

Часть I.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

п.1. Понятие дифференциального уравнения.

Математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальное уравнение является основой математического моделирования. Кратко о математическом моделировании. Дифференциальным уравнением называется соотношение между функциями и их производными. Если функции одной переменной, то имеем обыкновенные дифференциальные уравнения, если функции нескольких переменных, то дифференциальное уравнение в частных производных. Наш курс посвящен исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть на отрезке $[0, T]$ определена n раз дифференцируемая функция $y(t)$ и ее производные $y'(t), \dots, y^{(n)}(t)$. Переменные $t, y, y', \dots, y^{(n)}$ образуют $(n+2)$ -мерное пространство. Если в области $D \in R_{n+2}$ определена функция $F(t, y, y', \dots, y^{(n)})$, то соотношение

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Решением (1.1) называется n -раз дифференцируемая функция $y(t)$, заданная на $[0, T]$ и обращающая соотношение (1.1) в тождество. Порядком уравнения называется порядок старшей производной в (1.1). Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.2)$$

Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, легко записать в виде системы первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 ; \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3 ; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} &= y_n ; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Общий вид системы первого порядка, разрешенной относительно производных, называют нормальной системой

$$\frac{dy_m}{dt} = f_m(t, y_1, \dots, y_n) ; \quad m=1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Решением системы (1.4) называют совокупность дифференцируемых функций $\{y_1, \dots, y_n\}$, определенных на отрезке $[0, T]$, которые при подстановке в (1.4) обращают их в тождество. При моделировании f_m могут быть непрерывными или разрывными,

соответственно определяют функции y_m . Мы будем считать в дальнейшем f_m непрерывными функциями. Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Задача для дифференциального уравнения или системы состоит из уравнения (или системы) и дополнительных условий, которые должны обеспечить существование и единственность решения этой задачи. Обыкновенные дифференциальные уравнения моделируют явления и процессы, которые описываются одной функцией или вектор-функцией одного переменного.

1.1 Временные процессы, где $y(t)$ характеризует изменение какого-либо параметра во времени. Обычно математическая модель описывает связь между $y(t)$, скоростью $y'(t)$ и ускорением $y''(t)$ процесса в виде:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

или более простая модель, связывающая $y(t)$ со скоростью $y'(t)$, в виде:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Если мы имеем несколько параметров модели $\bar{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$, связанных между собой и со скоростью $\bar{y}'(t)$ и ускорением $\bar{y}''(t)$ их изменения, то имеем системы дифференциальных уравнений в виде:

$$\bar{y}''(t) = \bar{F}(t, \bar{y}, \bar{y}') \quad (1.5)$$

или, если связаны $\bar{y}(t)$ и $\bar{y}'(t)$,

$$\bar{y}'(t) = \bar{F}(t, \bar{y}).$$

Система (1.4) является нормальной, а система (1.5) не является нормальной. Систему (1.5) можно перевести в нормальную, если ввести обозначения $\bar{z}(t) = \{z_1, z_2, \dots, z_{2n}\}$, где

$$z_i(t) = \begin{cases} y_i(t) & i \in [1, n] \\ y'_{i-n}(t) & i \in [n+1, 2n] \end{cases}.$$

Тогда имеем нормальную систему для $\bar{z}(t)$

$$\bar{z}'(t) = \begin{cases} \bar{z}_{n+i}(t) & \text{при } i \in [1, n] \\ f_i(t, \bar{z}) & \text{при } i \in [n+1, 2n] \end{cases},$$

где $f_i(t, z) = F_{i-n}(t, \bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)})$,

$$\bar{z} = \{\bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)}\}, \quad \bar{z}^{(1)} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \bar{z}^{(2)} = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n).$$

Примеры математических моделей для временных процессов:

1. Радиоактивный распад .

$m(t)$ — масса распадающегося вещества. Количество распавшегося вещества Δm пропорционально количеству $m(t)$ и времени, т.е.

$$\Delta m = -\alpha m(t) \Delta t \Rightarrow \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0 \quad \text{имеем}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m(t). \quad (1.6)$$

Решение дифференциального уравнения $m(t) = Ce^{-\alpha t}$. Дополнительно условие – $m(t = t_0) = m_0$, тогда задача

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -\alpha m(t) & t \in [t_0, t_0 + T], \\ m(t_0) = m_0. \end{cases}$$

Решение задачи : $m(t) = m_0 e^{-\alpha (t-t_0)}$.

2. Размножение с миграцией.

$N(t)$ – численность популяции, изменяющейся во времени,
 $f(t)$ – миграция. Уравнение имеет вид:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N + f(t).$$

Его решение $N(t) = C_0 e^{\alpha t} + \int_{t_0}^t f(\tau) e^{\alpha (t-\tau)} d\tau$.

Дополнительные условия: $N(t_0) = N_0$. Тогда задача имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha N + f & t \in [t_0, t_0 + T], \\ N(t = t_0) = N_0. \end{cases}$$

Решение задачи:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha (t-t_0)} + \int_{t_0}^t f(\tau) e^{\alpha (t-\tau)} d\tau.$$

1.2 Пространственные процессы, где $y(x)$ описывает распределение параметра процесса вдоль оси Ox . Модели

$$\bar{y}''(x) = f(x, y(x), \bar{y}') \quad (1.7)$$

или

$$\bar{y}'(x) = \bar{F}(x, \bar{y}, \bar{y}'). \quad (1.8)$$

*Пример математической модели
пространственного процесса:*

Равновесие атмосферы в поле сил тяжести.

Давление $p(z)$ и плотность воздуха $\rho(z)$ в атмосфере изменяются с высотой z ($z=0$ земная поверхность). Если выделить маленький цилиндрический объем в воздухе высотой

dz и площадью сечения S , то его вес равен $P = mg = \rho \cdot S \cdot dz \cdot g$, где g — земное ускорение. На этот цилиндр действует сила $F = -S \cdot dp$ за счет разности давления dp на разных концах цилиндра. Условие равновесия $F = P$ дает соотношение

$$-S \cdot dp = \rho \cdot g \cdot S \cdot dz \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dz} = -g\rho(z).$$

Для того, чтобы получить окончательно дифференциальное уравнение, необходимо из уравнения Клайперона $pV = mRT$, $m = \rho V$ выразить плотность $\rho(z)$ через давление $p(z)$:

$$\rho(z) = p(z)/RT(z); \quad T(z) \text{ — температура воздуха.}$$

Откуда имеем

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT(z)} \cdot p(z). \quad (1.9)$$

Решение этого уравнения дает барометрическую формулу

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T(z)}}, \quad p_0 = p(z=0), \quad (1.10)$$

которая определяет убывание давления с высотой при известном распределении температуры $T(z)$.

п.2. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши). Понятие корректной постановки задачи. Лемма Гронуолла–Беллмана.

Рассмотрим вначале систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}), \quad \{t, \bar{y}\} \in D. \quad (2.1)$$

Ее решение $\bar{y} = \bar{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ представляет кривую в $(n+1)$ -мерном пространстве $R_{n+1} = \{t, y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Эта кривая называется **интегральной кривой**. Подпространство $R_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ называют фазовым пространством. Проекция интегральной кривой на это пространство называется **фазовой траекторией** (или просто **траекторией**). (Пример из баллистики).

Система (2.1) в каждой точке области D , где определена $\bar{f}(t, \bar{y})$, определяет направление $\bar{\tau} = \{1, f_1, \dots, f_n\}$. Эта область с заданным направлением называется **полем направлений**. Кривые, определенные уравнением $\bar{f}(t, \bar{y}) = const$, называют **изоклинами**. Это кривые в поле направлений выделяют постоянный наклон.

Пример для уравнения I порядка $y' = f(t, y)$; например, $f(t, y) = t^2 + y^2 = const \Rightarrow$ изоклины окружности.

Семейство интегральных кривых однопараметрическое $y = \varphi(t, C)$ — это общее решение дифференциального уравнения. Если положить $C = C_1$ (фиксированное значение), то мы получаем частное решение. Для однозначности решения (определение

интегральной кривой) надо задать начальную точку, через которую проходит интегральная кривая $y(t = t_0) = y_0$.

Таким образом, задача Коши:

1) для уравнения I порядка

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & (t, y) \in D = \{t_0 \leq t \leq t_0 + T, a \leq y \leq b\}, \\ y(t = t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

2) для системы уравнений I порядка

$$\begin{cases} \bar{y}' = f(t, \bar{y}), & (t, \bar{y}) \in D = \{t_0 \leq t \leq t_0 + T, a_i \leq y_i \leq b_i\}, \\ \bar{y}(t = t_0) = \bar{y}^0, & i \in [1, n], \end{cases} \quad (2.3)$$

3) для уравнения n -го порядка

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$D = \{t_0 \leq t \leq t_0 + T, a_i \leq y^{(i)} \leq b_i, n \in [0, n-1]\}.$$

Корректность постановки задачи (Адамар)

При данной постановке задачи решение должно

- 1) существовать и
- 2) быть единственным.

Это определяет математическую разрешимость задачи. Кроме того, должно выполняться условие:

3) решение задачи должно быть устойчивым по отношению к изменениям правой части и начальных данных. Это определяет физическую детерминированность задачи.

Формулировка устойчивости решения: для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$|f_1 - f_2| < \delta \text{ и } |y_{01} - y_{02}| < \delta \text{ следует } |y_1 - y_2| < \varepsilon, \text{ где}$$

$$\begin{cases} y'_i(t) = f_i(t, y_i) \\ y_i(t = t_0) = y_{0i} \end{cases} \quad i \in [1, 2].$$

Мы последовательно должны рассмотреть все вопросы корректности задачи Коши.

Лемма Гронуолла – Беллмана.

Если непрерывная функция $Z(t)$ удовлетворяет условию при $t \geq t_0$

$$0 \leq Z(t) \leq k \int_{t_0}^t Z(\tau) d\tau + g(t); \quad k = const, \quad (2.5)$$

то выполняется оценка

$$0 \leq Z(t) \leq k \int_{t_0}^t g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau + g(t). \quad (2.6)$$

Доказательство.

1) Вначале выведем дифференциальную оценку.

Из $R'(t) \leq kR(t) + g(t)$ при $t \geq t_0$ и $\begin{cases} R(t_0) = 0 \\ k = const \end{cases}$ следует

$$R(t) \leq \int_{t_0}^t g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau. \quad (2.7)$$

Теперь проведем общее доказательство.

$$R'(t) - kR(t) \leq g(t) \Rightarrow (R(t)e^{-kt})' e^{kt} \leq g(t) \Rightarrow R(t) \leq \int_{t_0}^t g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau.$$

2) Введем $R(t) = \int_{t_0}^t Z(\tau) d\tau$; $R(t_0) = 0$; $R' = Z(t)$.

Подставим в (2.5)

$$0 \leq R'(t) \leq kR(t) + g(t); \text{ при } t \geq t_0 \quad R(t_0) = 0, \quad k = const. \quad (2.8)$$

Тогда, согласно (2.7), получаем $R(t) \leq \int_{t_0}^t g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau$

или, подставив в правую часть (2.8) получим неравенство

$$0 \leq Z(t) \leq k \int_{t_0}^t g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau + g(t).$$

Лемма доказана.

п.3. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения I-порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

Лемма 3.1. **Задача Коши (3.1) эквивалентна интегральному уравнению**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau; \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (3.2)$$

Доказательство.

Пусть \exists решение задачи Коши (3.1) $y = y(t)$. Подставив $y = y(t)$ в (3.1), получим тождество, которое можно проинтегрировать, и тогда имеем (3.2) \Rightarrow решение задачи Коши (3.1) является решением интегрального уравнения (3.2). В обратную сторону, если \exists решение интегрального уравнения (3.2), то в силу непрерывности $f(\tau, t)$ по τ интеграл в (3.2) является дифференциальной функцией. Продифференцировав (3.2), получим (3.1) \Rightarrow решение интегрального уравнения является решением задачи Коши. *Лемма доказана.*

Теорема 3.1 **Решение задачи Коши (3.1) для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной единственно, если**

1) $f(t, y)$ непрерывна по t и y в области

$$R: t_0 < t < t_0 + T; y_0 - b < y < y_0 + b;$$

2) $f(t, y)$ удовлетворяет в области R условию Липшица по y т.е.

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b].$$

Доказательство теоремы 3.1.

Редуцируем задачу Коши в предположении \exists решения к интегральному уравнению (3.2). Предположим, что оно имеет два решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Тогда их разность $U(t) = y_1(t) - y_2(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{cases} U(t) = \int_{t_0}^t (f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))) d\tau \\ U(t_0) = 0 \end{cases}$$

Сделаем оценку, используя условия Липшица

$$|U(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, y_1) - f(\tau, y_2)| d\tau \leq N \int_{t_0}^t |U(\tau)| d\tau \quad \text{при } t_0 < t < t_0 + \varepsilon,$$

где ε выбирается так, что $|y_m(t) - y_0| \leq b, \quad m = 1, 2$ и можно использовать условия Липшица. Так как $N = \text{const}$, то по лемме Гронуолла - Беллмана при $g(t) \equiv 0$ имеем

$$0 \leq U(t) \leq 0 \Rightarrow U(t) \equiv 0 \Rightarrow y_1 = y_2. \quad \text{Теорема доказана.}$$

Дальше можно распространить доказательство на больший интервал по t , пока выполняются условия теоремы. Для линейного уравнения единственность доказывается сразу для всего интервала по t , т.к. условия теоремы по y выполняются на всем интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$.

п.4. Теорема существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Теорема 4.1. Решение задачи Коши (3.1) при выполнении условий (1) и (2) теоремы 3.1 существует в интервале $t_0 - h < t < t_0 + h$, где $h = \min(T, b/M)$, где $\|f\| \leq M$ в R .

Доказательство.

Так как задача Коши эквивалентна интегральному уравнению (3.2), то докажем \exists решения интегрального уравнения. Будем строить решение интегрального уравнения методом последовательных приближений.

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau. \quad (4.1)$$

Легко видеть, что если $y_{n-1}(t) \in R: \{t_0 \leq t \leq t_0 + T, |y - y_0| \leq b\}$, то и $y_n(t) \in R$, т.к.

$$|y_n - y_0| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b. \quad (4.2)$$

Поскольку $y_0 \in R$, то по методу математической индукции все $y_n \in R$. Теперь докажем, что \exists предел $Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$.

Представим

$$y_n = y_0 + \sum_{m=1}^n (y_m - y_{m-1}). \quad (4.3)$$

Признак Вейерштрасса.

Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)$ определен на $t \in [t_0, t_0 + T]$ и если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ такой, что для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ и для $\forall k$ справедлива оценка

$$|U_k(t)| \leq C_k,$$

то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[t_0, t_0 + T]$.

Следствие.

Если $U_k(t)$ – непрерывная функция и ряд сходится равномерно, то предел ряда $V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)$ – непрерывная функция.

Докажем, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1})$ сходится, тогда

$$Y(x) = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1}).$$

Для этого построим мажорантную оценку членов ряда (4.3)

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_0(\tau)) d\tau \right| \leq M |t - t_0| \leq Mh,$$

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_0(\tau))) d\tau \right| \leq \quad (\text{используя условия Липшица})$$

$$\leq N \int_{t_0}^t |y_1 - y_0| d\tau \leq NM \int_{t_0}^t (\tau - t_0) d\tau \leq NM \frac{|t - t_0|^2}{2} \leq NM \frac{h^2}{2}$$

и т.д., получим по методу математической индукции

$$|y_m - y_{m-1}| \leq MN^{m-1} \frac{h^m}{m!}.$$

Мажорантный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} MN^{m-1} \frac{h^m}{m!}$ сходится по признаку Даламбера

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{U_{m+1}}{U_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Nh}{m+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1})$ сходится абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса при $|t - t_0| \leq h$, и мы имеем предел

$$Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t), \quad (4.4)$$

причем $Y(t)$ – непрерывная функция. Покажем теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tau, y_{n-1}) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, Y(\tau)) d\tau. \quad (4.5)$$

Так как $f(\tau, y_{n-1})$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 3.1, то $|f(t, y') - f(t, y'')| < \varepsilon$, если $|y' - y''| < \delta = \frac{\varepsilon}{N}$ (N – коэффициент Липшица). Тогда $\exists n_0$ такое, что при $n-1 > n_0$ имеем из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = Y(t)$, что $|y_{n-1} - Y(t)| < \delta$. Тогда $|f(t, y_{n-1}) - f(t, Y)| \leq \varepsilon(\delta)$ при $n-1 > n_0$, причем $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tau, y_{n-1}) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, Y) d\tau.$$

Отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$ из

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau$$

имеем

$$Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, Y(\tau)) d\tau.$$

Продифференцировав, получим

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y(t)) \quad \exists Y(t). \quad \text{теорема доказана.}$$

п.5 Дифференциальное уравнение I-порядка, неразрешенное относительно производной.

Теорема существования и единственности решения.

