\ a_2(s) & \psi_2'(s)\end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in [s_0, s_1].$$

Следовательно, по теореме о неявных функциях в окрестности точки $(x_0,y_0) = (\varphi_1(0,s), \varphi_2(0,s))$ существуют единственным образом определенные непрерывно дифференцируемые функции

$$t = t(x,y), \quad s = s(x,y),$$

обращающие уравнения (4.30) в тождества. После подстановки в третье уравнение в (4.28) приходим к искомому представлению

$$u = \varphi_3(t(x,y), s(x,y)) = f(x,y).$$

Единственность вытекает из того, что удовлетворяющая квазилинейному уравнению в частных производных поверхность согласно теореме 4.2.3 состоит из характеристик (т.е. выполнены соотношения (4.28)), а вблизи кривой ℓ единственность решений обеспечивается теоремой о неявных функциях. □

Условие (4.25) имеет следующий геометрический смысл. Так как вектор $\overline{\tau} = (a_1, a_2, b)$ касается характеристики, а вектор $(\psi_1', \psi_2', \psi_3')$ касается кривой ℓ, на которой задаются начальные данные для задачи Коши, то условие (4.25) есть условие неколлинеарности проекций (a_1, a_2) и (ψ_1', ψ_2') рассматриваемых векторов на плоскость (x,y). Другими словами, проекции линии ℓ и пересекающих ее характеристик не должны касаться друг друга.

Глава 5

Основы вариационного исчисления

5.1 Основные понятия вариационного исчисления

Рассмотрим множество M, являющееся некоторым подмножеством множества непрерывных на отрезке функций $C[a,b]$.

Определение 5.1.1. *Функционалом называется отображение множества M в множество действительных чисел.*

Приведем некоторые примеры

Пусть множество M совпадает со всем множеством $C[a,b]$. Определим функционал $\Phi[y(x)]$ следующим образом $\Phi[y(x)] = y(a) + 2y(b)$. Другим примером функционала, определенного на этом множестве, является

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_a^b y(x)dx.$$

Приведем еще один пример. Пусть множество M представляет собой множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций таких, что $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, где y_0, y_1 – заданные постоянные. Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_a^b [y(x) + 2(y'(x))^2]dx.$$

Введем понятие вариации функционала.

Определение 5.1.2. *Допустимой вариацией функции $y_0(x) \in M$ называется любая функция $\delta y(x)$ такая, что $y_0(x) + \delta y(x) \in M$.*

Далее для простоты будем считать, что множество M обладает тем свойством, что если $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции $y_0(x)$, тогда $t\delta y(x)$ также является допустимой вариацией функции $y_0(x)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 5.1.3. *Вариацией $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ функционала $\Phi[y(x)]$ на функции $y_0(x) \in M$ называется*

$$\frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Приведем примеры, показывающие, что вариация функционала может существовать, а может и не существовать.

Пусть $M = C[a,b]$. Рассмотрим

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_a^b (y(x))^2dx.$$

Тогда

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_a^b [y_0(x) + t\delta y(x)]^2dx\Big|_{t=0} = 2\int\limits_a^b y_0(x)\delta y(x)dx.$$

и вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ существует для любой $y_0(x)$. Если же мы на том же самом множестве рассмотрим функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_a^b |y(x)|dx$$

и возьмем $y_0(x) = 0$, а $\delta y(x) = 1$, то

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(b-a)|t|\Big|_{t=0},$$

и вариация функционала не существует.

Определение 5.1.4. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ глобального минимума (максимума) на множестве M, если для любой $y(x) \in M$ выполнено неравенство $\Phi[y_0(x)] \le \Phi[y(x)]$ $(\Phi[y_0(x)] \ge \Phi[y(x)])$.*

Пусть на множестве M введена некоторая норма функции $y(x)$, например

$$\|y(x)\| = \max_{a \le x \le b}|y(x)|.$$

Определение 5.1.5. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального минимума (максимума) на множестве M, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $y(x) \in M$ и удовлетворяющей неравенству $\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, справедливо $\Phi[y_0(x)] \le \Phi[y(x)]$ $(\Phi[y_0(x)] \ge \Phi[y(x)])$.*

Максимумы и минимумы функционала называются экстремумами функционала. Задачи отыскания экстремумов функционалов и функций, на которых они достигаются, называются задачами вариационного исчисления.

Докажем теорему о необходимом условии экстремума функционала.

