Зависимость решения задачи Коши от исходных данных и параметров

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), \mu), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], & (1.7)\\ y(t_0) &= y_0(\mu). & (1.8) \end{aligned}$$

Теорема 1.1.2. *(Теорема сравнения.) Пусть функции $f_i(t, y)$, $i = 1, 2$ непрерывны в Q_+ и $f_1(t, y)$ имеет в Q_+ непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(t, y)$. Тогда, если функции $y_i(t)$, $i = 1, 2$, на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ являются решениями задач Коши*

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

причем

$$f_1(t, y) \geq f_2(t, y), \quad (t, y) \in Q_+, \qquad y_{01} \geq y_{02},$$

то справедливо неравенство

$$y_1(t) \geq y_2(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Теорема 1.2.1. *Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и удовлетворяет в Q_μ условию Липшица по y, то-есть*

$$|f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1, \mu), (t, y_2, \mu) \in Q_\mu,$$

а функция $y_0(\mu)$ непрерывна на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Тогда, если $y(t, \mu)$ – решение задачи Коши (1.7)-(1.8) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ непрерывна по μ при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Теорема 1.2.2. *Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и имеет в Q_μ непрерывные частные производные $f_y(t, y, \mu)$, $f_\mu(t, y, \mu)$, а функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.*

Тогда, если $y(t, \mu)$ – решение задачи Коши (1.7)-(1.8) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ имеет при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ производную по μ.

Теория устойчивости

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{y}(t)}{dt} &= \overline{f}(t, \overline{y}(t)), & (2.1)\\ \overline{y}(t_0) &= \overline{y}_0, & (2.2) \end{aligned}$$

Определение 2.1.1. *Решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1)-(2.2) называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, \overline{y}_0) > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0 - \overline{y}_0\| < \delta(\varepsilon, \overline{y}_0)$, соответствующие решения $\overline{y}(t; \widetilde{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t \geq 0$ и удовлетворяют неравенству*

$$\|\overline{y}(t; \widetilde{y}_0) - \overline{y}(t; \overline{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0, +\infty). \tag{2.3}$$

Определение 2.1.2. *Решение $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1)-(2.2) называется* ***асимптотически устойчивым по Ляпунову,*** *если оно устойчиво по Ляпунову, и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0 - \overline{y}_0\| < \delta_0$, существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty}\big(\overline{y}(t;\widetilde{y}_0) - \overline{y}(t;\overline{y}_0)\big) = 0. \tag{2.4}$$

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2.9}$$

Теорема 2.1.1. *Если вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны,*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \qquad \forall\, k = 1,\ldots,n,$$

тогда нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ является асимптотически устойчивым.

Теорема 2.1.2. *Пусть вещественные части всех собственных значений матрицы A неположительны,*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k \le 0, \qquad \forall\, k = 1,\ldots,n,$$

и существуют собственные значения с нулевой вещественной частью, причем размерность каждого собственного подпространства, отвечающего $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, совпадает с его кратностью.

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ системы (2.9) является устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически.

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий:*

1. *Матрица A имеет собственное значение с положительной вещественной частью.*
2. *Матрица A имеет собственное значение λ_m такое, что $\mathrm{Re}\lambda_m = 0$, причем размерность собственного подпространства, отвечающего λ_m, меньше кратности этого собственного значения.*

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ неустойчиво по Ляпунову.

$$\overline{f}(\overline{y}) = A\overline{y} + \overline{R}(\overline{y}), \quad A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0,\ldots,0)\right), \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad \overline{R}(\overline{y}) = \bar{o}(\|\overline{y}\|). \tag{2.13}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть функции $f_j(\overline{y})$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат, $j = 1,\ldots,n$.*

Если все собственные значения матрицы $A = (\partial f_i(0,\ldots,0)/\partial y_j)$ в разложении (2.13) имеют отрицательные вещественные части,

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \quad \forall\, k = 1,\ldots,n,$$

тогда нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = (\partial f_i(0,\ldots,0)/\partial y_j)$ с положительной вещественной частью,

$$\exists \lambda \in \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

тогда нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.

Определение 2.3.1. *Функция $V(\overline{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной на множестве Ω ($\overline{\theta} \in \Omega$), если выполнены следующие два условия:*

1. $V(\overline{y}) \geq 0 \ \forall \ \overline{y} \in \Omega$;
2. $V(\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{y} = \overline{\theta}$.