Уравнение

$$F(t, y, y') = 0 \quad \{t, y, y'\} \in D_3 \in R_3. \quad (5.1)$$

Теорема 5.1. Если в некотором замкнутом трехмерном параллелепипеде

$$D_3 : \{t_0 - h < t < t_0 + h, y_0 - b < y < y_0 + b, y'_0 - c < y' < y'_0 + c\}$$

с центром в точке (t_0, y_0, y'_0) , где y'_0 – действительный корень уравнения $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$, выполнены условия

а) $F(t, y, y')$ непрерывна по совокупности аргументов вместе с частными производными $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$;

$$\text{б) } \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{t_0, y_0, y'_0} \neq 0,$$

то в окрестности точки $t = t_0$ существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (5.1), удовлетворяющее начальным условиям $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$.

Доказательство.

Условия а), б) дают, что в точке (t_0, y_0, y'_0) выполнены условия \exists и $!$ неявной функции

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y'_0 = f(t_0, y_0) \end{cases}$$

причем f – непрерывна по t, y , а $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'}$ также непрерывна (это сильнее, чем условие Липшица по y .)

Следовательно, решение \exists и $!$.

Метод введения параметра.

Пусть уравнение разрешено относительно $y(t)$ т.е.

$$F(t, y, y') = y(t) - f(t, y') = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} \neq 0. \quad (5.2)$$

Обозначим $y' = p(t)$ (это введение параметра). Тогда предполагая $\exists y(t)$ решения уравнения (5.2), получим

$$\frac{dy}{dt} = p(t) = \frac{d}{dt}(f(t, p)) = \frac{\partial f(t, p)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}.$$

Окончательно получаем уравнение для $p(t)$

$$\frac{dp}{dt} = f_1(t, p) = \frac{p(t) - \frac{\partial f(t, p)}{\partial t}}{\frac{\partial f(t, p)}{\partial p}}. \quad (5.3)$$

Это уравнение разрешено относительно производной. Найдем его общее решение $p = p(t, c)$.

Тогда

$$y(t) = f(t, p(t, c)). \quad (5.4)$$

Решение найдено. C – определено из начальных данных.

Общий случай введения параметра.

Уравнение (5.1). Введем $y'(t) = p(t) \Rightarrow$ имеем

$$F(t, y, p) = 0. \quad (5.5)$$

(5.5) определяет поверхность в пространстве (t, y, p) . Зададим эту поверхность параметрически

$$\begin{cases} t = T(u, v); \\ y = Y(u, v) \Rightarrow F(T(u, v), Y(u, v), P(u, v)) = 0 \Rightarrow v = V(u); \\ p = P(u, v). \end{cases}$$

Найдем уравнение для v от u .

Так как $dy = pdt$, то, подставив

$$dy = \frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial v} dv; \quad pdt = P(u, v) \left(\frac{\partial T}{\partial u} du + \frac{\partial T}{\partial v} dv \right),$$

получим

$$\frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial v} dv = P(u, v) \left(\frac{\partial T}{\partial u} du + \frac{\partial T}{\partial v} dv \right).$$

Откуда

$$\frac{dv}{du} = \Phi(u, v) = \frac{P(u, v) \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial u}}{\frac{\partial Y}{\partial v} - P(u, v) \frac{\partial T}{\partial v}}. \quad (5.6)$$

Получили уравнение в (u, v) , которое разрешено относительно производной $\frac{dv}{du}$.

п.6 Особые решения уравнения I-го порядка, неразрешенного относительно производной.

Особым называется такое решение, во всех точках которого нарушается единственность решения задачи Коши.

Рассмотрим вначале уравнение разрешенное относительно производной $y' = f(t, y)$. Нарушение единственности будет там, где нарушаются условия теоремы \exists и $!$. Если $\frac{\partial f}{\partial y}$ неограничено, то условие Липшица не выполнено и единственность нарушена.

Например :

$$\frac{dy}{dt} = y^{2/3}; \quad \frac{\partial}{\partial y} (y^{2/3}) = \frac{2}{3} y^{-1/3} = \infty \quad (y = 0).$$

Решение уравнения

$$y = \frac{(t + c)^3}{27}.$$

Функция $y(t) = 0$ является особым решением.

Рассмотрим общий случай

$$F(t, y, y') = 0.$$

Если бы разрешили это уравнение, то для соответствующей ветви мы могли бы вычислить $\frac{\partial y'}{\partial y}$. В соответствии с правилом дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'}. \quad (6.1)$$

Если $\partial F/\partial y$ – ограничено, то условием нарушения единственности

$\left(\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \infty\right)$ будет

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (6.2)$$

Таким образом, условием (необходимым) существования особого решения есть

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F(t, y, p) = 0 \\ \frac{\partial F(t, y, p)}{\partial p} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Исключив из системы (6.3) p , получим p -дискриминантную кривую $y = y(t)$, которая будет особым решением, если $y = y(t)$ является решением $F(t, y, y') = 0$.

Пример 1.

$$(y')^3 - y^2 = 0 ; F(y, p) = p^3 - y^2 ; \frac{\partial F}{\partial p} = 3p^2$$

Система

$$\begin{cases} p^3 - y^2 = 0 \\ 3p^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 - \text{особое решение.}$$

Пример 2.

$$(y')^2 - ty' + y = 0 ; F(y, p) = p^2 - tp + y ; \frac{\partial F}{\partial p} = 2p - t.$$

Система

$$\begin{cases} p^2 - tp + y = 0 \\ 2p - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = t^2/4 \\ p = t/2 \end{cases} \Rightarrow y = t^2/4 - \text{особое решение, так как оно}$$

удовлетворяет уравнению

$$F\left(t, \frac{t^2}{4}, \frac{t}{2}\right) = 0.$$

Метод получения особых решений при известном общем решении.

Пусть известен общий интеграл уравнения $\Phi(t, y, c) = 0$. Это семейство решений. Особое решение есть огибающая этого семейства, т.е.

$$\begin{cases} \Phi(t, y, c) = 0 ; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0. \end{cases}$$

Исключая c , получим c -дискриминантную кривую $\varphi(t, y) = 0$. Это особое решение, т.к. функция $\varphi(t, y) = 0$ является решением дифференциального уравнения и в каждой точке нарушается единственность решения.

Для того, чтобы разрешить $\Phi(t, y, c) = 0$ относительно $y = y(t, c)$ (или $t = t(y, c)$), необходимо, чтобы одновременно не обращались в ноль $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, т.е. должно быть выполнено условие

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0.$$

Однако точки $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ могут входить в огибающую, т.к.

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial c} dc = 0 \Rightarrow \text{при } \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

Чтобы исключить эти точки, мы должны записать условия \exists особого решения

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(t, y, c) = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0; \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Пример:

$$(y')^2 - ty' + y = 0.$$

Общий интеграл

$$\Phi(t, y, c) = y - ct + c^2 = 0 \quad (\text{т.к. } y = c(t - c));$$

особое решение находим из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} y - ct + c^2 = 0 \\ -t + 2c = 0 \\ 1 + c^2 \neq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial c} = -t + 2c \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 \end{array}$$

Откуда $c = \frac{t}{2}$, а c – дискретная кривая $y = \frac{t}{2}t - \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{4}$, $y = \frac{t^2}{4}$ – особое решение.

п.7. Общий интеграл уравнения I-го порядка.

Интегральный множитель.

Уравнение $y'(t) = f(t, y) = -\frac{M}{N}$ $N \neq 0$ всегда можно представить в виде

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0, \quad N \neq 0 \quad (7.1)$$

Если $M = \frac{\partial V}{\partial t}$, а $N = \frac{\partial V}{\partial y}$, то (7.1) уравнение в полных дифференциалах и мы имеем

$$Mdt + Ndy = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial y} dy = dV = 0. \quad (7.2)$$

Следовательно, имеем

$$V(t, y) = C. \quad (7.3)$$

Представление (7.3) — общий интеграл уравнения (7.1). Неявно представлено однопараметрическое семейство решений. Оно разрешимо, т.к. $N = \frac{dV}{dy} \neq 0$, следовательно,

$$y = y(t, C). \quad (7.4)$$

Если мы для уравнения (7.1) имеем задачу Коши $y(t = t_0) = y_0$, то $C = V(t_0, y_0)$ и общее решение

$$V(t, y) = V(t_0, y_0). \quad (7.5)$$

Это другое определение общего решения через задачу Коши для произвольного y_0 .

Чтобы найти явное выражение решения (7.3) необходимо, чтобы $N \neq 0$. Если в некоторой точке $N = 0$, а $M \neq 0$, то можно определить

$$t = t(y, C). \quad (7.6)$$

Если в некоторой точке одновременно $N = 0$ и $M = 0$, то это особая точка.

Т е о р е м а 7.1. **Необходимым и достаточным условием представления уравнения (7.1) в полных дифференциалах является условие** $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ **(если решение \exists).**

1) *Доказательство необходимости.*

$$M = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad N = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y}.$$

2) *Доказательство достаточности.*

Пусть

$$M = \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow V(t, y) = \int_{t_0}^t M(t, y) dt + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = \int_{t_0}^t \frac{\partial M}{\partial y} dt + \varphi'(y) = \int_{t_0}^t \frac{\partial N}{\partial t} dt + \varphi'(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = N(t, y) - N(t_0, y) + \varphi'(y).$$

Возьмем $\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(t_0, y) dy$, тогда $\varphi'(y) = N(t_0, y) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = N(t, y)$

(это мы получим из $\frac{\partial V}{\partial t} = M$ и $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$).

Теорема доказана.

Общее решение можно записать в виде:

$$V(t, y) = \int_{t_0}^t M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(t_0, y) dy = C, \quad (7.7)$$

если $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

Предположим, что $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$. Тогда можно поставить вопрос: существует ли такая функция $\mu(t, y)$, называемая интегрирующим множителем, что

$$\mu M = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \mu N = \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (7.8)$$

Теорема 7.2. Если уравнение

$$Mdt + Ndy = 0$$

имеет общий интеграл $V(t, y) = C$, то это уравнение имеет интегрирующий множитель.

Доказательство.

Имеем

$$Mdt + Ndy = 0; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t},$$

а из $V(t, y) = C$

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial y} dy = 0.$$

Откуда имеем

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{M}{N} = -\frac{\partial V / \partial t}{\partial V / \partial y} \Rightarrow \exists \mu \text{ такое что, } \frac{\partial V / \partial t}{M} = \frac{\partial V / \partial y}{N} = \mu \Rightarrow \mu M = \frac{\partial V}{\partial t}, \mu N = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow$$

уравнение $\mu Mdt + \mu Ndy = 0$ в полных дифференциалах.

Число интегрирующих множителей бесконечно, т.к. если μ – интегрирующий множитель, то $\mu \varphi(V)$, также интегрирующий множитель:

$$\mu Mdt + \mu Ndy = dV \Rightarrow \mu \varphi(V) Mdt + \mu \varphi(V) Ndy = \varphi(V) dV = dV_1,$$

где $V_1 = \int \varphi(V) dV$.

Теорема 7.3. Формула $\mu_1 = \mu \varphi(V)$ дает любой интегрирующий множитель уравнения $Mdt + Ndy = 0$ (если его решение \exists).

Доказательство.

Пусть μ и μ_1 два различных интегральных множителя

$$\Rightarrow \mu Mdt + \mu Ndy = dV = 0$$

$$\mu_1 Mdt + \mu_1 Ndy = dV_1 = 0$$

$$\Rightarrow \mu M = \frac{\partial V}{\partial t}; \mu N = \frac{\partial V}{\partial y}; \mu_1 M = \frac{\partial V_1}{\partial t}; \mu_1 N = \frac{\partial V_1}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\frac{M}{N} = \frac{\partial V / \partial t}{\partial V / \partial y} = \frac{\partial V_1 / \partial t}{\partial V_1 / \partial y} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial t} & \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} & \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Так как Якобиан функции V и V_1 равен нулю, то

$$V_1 = \psi(V) \Rightarrow \mu_1 Mdt + \mu_1 Ndy = dV_1 = \psi' dV = \psi'(V) \mu Mdt + \psi'(V) \mu Ndy$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu \psi'(V) \text{ или } \mu_1 = \mu \varphi(V) \text{ для } \forall \mu, \mu_1.$$

Следствие. Если известно два интегральных множителя при $\mu/\mu_1 \neq const$, то условие $\frac{\mu_1(t,y)}{\mu(t,y)} = C$ дает общее решение дифференциального уравнения т.к.

$$\frac{\mu_1}{\mu} = C \Rightarrow \frac{\mu \varphi(V)}{\mu} = C \Rightarrow \varphi(V) = C \Rightarrow V(t,y) = C \text{ – общее решение.}$$

Как найти $\mu(t,y)$?

Пусть

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t},$$

но $\exists \mu$ такое, что

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N).$$

Откуда получим

$$N \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)$$

1) Если $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ($\mu = \mu(t)$), то

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(t) dt = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) dt.$$

\Rightarrow Если $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = f(t)$ (функция только от t), то

$$\mu(t) = e^{\int f(t) dt} \quad (7.9)$$

2) Если $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = \varphi(y)$ (функция только y), то $\mu = \mu(y)$ – функция только y , и мы имеем

$$\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \varphi(y) dy} \quad (7.10)$$

п.8. Нормальные системы ДУ. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы и уравнения n -го порядка.

$$\text{Нормальная система} \quad \begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ \bar{y}(t = t_0) = \bar{y}^0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Т е о р е м а 8.1. Если $\bar{f} = \{f_m(t, y_1, \dots, y_n)\}$ для всех $m \in [1, n]$ удовлетворяет условиям

1) непрерывности по всем аргументам в области

$$|t - t_0| \leq T; \quad |y_m - y_m^0| \leq b \quad (b - \text{одно и то же для } \forall m);$$

2) условию Липшица по \bar{y} , т.е.

$$|f_m(t, \bar{y}') - f_m(t, \bar{y}'')| \leq K \{|y_1' - y_1''| + \dots + |y_n' - y_n''|\} \quad \text{для всех } m \in [1, n],$$

то решение задачи Коши $\bar{y}(t)$ для нормальной системы дифференциальных уравнений существует и единственно на отрезке $|t - t_0| < h$, где $h = \min(T, b/M)$, $|f_m| < M$ для $\forall m$.

Доказательство.

Строится эквивалентная система интегральных уравнений

$$y_m(t) = y_m^0 + \int_{t_0}^t f_m(\tau, y_1(\tau), \dots, y_n(\tau)) d\tau, \quad m \in [1, n]. \quad (8.2)$$

1) Доказательство эквивалентности аналогично лемме 3.1.

2) Доказательство единственности аналогично теореме 3.1, но только нужно учитывать векторный характер решения.

Пусть есть два решения

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}\} \\ \bar{y}_2 &= \{y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}\} \end{aligned}$$

у которых не все y_{1k} равны y_{2k} , тогда не равна нулю функция

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^n |y_{1k} - y_{2k}|$$

Из (8.2) следует

$$y_{1k} - y_{2k} = \int_{t_0}^t (f_k(\tau, \bar{y}_1) - f_k(\tau, \bar{y}_2)) d\tau \Rightarrow |y_{1k} - y_{2k}| \leq K \int_{t_0}^t \Phi(\tau) d\tau \Rightarrow$$

Просуммировав по всем "k", получим

$$0 \leq \Phi(t) \leq Kn \int_{t_0}^t \Phi(\tau) d\tau.$$

Из леммы Гронуолла - Беллмана имеем

$$0 \leq \Phi(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \equiv 0 \Rightarrow \bar{y}_1 = \bar{y}_2.$$

Единственность доказана.

2) Доказательство существования аналогично теореме 4.1.

Строим итерационный процесс

$$\bar{y}^{(s)}(t) = \bar{y}^{(0)} + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{y}_{(\tau)}^{(s-1)}) d\tau \quad (s - \text{номер итерации}).$$

Если $\begin{cases} |t - t_0| \leq h \\ h = \min(T, b/M) \end{cases}$, то все $\bar{y}^{(s)} \in D$,

т.е. для $\forall s \quad |y_m^{(s)} - y_m^0| \leq b$,

т.к. $|y_m^{(s)} - y_m^0| \leq \int_{t_0}^t |f_m(\tau, \bar{y}_{(\tau)}^{(s-1)})| d\tau \leq M(t - t_0) \leq Mh \leq b$.

Рассматриваем сходимость ряда $\sum_{s=1}^{\infty} (y_m^{(s)} - y_m^{(s-1)})$.

Оценка : $|y_m^{(s)} - y_m^{(s-1)}| \leq M(nK)^{s-1} \frac{h^s}{s!}$.

Дальше все аналогично теореме 4.1. Мажорантный ряд сходится по признаку Даламбера. Функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно к непрерывной функции по признаку Вейерштрасса.