Теорема 5.1.1. *Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального максимума или минимума на множестве M, и вариация функционала на $y_0(x)$ существует, то вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равна нулю для любой допустимой вариации $\delta y(x)$.*

Доказательство. Пусть функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума. Рассмотрим $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$, где $\delta y(x)$ произвольная вариация $y_0(x)$. При фиксированных $y_0(x)$ и $\delta y(x)$ функционал $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$ является функцией переменной t : $\varphi(t) = \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$. Так как функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума, то у функции $\varphi(t)$ точка $t = 0$ является точкой локального экстремума. Следовательно, если производная $\varphi'(0)$ существует, то $\varphi'(0) = 0$. Существование производной $\varphi'(0)$ следует из существования вариации функционала $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x)$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Следовательно

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = 0$$

для любой $\delta y(x)$. Теорема 5.1.1 доказана. □

5.1.1 Основная лемма вариационного исчисления.

Докажем лемму, которую в связи с ее важностью при исследовании задач вариационного исчисления, называют основной леммой вариационного исчисления.

Обозначим через $C_0^n[a,b]$, $n \ge 1$ множество n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $y(x)$ таких, что $y^{(m)}(a) = y^{(m)}(b) = 0$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Лемма 5.1.1. *Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)y(x)dx = 0$$

для любой $y(x) \in C_0^n[a,b]$. Тогда $f(x) = 0$, $x \in [a,b]$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ отлична от нуля на отрезке $[a,b]$. Тогда существует точка $x_1 \in (a,b)$ такая, что $f(x_1) \neq 0$. Пусть для для определенности $f(x_1) > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f(x) \ge f(x_1)/2 > 0$ для $x \in [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \subset (a,b)$.

Рассмотрим функцию $\hat{y}(x)$ равную $(x - (x_1 - \varepsilon))^{n+1}((x_1 + \varepsilon) - x)^{n+1}$ при $x \in [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$ и обращающуюся в ноль вне отрезка $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$. Функция $\hat{y}(x) \in C_0^n[a,b]$ и $\hat{y}(x) > 0$ при $x \in (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$. Следовательно

$$\int\limits_a^b f(x)\hat{y}(x)dx = \int\limits_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(x)\hat{y}(x)dx > 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма 5.1.1 доказана. □

5.2 Уравнение Эйлера

Рассмотрим множество M непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y(x)$ таких, что $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$. Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{5.1}$$

где $F(x,y,p)$ – заданная функция трех переменных.

Получим необходимое условие экстремума функционала на множестве M.

Теорема 5.2.1. *Предположим, что при $x \in [a,b]$, $(y,p) \in \mathbb{R}^2$ у функции $F(x,y,p)$ существуют непрерывные вторые частные производные. Если функционал (5.1) достигает локального экстремума на функции $y_0(x) \in M$, имеющей непрерывную вторую производную на отрезке $[a,b]$, то функция $y_0(x)$ является решением дифференциального уравнения*

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad a \le x \le b. \tag{5.2}$$

Доказательство. Найдем вариацию функционала (5.1) в $y_0(x)$. Из определения множества M следует, что допустимой вариацией $\delta y(x)$ функции $y_0(x)$ является любая непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция, обращающаяся в ноль на концах этого отрезка. То есть $\delta y(x) \in C_0^1[a,b]$.

Используя определение вариации функционала, получим

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_a^b F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \Big\{F_y(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))\delta y(x) +$$

$$+ F_p(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))(\delta y)'(x)\Big\}dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int\limits_a^b \Big\{F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x) + F_p(x, y_0(x), y_0'(x)(\delta y)'(x)\Big\}dx$$

Из теоремы о необходимом условии экстремума следует, что вариация функционала на $y_0(x)$ должна равняться нулю, то-есть

$$\int\limits_a^b F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x)dx + \int\limits_a^b F_p(x, y_0(x), y_0'(x)(\delta y)'(x)dx = 0.$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая то, что $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, получим

$$\int\limits_a^b \Big\{F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y_0(x), y_0'(x)\Big\}\delta y(x)dx = 0$$

Это равенство выполнено для любой функции $\delta y(x) \in C_0^1[a,b]$. Применяя основную лемму вариационного исчисления, имеем

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, \quad a \le x \le b.$$

Следовательно функция $y_0(x)$ является решением уравнения (5.2) и теорема 5.2.1 доказана. □

Уравнение (5.2) называется уравнением Эйлера для функционала (5.1). Так как функция $y_0(x)$, на которой достигается экстремум функционала (5.1), принадлежит множеству M , то она является решением следующей краевой задачи

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad a \le x \le b,$$
$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1.$$

Рассмотрим пример применения доказанной теоремы.