Далее для определенности будем считать, что множество Ω является шаром радиуса $R > 0$ с центром в начале координат: $\Omega = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{y}\| \leq R\}$.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)), \qquad (*)$$

где $\overline{f}(\overline{y}) = (f_1(y_1, \ldots, y_n), f_2(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n))^\top$ определена на множестве Ω, причем $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть функция $V(\overline{y})$ непрерывно дифференцируема на Ω. Производной этой функции в силу системы $(*)$ называется функция

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y})}{\partial y_j} f_j(\overline{y}).$$

Определение 2.3.2. *Непрерывно дифференцируемая и положительно определенная на Ω функция $V(\overline{y})$ называется **функцией Ляпунова** системы $(*)$, если ее производная в силу системы $(*)$ неотрицательна,*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}) \leq 0, \quad \forall \overline{y} \in \Omega. \qquad (2.20)$$

Теорема 2.3.1. *Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова для системы $(*)$. Тогда нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ системы $(*)$ является устойчивым по Ляпунову.*

Теорема 2.3.2. *Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова $V(\overline{y})$ системы $(*)$, удовлетворяющая неравенству*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\overline{y}) \leq -W(\overline{y}), \quad \forall \overline{y} \in \Omega, \qquad (2.25)$$

где $W(\overline{y})$ – некоторая непрерывная положительно определенная на Ω функция.

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ системы $(*)$ является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Точка $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой покоя (положением равновесия) автономной системы

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)), \qquad (2.26)$$

если $\overline{f}(\overline{y}_0) = 0$.

Теорема 2.3.4. *Пусть $\overline{y}_0$ – точка покоя системы (2.26), функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\overline{y}_0$, $j = 1, \ldots, n$.*

Если все собственные значения матрицы $A = (\partial f_i(\overline{y}_0)/\partial y_j)$ имеют отрицательные вещественные части,

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n,$$

тогда точка покоя $\overline{y}_0$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = (\partial f_i(\overline{y}_0)/\partial y_j)$ с положительной вещественной частью,

$$\exists\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} : \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

тогда точка покоя $\overline{y}_0$ неустойчива по Ляпунову.

Краевые задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y.$$

$$z(x)L[y] - y(x)L[z] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy}{dx} - y(x)\frac{dz}{dx}\right)\right], \quad 0 \le x \le l. \qquad (3.12)$$

Это равенство называется тождеством Лагранжа.

Следовательно для определителя Вронского $W(y_1, y_2) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ справедлива формула $p(x)W(y_1, y_2) = c$, $0 \le x \le l$, где c - постоянная, или

$$W(y_1, y_2) = \frac{c}{p(x)}, \quad 0 \le x \le l. \qquad (3.14)$$

Формула Грина:

$$\int_0^l \left(z(x)L[y] - y(x)L[z]\right)dx = p(x)\big(z(x)y'(x) - y(x)z'(x)\big)\Big|_{x=0}^{x=l}. \qquad (3.15)$$

если функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям (3.11), то справедливо равенство

$$\int_0^l \left(z(x)L[y] - y(x)L[z]\right)dx = 0. \qquad (3.16)$$

Рассмотрим краевую задачу

$$L[y] \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.18}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \tag{3.19}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \tag{3.20}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – известные функции, а α_1, β_1, α_2, β_2 – известные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0,l]$, $q(x), f(x) \in C[0,l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$.

Определение 3.2.1. *Функция $y(x)$ называется решением краевой задачи (3.18)-(3.20), если $y(x) \in C^2[0,l]$ и удовлетворяет (3.18)-(3.20).*

Определение 3.2.2. *Функция $G(x,\xi)$ называется функцией Грина краевой задачи (3.18)-(3.20), если она определена в квадрате $[0,l] \times [0,l]$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) Для любого $\xi \in (0,l)$ функция $G(x,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x на множестве $[0,\xi) \cup (\xi,l]$ и удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) - q(x)G(x,\xi) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad x \ne \xi.$$

2) Функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет однородным граничным условиям по переменной x:

$$\alpha_1 G_x(0,\xi) + \beta_1 G(0,\xi) = 0, \quad \alpha_2 G_x(l,\xi) + \beta_2 G(l,\xi) = 0, \quad \forall \xi \in [0,l].$$

3) Функция $G(x,\xi)$ непрерывна в квадрате $[0,l] \times [0,l]$, а частная производная $G_x(x,\xi)$ при $\xi = x$ имеет конечные предельные значения

$$G_x(x, x-0) = \lim_{\xi \to x-0} G_x(x,\xi), \quad G_x(x, x+0) = \lim_{\xi \to x+0} G(x,\xi),$$