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} y_m^{(s)} = Y_m(t); \quad \text{т.е.} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \bar{y}^{(s)} = \bar{Y}(t).$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{y}_{(\tau)}^{(s)}) d\tau = \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{Y}(\tau)) d\tau \Rightarrow$$

$\exists Y(t)$ такая, что

$$\bar{Y}(t) = \bar{y}^0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{Y}(\tau)) d\tau.$$

Так как интегральное уравнение эквивалентно решению задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\bar{Y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{Y}(t)) \\ \bar{Y}(t = t_0) = \bar{y}^0 \end{cases},$$

то решение задачи Коши $\bar{y}(t) \exists$.

Существование и единственность решения уравнения n -го порядка.

Имеем

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dt^n} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) ; & t \in [t_0, t_0 + T] ; \\ y = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (8.3)$$

Теорема 8.2. Задача Коши (8.3) для уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной, правая часть которого $f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ удовлетворяет условиям:

- 1) непрерывности по всем аргументам и
- 2) условию Липшица по аргументам $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, имеет решение и притом единственное.

Доказательство.

Сведем (8.3) к задаче Коши для нормальной системы

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \{y_1 = y(t), y_2 = y'(t), \dots, y_n = y^{(n-1)}(t)\}; \bar{y}_0 = \{y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}\} \\ \bar{f}(t, \bar{y}) &= \{y_2, y_3, \dots, y_n, f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\} \end{aligned}$$

Тогда имеем нормальную систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}), & t \in [t_0, t_0 + T]; \\ \bar{y}(t = t_0) = \bar{y}_0. \end{cases}$$

Проверяем удовлетворяет ли $\bar{f}(t, \bar{y})$ условиям 1) и 2) теоремы (8.1)? Удовлетворяет. Следовательно, теорема 8.2 доказана.

п.9. Непрерывность решений дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам.

Регулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений. Понятие о сингулярном возмущении.

Задача Коши как модель. Начальные данные и правая часть зависят от параметров модели.

Задачу всегда можно свести к параметрам в правой части.

Пример $U(t) = U$

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = F(t, U, v_1), & 0 < t < T \\ U(t=0) = U_0(v_2), & |y - y_0| \leq A \end{cases}$$

Введем $y(t) = U(t) - U_0$, тогда

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, \bar{\mu}), & 0 < t < T \\ y(t=0) = 0, & |y| \leq a \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} f = F(t, y + U_0(v_2), v_1) \\ \bar{\mu} = (v_1, v_2) \end{array} \right. \quad (9.1)$$

Достаточно рассмотреть один параметр μ .

Теорема 9.1. Если в задаче Коши (9.1) $f(t, y, \mu)$ непрерывна по всем аргументам в области $D: \{0 \leq t < T, |y| \leq a, |\mu - \mu_0| \leq b\}$ и удовлетворяет по переменной "y" условию Липшица

$$|f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \leq K |y_1 - y_2|$$

всюду в D , причем K не зависит от t и μ , то решение задачи (9.1) $y = y(t, \mu)$ определено в D и непрерывно по t и μ .

Доказательство

Доказательство опирается на лемму Гронуолла – Беллмана.

Рассмотрим $\Delta y = y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)$.

$$\frac{dy(t, \mu + \Delta\mu)}{dt} = f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu); \quad y(t_0, \mu + \Delta\mu) = 0;$$

$$\frac{dy(t, \mu)}{dt} = f(t, y(t, \mu), \mu); \quad y(t_0, \mu) = 0;$$

откуда

$$\frac{d\Delta y}{dt} = f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu) \Rightarrow \quad (9.2)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta y = \int_{t_0}^t \{ & (f(\tau, y(\tau, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(\tau, y(\tau, \mu), \mu + \Delta\mu)) + \\ & + (f(\tau, y(\tau, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(\tau, y(\tau, \mu), \mu)) \} d\tau. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Используя условия Липшица по y и непрерывность функции $f(t, y, \mu)$ по μ , получим

$$|\Delta y| \leq K \int_{t_0}^t |\Delta y| d\tau + (t - t_0)\varepsilon(\delta); \quad |\Delta\mu| \leq \delta; \quad \varepsilon(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

По лемме Гронуолла - Беллмана имеем

$$|\Delta y| \leq K\varepsilon(\delta) \int_{t_0}^t (\tau - t_0) e^{k(t-\tau)} d\tau + t\varepsilon(\delta) \leq C\varepsilon(\delta).$$

Следовательно,

$$|\Delta y| \leq C\varepsilon(\delta) \quad \text{при} \quad |\Delta\mu| \leq \delta, \quad (9.4)$$

теорема доказана.

Изменения параметров задачи можно рассматривать как возмущение задачи. Тогда будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu = 0), & 0 < t < T, \\ y(t = 0) = 0, \end{cases} \quad \text{невозмущенная задача} \quad (9.5)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), & 0 < t < T, \\ y(t = 0) = 0 \quad |\mu| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad \text{возмущенная задача} \quad (9.6)$$

Как связано возмущенное решение с невозмущенным?

Теория возмущений - исследование асимптотики $y(t, \mu)$ $\mu \rightarrow 0$.

Регулярное возмущение: это означает, что $f(y, t, \mu)$ – удовлетворяет условиям теоремы Эи! и при $\mu \rightarrow 0$ эти условия не нарушаются, а $f(y, t, \mu)$ разлагается в степенной ряд по μ . Для регулярно возмущенных задач выполняются следующие теоремы. (Доказываем для одного уравнения. Легко переносится на системы).

Теорема 9.2 Если правая часть в задаче Коши (9.1) $f(t, y, \mu)$ непрерывна по всем переменным вместе с частными производными по y, μ в D , то \exists производная от решения по параметру μ непрерывная в D .

Доказательство

Из (9.2), разделив на $\Delta\mu$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta y}{\Delta\mu} \right) &= \frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu} \frac{\Delta y}{\Delta\mu} + \\ &+ \frac{f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}. \end{aligned}$$

При $\Delta\mu \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad (9.7)$$

т.к. $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in \exists$ и непрерывны, то (9.7) есть уравнение для $\frac{\partial y}{\partial \mu} = U$

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} U + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \\ U(t_0) = 0. \end{cases} \quad (9.8)$$

Правая часть линейна по $U \Rightarrow$ решение для (9.8) \exists и $!$. Значит $\exists \frac{\partial y}{\partial \mu} = U$.

Теорема доказана.

Без доказательства приведем теорему о разложении решения возмущенной задачи по малому параметру μ .

Теорема 9.3. Пусть в области

$D: (t_0 < t < t_0 + T, |y - y_0| \leq a, |\mu| \leq \varepsilon)$ **функция $f(t, y, \mu)$ обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и μ до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда существует сегмент $[t_0; t_0 + T]$, на котором для решения $y(t, \mu)$ возмущенной задачи (9.6) справедливо асимптотическое представление**

$$y(t, \mu) = y(t, 0) + \mu \frac{\partial y(t, 0)}{\partial \mu} + \dots + \frac{\mu^n}{n!} \frac{\partial^n y(t, 0)}{\partial \mu^n} + O(\mu^{n+1}) \quad (9.9)$$

Неравенство Чаплыгина.

Если имеются две задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f_1(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = f_2(t, z), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases}$$

причем в D выполняются условия

$f_1(t, y) \leq f_2(t, y)$ и $y_0 \leq z_0$, то при $t_0 < t < t_0 + T$ имеем $y(t) \leq z(t)$.

Сингулярное возмущение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), & t \in [0, T], \\ y(t=0) = y_0, & |\mu| \leq \varepsilon \end{cases}$$

возникает, если $f(y, t, \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ имеет нерегулярность, т.е. ведет себя особым (сингулярным) образом. Это, например,

1) $f(y, t, \mu = 0)$ не удовлетворяет условиям теоремы \exists и $!$ решения

2) $f \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow 0$ и т.п.

Наиболее частый и практически важный случай – это малый параметр при старшей производной

$$\mu y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (9.10)$$

или, соответственно, система с малым параметром при одной производной

$$\begin{aligned} \mu \frac{dy_1}{dt} = F_1(t, \bar{y}) &\Rightarrow \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{\mu} F_1(t, y) = f_1(t, y, \mu) \rightarrow \infty \quad \text{при } \mu \rightarrow 0; \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, \bar{y}); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, \bar{y}). \end{aligned} \tag{9.11}$$

п.10. Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка и его свойства. Сведение к нормальной системе первого порядка. Существование решения.

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(n-k)}(t) = f(t), \quad a_0(t) \neq 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{10.1}$$

$f(t) \equiv 0$ уравнение однородное,
 $f(t) \neq 0$ уравнение неоднородное.

Т е о р е м а 10.1. Линейность уравнения сохраняется при замене переменного $t = \varphi(\tau)$, $\varphi \in C_n$, $\varphi' \neq 0$ и линейном преобразовании функции $y(t) = \alpha(t)z(t) + \beta(t)$, $\alpha, \beta \in C_n$, $\alpha \neq 0$.

Доказательство.

$$1. \quad t = \varphi(\tau) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{dy}{d\tau} \right)$$

и т.д. $y^{(k)}$ линейная комбинация $\frac{d^k y}{d\tau^k}$.

Следовательно, сохраняется линейность уравнения.

$$2. \quad y = \alpha z + \beta \Rightarrow y' = \alpha z' + \alpha' z + \beta' \Rightarrow y'' = \alpha z'' + 2\alpha' z' + \alpha'' z + \beta''$$

и т.д. все линейно. Приведя подобные члены, получим линейное уравнение.

Т е о р е м а 10.2. Для линейного дифференциального уравнения выполняется принцип суперпозиции

$$L_n \left(\sum_{k=1}^m c_k y_k \right) = \sum_{k=1}^m C_k L_n(y_k) \tag{10.2}$$

Применение принципа суперпозиции:

$$1) \quad \text{Для суммы правых частей } f = \sum_{m=1}^M f_m$$

$$L_n(y_m) = f_m \Rightarrow y = \sum_{m=1}^M y_m.$$

Это суммирование источников.

2) Разделение задачи Коши на неоднородную с нулевыми начальными данными и на однородную с начальными данными.

$$\begin{cases} L_n(y) = f \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

$$y = U(t) + V(t)$$

$$\begin{cases} L(U) = f, \\ U(t_0) = 0, \dots, U^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} L(V) = 0, \\ V(t_0) = y_0, \dots, V^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

3) Разделение начальных данных для однородного уравнения.

$$\begin{cases} L_n(y) = 0 \\ y(t_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow y = \sum_{m=1}^n U_m(t) y_0^{(m-1)}$$

$$\begin{cases} L(U_m) = 0 \\ U_m^{(k)}(t_0) = 0 \quad k \in [0, n-1], k \neq m \\ U_m^{(m)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

4) Комбинация решений однородного уравнения есть решение однородного уравнения.

Теорема 10.3. (\exists и ! решения на всем интервале).

Если коэффициенты $\alpha_k(t)$ и правая часть $f(t)$ есть непрерывные функции при $t \in [t_0, t_0 + T]$, то решение \exists и ! на всем интервале $[t_0, t_0 + T]$. (т.к. условия теоремы \exists и ! выполняются на всем интервале).

Линейное дифференциальное уравнение (10.1) сводится к нормальной линейной системе дифференциальных уравнений. Введем вектор-функцию

$$\bar{u}(t) = (u_1 = y(t), u_2 = y'(t), \dots, u_n = y^{(n-1)}(t)),$$

для которой получим нормальную линейную систему уравнений

$$u'_m(t) = \begin{cases} u_{m+1}(t) & \text{при } m \in [1, n-1] \\ \sum_{k=1}^n b_k(t) u_{n-k+1}(t) + f(t) & \text{при } m = n, b_k = -\frac{a_k(t)}{a_0(t)}. \end{cases} \quad (10.3)$$

В общем случае нормальная линейная система уравнений записывается в виде:

$$\bar{u}'(t) = \hat{A}\bar{u} + \bar{F}, \quad (10.4)$$

где матрица $\hat{A} = \{\alpha_{mk}(t)\}$ $m, k \in [1, n]$. В дальнейшем мы будем подробно рассматривать линейную систему дифференциальных уравнений, т.к. уравнение n -го порядка сводится к частному случаю такой системы.

п.11. Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Понижение порядка уравнения. Уравнение Риккати.

Рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = f(t). \quad (11.1)$$

Оно сводится к системе второго порядка введением вектор-функции $\bar{u}(t) = (u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t))$, для которой получаем систему

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = -a_2(t)u_1(t) - a_1(t)u_2(t) + f(t) \end{cases}$$

или

$$\bar{u}'(t) = \hat{A}\bar{u} + \bar{f}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

У линейного однородного уравнения ($f = 0$) можно понизить порядок, введя новую функцию

$$Z(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}. \quad (11.3)$$

Тогда

$$y'(t) = Z(t)y(t), \quad y'' = Z'y + Zy' = Z'y + Z^2y. \quad (11.4)$$

Подставив (11.4) в (11.1) при $f = 0$, получим

$$Z'(t) + Z^2 + a_1(t)Z + a_2(t) = 0. \quad (11.5)$$

Полученное уравнение является уравнением Риккати.

Общий вид уравнения Риккати:

$$y'(t) = p(t)y^2 + q(t)y + r(t),$$

которое заменой искомой функции $y = -\frac{Z(t)}{p(t)}$ приводится к виду (11.5).

$$Z'(t) + Z^2(t) - \left(q(t) + \frac{p'}{p} \right) Z + r(t)p(t) = 0.$$

В уравнении (11.5) можно убрать член, содержащий Z , не изменяя коэффициента при Z^2 с помощью замены искомой функции

$$Z(t) = u(t) - \frac{a_1(t)}{2}. \quad (11.6)$$

Тогда из (11.5) получим

$$u'(t) = -u^2(t) + R(t); \quad R(t) = \frac{a_1^2 + 2a_1'}{4} - a_2. \quad (11.7)$$

Если $R(t) = \text{const} = R_0$, то переменные разделяются и мы имеем

$$\frac{du}{R_0 - u^2} = dt$$

или

$$u(t) = \sqrt{R_0} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{R_0}t}}{1 + e^{-2\sqrt{R_0}t}} \quad (11.8)$$

Тогда, согласно (11.3) и (11.6), получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \sqrt{R_0} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{R_0}t}}{1 + e^{-2\sqrt{R_0}t}} - \frac{a_1(t)}{2} = q(t). \quad (11.9)$$

Откуда

$$y(t) = y(t_0) e^{\int_{t_0}^t q(\tau) d\tau}. \quad (11.10)$$

п.12. Общая теория однородных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Линейная однородная система

$$\begin{cases} y_i'(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) y_k(t), & i \in [1, n], \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ y_i(t_0) = y_i^0. \end{cases} \quad (12.1)$$

Если обозначить матрицу $\hat{A} = \{a_{ik}(t)\}$, а $\bar{y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}$, то задача Коши

$$\begin{cases} \bar{y}(t) = \hat{A} \bar{y}(t), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}^0 \end{cases}, \quad (12.2)$$

$L(\bar{y}) \equiv \bar{y}' - \hat{A} \bar{y}$ – линейный оператор, следовательно, к нему применим принцип суперпозиции

$$L\left(\sum_{m=1}^M C_m^{(m)} \bar{y}^{(m)}\right) = \sum_{m=1}^M C_m L^{(m)} \bar{y}^{(m)}. \quad (12.3)$$

Через $^{(m)}\bar{y}$ – обозначаем m -ое решение, чтобы отличить от m -ой производной $\bar{y}^{(m)}$.

Если $\bar{f}(t) = \sum_{m=1}^M a_m \bar{f}^{(m)}$, то $\bar{y}(t) = \sum_{m=1}^M a_m^{(m)} \bar{y}^{(m)}$, где $L^{(m)} \bar{y}^{(m)} = \bar{f}^{(m)}$.

Теорема 12.1. Пусть $^{(1)}y(t), \dots, ^{(n)}y(t)$ – " n " решений однородной системы

$$\bar{y}' - \hat{A} \bar{y} = 0. \quad (12.4)$$

Тогда матрица

$$\hat{W}(t) = \begin{Bmatrix} ^{(1)}y_1, \dots, ^{(n)}y_1 \\ \dots \\ ^{(1)}y_n, \dots, ^{(n)}y_n \end{Bmatrix}$$

удовлетворяет матричному уравнению

$$\hat{W}'(t) - \hat{A} \hat{W}(t) = 0 \quad (12.5)$$

и, наоборот, если матрица $\hat{W}(t)$ удовлетворяет уравнению (12.5), то ее столбцы есть вектора, являющиеся решением уравнения (12.4).

Доказательство проводится покомпонентным дифференцированием.

Т е о р е м а 12.2. Если $\hat{W}(t)$ - решение (12.5), то $\bar{y} = \hat{W}\bar{C}$ (\bar{C} - постоянный вектор) удовлетворяет системе (12.4), а $\hat{Z} = \hat{W}\hat{C}$ (\hat{C} - постоянная матрица) удовлетворяет матричному уравнению (12.5).

Доказательство следует из принципа суперпозиций.