Во многих приложения, например, при обработке изображений требуется приблизить некоторую функцию $f(x)$ более гладкой функцией $y(x)$. Это означает, что производная $y'(x)$ не должна иметь слишком большие значения. Для решения подобных задач может быть применено вариационное исчисление. Пусть $f(x)$ такова, что $f(a) = f(b) = 0$. Рассмотрим задачу нахождения минимума следующего функционала

$$\int\limits_a^b (y(x) - f(x))^2dx + \alpha\int\limits_a^b (y'(x))^2dx, \tag{5.3}$$

где α – положительный параметр. Действительно, минимизация первого интеграла обеспечивает близость функции $y(x)$ к исходной $f(x)$, а минимизация второго интеграла приводит к тому что значения производной $y'(x)$ не будут слишком большими.

Для решения задачи минимизации функционала (5.3) на множестве функций $y(x)$ таких, что $y(x) \in C^1[a,b]$, $y(a) = y(b) = 0$, запишем уравнение Эйлера для функционала (5.3). Так как в этом случае

$$F(x,y,p) = (y - f(x))^2 + \alpha p^2, \quad F_y(x,y,p) = 2(y - f(x)), \quad F_p(x,y,p) = 2\alpha p,$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$2(y(x) - f(x)) - \frac{d}{dx}(2\alpha y'(x)) = 0.$$

Преобразуя это уравнение и учитывая краевые условия $y(a) = y(b) = 0$, получим краевую задачу для определения функции $y(x)$

$$y''(x) - (\alpha)^{-1}y(x) = -(\alpha)^{-1}f(x), \quad a \le x \le b, \tag{5.4}$$

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{5.5}$$

Так как уравнение Эйлера дает необходимое условие экстремума, то можно утверждать, что если минимум функционала (5.3) достигается на дважды непрерывно дифференцируемой функции, то эта функция является решением краевой задачи (5.4)-(5.5). Заметим, что однородная $(f(x) = 0)$ краевая задача (5.4)-(5.5) имеет только нулевое решение, следовательно решение краевой задачи (5.4)-(5.5) существует и единственно для любой $f(x)$. Можно доказать, что это решение будет минимизировать функционал (5.3).

5.3 Необходимые условия экстремума для некоторых функционалов

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые функционалы и получим для них необходимые условия экстремума.

5.3.1 Функционал, зависящий от производных порядка выше первого

Рассмотрим множество M функций $y(x) \in C^n[a,b]$ таких, что

$$y(a) = y_a^0, y'(a) = y_a^1, y''(a) = y_a^2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = y_a^{n-1}, \tag{5.6}$$

$$y(b) = y_b^0, y'(b) = y_b^1, y''(b) = y_b^2, \ldots, y^{(n-1)}(b) = y_b^{n-1}. \tag{5.7}$$

Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx, \tag{5.8}$$

где функция $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ определена и непрерывна при $x \in [a,b]$, $(y, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Получим необходимое условие экстремума функционала (5.8) на множестве M.

Теорема 5.3.1. *Пусть функция $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ имеет при $x \in [a,b]$, $(y, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывные частные производные порядка $2n$. Если функция $\bar{y}(x) \in M$, $\bar{y}(x) \in C^{2n}[a,b]$, и на ней достигается экстремум функционала (5.8) на множестве M, то $\bar{y}(x)$ является решением уравнения*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{p_1} + \cdots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{p_n} = 0, \quad a \le x \le b. \tag{5.9}$$

Доказательство. В силу необходимого условия экстремума вариация функционала (5.8) на функции $\bar{y}(x)$ должна обращаться в ноль для любой допустимой вариации $\delta y(x) \in C_0^n[a,b]$.

По определению вариации функционала имеем

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_a^b F(x, \bar{y}(x) + t\delta y(x), \bar{y}'(x) + t(\delta y)'(x), \ldots, \bar{y}^{(n)}(x) + t(\delta y)^{(n)}(x))dx\Big|_{t=0}.$$

Дифференцируя интеграл по параметру t, полагая затем $t = 0$ и приравнивая вариацию к нулю, получим

$$\int\limits_a^b \big(F_y\delta y(x) + F_{p_1}(\delta y)'(x) + \cdots + F_{p_n}(\delta y)^{(n)}(x)\big)dx = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая то, что функция $\delta y(x)$ и ее производные обращаются в ноль на концах отрезка, имеем

$$\int\limits_a^b \Big(F_y - \frac{d}{dx}F_{p_1} + \cdots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{p_n}\Big)\delta y(x)dx = 0.$$

Так как это равенство выполнено для любой функции $\delta y(x) \in C_0^n[a,b]$, то применяя основную лемму вариационного исчисления, получим что функция $\bar{y}(x)$ является решением дифференциального уравнения (5.9). Теорема 5.3.1 доказана. □

Таким образом мы показали, что если на функции $\bar{y}(x) \in C^{2n}[a,b]$ достигается экстремум функционала (5.8) на множестве M, то эта функция является решением краевой задачи (5.9), (5.6), (5.7).