связанные соотношением

$$G_x(x, x-0) - G_x(x, x+0) = \frac{1}{p(x)}, \quad \forall x \in (0,l).$$

Теорема 3.2.1. *Пусть существует функция Грина $G(x,\xi)$. Если однородная краевая задача*

$$L[v] = 0, \quad \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0, \quad \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0 \tag{3.21}$$

имеет только нулевое решение, то решение краевой задачи (3.18)-(3.20) существует, единственно и задается формулой

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \quad 0 \le x \le l. \tag{3.22}$$

Теорема 3.2.2. *Если однородная краевая задача (3.21) имеет только нулевое решение, то функция Грина краевой задачи (3.18)-(3.20) существует и единственна.*

$$y''(x) + a^2 y(x) = F(x, y(x)), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.25}$$

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{3.26}$$

Теорема 3.2.3. *Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна при $x \in [0, l]$ и $y \in R$ и удовлетворяет условию Липшица*

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \quad \forall x \in [0, l], y_1, y_2 \in R.$$

Если $lL(a|\sin al|)^{-1} < 1$, то решение краевой задачи (3.25),(3.26) существует и единственно.

Теорема 3.2.4. *Пусть функция $\varphi(x)$ является решением уравнения $L[\varphi] = 0$ с краевыми условиями (3.19)-(3.20), а функция $y(x)$ – решением решением уравнения $L[y] = f(x)$ с краевыми условиями (3.19)-(3.20). Тогда*

$$\int_0^l f(x)\varphi(x)dx = 0. \tag{3.30}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \le x \le l, \tag{3.31}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \tag{3.32}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \tag{3.33}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – известные действительные функции, α_1, β_1, α_2, β_2 – известные действительные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0, l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0, l]$, $q(x), f(x) \in C[0, l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$ и λ – комплексный параметр.

Определение 3.3.1. *Если для некоторого λ_1 краевая задача (3.31)-(3.33) имеет нетривиальное решение $y_1(x)$, то λ_1 называется собственным значением, а $y_1(x)$ собственной функцией.*

Задача поиска собственных значений и собственных функций называется задачей Штурма-Лиувилля.

Теорема 3.3.1. *Все собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля действительны.*

Теорема 3.3.2. *Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.*

Теорема 3.3.3. *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными.*

Уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим нормальную систему ОДУ n-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \tag{4.1}$$

где функции $f_i(t, \overline{x})$ являются непрерывными в области $D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ вместе со всеми частными производными $\partial f_i(t, \overline{x})/\partial x_j$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 4.1.1. *Первым интегралом (ПИ) системы (4.1) в области D_1 называется функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой лежащей в D_1 интегральной кривой системы (4.1).*

Определение 4.1.2. *Производной функции $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ в силу системы (4.1) называется функция*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.1)} = \frac{\partial v(t, \overline{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x})}{\partial x_j} f_j(t, \overline{x}), \quad (t, \overline{x}) \in D_1.$$

Определение 4.1.3. *Первые интегралы $v_1(t, \overline{x}), \dots, v_k(t, \overline{x})$ системы (4.1) называются функционально независимыми в области D_1, если ранг матрицы производных равен количеству функций k:*

$$\operatorname{rang} \left(\frac{\partial v_i(t, \overline{x})}{\partial x_j} \right) = k, \quad \forall (t, \overline{x}) \in D_1.$$

Теорема 4.1.1. *Пусть в области D_1 существует n функционально независимых первых интегралов $v_1(t, \overline{x}), \dots, v_n(t, \overline{x})$ системы (4.1). Тогда для любой точки $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1$ решение задачи Коши*

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = \overline{f}(t, \overline{x}), \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 \tag{4.4}$$

однозначно определяется как неявная функция из системы функциональных уравнений

$$\begin{cases} v_1(t, \overline{x}) = c_1^0, \\ \qquad \vdots \\ v_n(t, \overline{x}) = c_n^0, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $c_j^0 = v_j(t_0, \overline{x}_0)$, $j = 1, \dots, n$.

Уравнение

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

называется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, если заданная функция $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ существенно зависит от последних n аргументов.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называется квазилинейным, если в это уравнение частные производные входят линейно, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(\overline{x}, u),$$

где функции $a_j(\overline{x}, u)$, $b(\overline{x}, u)$ считаются заданными на некотором множестве $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, причем всюду в D_1 выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}, u) \neq 0$.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называется линейным однородным, если коэффициенты этого уравнения не зависят от u, а правая часть равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

где функции $a_j(\overline{x})$ заданы на некотором множестве $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, причем всюду в D_0 выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}) \neq 0$.