О п р е д е л е н и е . Векторные функции ${}^{(1)}y(t), \dots, {}^{(n)}y(t)$ – линейно зависимы на интервале $\tau = \{t_0, t_0 + T\}$, если \exists ненулевой постоянный вектор \bar{C} такой, что выполняется тождество

$$\hat{W}\bar{C} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \forall t \in \tau. \quad (12.6)$$

Если условие (12.6) выполняется только при $\bar{C} \equiv 0$, то ${}^{(1)}\bar{y}(t), \dots, {}^{(n)}\bar{y}(t)$ являются линейно независимыми.

О п р е д е л е н и е . Определителем Вронского для системы вектор- функций $\{{}^{(i)}y(t)\}, i \in [1, n]$ называется

$$\Delta(t) = \text{Det } \hat{W}(t). \quad (12.7)$$

Т е о р е м а 12.3. Если решения $\{{}^{(k)}\bar{y}\} k \in [1, n]$ однородной системы $\bar{y}' - \hat{A}\bar{y} = 0$ линейно зависимы на $t \in \tau$, то определитель Вронского $\Delta(t) = 0$ для $\forall t \in \tau$.

Доказательство.

Из линейной зависимости следует $\exists \bar{C} \neq 0$ такое, что $\hat{W}\bar{C} = 0$. Это линейно однородная система для \bar{C} , следовательно, $\text{Det } \hat{W} = \Delta(t) = 0$.

Т е о р е м а 12.4. Если $\Delta(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in \tau$, то $\Delta(t) = 0$ и для $\forall t \in \tau$, и, следовательно, $\{{}^{(k)}\bar{y}\}$ линейно зависимы на τ .

Доказательство.

Пусть при $t = t_0 \in \tau$ имеем $\Delta(t_0) = 0$. Тогда $\exists \bar{C} \neq 0$, которые удовлетворяют системе уравнений $\hat{W}(t_0)\bar{C} = 0$. Возьмем $\bar{y}(t) = \hat{W}(t)\bar{C}$. Согласно теореме 12.2 \bar{y} решение задачи Коши

$$\begin{cases} \bar{y}' - \hat{A}\bar{y} = 0 & t \in \tau \\ \bar{y}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\bar{y} \equiv 0 \quad \forall t \in \tau$ по теореме единственности решения задачи Коши. Тогда $\hat{W}\bar{C} = 0$ для $\forall t \in \tau \Rightarrow \text{Det } \hat{W} = \Delta(t) = 0$ для $\forall t \in \tau$.

Т е о р е м а 12.5 (альтернатива). Определитель Вронского $\Delta(t)$ для решения $\{{}^{(k)}\bar{y}\} k \in [1, n]$ однородной системы дифференциальных уравнений или $\Delta(t) \equiv 0$ для $\forall t \in \tau$, что означает линейную зависимость $\{{}^{(k)}\bar{y}\}$, или $\Delta(t) \neq 0$ для $\forall t \in \tau$, что означает линейную независимость $\{{}^{(k)}\bar{y}\}$.

п.13. Фундаментальная система решений и общее решение для линейной системы дифференциальных уравнений.

О п р е д е л е н и е. **Фундаментальной системой** решений (Ф.С.Р.) однородной системы уравнений называется " n " линейно независимых решений $\{^{(k)}\bar{y}\}$, $k \in [1, n]$ этой системы, а соответственно матрица $\hat{W} = \{^{(1)}\bar{y}, ^{(2)}\bar{y}, \dots, ^{(n)}\bar{y}\}$ называется **фундаментальной матрицей системы**.

Фундаментальная матрица является решением матричного уравнения

$$\hat{W}'(t) = \hat{A}\hat{W}(t),$$

причем $Det\hat{W} \neq 0$.

Т е о р е м а 13.1. **Фундаментальная матрица существует.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Решение задачи Коши

$$\begin{cases} \hat{W}'(t) = \hat{A}\hat{W} & t \in \tau \\ \hat{W}(t_0) = \hat{E} \end{cases}$$

дает фундаментальную матрицу, т.к.

$$\Delta(t_0) = Det\hat{W}(t_0) = Det\hat{E} \neq 0,$$

следовательно, по т.12.2 $\Delta(t) \neq 0$ при $\forall t \in \tau$ и решения $\{^{(k)}\bar{y}\}$ - линейно независимы.

Т е о р е м а 13.2. Если $\hat{W}(t)$ - фундаментальная матрица для однородной системы, то ее общее решение представимо в виде: $\bar{y}(t) = \hat{W}\bar{C}$, где \bar{C} - произвольный постоянный вектор.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Согласно т.12.2. $\bar{y}(t) = \hat{W}\bar{C}$ есть решение однородной системы $\bar{y}' = \hat{A}\bar{y}$. Надо показать, что мы можем удовлетворять произвольным начальным данным Коши $\bar{y}(t_0) = \hat{W}(t_0)\bar{C} = \bar{y}^0$, т.к. $Det\hat{W}(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \bar{C}$ для $\forall \bar{y}^0$.

С л е д с т в и е. Решение задачи Коши для произвольных начальных данных \bar{y}^0 представимо в виде

$$\bar{y}(t) = \hat{Z}(t, t_0)\bar{y}^0,$$

где импульсная функция $\hat{Z}(t, t_0)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \hat{Z}'(t) = \hat{A}Z(t), & t \in \tau, \\ \hat{Z}(t_0) = \hat{E}. \end{cases} \quad (13.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из теоремы 12.2. следует $\bar{y}(t) = \hat{W}(t)\bar{C}$, где $\hat{W}(t_0)\bar{C} = \bar{y}^0 \Rightarrow \bar{C} = \hat{W}^{-1}(t_0)\bar{y}^0 \Rightarrow \bar{y}(t) = \hat{Z}(t, t_0)\bar{y}^0$, где

$$\hat{Z}(t, t_0) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0). \quad (13.2)$$

Легко видеть, что $\hat{Z}(t_0, t_0) = \hat{E}$ и $\hat{Z}(t)$ удовлетворяет (13.1).

п.14. Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений.

Т е о р е м а 14.1. Если $\hat{W}(t)$ – фундаментальная матрица, а ${}^{(0)}\bar{y}(t)$ – частное решение уравнения $\bar{y}' = \hat{A}\bar{y} + \bar{f}$, то общее решение неоднородного уравнения представимо в виде:

$$\bar{y}(t) = \hat{W}(t)\bar{C} + {}^{(0)}\bar{y}(t). \quad (14.1)$$

Т е о р е м а 14.2. Частное решение неоднородной системы с нулевыми начальными данными выражается через импульсную функцию в виде:

$${}^{(0)}\bar{y}(t) = \int_{t_0}^t \hat{Z}(t, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau, \quad (14.2)$$

а общее решение задачи Коши с условием $\bar{y}(t) = \bar{y}^0$ представимо в виде

$$\bar{y}(t) = \hat{Z}(t, t_0)\bar{y}^0 + \int_{t_0}^t \hat{Z}(t, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau. \quad (14.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) (14.3) получается из (14.1) и (14.2), поэтому надо доказать (14.2).

2) Формула (14.2) получается вариацией постоянной

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \hat{W}(t)\bar{C}(t) \\ \bar{y}'(t) &= \hat{W}'(t)\bar{C}(t) + \hat{W}(t)\bar{C}'(t) = \hat{A}\hat{W}(t)\bar{C}(t) + \bar{f}, \end{aligned}$$

т.к. $\hat{W}' = \hat{A}\hat{W}$, то имеем $\hat{W}(t)\bar{C}'(t) = \bar{f}(t) \Rightarrow \bar{C}'(t) = \hat{W}^{-1}(t)\bar{f}(t)$.

Т.к. $\bar{y}(t_0) = 0 = \hat{W}(t_0)\bar{C}(t_0) \Rightarrow \bar{C}(t_0) = 0 \Rightarrow$

$$\bar{C}(t) = \int_{t_0}^t \hat{W}^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau) d\tau \Rightarrow \bar{y}(t) = \int_{t_0}^t \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau) d\tau,$$

что и требовалось доказать, т.к. $\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau) = \hat{Z}(t, \tau)$.

п. 15. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае некрлатных корней характеристического уравнения.

Частное решение однородной системы $\bar{y}' = \hat{A}\bar{y}$ с постоянными коэффициентами будем искать в виде:

$$\bar{y}(t) = \bar{\alpha} e^{\lambda t}; \quad \bar{\alpha} \text{ – постоянный вектор.} \quad (15.1)$$

$$\text{Тогда } (\hat{A} - \lambda \hat{E})\bar{\alpha} = 0.$$

Для того, чтобы $\exists \bar{\alpha} \neq 0$, необходимо

$$M(\lambda) = \text{Det}(\hat{A} - \lambda \hat{E}) = 0, \quad (15.2)$$

где $M(\lambda)$ – характеристический многочлен для системы.

Т е о р е м а 15.1. Пусть $\{\lambda_k\}, k \in [1, n]$ – простые корни характеристического уравнения (15.2), а ${}^{(k)}\bar{y}(t) = {}^{(k)}\bar{\alpha} e^{\lambda_k t}$, где ${}^{(k)}\bar{\alpha}$ – нетривиальное решение системы

$$(\hat{A} - \lambda_k \hat{E}) {}^{(k)}\bar{\alpha} = 0. \quad (15.3)$$

Тогда ${}^{(k)}\bar{y}(t), k \in [1, n]$ образуют Ф.С.Р. системы $\bar{y}' = \hat{A}\bar{y}$.

Доказательство.

Функции $\{ {}^{(k)}\bar{\alpha} e^{\lambda_k t} = {}^{(k)}y(t) \} k \in [1, n]$ являются решением системы дифференциальных уравнений, поэтому достаточно доказать их линейную независимость. Доказательство от противного. Пусть они линейно зависимы, т.е.

$$\sum_{k=1}^n C_k {}^{(k)}\bar{\alpha} e^{\lambda_k t} = 0 \quad \sum_{k=1}^n C_k^2 \neq 0 \quad (15.4).$$

Пусть $C_1 \neq 0$ (это не ограничивает общности), тогда запишем (15.4) в виде

$$C_1 {}^{(1)}\bar{\alpha} e^{(\lambda_1 - \lambda_n)t} + C_2 {}^{(2)}\bar{\alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_n)t} + \dots + C_n {}^{(n)}\bar{\alpha} = 0.$$

Дифференцируя и умножая на $e^{-(\lambda_{n-1} - \lambda_n)t}$, получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_n) C_1 {}^{(1)}\bar{\alpha} e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})t} + \dots + C_{n-1} {}^{(n-1)}\bar{\alpha} = 0.$$

Дифференцируя и умножая на $e^{-(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})t}$, получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) C_1 {}^{(1)}\bar{\alpha} e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-2})t} + \dots + C_{n-2} {}^{(n-2)}\bar{\alpha} = 0$$

и т.д. Получаем, окончательно

$$(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) \dots (\lambda_1 - \lambda_2) C_1 {}^{(1)}\bar{\alpha} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = 0. \quad (15.5)$$

Т.к. λ_k – различны и ${}^{(1)}\bar{\alpha} \neq 0$, то $C_1 = 0$. Пришли к противоречию \Rightarrow не $\exists C_k$ таких, что выполняется (15.4). \Rightarrow Теорема доказана.

п.16. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений при кратных корнях характеристического уравнения.

Пусть λ_k – корень характеристического уравнения $\text{Det}(\hat{A} - \lambda \hat{E}) = 0$ имеет кратность m_k . Мы знаем из алгебры, что для матрицы с кратным собственным значением λ_k собственные вектора ${}^{(j)}\bar{e}, j \in [1, m_k]$ находятся из жордановой формы

$$\begin{aligned} \hat{A} {}^{(1)}\bar{e} &= \lambda_k {}^{(1)}\bar{e} \\ \hat{A} {}^{(2)}\bar{e} &= \lambda_k {}^{(2)}\bar{e} + {}^{(1)}\bar{e} \\ &\dots \\ \hat{A} {}^{(m_k)}\bar{e} &= \lambda_k {}^{(m_k)}\bar{e} + {}^{(m_k-1)}\bar{e} \end{aligned} \quad (16.1)$$

где ${}^{(1)}\bar{e}$ – собственный вектор, ${}^{(2)}\bar{e}, {}^{(3)}\bar{e}, \dots, {}^{(m_k)}\bar{e}$ – присоединенные вектора.

Выберем решения нашей системы таким образом, чтобы для векторов, определяющих решения, получилась жорданова форма. Для этого выберем первое решение в виде ${}^{(1)}\bar{y} = {}^{(1)}\bar{e}e^{\lambda_k t}$, где ${}^{(1)}\bar{e}$ – решение (нетривиальное) $\hat{A}{}^{(1)}\bar{e} = \lambda_k {}^{(1)}\bar{e}$.

Выберем второе решение для $\lambda = \lambda_k$ в виде:

$${}^{(2)}\bar{y} = ({}^{(2)}\bar{e} + {}^{(1)}\bar{e}t)e^{\lambda_k t} \Rightarrow \hat{A}({}^{(2)}\bar{e} + {}^{(1)}\bar{e}t)e^{\lambda_k t} = \{\lambda_k({}^{(2)}\bar{e} + {}^{(1)}\bar{e}t) + {}^{(1)}\bar{e}t\}e^{\lambda_k t}$$

или $\hat{A}{}^{(2)}\bar{e} + t\hat{A}{}^{(1)}\bar{e} = (\lambda_k {}^{(2)}\bar{e} + {}^{(1)}\bar{e}) + t\lambda_k {}^{(1)}\bar{e}$ (т.к. $\hat{A}{}^{(1)}\bar{e} = \lambda_k {}^{(1)}\bar{e}$), то получим для определения ${}^{(2)}\bar{e}$ уравнение

$$\hat{A}{}^{(2)}\bar{e} = \lambda_k {}^{(2)}\bar{e} + {}^{(1)}\bar{e}. \quad (16.2)$$

Если записать j -ое решение для λ_k в виде:

$${}^{(j)}\bar{y} = ({}^{(j)}\bar{e} + t{}^{(j-1)}\bar{e} + \frac{t^2}{2!}{}^{(j-2)}\bar{e} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}{}^{(1)}\bar{e})e^{\lambda_k t}; j \in [1, m_k], \quad (16.3)$$

тогда для ${}^{(j)}\bar{e} \quad j \in [1, m_k]$ получим жорданову форму (16.1). В алгебре известно, что если λ_k собственное значение матрицы \hat{A} кратности m_k , то (16.1) дают m_k линейно независимых векторов ${}^{(j)}\bar{e}, j \in [1, m_k]$. Таким образом, приходим к утверждению

Т е о р е м а 16.1. Каждому корню характеристического многочлена системы λ_k (кратности m_k) отвечает m_k решений, определенных (16.3), где ${}^{(j)}\bar{e} \quad j \in [1, m_k]$ является решением (16.1).

Т е о р е м а 16.2. Решения, определенные в т16.1, взятые для всех $k = 1, \dots, l \quad \left(\sum_{k=1}^l m_k = n \right)$ образуют Ф.С.Р.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Составим фундаментальную матрицу из решений ${}^{(j)}\bar{y}_{(k)} \quad k \in [1, l], j \in [1, m_k]$

$$\hat{W}(t) = \left\{ {}^{(1)}\bar{y}_1(t), \dots, {}^{(m_1)}\bar{y}_1, {}^{(1)}\bar{y}_2, \dots, {}^{(m_2)}\bar{y}_2, \dots, {}^{(1)}\bar{y}_l, \dots, {}^{(m_l)}\bar{y}_l \right\}.$$

Заметим, что ${}^{(j)}\bar{y}_{(k)}(t=0) = {}^{(j)}\bar{e}_{(k)}$, тогда

$$\Delta(t=0) = \text{Det} \hat{W}(t=0) = \text{Det} \left\{ {}^{(j)}\bar{e}_{(k)} \right\} \neq 0 \quad (\text{т.к. } {}^{(j)}\bar{e}_{(k)} \text{ - линейно независимы)}$$

$$\Rightarrow \Delta(t) \neq 0 \quad \text{для } \forall t \in \tau \Rightarrow \left\{ {}^{(j)}\bar{y}_{(k)}(t) \right\} \text{ линейно независимы} \Rightarrow \text{они составляют Ф.С.Р.}$$

п.17. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Исследование уравнения 2-го порядка. Формула Остроградского-Лиувилля.

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(t) \quad (17.1)$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n = \text{const.}$$

Исследуем однородное уравнение 2-го порядка

$$y''(t) + \alpha y'(t) + ky(t) = f(t) . \quad (17.2)$$

Сведем уравнение (12.2) к системе двух уравнений с двумя неизвестными функциями $u_1(t) = y(t)$, $u_2(t) = y'(t)$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = -ku_1(t) - \alpha u_2(t) \end{cases},$$

или

$$\vec{u}'(t) = \hat{A}\vec{u}(t), \quad (17.3)$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (17.4)$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$M(\lambda) = \text{Det}(\hat{A} - \lambda \hat{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -\lambda - \alpha \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0.$$

Откуда

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2}. \quad (17.5)$$

Возможны три случая.