В качестве примера применения доказанной теоремы рассмотрим задачу приближения функции $f(x)$ более гладкой функцией $y(x)$. В отличии от примера из предыдущего параграфа будем требовать чтобы значения не только первой производной, но и второй производной функции $y(x)$ были невелики.

Рассмотрим задачу нахождения минимума следующего функционала

$$\int\limits_a^b \big(y(x) - f(x)\big)^2dx + \alpha\int\limits_a^b \big((y'(x))^2 + (y''(x))^2\big)dx, \tag{5.10}$$

где α – положительный параметр.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ такова, что $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = f'(a) = 0$ и рассмотрим задачу минимизации функционала (5.10) на множестве функций $y(x)$ таких, что $y(x) \in C^2[a,b]$, $y(a) = y(b) = 0$, $y'(a) = y'(a) = 0$. Так как в этом случае функция

$$F(x, y, p_1, p_2) = (y - f(x))^2 + \alpha p_1^2 + \alpha p_2^2,$$

то уравнение (5.9) имеет вид

$$2(y(x) - f(x)) - \frac{d}{dx}(2\alpha y'(x)) + \frac{d^2}{dx^2}(2\alpha y''(x)) = 0.$$

Преобразуя это уравнение и учитывая краевые условия $y(a) = y(b) = 0$, $y'(a) = y'(a) = 0$, получим краевую задачу для определения функции $y(x)$

$$y^{(4)}(x) - y''(x) + (\alpha)^{-1}y(x) = (\alpha)^{-1}f(x), \quad a \le x \le b,$$
$$y(a) = y'(a) = 0, \quad y(b) = y'(b) = 0.$$

5.3.2 Функционал, зависящий от функций двух переменных.

Задачи вариационного исчисления можно рассматривать и для функционалов, зависящих от функций двух переменных. Рассмотрим функционал, зависящий от функции $u(x,y)$ и ее частных производных первого порядка

$$\Phi[u(x,y)] = \iint\limits_D F(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y))dxdy, \tag{5.11}$$

где $F(x,y,u,p,q)$ – заданная функция, а D – область, ограниченная контуром L. Будем предполагать, что функция $F(x,y,u,p,q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x,y) \in \overline{D} = D \cup L$, $(u,p,q) \in \mathbb{R}^3$.

Пусть M – множество функций $u(x,y)$, имеющих в $\overline{D}$ непрерывные частные производные и принимающих на L заданные значения $u(x,y) = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in L$. Вариация функции $u(x,y)$, не выводящая ее из множества M, – это функция $\delta u(x,y)$, имеющая в $\overline{D}$ непрерывные частные производные и обращающаяся в ноль на L, то есть $\delta u(x,y) = 0$, $(x,y) \in L$.

Получим необходимое условие экстремума функционала (5.11). Для этого нам потребуется лемма, аналогичная основной лемме вариационного исчисления

Лемма 5.3.1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Если*

$$\iint\limits_D f(x,y)v(x,y)dxdy = 0$$

для любой функции $v(x,y)$, имеющей непрерывные частные производные в $\overline{D}$ и обращающейся в ноль на контуре L, то $f(x,y) = 0$, $(x,y) \in \overline{D}$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x,y)$ отлична от нуля в $\overline{D}$. Тогда существует точка $(x_0,y_0) \in D$ такая, что $f(x_0,y_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0,y_0) > 0$. Из непрерывности $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) следует, что существует круг

$$S = \{(x,y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

такой, что $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)/2 > 0$ при $(x,y) \in S \subset \overline{D}$. Рассмотрим функцию $v(x,y)$ такую, что

$$v_0(x,y) = \begin{cases} \big((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \varepsilon^2\big)^2, & (x,y) \in S; \\ 0, & (x,y) \in \overline{D}\backslash S. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)v_0(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(x,y)v_0(x,y)dxdy \ge \frac{f(x_0,y_0)}{2}\iint\limits_S v_0(x,y)dxdy > 0,$$

что противоречит условию леммы. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение было неверно. Лемма 5.3.1 доказана. □

Теорема 5.3.2. *Предположим, что функция $F(x,y,u,p,q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x,y) \in \overline{D}$, $(u,p,q) \in \mathbb{R}^3$. Если экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x,y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$, то эта функция является решением уравнения в частных производных*

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in D. \tag{5.12}$$

Доказательство. Пусть экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x,y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$. Из необходимого условия экстремума следует, что вариация функционала (5.11) на этой функции равна нулю

$$\delta\Phi[\bar{u}(x,y), \delta u(x,y)] = \frac{d}{dt}\Phi[\bar{u}(x,y) + t\delta u(x,y)]\Big|_{t=0} = 0,$$