Определение 4.2.1. *Функция $u = u(\overline{x})$ называется решением квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в области $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, если*

1. $u(\overline{x}) \in C^1(D_0)$,
2. *для любого $\overline{x} \in D_0$ точка $(\overline{x}, u(\overline{x})) \in D_0$,*
3. *при подстановке функции $u(\overline{x})$ в обе части квазилинейного уравнения получается тождество в области D_0.*

$$a_1(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{4.7}$$

$$a_j(\overline{x}) \in C^1(D_0),\ j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}) \neq 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0. \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \tag{4.9}$$

Определение 4.2.2. *Решения $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ системы (4.9) определяют фазовые кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые называются характеристиками уравнения в частных производных (4.7).*

Лемма 4.2.1. *Функция $u(\overline{x}) \in C^1(D_0)$ является решением линейного однородного уравнения в частных производных (4.7) тогда и только тогда, когда $u(\overline{x})$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.9) в области D_0.*

Теорема 4.2.1. *Пусть в области D_0 система (4.9) имеет ровно $n-1$ не содержащих t функционально независимых первых интегралов*

$$v_1(x_1,\dots,x_n),\quad v_2(x_1,\dots,x_n),\quad \dots,\quad v_{n-1}(x_1,\dots,x_n).$$

Тогда в некоторой окрестности любой точки $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)\in D_0$ общее решение линейного однородного УЧП (4.7) имеет вид

$$u(\overline{x}) = F(v_1(\overline{x}), v_2(\overline{x}),\dots,v_{n-1}(\overline{x})), \tag{4.10}$$

где $F(y_1,\dots,y_{n-1})$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Рассмотрим квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка в области $D\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$

$$a_1(\overline{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\overline{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(\overline{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\overline{x},u), \tag{4.12}$$

$$a_j(\overline{x},u)\in C^1(D),\ j=1,\dots,n,\quad \sum_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x},u)\neq 0,\quad \forall(\overline{x},u)\in D. \tag{4.13}$$

По коэффициентам и правой части уравнения (4.12) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $(n+1)$-го порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(\overline{x},u), \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(\overline{x},u), \\ \dfrac{du}{dt} = b(\overline{x},u). \end{cases} \tag{4.14}$$

Определение 4.2.3. *Решения $(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t))$ системы (4.14) определяют фазовые кривые в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, которые называются характеристиками уравнения в частных производных (4.12).*

Теорема 4.2.2. *Пусть $v(\overline{x},u)$ – не содержащий t первый интеграл системы (4.14) в области D, и в некоторой точке $N_0(x_1^0,\dots,x_n^0,u^0)\in D$ выполнены условия*

$$v(N_0)=C_0,\quad \frac{\partial v}{\partial u}(N_0)\neq 0. \tag{4.15}$$

Тогда в некоторой окрестности точки N_0 уравнение

$$v(x_1,\dots,x_n,u)=C_0 \tag{4.16}$$

определяет неявную функцию $u=u(x_1,\dots,x_n)$, являющуюся решением квазилинейного уравнения (4.12).

Рассмотрим в случае $n = 2$, имеющим наиболее наглядную геометрическую интерпретацию, квазилинейное УЧП

$$a_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = b(x,y,u), \tag{4.23}$$

где $a_j(x,y,u) \in C^1(D)$, $j = 1,2$, $a_1^2(x,y,u) + a_2^2(x,y,u) \neq 0$, $\forall (x,y,u) \in D$, D – область из $\mathbb{R}^3$.

Задачи Коши для квазилинейного УЧП (4.23) состоит в нахождении поверхности $u = f(x,y)$, задаваемой решением квазилинейного УЧП (4.23) и проходящей через заданную линию $\ell = \{(x,y,u) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)),\ s \in [s_0, s_1]\}$, т.е.

$$\psi_3(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s)), \quad \forall s \in [s_0, s_1]. \tag{4.24}$$

Теорема 4.2.4. *Пусть выполнено условие*

$$\det \begin{pmatrix} a_1(s) & \psi_1'(s) \\ a_2(s) & \psi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in [s_0, s_1], \tag{4.25}$$

где $a_j(s) = a_j(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s))$, $j = 1,2$.

Тогда в некоторой окрестности каждой точки линии ℓ существует единственное решение задачи Коши (4.23)-(4.24).