1. $\alpha^2 > 4k$; λ_1, λ_2 – действительные и отрицательные, причем различные. Общее решение $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ т.к. $e^{\lambda_1 t} = y_1(t)$; $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ – линейно независимые функции. Их определитель Вронского

$$\Delta t = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0.$$

При начальных данных y_0 и y_0' получим:

$$y(t) = \frac{\lambda_2 y_0 - y_0'}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 y_0 - y_0'}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}.$$

Эти колебания не осциллирующие, а затухающие (апериодические).

2. $\alpha^2 < 4k$ корни комплексные, сопряженные

$$\lambda_1 = -a + ib; \quad \lambda_2 = -a - ib; \quad a = \frac{\alpha}{2}; \quad b = \frac{\sqrt{4k - \alpha^2}}{2}$$

$$y_1(t) = e^{-at} \cos bt; \quad y_2(t) = e^{-at} \sin bt,$$

$y_1(t)$ и $y_2(t)$ – линейно независимые функции, т.к. их определитель Вронского не равен 0:

$$\Delta t = \begin{vmatrix} e^{-at} \cos bt & e^{-at} \sin bt \\ -ae^{-at} \cos bt - be^{-at} \sin bt & -ae^{-at} \sin bt + be^{-at} \cos bt \end{vmatrix} = 2be^{-2at} \neq 0.$$

Общее решение

$$y(t) = (C_1 \cos bt + C_2 \sin bt)e^{-at}.$$

Решение осциллирует и затухает. Если $\alpha = 0$, то $a = 0$ (затухания нет) и имеем

$$y(t) = C_1 \cos \sqrt{k}t + C_2 \sin \sqrt{k}t - \text{периодические колебания.}$$

3. Если $\alpha^2 - 4k = 0$, то имеем кратные корни

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2} = \lambda.$$

Имеем одно решение $y_1(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}$.

Другим решением линейно независимым с y_1 является $y_2(t) = te^{-\frac{\alpha}{2}t}$. Их определитель Вронского не равен нулю:

$$\Delta t = \begin{vmatrix} e^{-\frac{\alpha}{2}t} & te^{-\frac{\alpha}{2}t} \\ -\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}t} & e^{-\frac{\alpha}{2}t} - \frac{\alpha}{2}te^{-\frac{\alpha}{2}t} \end{vmatrix} = e^{-\alpha t} \neq 0.$$

Общее решение $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\alpha}{2}t}$.

Рассмотрим теперь вывод формулы Остроградского-Лиувилля. Пусть нам известно два независимых решения (17.2) $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения

$$y''(t) + p_1(t)y'(t) + p_2(t)y(t) = 0 \quad (17.6)$$

Тогда определитель Вронского

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Подставим вторые производные из уравнения (17.6)

$$y_m'' = -p_1(t)y_m' - p_2(t)y_m, \quad m \in [1, 2].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} &= -(p_1(t)y_2' + p_2(t)y_2)y_1 + (p_1(t)y_1' + p_2(t)y_1)y_2 = \\ &= -p_1(t)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -p_1(t)\Delta(t) \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = -p_1(t)\Delta(t). \quad (17.7)$$

Решение этого уравнения дает выражение определителя Вронского через первый коэффициент дифференциального уравнения $p_1(t)$:

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p_1(\tau) d\tau} \quad (17.8)$$

Это формула Остроградского - Лиувилля. $\Delta(t_0)$ находим из начальных данных, а по (17.8) $\Delta(t)$ при $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$. Формула (17.8) позволяет получить общее решение уравнения 2-го порядка, если известно одно частное решение уравнения (17.6). Пусть $y_1(t)$ – известное решение и $y(t)$ – общее решение. Тогда из (17.8) имеем

$$y_1(t)y'(t) - y_1'(t)y(t) = C_1 e^{-\int_{t_0}^t p_1(\tau) d\tau},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y(t)}{y_1(t)} \right) = \frac{C_1}{y_1^2(t)} e^{-\int_{t_0}^t p_1(\tau) d\tau}.$$

Окончательно,

$$y(t) = y_1(t) \left\{ C_1 \int_{t_0}^t \frac{e^{-\int_{t_0}^t p_1(\tau) d\tau}}{y_1^2(\tau)} d\tau + C_2 \right\}. \quad (17.9)$$

Формула (17.9) дает выражение для общего решения дифференциального уравнения 2-го порядка через известное одно решение $y_1(t)$ и первый коэффициент уравнения $y_1(t)$.

п.18. Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость решения линейной системы.

Мы рассматривали все свойства дифференциальных уравнений, если решение определено на конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$. Возникает вопрос, что будет с непрерывностью по начальным данным при $t \rightarrow \infty$. Это и входит в теорию устойчивости.

$$\text{Имеем задачу Коши } \begin{cases} y'(t) = ay - 1 \\ y(t=0) = \frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow y_0(t) = \frac{1}{a} \text{ – решение.}$$

Изменим начальные данные на малую величину δ

$$\begin{cases} y' = at - 1 \\ y(t_0) = \frac{1}{a} + \delta \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{a} + \delta e^{at}.$$

Следовательно, $y(t) - y_0 = \delta e^{at}$, при конечном t имеем

$$|y(t) - y_0(t)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

а при $t \rightarrow \infty$ для $\forall \delta > 0$ имеем $\begin{cases} (y(t) - y_0) \rightarrow 0 \\ a < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} (y(t) - y_0) \rightarrow \infty \\ a > 0 \end{cases}$.

Ясно, что безразлично какие начальные t_0 . Поэтому в дальнейшем рассматриваем $0 \leq t < \infty$. Причем, изучаем $\bar{x}(t) = \bar{y}(t) - y(t=0)$, т.е. задача Коши для $\bar{x}(t)$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t)), & 0 \leq t < \infty \\ \bar{x}(t=0) = 0, & (\bar{f}(t, \bar{x}=0) = 0) \end{cases} \quad (18.1)$$

т.е. $\bar{x}=0$ является решением (18.1).

Устойчивость определяется поведением решения (18.1) при $t \rightarrow \infty$, если в (18.1) возмутить начальное условие $\bar{x}(t=0) = \bar{x}_0$. Таким образом, вопрос об устойчивости связан с тем: остается ли решение на фазовой плоскости в окрестности точки покоя ($\bar{x}=0$) или выходит из нее.

О п р е д е л е н и е.

Решение задачи (18.1) $\bar{x}=0$ называется устойчивым по Ляпунову, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\|\bar{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$ для всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$\|\bar{x}(t, x_0)\| < \varepsilon \quad (18.2)$$

и асимптотически устойчивым, если кроме устойчивости выполняется условие: $\exists \delta_0 > 0$ такое, что при $\|\bar{x}_0\| < \delta_0 < \delta(\varepsilon)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t, x_0) = 0. \quad (18.3)$$

Исследуем устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами. Для исследования необходимо иметь некоторые оценки, которые даются в лемме 18.1.

Лемма 18.1.

Справедливы следующие оценки:

$$1. \bar{y}(t) = \left\{ y_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k(t) \right\} = \hat{A} \bar{x}.$$

Если $|a_{ik}(t)| \leq a(t)$, то

$$\|\bar{y}\| \leq Ca(t) \|\bar{x}\| \quad (18.4)$$

$$2. \bar{y} = \left\{ y_i = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ijl}(t) x_j x_l \right\}, \quad |a_{ijl}| \leq a(t), \quad \text{тогда}$$

$$\|\bar{y}\| \leq Ca(t) \|x\|^2. \quad (18.5)$$

$$3. \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq C(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|). \quad (18.6)$$

$$4. \left\| \int_0^t \bar{y}(\tau) d\tau \right\| \leq C \int_0^t \|\bar{y}(\tau)\| d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (18.7)$$

5. Для импульсной функции $\hat{Z}(t, t_0) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0)$ формулы (13.2) справедливо неравенство

$$|Z_{ij}(t, t_0)| = |Z_{ij}(t - t_0, 0)| < Ce^{(p+\gamma)(t-t_0)}, \quad (18.8)$$

где $p = \max_{k \in [1, n]} (\operatorname{Re} \lambda_k)$, γ – положительная постоянная.

Доказательство.

$$1. y_i^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k(t) \right)^2 \leq a^2(t) \left(\sum_{k=1}^n |x_k(t)| \right)^2 \leq na^2(t) \|\bar{x}\|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\bar{y}\|^2 \leq n^2 a^2(t) \|\bar{x}\|^2 \Rightarrow \|\bar{y}\| \leq na(t) \|\bar{x}\|$$

$$2. y_k^2 = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ijk}(t)x_j x_l \right)^2 \leq a^2(t) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n |x_j| |x_l| \right)^2 = \\ = a^2(t) \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^2 \left(\sum_{l=1}^n |x_l| \right)^2 \leq a^2(t) \|\bar{x}\|^4 \Rightarrow$$

$$\|\bar{y}\|^2 \leq ny_k^2 \Rightarrow \|\bar{y}\|^2 \leq na^2(t) \|\bar{x}\|^4 \Rightarrow \|\bar{y}\| \leq \sqrt{na}(t) \|\bar{x}\|^2.$$

$$3. (x_i + y_i)^2 \leq x_i^2 + y_i^2 + 2|x_i||y_i| \leq 2(x_i^2 + y_i^2) \Rightarrow \\ \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \sqrt{2} \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2} \leq \sqrt{2}(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)$$

$$4. \int_0^t y_i(\tau) d\tau \leq \int_0^t \|\bar{y}\| d\tau \Rightarrow \left\| \int_0^t \bar{y}(\tau) d\tau \right\| \leq \sqrt{n} \int_0^t \|\bar{y}\| d\tau$$

5. Переходя к новой переменной $\tau = t - t_0$ в задаче $\begin{cases} \hat{Z}' = A\hat{Z} \\ \hat{Z}(t_0) = \hat{E} \end{cases}$,

приходим к $Z_{ij}(t, t_0) = Z_{ij}(t - t_0, 0)$.

Тогда $\hat{Z}(t - t_0, 0) = \hat{W}(t - t_0)\hat{W}(0) \Rightarrow |Z_{ij}(t - t_0, 0)| \leq Ce^{(p+\gamma)(t-t_0)}$

т.к. $|W_{ij}(t - t_0)| \leq \sum c_k t^j e^{\lambda_k(t-t_0)}$, а $t^j \leq e^{\gamma(t-t_0)}$, $p = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k$.

Теорема 18.1. Решение линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \hat{A}\bar{x}, \quad t > 0; \quad \hat{A} = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = \text{const} \\ \bar{x}(t=0) = 0 \end{cases} \quad (18.9)$$

асимптотически устойчивое, если для всех корней характеристического многочлена выполняется условие

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \text{ для } \forall k, \quad (18.10)$$

и неустойчиво, если хотя бы одно $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$.

Доказательство.

В п.15 и п.16 мы описали, как строится решение для λ_k .

$$\begin{aligned} {}^{(m)}\bar{x}_{(k)}(t) &= (\bar{c}_1 + \bar{c}_2 t + \dots + \bar{c}_{m_k} t^{(m_k-1)}) e^{\lambda_k t} \\ \Rightarrow \left\| {}^{(m)}\bar{x} \right\| &\leq C e^{(p_k + \gamma)t}, \text{ где } p_k = \operatorname{Re} \lambda_k. \end{aligned}$$

$$\text{Фундаментальная матрица решений } \hat{W}(t) \begin{cases} \hat{W}' = \hat{A} \hat{W} \\ \hat{W}(t=0) = \hat{E} \end{cases}$$

имеет столбцы из фундаментальных решений

$$\Rightarrow \left\| \hat{W} \right\| \leq C e^{(p + \gamma)t}, \text{ где } p = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k.$$

Если в (18.9) возмутить начальные условия $\bar{x}(t=0) = \bar{\varepsilon}_0$, то решение (18.9) будет $\bar{x}(t) = \hat{W}(t) \bar{\varepsilon}_0 \Rightarrow \left\| \bar{x}(t) \right\| \leq \left\| \hat{W} \right\| \left\| \bar{\varepsilon}_0 \right\| \leq C \left\| \bar{\varepsilon}_0 \right\| e^{(p + \gamma)t}$.

Если все $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, то при $t \rightarrow \infty \left\| \bar{x}(t) \right\| \rightarrow 0$.

Если хотя бы одно $\operatorname{Re} \lambda_k = \lambda_0 > 0$, то $\left\| \bar{x} \right\| \geq C \left\| \bar{\varepsilon}_0 \right\| e^{(\lambda_0 - \gamma)t} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Если $\exists \operatorname{Re} \lambda_k = 0$, а остальные $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, то вопрос об устойчивости сложен. Возможны разные варианты.

п.19. Исследование устойчивости решения системы по первому приближению.

Рассмотрим нелинейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}), \quad t > 0, \quad \bar{f}(0) = 0 \\ \bar{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (19.1)$$

Автономной называется система, правая часть которой не зависит от t .

Исследование на устойчивость по первому приближению проводится следующим образом:

1) Разлагаем $\bar{f}(\bar{x})$ в ряд, учитывая, что $\bar{f}(0) = 0$. Тогда

$$\bar{f}(\bar{x}) = \hat{A} \bar{x} + \bar{R} \quad (19.2)$$

где $\hat{A} = \left\{ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}=0} \right\}$, а \bar{R} – остаточный член, который можно представить в виде;

$$\bar{R} = \{R_i\} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_l} \Big|_{\bar{x}=\theta \bar{x}} x_l x_j \text{ (взяв в средней точке)}. \quad (19.3)$$

2) Рассмотрим устойчивость линейной части системы $\frac{d\bar{x}}{dt} = \hat{A}\bar{x}$. Если все $\text{Re } \lambda_k$ матрицы \hat{A} меньше нуля, то решения линеаризованной системы устойчивые.

3) Исследуем как влияет на устойчивость нелинейная поправка $\bar{R}(\bar{x})$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{R}(\bar{x}), & t > 0 \\ \bar{x}(t=0) = \bar{x}_0 \end{cases} \quad (19.4)$$

Пусть $\hat{Z}(t, \tau) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)$ – импульсная функция для системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \hat{A}\bar{x}.$$

Тогда из (19.4) получим

$$\bar{x}(t) = \hat{Z}(t, 0)\bar{x}_0 + \int_0^t \hat{Z}(t, \tau)\bar{R}(\bar{x}(\tau))d\tau. \quad (19.5)$$

Используя лемму 18.1, получим

$$\|\bar{R}\| \leq C \|\bar{x}\|^2,$$

Тогда

$$\|\bar{x}\| \leq Ce^{-\alpha t} \|x_0\| + C \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|x\|^2 d\tau, \quad (19.6)$$

где $\alpha = -(p + \gamma)$; $p = \max_k \text{Re } \lambda_k < 0$, γ – любое положительное число, $p + \gamma < 0$.

Чтобы из (19.6) получить оценку для $\|\bar{x}\|$ при $t \rightarrow \infty$, рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \alpha z + cz^2, & t > 0 \\ z(0) = z_0 > c\|x_0\|, & c > 0 \end{cases} \quad (19.7)$$

Сведем к интегральному уравнению, считая $f = cz^2$,

$$z(t) = z_0 e^{-\alpha t} + c \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} z^2(\tau) d\tau. \quad (19.8)$$

Сравнивая (19.6) и (19.8), получаем

$$z(t) > \|\bar{x}\| \quad \text{при любом } t \geq 0. \quad (19.9)$$

Доказательство

$z(t)$ и $\|\bar{x}(t)\|$ непрерывны и при $t=0$ $z(0) > c\|\bar{x}_0\| = \|\bar{x}(0)\|$. Следовательно, $z(t) > \|\bar{x}(t)\|$ при $0 < t < t_1$. Пусть $z(t_1) = \|\bar{x}(t_1)\|$. Тогда

$$\begin{aligned} z(t_1) &= z_0 e^{-\alpha t_1} + c \int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\tau)} z^2(\tau) d\tau > \\ &> c\|x_0\| e^{-\alpha t_1} + c \int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1-\tau)} \|\bar{x}(\tau)\| d\tau = \|\bar{x}(t_1)\|. \end{aligned}$$

То есть, $z(t_1) > \|\bar{x}(t_1)\|$.

Пришли к противоречию. $\Rightarrow z(t) > \|\bar{x}(t)\|$ при $\forall t$.

Теперь оценку $\|\bar{x}(t)\|$ получаем из оценки $z(t)$, для которой имеется аналитическое решение

$$z(t) = \frac{\alpha z_0}{cz_0 + (\alpha - cz_0)e^{\alpha t}} \quad (19.10)$$

При $z_0 < \frac{\alpha}{c}$ имеем $z(t) > 0$ и имеем

$$0 < z(t) \leq \frac{\alpha z_0}{(\alpha - cz_0)} e^{-\alpha t} \Rightarrow \|\bar{x}(t)\| < \frac{\alpha z_0}{(\alpha - cz_0)} e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Имеем асимптотическую устойчивость.