то-есть

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_D F(x, y, w(x,y,t), w_x(x,y,t), w_y(x,y,t))dxdy\Big|_{t=0} = 0,$$

где $w(x,y,t) = \bar{u}(x,y) + t\delta u(x,y)$. Дифференцируя по t под знаком интеграла и полагая t равным нулю, получим

$$\iint\limits_D F_u(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y)\delta u(x,y)dxdy +$$
$$+ \iint\limits_D \Big\{F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) + F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy = 0. \tag{5.13}$$

Преобразуем это равенство. Очевидно, что

$$F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(F_p\delta u\big) - \frac{\partial F_p}{\partial x}\cdot\delta u,$$
$$F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(F_q\delta u\big) - \frac{\partial F_q}{\partial y}\cdot\delta u.$$

Следовательно

$$\iint\limits_D \Big\{F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) + F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u)\Big)dxdy - \iint\limits_D \Big(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\Big)\delta u\,dxdy.$$

Применяя формулу Грина к интегралу

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u)\Big)dxdy,$$

и учитывая то, что $\delta u(x,y) = 0$, $(x,y) \in L$, получим

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(F_p\delta u\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(F_q\delta u\big)\Big)dxdy = \oint\limits_L \big(F_p\delta udy - F_q\delta udx\big) = 0.$$

Следовательно

$$\iint\limits_D \{F_p(x,y,\bar u,\bar u_x,\bar u_y)(\delta u)_x(x,y) + F_q(x,y,\bar u,\bar u_x,\bar u_y)(\delta u)_y(x,y)\}dxdy = \\ = -\iint\limits_D \Big(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\Big)\delta u\,dxdy,$$

и равенство (5.13) можно переписать так

$$\iint\limits_D \Big\{F_u(x,y,\bar u,\bar u_x,\bar u_y) - \frac{\partial}{\partial x}F_p(x,y,\bar u,\bar u_x,\bar u_y) - \frac{\partial}{\partial y}F_q(x,y,\bar u,\bar u_x,\bar u_y)\Big\}\delta u(x,y)\,dxdy = 0.$$

Применяя лемму 5.3.1 получим, что функция $\bar u(x,y)$ является решением уравнения (5.12). Теорема 5.3.2 доказана. □

Следовательно, если функция $\bar u(x,y)$ такова, что $\bar u \in M$, имеет в $\overline{D}$ непрерывные вторые частные производные и на ней достигается экстремум функционала (5.12), то эта функция является решением следующей задачи

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, \quad (x,y)\in D,$$
$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in L.$$

Приведем еще один пример вариационной задачи, связанной со сглаживанием функции двух переменных. Пусть нам нужно приблизить функцию двух переменных $f(x,y)$, заданную в некоторой области D более гладкой функцией $u(x,y)$. Предположим что функция $f(x,y)$ на границе L области D обращается в ноль. Для решения задачи рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\int\int_D \Big\{(u(x,y) - f(x,y))^2 + \alpha\big((u_x(x,y))^2 + (u_y(x,y))^2\big)\Big\}dxdy$$

Записывая для этого функционала уравнение (5.12) получим, что, если минимум достигается на функции $\bar u(x,y)$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$ и обращающейся в ноль на L, то эта функция является решением уравнения в частных производных

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - \alpha^{-1}u(x,y) = -\alpha^{-1}f(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

5.4 Вариационная задача на условный экстремум

Рассмотрим два функционала

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx \tag{5.14}$$

и

$$\Psi[y(x)] = \int\limits_a^b G(x,y(x),y'(x))dx, \tag{5.15}$$

где $F(x,y,p)$, $G(x,y,p)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу. Требуется найти функцию $\bar y(x)$, на которой достигается экстремум функционала (5.14) на множестве функций

$$M_\Psi = \left\{y(x) \in C^1[a,b]: \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad \Psi[y(x)] = l\right\}. \tag{5.16}$$

Таким образом нам нужно найти экстремум функционала (5.14) на множестве функций определяемым тем условием, что функционал (5.15) принимает на этом множестве постоянное значение. Вариационные задачи такого типа называются задачами на условный экстремум.

Найдем вариацию функционала (5.15) на множестве функций

$$M = \{y(x) \in C^1[a,b]: \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1\}.$$

Пусть $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции на этом множестве, то есть $\delta y(x) \in C^1[a,b]$, $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Тогда вариация функционала $\Psi[y(x)]$ на функции $\tilde y(x) \in M$ равна

$$\delta\Psi[\tilde y(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Psi[\tilde y(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Дифференцируя по t и, полагая $t = 0$, получим

$$\delta\Psi[\tilde y(x), \delta y(x)] = \int\limits_a^b \Big\{G_y(x,\tilde y(x),\tilde y'(x))\delta y(x) + G_p(x,\tilde y(x),\tilde y'(x))(\delta y)'(x)\Big\}dx. \tag{5.17}$$

Сформулируем условие необходимое для того чтобы на функции $\bar y(x)$ достигался экстремум функционала (5.14) на множестве M_Ψ.