Основы вариационного исчисления

Рассмотрим множество M, являющееся некоторым подмножеством множества непрерывных на отрезке функций $C[a,b]$.

Определение 5.1.1. *Функционалом называется отображение множества M в множество действительных чисел.*

Определение 5.1.2. *Допустимой вариацией функции $y_0(x) \in M$ называется любая функция $\delta y(x)$ такая, что $y_0(x) + \delta y(x) \in M$.*

Далее для простоты будем считать, что множество M обладает тем свойством, что если $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции $y_0(x)$, тогда $t\delta y(x)$ также является допустимой вариацией функции $y_0(x)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 5.1.3. *Вариацией $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ функционала $\Phi[y(x)]$ на функции $y_0(x) \in M$ называется*

$$\frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Определение 5.1.4. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ глобального минимума (максимума) на множестве M, если для любой $y(x) \in M$ выполнено неравенство $\Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)]$).*

Определение 5.1.5. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального минимума (максимума) на множестве M, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $y(x) \in M$ и удовлетворяющей неравенству $\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, справедливо $\Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)]$).*

Теорема 5.1.1. *Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального максимума или минимума на множестве M, и вариация функционала на $y_0(x)$ существует, то вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равна нулю для любой допустимой вариации $\delta y(x)$.*

Лемма 5.1.1. *Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция такая, что*

$$\int_a^b f(x)y(x)dx = 0$$

для любой $y(x) \in C_0^n[a,b]$. Тогда $f(x) = 0$, $x \in [a,b]$.

$$\Phi[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \qquad (5.1)$$

Теорема 5.2.1. *Предположим, что при $x \in [a,b]$, $(y,p) \in \mathbb{R}^2$ у функции $F(x,y,p)$ существуют непрерывные вторые частные производные. Если функционал (5.1) достигает локального экстремума на функции $y_0(x) \in M$, имеющей непрерывную вторую производную на отрезке $[a,b]$, то функция $y_0(x)$ является решением дифференциального уравнения*

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad a \le x \le b. \qquad (5.2)$$

5.2 – уравнение Эйлера.

Рассмотрим множество M функций $y(x) \in C^n[a,b]$ таких, что

$$y(a) = y_a^0, y'(a) = y_a^1, y''(a) = y_a^2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = y_a^{n-1}, \qquad (5.6)$$

$$y(b) = y_b^0, y'(b) = y_b^1, y''(b) = y_b^2, \ldots, y^{(n-1)}(b) = y_b^{n-1}. \qquad (5.7)$$

Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx, \qquad (5.8)$$

Теорема 5.3.1. *Пусть функция $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ имеет при $x \in [a,b]$, $(y, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывные частные производные порядка $2n$. Если функция $\bar{y}(x) \in M$, $\bar{y}(x) \in C^{2n}[a,b]$, и на ней достигается экстремум функционала (5.8) на множестве M, то $\bar{y}(x)$ является решением уравнения*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{p_1} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{p_n} = 0, \quad a \le x \le b. \qquad (5.9)$$

$$\Phi[u(x,y)] = \iint_D F(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y))dxdy, \qquad (5.11)$$

Теорема 5.3.2. *Предположим, что функция $F(x,y,u,p,q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x,y) \in \overline{D}$, $(u,p,q) \in \mathbb{R}^3$. Если экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x,y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$, то эта функция является решением уравнения в частных производных*

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in D. \qquad (5.12)$$

Рассмотрим два функционала

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \qquad (5.14)$$

и

$$\Psi[y(x)] = \int\limits_a^b G(x, y(x), y'(x))dx, \qquad (5.15)$$

Теорема 5.4.1. *Пусть на функции $\bar{y}(x) \in M_\Psi$, $\bar{y}(x) \in C^2[a,b]$, достигается экстремум функционала (5.14) на множестве M_Ψ. Если существует функция*

$$\delta y_0(x) \in C^1[a,b], \quad \delta y_0(a) = \delta y_0(b) = 0$$

такая, что вариация $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$, то найдется число λ такое, что $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}L_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad a \leq x \leq b, \qquad (5.18)$$

где

$$L(x, y, p) = F(x, y, p) + \lambda G(x, y, p). \qquad (5.19)$$

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leq x \leq l, \qquad (5.21)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \qquad (5.22)$$

если $y_n(x)$ – собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (5.21)-(5.22), соответствующая собственному значению λ_n, то

$$\Phi[y_n(x)] = \lambda_n. \qquad (5.25)$$