Т е о р е м а 19.1. Пусть в некоторой окрестности точки покоя $\bar{x} = 0$ правая часть автономной системы $\bar{f}(\bar{x})$ непрерывна вместе с производными до 2-го порядка включительно. Тогда, если все λ_k характеристические числа матрицы

$$\hat{A} = \left\{ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}=0} \right\}$$

удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, то тривиальное решение системы (19.1) асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно λ_k имеет $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, то решение неустойчиво.

п.20. Исследование траектории в окрестности точки покоя.

Исследование проводим в двумерном случае $\bar{x} = \{x_1(t), x_2(t)\}$ для системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \hat{A}\bar{x}; \quad \hat{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \quad (20.1)$$

или

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{фазовая траектория} \\ \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} \end{matrix} \quad (20.2)$$

Точка $\bar{x} = 0$ является особой в уравнении (20.1). Предположим, что в системе (20.1) $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения и корни различны $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае общее решение (20.1) имеет вид:

$$\bar{x} = C_1 \bar{\alpha}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{\alpha}^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad (20.3)$$

где $\bar{\alpha}^{(1)}, \bar{\alpha}^{(2)}$ – собственные вектора матрицы \hat{A} , соответственно для λ_1 и λ_2 .

Тогда

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2'(t)}{x_1'(t)} = \frac{C_1 \lambda_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}}{C_1 \lambda_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}}. \quad (20.4)$$

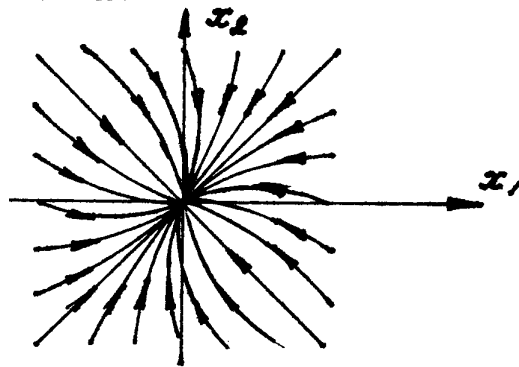
Рассмотрим различные случаи для разных соотношений между λ_1 и λ_2 .

1. Действительные λ одного знака.

1а. $\text{Im} \lambda_1 = \text{Im} \lambda_2 = 0$, $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ (отрицательные характеристические числа). Точка покоя, согласно теореме 19.1, асимптотически устойчива. Если $C_1 \neq 0$, то при

$$t \rightarrow \infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}} = \beta_1 \Rightarrow \text{при } t \rightarrow \infty \text{ имеем асимптотическую прямую } x_2 = \beta_1 x_1$$

(проходит через точку покоя). Если $C_1 = 0$, то имеем $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}} = \beta_2$ (прямая $x_2 = \beta_2 x_1$)



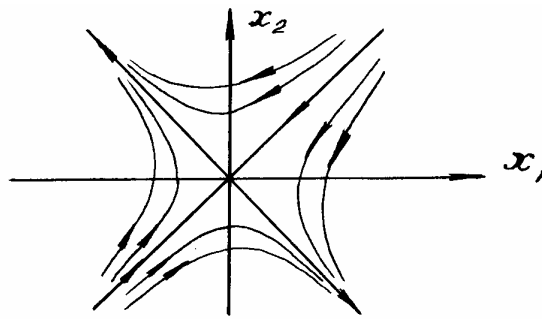
Такая точка покоя называется "узлом".

1б. $\text{Im} \lambda_1 = \text{Im} \lambda_2 = 0$, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ (положительные характеристические числа). Получается та же картина, но точка покоя неустойчива и "узел" расходящийся (стрелки идут от начала координат).

2. Действительные λ разного знака.

Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ ($\text{Im} \lambda_1 = 0$, $\text{Im} \lambda_2 = 0$). Точка покоя, согласно теореме 19.1, неустойчива. Если $C_1 \neq 0$, то $x_2 = \beta_1 x_1$, а, если $C_1 = 0$, то $x_2 = \beta_2 x_1$.

Полученные прямые называются "сепаратрисами".



Точка называется "седлом". Точка вначале идет к центру, но затем переходит на другую прямую и уходит в ∞ .

3. Случай разных комплексных характеристических чисел

$$\lambda_1 = \lambda = p + iq; \quad \lambda_2 = \lambda^* = p - iq.$$

В этом случае решение представляется в виде:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{pt} (\alpha \cos qt + \beta \sin qt) \\ x_2(t) = e^{pt} (\gamma \cos qt + \delta \sin qt) \end{cases} \quad (*)$$

причем, из линейной независимости, следует

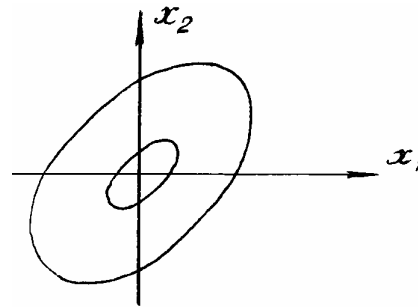
$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (**)$$

3а. Случай чисто мнимых λ ($p = 0$).

Тогда из системы (*) находим:

$$\sin qt = \frac{\gamma x_1(t) - \alpha x_2(t)}{-\alpha\delta + \beta\gamma}$$

$$\cos qt = \frac{+\delta x_1(t) - \beta x_2(t)}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$



Используя тождество $\sin^2 qt + \cos^2 qt = 1$, получим

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_1 - \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_2 \right)^2 + \left(\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_1 - \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_2 \right)^2 = 1.$$

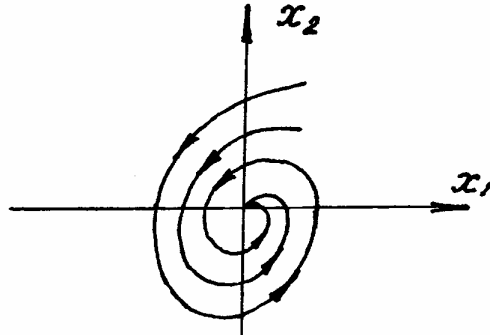
Это эллипсы. Точка покоя устойчива, но не асимптотически. Эта точка называется "центром".

В зависимости от начальных данных точка вращается вокруг центра (точка покоя), что соответствует эллипсу.

36. $p \neq 0$. Исключая $\cos qt$ и $\sin qt$, получим

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_1 - \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_2 \right)^2 + \left(\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_1 - \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x_2 \right)^2 = e^{2pt}.$$

Это эллиптическая спираль. При $p < 0$ имеем асимптотическую устойчивость, а при $p > 0$ – неустойчива. Точка называется "фокус".



Часть II.

Краевые задачи и вариационное исчисление.

п.21. Постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Формула Лагранжа.

1. В краевой задаче условия задают не только в начальной точке $t = t_0$, т.е. задача не локальна. Для уравнения 2-го порядка условие на двух концах $t = t_0$ и $t = t_0 + T$.

2. Физически имеем два случая:

– имеется временной отрезок $[t_0, t_0 + T]$, надо найти решение задачи, когда при частичных начальных данных в t_0 мы получим решение, обладающее некоторыми данными в конце при $t_0 + T$.

– имеется пространственный отрезок $0 < x < l$ и на обоих его концах (краях) заданы условия (граничные). Математически это выглядит одинаково.

3. Для уравнения n -го порядка

$$L_n(y) = y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = f(x), \quad x \in [0, l],$$

$$\text{при } x = 0 \quad \gamma_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} y^{(j)}(x=0) = \mu_i, \quad i \in [1, m],$$

$$\text{при } x=l \quad \Gamma_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} y^{(j)}(x=l) = v_i, \quad i \in [1, s],$$

$$m + s = n.$$

4. Для систем дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \hat{A}\bar{y} + f(x), \quad 0 < x < l,$$

$$\gamma(\bar{y}) = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(x=0) = \mu_i, \quad i \in [1, m],$$

$$\Gamma(\bar{y}) = \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j(x=l) = v_i, \quad i \in [1, s],$$

$$m + s = n.$$

5. В практике наиболее широко используются уравнения 2-го порядка

$$\begin{cases} L(y) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y(x) = f(x), & x \in [0, l], \quad p(x) > 0 \\ \gamma(y) = \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0 \\ \Gamma(y) = \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_1. \end{cases} \quad (21.1)$$

Задачу всегда можно свести к неоднородному уравнению с однородным краевым условием. Пусть $\varphi(x)$ – некоторая функция, такая, что $\gamma(\varphi) = u_0$, $\Gamma(\varphi) = u_1$. Тогда введем $u(x) = y(x) - \varphi(x)$ и получим

$$\begin{cases} L(u) = \tilde{f}, \quad \tilde{f} = f - L(\varphi), \\ \gamma(u) = 0, \\ \Gamma(u) = 0. \end{cases} \quad (21.2)$$

6. Задача на собственные значения (как задача с обратной линейной связью, т.е. $f(x, y) = -\lambda \rho(x)y(x)$)

$$\begin{cases} L(y) = -\lambda \rho(x)y(x), \\ \gamma(y) = 0; \quad \Gamma(y) = 0. \end{cases} \quad (21.3)$$

Требуется найти такие $\{\lambda_k\}$ (собственные значения), для которых существует нетривиальное решение краевой задачи (21.3) $\{y_k(x)\}$ (собственные функции).

Рассматриваем функции $y(x)$, заданные на $[0, l]$, непрерывные, дифференцируемые и имеющие непрерывную вторую производную, т.е. $y(x) \in C_2$. Решением краевой задачи (21.2) называется $y(x) \in C_2$, которое удовлетворяет уравнению $L(y) = f(x)$, $x \in (0, l)$ и краевым условиям $\gamma(y) = 0$ при $x = 0$ и $\Gamma(y) = 0$ при $x = l$.

Любые $y(x), z(x) \in C_2$ удовлетворяют тождеству Лагранжа

$$zL(y) - yL(z) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \left(z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} \right) \right), \quad (21.4)$$

Т е о р е м а 21.1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения $L(y) = 0$, то их определитель Вронского равен

$$\Delta(y_1, y_2) = \frac{C}{p(x)}, \quad (21.5)$$

причем при $y_1(x) \neq 0$, общее решение можно представить в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi) y_1^2(\xi)}. \quad (21.6)$$

Доказательство.

Из тождества Лагранжа (21.4) при $L(y_1) = L(y_2) = 0$ следует

$$p(x) \left(y_2(x) \frac{dy_1}{dx} - y_1(x) \frac{dy_2}{dx} \right) = C, \quad (21.7)$$

следовательно, справедливо (21.5).

Если $y_1(x) \neq 0$, то разделив (21.7) на $y_1^2(x)$, получим (при $y_2(x) = y(x)$), ($y(x)$ – независима от y_1)

$$\frac{y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x)}{y_1^2(x)} = \frac{C}{p(x)y_1^2(x)}$$

или

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y(x)}{y_1(x)} \right) = \frac{C}{p(x)y_1^2(x)}.$$

Проинтегрировав, получим окончательно

$$y(x) = y_1(x) \left(C_1 + C \int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)} \right),$$

т.е. получили (21.6). Теорема доказана.

п.22. Формула Грина. Построение решения краевой задачи с помощью функции Грина.

Проинтегрируем формулу Лагранжа (21.4) и получим

$$\int_0^l (zL(y) - yL(z)) dx = \left[p(x) \left(z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} \right) \right] \Big|_0^l. \quad (22.1)$$

Это выражение называют формулой Грина. Если $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же однородным граничным условиям, то $z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Откуда имеем

$$\int_0^l (zL(y) - yL(z)) dx = 0 \quad (22.2)$$

при $\gamma(z) = \gamma(y) = 0$; $\Gamma(z) = \Gamma(y) = 0$.

Функция Грина для краевой задачи, имеющей единственное решение.

Пусть однородная краевая задача $L(y) = 0$, $\gamma(y) = 0$, $\Gamma(y) = 0$ имеет только тривиальное решение, а $p(x) > 0$ (или < 0) на интервале $x \in [0, l]$ (т.е. $p(x) \neq 0$ для $\forall x \in [0, l]$).

Тогда функцией Грина такой задачи называется функция $G(x, \xi)$, являющаяся решением следующей задачи:

1. По x $L(G) = 0$ при $x \in (0, \xi)$ и $x \in (\xi, l)$.

2. При $x = 0$, $x = l$ граничные условия

$$\gamma(G) = 0, \Gamma(G) = 0. \quad (22.6)$$

3. $G \in C_2$ при $x \in (0, \xi)$ и $x \in (\xi, l)$, а при $x = \xi$ условия сопряжения

$$[G]_{x=\xi} = 0, \left[\frac{dG}{dx} \right]_{x=\xi} = 1/p(\xi).$$

С л е д с т в и е. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

Т е о р е м а 22.1. Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной краевой задачи \exists для любой непрерывной на $[0, l]$ функции $f(x)$ и выражается через функцию Грина в виде:

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (22.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказывается проверкой

$$y(x) = \int_0^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$y'(x) = \int_0^x \frac{dG(x, \xi)}{dx} f(\xi) d\xi + \int_x^l \frac{dG(x, \xi)}{dx} f(\xi) d\xi,$$

$$\begin{aligned} (p(x)y'(x))' &= \int_0^x \frac{d}{dx} \left(p \frac{dG}{dx} \right) f(\xi) d\xi + \int_x^l \frac{d}{dx} \left(p \frac{dG}{dx} \right) f(\xi) d\xi + \\ &+ p(x)f(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{\xi=x-0} - f(x)p(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{\xi=x+0}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\left[\frac{dG}{dx} \right]_{x=\xi} = - \left[\frac{dG}{dx} \right]_{\xi=x} = \frac{1}{p(x)}$, получим

$$(py')' = \int_0^l \frac{d}{dx} \left(p \frac{dG}{dx} \right) f(\xi) d\xi + f(x).$$

Следовательно,

$$L(y) = \int_0^l L(G(x, \xi)) f(\xi) d\xi + f(x)$$

$$\Rightarrow L(y) = f(x).$$

Аналогично, $\gamma(y) = \Gamma(y) = 0$, т.к. $\gamma(G) = \Gamma(G) = 0$.

Теорема доказана.

п.23. Существование функции Грина. Постановка краевой задачи при существовании решения однородной задачи.

Мы показали, что решение неоднородной краевой задачи выражается формулой (22.7) с помощью функции Грина. Необходимо доказать \exists функции Грина.

Построим 2 решения следующих задач Коши:

а. При $0 \leq x \leq \xi$

$$L(y_1) = 0,$$

$$y_1(0) = -\alpha_1,$$

$$y_1'(0) = \beta_1.$$

б. При $\xi \leq x \leq l$

$$L(y_2) = 0,$$

$$y_2(l) = -\alpha_2,$$

$$y_2'(l) = \beta_2.$$

Заметим, что

$$\gamma(y_1) = 0,$$

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0.$$

$$\Gamma(y_2) = 0,$$

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Функции $y_1(x, \xi)$ и $y_2(x, \xi) \exists$, т.к. есть теорема \exists решения задачи Коши.

Представим функцию Грина в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1 y_1(x), & 0 \leq x \leq \xi, \\ C_2 y_2(x), & \xi \leq x \leq l. \end{cases}$$

Заметим, что

$$1. L(G) = 0 \text{ при } x \in [0, \xi], x \in [\xi, l].$$

$$2. \text{ При } x = 0, x = l \text{ выполняются краевые условия } \gamma(G) = \Gamma(G) = 0.$$

3. Осталось доказать, что можно подобрать C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись условия сшивания при $x = \xi$:

$$[G]_{x=\xi} = C_2 y_2(\xi) - C_1 y_1(\xi) = 0,$$

$$\left[\frac{dG}{dx} \right]_{x=\xi} = C_2 y_2'(\xi) - C_1 y_1'(\xi) = 1/p(\xi).$$

Функции $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимы, т.к. y_1 не удовлетворяет однородному краевому условию $\Gamma(y_1) = 0$ при $x = l$, иначе \exists решение однородной краевой задачи. Тогда $\Delta(y_1, y_2) \neq 0$, а, согласно теореме 21.1,

$$\Delta(y_1, y_2) p(\xi) = C = const. \quad (23.1)$$

Следовательно, мы имеем:

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{C}; \quad C_2 = \frac{y_1(\xi)}{C}.$$

Окончательно, получаем функцию Грина в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{C}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{C}, & \xi \leq x \leq l, \end{cases} \quad (23.2)$$

где C находится согласно (23.1). Легко видеть, что $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Доказано существование функции Грина для случая, когда однородная задача имеет только тривиальное решение. Функция G единственна, т.к. однородная задача не имеет решений.

II. Рассмотрим теперь случай, когда однородная краевая задача имеет нетривиальное решение, причем других линейно независимых решений нет.