Теорема 5.4.1. *Пусть на функции $\bar y(x) \in M_\Psi$, $\bar y(x) \in C^2[a,b]$, достигается экстремум функционала (5.14) на множестве M_Ψ. Если существует функция*

$$\delta y_0(x) \in C^1[a,b], \quad \delta y_0(a) = \delta y_0(b) = 0$$

такая, что вариация $\delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)] \neq 0$, то найдется число λ такое, что $\bar y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}L_p(x,y(x),y'(x)) = 0, \quad a \le x \le b, \tag{5.18}$$

где

$$L(x,y,p) = F(x,y,p) + \lambda G(x,y,p). \tag{5.19}$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\delta y(x)$ такую, что $\delta y(x) \in C^1[a,b]$, $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Рассмотрим функции

$$\varphi(t,\tau) = \Phi[\bar y(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)],$$

$$\psi(t,\tau) = \Psi[\bar y(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)],$$

где t, τ – произвольные действительные числа.

Из определения функций $\varphi(t,\tau)$ и $\psi(t,\tau)$ следует, что

$$\varphi(0,0) = \Phi[\bar y(x)], \quad \psi(0,0) = \Psi[\bar y(x)],$$

$$\varphi_t(0,0) = \delta\Phi[\bar y(x), \delta y(x)], \quad \varphi_\tau(0,0) = \delta\Phi[\bar y(x), \delta y_0(x)],$$

$$\psi_t(0,0) = \delta\Psi[\bar y(x), \delta y(x)], \quad \psi_\tau(0,0) = \delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)].$$

Покажем, что якобиан

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(t,\tau)}\Big|_{t=\tau=0} = \det\begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar y(x), \delta y(x)], & \delta\Phi[\bar y(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar y(x), \delta y(x)], & \delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} = 0, \quad \forall \delta y(x). \tag{5.20}$$

Предположим, что это не так и существует $\delta\tilde y(x)$ такая, что для нее якобиан

$$\det\begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar y(x), \delta\tilde y(x)], & \delta\Phi[\bar y(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar y(x), \delta\tilde y(x)], & \delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда из теоремы о неявных функциях следует что при $\delta\tilde y(x)$ система

$$\varphi(t,\tau) = u, \quad \psi(t,\tau) = v$$

однозначно разрешима для (u,v), находящихся в достаточно малой окрестности (u_0,v_0), где $u_0 = \varphi(0,0)$, $v_0 = \psi(0,0)$.

Пусть, для определенности, $\bar y(x)$ - функция на которой достигается локальный минимум задачи на условный экстремум. Рассмотрим систему

$$\varphi(t,\tau) = \varphi(0,0) - \varepsilon = \Phi[\bar y(x)] - \varepsilon,$$

$$\psi(t,\tau) = \psi(0,0) = \Psi[\bar y(x)] = l.$$

так как $(\varphi(0,0) - \varepsilon, \psi(0,0))$ находятся в достаточно малой окрестности (u_0,v_0), то по теореме о неявной функции система имеет единственное решение t_ε, τ_ε. Это означает, что

$$\varphi(t_\varepsilon,\tau_\varepsilon) = \Phi[\bar y(x) + t_\varepsilon\delta\tilde y(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x)] = \Phi[\bar y(x)] - \varepsilon,$$

$$\psi(t_\varepsilon,\tau_\varepsilon) = \Psi[\bar y(x) + t_\varepsilon\delta\tilde y(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x)] = l.$$

Следовательно на функции $\bar y(x) + t_\varepsilon\delta\tilde y(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x)$, принадлежащей множеству M_Ψ функционал (5.14) принимает значение меньшее чем на $\bar y(x)$. Это противоречит тому, что на функции $\bar y(x)$ достигается локальный минимум. Из полученного противоречия следует справедливость равенства (5.20).

Раскрывая определитель, входящий в равенство (5.20), получим

$$\delta\Phi[\bar y(x), \delta y(x)]\delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)] - \delta\Phi[\bar y(x), \delta y_0(x)]\delta\Psi[\bar y(x), \delta y(x)] = 0, \quad \forall \delta y(x).$$

По условию теоремы $\delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)] \neq 0$. Поделив на $\delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)]$ и обозначив через

$$\lambda = -\frac{\delta\Phi[\bar y(x), \delta y_0(x)]}{\delta\Psi[\bar y(x), \delta y_0(x)]},$$

получим

$$\delta\Phi[\bar y(x), \delta y(x)] + \lambda\delta\Psi[\bar y(x), \delta y(x)] = 0, \quad \forall \delta y(x).$$

Учитывая формулы для $\delta\Phi[\bar y(x), \delta y(x)]$ и $\delta\Psi[\bar y(x), \delta y(x)]$ это равенство можно переписать так

$$\int\limits_a^b \Big\{F_y(x,\bar y(x),\bar y'(x)) + \lambda G_y(x,\bar y(x),\bar y'(x))\Big\}\delta y(x)dx + \\ + \int\limits_a^b \Big\{F_p(x,\bar y(x),\bar y'(x)) + \lambda G_p(x,\bar y(x),\bar y'(x))\Big\}\delta y'(x)dx = 0, \quad \forall \delta y(x).$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая определение (5.19) функции $L(x,y,p)$, имеем

$$\int\limits_a^b \Big\{L_y(x,\bar y(x),\bar y'(x)) - \frac{d}{dx}L_p(x,\bar y(x),\bar y'(x))]\Big\}\delta y(x)dx = 0, \quad \forall \delta y(x) \in C_0^1[a,b].$$

Применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar y(x)$ удовлетворяет уравнению (5.18). Теорема 5.4.1 доказана. □

Из теоремы 5.4.1 следует, что для определения функции, которая может являться решением задачи на условный экстремум, нужно решить уравнение (5.18). Это дифференциальное уравнение второго порядка и его решение зависит, вообще говоря, от двух произвольных постоянных и вспомогательного параметра λ. Эти постоянные и параметр могут быть найдены из краевых условий $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, а также условия $\Psi[y(x)] = l$.

5.5 Вариационное свойство собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля. Требуется найти значения λ, при которых краевая задача

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \le x \le l, \tag{5.21}$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{5.22}$$

имеет ненулевое решение. Эти значения λ_n называются собственными значениями, а соответствующие им решения $y_n(x)$ – собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля. Собственные функции определены с точностью до произвольного постоянного сомножителя. Чтобы однозначно определить собственные функции введем следующее условие

$$\int\limits_0^l (y_n(x))^2dx = 1. \tag{5.23}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_0^l \big(k(x)(y'(x))^2 + q(x)(y(x))^2\big)\,dx. \tag{5.24}$$

Покажем, что если $y_n(x)$ – собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (5.21)-(5.22), соответствующая собственному значению λ_n, то

$$\Phi[y_n(x)] = \lambda_n. \tag{5.25}$$

Действительно, так как

$$\int\limits_0^l k(x)(y_n'(x))^2dx = \int\limits_0^l k(x)y_n'(x)y_n'(x)dx = \\ = k(x)y_n'(x)y_n(x)\Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l (k(x)y_n'(x))'y_n(x)dx = -\int\limits_0^l (k(x)y_n'(x))'y_n(x)dx,$$

то

$$\Phi[y_n(x)] = \int\limits_0^l \big(k(x)(y_n'(x))^2 + q(x)(y_n(x))^2\big)\,dx = \\ = -\int\limits_0^l \left((k(x)y_n'(x))' - q(x)y_n(x)\right)y_n(x)dx = \lambda_n\int\limits_0^l (y_n(x))^2dx = \lambda_n.$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала (5.24) на множестве функций, удовлетворяющих условиям (5.22) и (5.23). Запишем условие (5.23) в виде

$$\Psi[y(x)] = -1, \qquad \Psi[y(x)] = -\int\limits_0^l (y(x))^2dx.$$

Пусть минимум достигается на функции $\bar y(x) \in C^2[0,l]$. Из необходимого условия для решения задачи на условный экстремум получим, что $\bar y(x)$ является решением уравнения

$$L_y - \frac{d}{dx}L_p = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

где $L(x,y,p) = k(x)p^2 + q(x)y^2 - \lambda y^2$, то-есть

$$2q(x)y(x) - 2\lambda y(x) - 2(k(x)y'(x))' = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

Таким образом, функция $\bar y(x)$ является решением уравнения (5.21) и удовлетворяет условиям (5.22). Кроме того она не равна тождественно нулю, поскольку удовлетворяет условию (5.23). Следовательно, $\bar y(x)$ является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля (5.21)-(5.22). Обозначим ее $y_1(x)$, λ_1 – соответствующее ей собственное значение. Из (5.25) следует, что $\Phi[y_1(x)] = \lambda_1$.

Таким образом, мы показали, что решение задачи на условный экстремум (5.24)-(5.23) является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля, а соответствующее собственное значение представляет собой величину функционала (5.24) на этой собственной функции.