Рассмотрим для простоты I краевую задачу и пусть однородная краевая задача имеет решение $\varphi_0(x)$, т.е.

$$\begin{cases} L(\varphi_0) = 0, & x \in (0, l), \\ \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0(l) = 0 \quad (\gamma(\varphi_0) = 0, \Gamma(\varphi_0) = 0). \end{cases} \quad (23.3)$$

Т.к. любая $\varphi(x) = C\varphi_0(x)$ является решением задачи (23.3), то для единственности требуется дополнительное условие нормировки:

$$\int_0^l \varphi_0^2(x) dx = 1. \quad (23.4)$$

Л е м м а 23.1. **Необходимым условием разрешимости неоднородной краевой задачи является ортогональность правой части уравнения $f(x)$ к решению однородной задачи (23.3) φ_0 .**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{cases} L(y) = f \\ \gamma(y) = \Gamma(y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L(\varphi_0) = 0 \\ \gamma(\varphi_0) = \Gamma(\varphi_0) = 0 \\ \int_0^l \varphi_0^2(x) dx = 1 \end{cases}$$

Применяя формулу Грина и учитывая, что $y(x)$ и $\varphi_0(x)$ удовлетворяют однородному краевому условию, получим:

$$\int_0^l (\varphi_0(x)L(y(x)) - y(x)L(\varphi_0)) dx = 0.$$

Откуда

$$\int_0^l f(x)\varphi_0(x) dx = 0. \quad (23.5)$$

Л е м м а 23.2. Однородная краевая задача с дополнительным условием ортогональности решения к $\varphi_0(x)$ имеет только тривиальное решение, т.е. задача

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ \gamma(y) = \Gamma(y) = 0, \\ \int_0^l \varphi_0(x)y(x)dx = 0, \end{cases} \quad (23.6)$$

имеет только решение $y \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Т.к. однородная краевая задача имеет единственное линейно независимое решение $\varphi_0(x)$, то имеем $y(x) = C\varphi_0(x)$. Тогда из условия ортогональности имеем

$$0 = \int_0^l y(x)\varphi_0(x)dx = C \int_0^l \varphi_0^2(x)dx = C, \\ C = 0 \Rightarrow y(x) = 0.$$

Таким образом, если однородная краевая задача имеет единственное нормированное решение $\varphi_0(x)$

$$\begin{cases} L(\varphi_0) = 0, \quad x \in [0, l], \\ \varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \quad \int_0^l \varphi_0^2(x)dx = 1, \end{cases}$$

то постановка неоднородной краевой задачи в этом случае будет

$$\begin{cases} L(y) = f(x), \quad x \in (0, l), \\ y(0) = y(l) = 0 \quad (\gamma(y) = 0, \Gamma(y) = 0), \\ \int_0^l f(x)\varphi_0(x)dx = 0, \quad \int_0^l y(x)\varphi_0(x)dx = 0, \end{cases} \quad (23.7)$$

т.е. дополнительные условия ортогональности правой части и решения к $\varphi_0(x)$.

Первое условие согласно лемме 23.1, а второе согласно лемме 23.2. Осталось доказать \exists решения поставленной задачи.

п.24. Обобщенная функция Грина и представление решения с ее помощью.

Обобщенной функцией Грина для краевой задачи, имеющей единственное нормированное решение однородной краевой задачи $\varphi_0(x)$, называется функция $G_0(x, \xi)$, удовлетворяющая задаче:

1. По x уравнению $L(G_0) = -\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)$, $x \in (0, \xi)$ и $x \in (\xi, l)$.
2. По x граничному условию $G(0, \xi) = G(l, \xi) = 0$.
3. В т. $x = \xi$ условию сопряжения

$$[G_0]_{x=\xi} = 0, \left[\frac{dG_0}{dx} \right]_{x=\xi} = 1/p(\xi).$$

4. Условию ортогональности к $\varphi_0(x)$:

$$\int_0^l G_0(x, \xi) \varphi_0(x) dx = 0.$$

Теорема 24.1. Обобщенная функция Грина существует и единственна.

Доказательство.

Если было бы две обобщенные функции, то их разность удовлетворяла бы однородной краевой задаче и была бы ортогональна к φ_0 . Согласно лемме 23.2 решение такой задачи $\equiv 0 \Rightarrow$ решение единственно.

Докажем теперь $\exists G_0(x, \xi)$.

Рассмотрим три функции:

1. $\varphi_0(x)$; $L\varphi_0 = 0$; $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0$,
2. $\varphi_1(x)$ – линейно независимое с $\varphi_0(x)$ решение уравнения $L(\varphi_1) = 0$, причем $\Delta(\varphi_1, \varphi_0) = \varphi_1\varphi_0' - \varphi_1'\varphi_0 = 1/p(x)$,
3. $\omega(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} L(\omega) = -\varphi_0(\xi)\varphi_0(x), & x \in [0, l], \\ \omega(0) = 0, \\ \omega'(0) = 0. \end{cases} \quad (24.1)$$

Отметим, что $\varphi_1(0) \neq 0$ и $\varphi_1(l) \neq 0$, иначе в этих точках $\Delta(\varphi_1, \varphi_0) = 0$, а функции φ_1 и φ_0 линейно независимы.

Легко показать, что выполняется соотношение

$$\frac{\omega(l)}{\varphi_1(l)} = \varphi_0(\xi). \quad (24.2)$$

Для этого применим к φ_0 и ω формулу Грина

$$\int_0^l (\varphi_0 L(\omega) - \omega L(\varphi_0)) dx = \left\{ p(x)(\varphi_0 \omega' - \varphi_0' \omega) \right\} \Big|_0^l.$$

Учитывая свойства φ_0 и ω , получим

$$-\varphi_0(\xi) \int_0^l \varphi_0^2(x) dx = -p(l)\varphi_0'(l)\omega(l)$$

$$\varphi_0(\xi) = p(l)\varphi_0'(l)\omega(l) = \frac{\omega(l)}{\varphi_1(l)} (p(l)\varphi_0'(l)\varphi_1(l)).$$

Из $\Delta(\varphi_1, \varphi_0) = 1/p(x) \Rightarrow \varphi_1(l)\varphi_0'(l) = 1/p(l)$.

Поэтому имеем (24.2)

$$\varphi_0(\xi) = \frac{\omega(l)}{\varphi_1(l)}.$$

Представим теперь обобщенную формулу Грина в виде:

$$G_0(x, \xi) = \omega(x) + \begin{cases} C_1\varphi_1(x) + C_3\varphi_0(x); & 0 \leq x \leq \xi \\ C_2\varphi_1(x) + C_4\varphi_0(x); & \xi \leq x \leq l \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению $LG_0 = -\varphi_0(\xi)\varphi_0(x)$, а другие условия для G_0 должны быть выполнены подбором C_1, C_2, C_3, C_4 .

Граничные условия и условия сопряжения дают:

$$\begin{cases} \omega(0) + C_1\varphi_1(0) + C_3\varphi_0(0) = 0 \\ \omega(l) + C_2\varphi_1(l) + C_4\varphi_0(l) = 0 \\ C_2\varphi_1(\xi) + C_4\varphi_0(\xi) - C_1\varphi_1(\xi) - C_3\varphi_0(\xi) = 0 \\ C_2\varphi_1'(\xi) + C_4\varphi_0'(\xi) - C_1\varphi_1'(\xi) - C_3\varphi_0'(\xi) = 1/p(\xi) \end{cases} \quad (24.3)$$

Учитывая, что $\varphi_0(0) = 0, \varphi_0(l) = 0, \omega(0) = 0, \omega'(0) = 0$ и

$\frac{\omega(l)}{\varphi_1(l)} = \varphi_0(\xi)$, получим первые два уравнения системы в виде:

$$\begin{aligned} C_1\varphi_1(0) &= 0 \\ \varphi_0(\xi)\varphi_1(l) + C_2\varphi_1(l) &= 0. \end{aligned}$$

Откуда $C_1 = 0; C_2 = -\varphi_0(\xi)$. Тогда вторая пара уравнений системы примет вид:

$$\begin{cases} -\varphi_0(\xi)\varphi_1(\xi) + (C_4 - C_3)\varphi_0(\xi) = 0 \\ -\varphi_0(\xi)\varphi_1'(\xi) + (C_4 - C_3)\varphi_0'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} = \varphi_1(\xi)\varphi_0'(\xi) - \varphi_1'(\xi)\varphi_0(\xi) \end{cases}$$

Эти два уравнения эквивалентны и дают:

$$C_4 - C_3 = \varphi_1(\xi).$$

Таким образом, имеем

$$C_1 = 0, C_2 = -\varphi_0(\xi), C_4 = C_3 + \varphi_1(\xi). \quad (24.4)$$

Мы из четырех уравнений получили только три решения, т.к. 3-е и 4-е уравнения были тождественны из-за соотношения (24.2).

Учитывая (24.4), получим $G_0(x, \xi)$ в виде:

$$G_0(x, \xi) = \omega(x) + \begin{cases} C_3\varphi_0(x) & 0 \leq x \leq \xi \\ \varphi_1(\xi)\varphi_0(x) - \varphi_1(x)\varphi_0(\xi) + C_3\varphi_0(x) & \xi \leq x \leq l. \end{cases}$$

Подставив это выражение в условие ортогональности $G_0(x, \xi)$ к $\varphi_0(x)$, получим:

$$\int_0^l \omega(x)\varphi_0(x)dx + C_3 \int_0^l \varphi_0^2(x)dx +$$

$$+\int_{\xi}^l (\varphi_1(\xi)\varphi_0(x) - \varphi_1(x)\varphi_0(\xi))\varphi_0(x)dx = 0.$$

Откуда находим

$$C_3 = \varphi_0(\xi) \int_{\xi}^l \varphi_0(x)\varphi_1(x)dx - \varphi_1(\xi) \int_{\xi}^l \varphi_0^2(x)dx - \int_0^l \omega(x)\varphi_0(x)dx$$

Функция $G_0(x, \xi)$ полностью определена и удовлетворяет всем условиям задачи.

$\exists G_0(x, \xi)$ доказано.

Т е о р е м а 24.2. Необходимым и достаточным условием однозначности и разрешимости неоднородной краевой задачи является условие ортогональности правой части уравнения к собственной функции $\varphi_0(x)$. При этом решение представляется через обобщенную функцию Грина в виде:

$$y(x) = \int_0^l G_0(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

и оно ортогонально к $\varphi_0(x)$.

Доказательство проводится проверкой удовлетворения $y(x)$ всем условиям задачи, аналогично доказательству теоремы (22.1).

п.25. Задача Штурма-Лиувилля и ее свойства.

Задачей Штурма-Лиувилля называется задача на собственные значения для дифференциального уравнения $L(y) = (py')' - qy$, где

$p(x) > 0$ – непрерывная дифференцируемая функция,

$q(x)$ – непрерывная функция на $[0, l]$.

Постановка задачи.

Найти собственные значения $\{\lambda_k\}$, при которых однородная краевая задача

$$\begin{cases} L(y) + \lambda \rho(x)y(x) = 0, & x \in [0, l] \\ \gamma(y(0)) = 0, \quad \Gamma(y(l)) = 0, & \rho(x) > 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения, $\{y_k(x)\}$ – собственные функции. Предполагаем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Т е о р е м а 25.1. Если λ_k собственное значение задачи Штурма-Лиувилля, то ему соответствует единственная собственная функция $y_k(x)$.

Доказательство.

Предположим, что существуют две собственные функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$. Тогда они должны быть линейно независимы. Но при $x = 0$ выполняется граничное условие

$$\begin{cases} \alpha_1 y'_k(0) + \beta_1 y_k(0) = 0 \\ \alpha_1 z'_k(0) + \beta_1 z_k(0) = 0. \end{cases}$$

Т.к. \exists отличное от нуля решение (α_1, β_1) , то однородная алгебраическая система должна иметь определитель, равный нулю. Следовательно,

$$\Delta(y_k, z_k) = 0 \text{ при } x = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta(y_k, z_k) = 0 \text{ при } \forall x \in (0, l) \Rightarrow$$

$$y_k(x), z_k(x) - \text{линейно зависимы} \Rightarrow$$

возможна только одна собственная функция для данного λ_k .

Теорема 25.2. Собственные функции $y_k(x)$ и $y_m(x)$ для разных собственных значений $\lambda_k \neq \lambda_m$ ортогональны с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_0^l \rho(x) y_k(x) y_m(x) dx = 0 \quad k \neq m.$$

Доказательство.

Т.к. $y_k(x)$ и $y_m(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям, то из формулы Грина имеем

$$\int_0^l \{y_k(x)L(y_m(x)) - y_m(x)L(y_k(x))\} dx = 0.$$

Подставим $L(y_s) = -\lambda_s \rho(x) y_s(x)$, получим

$$(\lambda_k - \lambda_m) \int_0^l \rho(x) y_k(x) y_m(x) dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 25.3. Для граничных условий I или II рода $y(0) = 0$ (или $y'(0) = 0$); $y(l) = 0$ (или $y'(l) = 0$) и при $q(x) \geq 0$ все собственные значения задачи Штурма - Лиувилля положительны, $\lambda_n > 0$.

Доказательство.

Умножим уравнение Штурма - Лиувилля при λ_n на $y_n(x)$ и проинтегрируем по x .

Тогда

$$\int_0^l y_n(x) \left\{ \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy_n}{dx} \right) - q(x) y_n(x) + \lambda_n \rho(x) y_n(x) \right\} dx = 0.$$

Откуда найдем:

$$\lambda_n = \frac{\int_0^l q(x) y_n^2(x) dx - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy_n}{dx} \right) \cdot y_n(x) dx}{\int_0^l \rho(x) y_n^2(x) dx}.$$

Проинтегрировав по частям и учитывая граничные условия, получим;

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy_n}{dx} \right) y_n(x) = \left(p(x) y_n'(x) y_n(x) \right) \Big|_0^l + \int_0^l p(x) \left[\frac{dy_n}{dx} \right]^2 dx .$$

Окончательно получим:

$$\lambda_n = \frac{\int_0^l p(x) [y_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) y_n^2(x) dx}{\int_0^l \rho(x) y_n^2(x) dx} ,$$

т.к. $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, то имеем $\lambda_k > 0$.

Д о п о л н е н и е. Результат теоремы 25.3 $\lambda_k > 0$ переносится и на третье краевое условие $\gamma(y) = \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$, если $\beta_1 / \alpha_1 > 0$, $(\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0)$ и на условие $\Gamma(y) = \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0$, если $\beta_2 / \alpha_2 < 0$, $(\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0)$.

п.26. Редукция задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.

Запишем задачу Штурма - Лиувилля в виде неоднородной задачи:

$$\begin{cases} L(y) = f, f = -\lambda \rho y \\ \gamma(y) = 0 \\ \Gamma(y) = 0. \end{cases} \quad (26.1)$$

Т.к. $\lambda = 0$ не является собственным значением, следовательно, с помощью функции Грина $G(x, \xi)$ (22.7) имеем:

$$y(x) + \lambda \int_0^l G(x, \xi) \rho(\xi) y(\xi) d\xi = 0.$$

Если ввести новую функцию $y(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{\rho(x)}}$, $\rho(x) > 0$, то интегральное уравнение запишется в виде:

$$u(x) + \lambda \int_0^l K(x, \xi) u(\xi) d\xi = 0 \quad (26.2)$$

$$K(x, \xi) = \sqrt{\rho(x) \rho(\xi)} G(x, \xi).$$

Т.к. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, то ядро $K(x, \xi) = K(\xi, x)$, т.е. (26.2) – интегральное уравнение с симметричным ядром, и мы можем использовать теорию Шмидта.

Интегральное уравнение (26.2) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Интегральное уравнение (26.2) эквивалентно задаче

на собственные значения (26.1), т.е. \forall решение (26.2) $\{u_m(x), \lambda_m\}$ является решением (26.1)

$$\left\{ y_m(x) = \frac{u_m(x)}{\sqrt{\rho(x)}}, \lambda_m \right\} \text{ и наоборот.}$$

Из теории интегральных уравнений с симметричным ядром:

1. Если число собственных значений интегрального уравнения (26.2) конечно, то ядро уравнения называется вырожденным и представимо в виде:

$$K(x, \xi) = \sum_{m=1}^n \frac{u_m(x)u_m(\xi)}{\lambda_m}. \quad (26.3)$$

2. Справедлива теорема Гильберта - Шмидта: если правая часть интегрального уравнения

$$u(x) + \lambda \int_0^l K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad (26.4)$$

функция $f(x)$ истокообразно представима, т.е. $\exists h(x) \in C$ такая, что

$$f(x) = \int_0^l K(x, \xi) h(\xi) d\xi, \quad (26.5)$$

то $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0, l]$ ряд по собственным функциям интегрального уравнения

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m(x); \quad u_m(x) + \lambda \int_0^l K(x, \xi) u_m(\xi) d\xi = 0. \quad (26.6)$$

Т е о р е м а 26.1. Ядро $K(x, \xi)$ интегрального уравнения (26.2) является невырожденным, а, следовательно, у него и у задачи Штурма - Лиувилля существует бесконечное (счетное) множество собственных значений $\{\lambda_k\}$ и соответствующая им бесконечная последовательность $\{y_n(x)\}$ собственных ортонормированных функций.