5.6 Дополнение

5.6.1 Теорема о неявных функциях

Рассмотрим систему из m функциональных уравнений относительно $m+n$ аргументов $(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$:

$$\begin{cases} F_1(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_n) = 0, \\ \dots \\ F_m(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_n) = 0. \end{cases} \tag{5.26}$$

Нас интересует вопрос о разрешимости системы функциональных уравнений (5.26) относительно $u_1,\dots,u_m$. Под решением системы (5.26) понимается совокупность определенных в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ функций

$$u_1 = \varphi_1(x_1,\dots,x_n), \quad \dots, \quad u_m = \varphi_m(x_1,\dots,x_n), \tag{5.27}$$

таких, что при подстановке этих функций в систему (5.26) все уравнения этой системы обращаются в тождества:

$$F_i(u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_m(x_1,\dots,x_n),x_1,\dots,x_n) = 0, \quad \forall(x_1,\dots,x_n) \in D, \quad i = 1,\dots,m.$$

Якобианом функций $F_1,\dots,F_m$ по переменным $u_1,\dots,u_m$ называется следующий функциональный определитель

$$\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(u_1,\dots,u_m)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{pmatrix},$$

являющийся скалярной функцией аргументов $(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_n)$.

Теорема 5.6.1. *Пусть m функций*

$$F_1(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_n), \quad \dots, \quad F_m(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_n)$$

дифференцируемы в некоторой окрестности точки $N_0(u_1^0,\dots,u_m^0,x_1^0,\dots,x_n^0)$, частные производные $\partial F_i/\partial u_j$ непрерывны в точке N_0, $i,j = 1,\dots,m$. Тогда если выполнены условия

$$F_i(N_0) = 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad \frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(u_1,\dots,u_m)}(N_0) \neq 0,$$

то для достаточно малых чисел $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ найдется такая окрестность точки $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$, что в пределах этой окрестности существуют единственные m функций (5.27), которые удовлетворяют условиям $|u_i - u_i^0| < \varepsilon_i$, $i = 1,\dots,m$, и являются решением системы уравнений (5.26), причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки M_0.

Доказательство теоремы можно найти в ИСС, гл. 13, §2.

5.6.2 Зависимость функций и функциональные матрицы

Рассмотрим m функций от n переменных

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1,\dots,x_n), \\ \dots \\ u_m = \varphi_m(x_1,\dots,x_n). \end{cases} \tag{5.28}$$

Предполагается, что функции $\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$, $i = 1,\dots,m$, определены и дифференцируемы в некоторой открытой n-мерной области D. Напомним определение зависимости функций. Пусть $k \in \{1,\dots,m\}$ – фиксированный индекс.

Определение 5.6.1. *Функция u_k зависит в области D от остальных функций из (5.28), если сразу для всех точек $\overline{x} = (x_1,\dots,x_n) \in D$*

$$u_k(\overline{x}) = \Phi(u_1(\overline{x}),\dots,u_{k-1}(\overline{x}),u_{k+1}(\overline{x}),u_m(\overline{x})), \tag{5.29}$$

где Φ – некоторая функция, определенная и дифференцируемая в соответствующей области изменения своих аргументов. Функции $u_1,\dots,u_m$ называются зависимыми в области D, если одна из этих функций зависит в области D от остальных.

Если не существует дифференцируемой функции Φ такой, что сразу для всех точек области D справедливо тождество вида (5.29) хотя бы для одного $k \in \{1,\dots,m\}$, то функции $u_1,\dots,u_m$ называются *независимыми в области D*.

Теорема 5.6.2. *Пусть m функций от $n \ge m$ переменных вида (5.28) определены и дифференцируемы в окрестности точки $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$. Тогда если якобиан из этих функций по каким-либо m переменным отличен от нуля в точке M_0, то эти функции независимы в некоторой окрестности точки M_0.*

Пусть теперь $\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$, $i = 1,\dots,m$, определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$, причем все частные производные первого порядка от этих функций непрерывны в самой точке M_0. Составим из частных производных функций (5.28) функциональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

содержащую m строк и n столбцов.

Теорема 5.6.3. *Пусть у функциональной матрицы (5.30)*

1) *некоторый минор r-го порядка отличен от нуля в точке $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$;*

2) *все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю в некоторой окрестности точки M_0 (если $r = \min(m,n)$, тогда это требование следует опустить).*

Тогда r функций, представленных в указанном миноре r-го порядка, независимы в окрестности точки M_0, а каждая из остальных функций зависит в этой окрестности от указанных r функций.

Доказательство этих теорем можно найти в ИСС, гл. 13, §3.