Доказательство.

Предположим, что ядро $K(x, \xi)$ вырожденное

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}} \sum_{m=1}^n \frac{u_m(x)u_m(\xi)}{\lambda_m}. \quad (26.7)$$

Интегральное уравнение (26.2) имеет собственные функции те же, что и дифференциальное уравнение \Rightarrow они непрерывны и дифференцируемы на $(0, l)$.

Тогда $G(x, \xi)$ из (26.4) тоже непрерывная дифференцируемая функция, но это противоречит условию скачка $G'(x, \xi)$ при $x = \xi$. Следовательно, $K(x, \xi)$ – невырожденное ядро и имеет $\{\lambda_k\}$ и $\{u_k\}$ – счетное число собственных значений и собственных функций. Функции u_k – ортонормированные \Rightarrow

$$\int_0^l \rho(x) y_k^2 dx = 1$$

$$\int_0^l \rho(x) y_m(x) y_k(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

Ортогональность с весом $\rho(x)$.

п.27. Решение неоднородного интегрального уравнения с симметричным ядром. Теорема Стеклова.

Используя теорему Гильберта-Шмидта, мы можем получить решение неоднородного интегрального уравнения (26.4) в виде разложения по собственным функциям $u_m(x)$. Умножив скалярно (26.4) на $u_m(x)$, получим

$$c_m + \lambda \int_0^l u_m(x) dx \int_0^l K(x, \xi) u(\xi) dx = f_m, \quad (27.1)$$

где $c_m = (u, u_m)$; $f_m = (f, u_m)$.

Т.к. ядро симметрично, то, согласно определению собственных функций (26.6), получим:

$$\int_0^l K(x, \xi) u_m(x) dx = \int_0^l K(\xi, x) u_m(x) dx = -\frac{u_m(\xi)}{\lambda_m}. \quad (27.2)$$

Подставив (27.2) в (27.1), найдем

$$c_m - \frac{\lambda}{\lambda_m} \int_0^l u(\xi) u_m(\xi) d\xi = f_m$$

или

$$c_m \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right) = f_m.$$

Откуда получаем

$$c_m = f_m \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda} = f_m + \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda} f_m.$$

Зная c_m , мы можем найти решение неоднородного интегрального уравнения:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda} f_m u_m(x). \quad (27.3)$$

Эта формула работает для истокообразно представимых $f(x)$.

Разложением решения задачи по $u_m(x)$ можно решать неоднородные дифференциальные уравнения. Обоснованием этого является следующая теорема.

Теорема 27.1. Теорема Стеклова.

Если дважды непрерывно дифференцируемая на $[0, l]$ функция $z(x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям $\gamma(z) = 0$ и $\Gamma(z) = 0$, то она

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0, l]$ ряд по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля.

Доказательство.

Т.к. $z(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то $Lz = f$, где f – непрерывная функция. Т.к. 'z' удовлетворяет краевым условиям, то она представима через функцию Грина в виде:

$$z(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

т.е. $z(x)$ – истокообразованное представление функции \Rightarrow по теореме Гильберта-Шмидта

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n(x),$$

$$z_n = \int_0^l z(x) y_n(x) \rho(x) dx,$$

причем $\int_0^l \rho(x) y_n^2(x) dx = 1.$

Используя теорему Стеклова, мы можем решать неоднородную краевую задачу разложением по собственным функциям.

Имеем задачу

$$\begin{aligned} L(y) &= f, \\ \gamma(y) &= \Gamma(y) = 0 \end{aligned}$$

и $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Разложим решение $y(x)$ в ряд по $y_m(x)$:

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} d_m y_m(x).$$

Учитывая, что

$$L(y_m) = -\lambda_m \rho(x) y_m,$$

получим

$$L(y) = -\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \rho d_m y_m = f.$$

Откуда находим

$$d_m = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l f(x) y_m(x) dx$$

или

$$y(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x)}{\lambda_m} \int_0^l f(x) y_m(x) dx.$$

Мы получили выражение для решения нашей задачи через правую часть $f(x)$ и собственные функции, соответствующей задаче Штурма-Лиувилля.

п.28. Поведение решения задачи Штурма-Лиувилля при $x=0$, если $p(x=0)=0$.

Пусть $p(x) = x\varphi(x)$ при $x \rightarrow 0$, $\varphi(0) \neq 0$ и $p(x) > 0$ при $x \in (0, l]$.

Тогда относительно $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимых решений задачи Штурма-Лиувилля. можно доказать следующее утверждение.

Лемма 28.1.

Если $p(x) = x\varphi(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $\varphi(x)$ – ограничена, $\varphi(0) \neq 0$, $p(x) > 0$ при $0 < x < l$, а $g(x) = q(x) - \lambda p(x)$ ограничено (или может $\rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$), то для ограниченного в точке $x=0$ решения задачи Штурма-Лиувилля $y_1(x)$ выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x)y_1'(x) = 0.$$

Доказательство.

1. $g(x)$ – ограничено. Тогда проинтегрируем уравнение

$$\int_x^{x_1} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy_1}{dx} \right) dx = \int_x^{x_1} g(x)y_1(x) dx, \quad 0 < x < x_1 < l.$$

Откуда

$$p(x)y_1'(x) = p(x_1)y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} g(\xi)y_1(\xi)d\xi = Q(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x)y_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = C.$$

Покажем, что $C=0$. $Q(x)$ – непрерывно и ограничено на $0 < x < x_1$, причем

$$y_1(x) = y_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{Q(\xi)d\xi}{p(\xi)}.$$

Т.к. $p(\xi) = \xi \varphi(\xi)$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_1(x) = A < \infty; \quad A = y_1(x_1) - \int_0^{x_1} \frac{Q(\xi)d\xi}{\xi \varphi(\xi)}.$$

Интеграл сходится, если $Q(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0$.

2. Случай $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, $p(x)$ – дифференцируемая функция. Легко показать, что ограниченная $y_1(x)$ монотонна при $0 < x < x_1$, где $g(x) > 0$, (т.к. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$, то $\exists x_1$ такое, что $g(x) > 0$ при $0 < x < x_1$), Если $y_1(x)$ немонотонна при $0 < x < x_1$, то она имеет или отрицательный \min или положительный \max .

В этой точке $y' = 0 \Rightarrow$

$$py'' + p'y' - g(x)y(x) = 0 \Rightarrow \frac{y''}{y(x)} = \frac{g(x)}{p(x)}, \text{ но } \frac{g(x)}{p(x)} > 0, \text{ а}$$

$$\frac{y''}{y} < 0 \begin{cases} y > 0, y'' < 0 \\ y < 0, y'' > 0. \end{cases}$$

Пришли к противоречию $\Rightarrow y_1(x)$ монотонна при $0 < x < x_1 \Rightarrow$

$Q(x) = p(x_1)y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} g(\xi)y_1(\xi)d\xi$ – монотонна ($g > 0$, y_1 – монотонна) и имеет конечный или бесконечный предел. Если предел \exists , то согласно случаю 1 он = 0! Окончательно

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x)y_1'(x) = 0.$$

Лемма 28.2.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения $L(y) + \lambda \rho y = 0$, а $p(x) = x\varphi(x)$, $\varphi(x) > 0$, $x \in [0, l]$, то, если $y_1(x)$ – ограниченная функция, $\lim_{x \rightarrow 0} y_1(x) = C < \infty$, то $y_2(x)$ – неограниченная функция при $x \rightarrow 0$.

Доказательство.

Согласно (22.4) из $\Delta(y_1, y_2) = \frac{C}{p(x)} \Rightarrow$

$$y_2(x) = y_1(x) \left\{ C_1 + C \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)} \right\}$$

или (т.к. $p(\xi) = \xi \varphi(\xi)$, $\varphi(\xi)$ – ограничена)

$$y_2(x) = \left[C_1 + C \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi \varphi(\xi) y_1^2(\xi)} \right] \cdot \frac{1}{y_1(x)}.$$

Если $y_1(x) \neq 0$ при $x = 0$, то интеграл расходится при $x \rightarrow 0$, $y_2(x)$ – неограничена при $x \rightarrow 0$. Если $y_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то имеем неопределенность, которую раскрываем по Лопиталю

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} y_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \left[C_1 + C \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{p(\xi) y_1^2(\xi)} \right]}{\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{y_1(x)} \right]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C/p(x) y_1^2(x)}{-y_1'/y_1^2(x)} = -C \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{p(x) y_1'(x)} = \infty, \end{aligned}$$

согласно лемме 28.1.

Лемма 28.3.

Если в лемме 28.2 функция $y_1(x) = x^n Z(x)$ при $x \rightarrow 0$, а $Z(0) = const \neq 0$, то

$$y_2(x) = \begin{cases} \frac{\psi_1(x)}{x^n}; & \psi_1(0) = const \neq 0, n > 0 \\ \psi_2(x) \ln \frac{1}{x}; & \psi_2(0) = const \neq 0, n = 0 \end{cases}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \left\{ C_1 + C \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi \varphi(\xi) y_1^2(\xi)} \right\} = \\ &= x^n Z(x) \left\{ C_1 + C \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi) Z^2(\xi) \xi^{2n+1}} \right\} = \\ &= x^n Z(x) \left\{ C_1 + \frac{C}{\varphi(x^*) Z^2(x^*)} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi^{2n+1}} \right\} \end{aligned}$$

по теореме о среднем $0 < x^* < x_0$. Интегрируя получим искомое.

п.29. Уравнение Бесселя. Построение решения в виде степенных рядов.

Уравнением Бесселя называется уравнение

$$(xZ'_\nu(x))' + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) Z_\nu(x) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (29.1)$$

$Z_\nu(x)$ – называется цилиндрической функцией ν -го порядка. Т.к. $p(x) = x \Rightarrow p(0) = 0$, то одна цилиндрическая функция ограничена, а другая имеет особенность при $x \rightarrow 0$.

Решение уравнения Бесселя легко получить в виде степенного ряда. Из (29.1) имеем

$$x^2 Z_v''(x) + x Z_v'(x) + (x^2 - \nu^2) Z_v = 0.$$

Представим

$$Z_\nu(x) = x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (29.2)$$

Подставим в уравнение, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\sigma + k)^2 - \nu^2] a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0$$

или

$$\begin{aligned} & (\sigma^2 - \nu^2) a_0 + [(\sigma + 1)^2 - \nu^2] a_1 x + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ [(\sigma + k)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} \right\} x^k = 0. \end{aligned}$$

Считая $a_0 \neq 0 \Rightarrow \sigma = \pm \nu$, возьмем $\sigma = \nu$, тогда

$$(2\nu + 1)a_1 = 0; \quad a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(2\nu + k)}.$$

Считая $\nu \geq 0$, получим

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0 \text{ и т.д. } a_{2m+1} = 0 \quad m \in [0, \infty]$$

$$a_0 \neq 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)} \text{ и т.д.}$$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m! (\nu + 1)(\nu + 2) \dots (\nu + m)}.$$

Таким образом Z_ν определяется с точностью до постоянного множителя.

При выборе $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ получим Бесселеву функцию первого рода ν -го порядка.

$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ – гамма функция

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0; \quad \Gamma(n + 1) = n!, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Для } x \leq 0 \text{ берем из } \Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x \sin \pi x}.$$

При $x = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$) $\Gamma(-n) = \pm \infty$,

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+\nu} \Gamma(m + 1) \Gamma(m + \nu + 1)}$$

имеем

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + 1) \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Это при $\nu \geq 0$, а при отрицательных ν имеем $\nu \neq -n$ (n – целое)

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

Это продолжение $\Gamma(x)$ на отрицательное, но нецелое. $J_{\nu}(x)$ – ограниченное решение, $J_{-\nu}(x)$ – неограниченное решение. Это линейно независимые решения.

Если $\nu = -n$, то легко показать, что $J_{-n}(x) = J_n(x)(-1)^n$,

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n},$$

т.к. $\Gamma(k-n+1) = \pm\infty$ при $k \leq n-1$.

Введя $k = m+n$, получим

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x).$$

При целых $\nu = n$ линейно независимой функцией к $J_n(x)$ является функция Неймана $N_n(x)$ или функция Бесселя второго рода n -го порядка.

п.30. Собственные функции краевой задачи для уравнения Бесселя.

Краевая задача для уравнения Бесселя

$$L(y) = (ty'(t))' - \frac{\nu^2}{t} y(t) = -\lambda ty(t), \quad t \in (0, l)$$

$y(x=0)$ – ограничена, $y(x=l) = 0$ (или $y'(x=l) = 0$.)

$$p(t) = t; \quad q(t) = \frac{\nu^2}{t}; \quad \rho(x) = x.$$

Замена переменных $t = x/\sqrt{\lambda}$ приводит к уравнению Бесселя $\Rightarrow y(t) = Z_{\nu}(\sqrt{\lambda} t)$, где $Z_{\nu}(\sqrt{\lambda} t)$ – ограниченная цилиндрическая функция, а из условия $Z_{\nu}(\sqrt{\lambda} l) = 0$ (или $Z'_{\nu}(\sqrt{\lambda} l) = 0$) находим $\{\lambda_k\}$ – собственные значения и соответствующие

$\varphi_n = Z_{\nu}(\sqrt{\lambda_n} t)$ – собственные функции, ортогональные с весом $\rho = x$

$\varphi_n = Z_{\nu}(\sqrt{\lambda_n} t)$ – собственные функции, ортогональные с весом $\rho = x$

$$\int_0^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) x dx = 0, \quad n \neq m.$$

Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувиля: найти такие $\{\lambda_k\}$, при которых задача

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy(x)}{dx} \right) = -\lambda xy(x), & x \in [0, l], \\ y(x=l) = 0, \end{cases} \quad (30.1)$$

имеет нетривиальное решение, непрерывное вместе со своими 2-мя производными.

Сделаем замену переменного $x = \frac{t}{\sqrt{\lambda}}$, $y(x = \frac{t}{\sqrt{\lambda}}) = Z(t)$.

Тогда придем к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(t \frac{dZ(t)}{dt} \right) + tZ(t) = 0, & t \in [0, \sqrt{\lambda}l], \\ Z(t = \sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases}$$

Это уравнение имеет одно ограниченное решение

$$Z(t) = CJ_0(t); y(x) = CJ_0(\sqrt{\lambda}x). \quad (30.2)$$

Краевое условие при $x=l$ дает трансцендентное уравнение для определения собственных значений $\{\lambda_k\}$

$$J_0(\sqrt{\lambda_k}l) = 0, \quad k \in [1, \infty), \quad (30.3)$$

т.к. функция Бесселя имеет ∞ число корней. Таким образом, мы имеем собственные ортонормированные функции для уравнения (30.1) в виде:

$$y_k = \frac{J_0(\sqrt{\lambda_k}x)}{a_k}; a_k^2 = \int_0^l J_0^2(\sqrt{\lambda_k}x) x dx, \quad k \in [1, \infty), \quad (30.4)$$

которые ортогональны с весом x :

$$\int_0^l y_k(x) y_m(x) x dx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ 1 & k = m \end{cases} \quad (30.5)$$

Любая непрерывная дважды дифференцируемая функция $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ может быть разложена в ряд:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k y_k(x), \quad (30.6)$$

где

$$f_k = \int_0^l f(x) y_k(x) x dx. \quad (30.7)$$

п.31 Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Рассматривается функция многих переменных

$$U(\bar{x}) = U(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad i \in [1, n] - \text{частные производные.}$$

$$F(x_1, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}) = 0 - \text{уравнение в частных производных I порядка.}$$

Линейное уравнение

$$\sum_{i=1}^n a_i(\bar{x}) \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad \bar{x} \in R_n, \quad (31.1)$$

$a_i(\bar{x})$ при $\bar{x} \in G \in R_n$ непрерывные функции со своими первыми частными производными.

$$\sum_{i=1}^n a_i^2(\bar{x}) \neq 0, \quad \bar{x} \in G \quad (31.2)$$

Рассматриваем уравнение (31.1) с условием (31.2)

$$\sum_{i=1}^n a_i(\bar{x}) \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0; \quad \sum_{i=1}^n a_i^2(\bar{x}) \neq 0, \quad \bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Для этого уравнения имеем систему дифференциальных уравнений для фазовых траекторий

$$\frac{dx_1}{a_1(\bar{x})} = \frac{dx_2}{a_2(\bar{x})} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(\bar{x})}. \quad (31.3)$$

Интегральные кривые системы (31.3) называются характеристиками исходного уравнения. Через каждую точку $M(x_1, \dots, x_n) \in G$ проходит одна и только одна характеристика.

Т е о р е м а 31.1. **Вдоль характеристики решение $U(\bar{x})$ сохраняет постоянное значение.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Если $\{x_i(t) = x_i\}$ параметрическое задание характеристики, то

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} a_i = 0 \quad (\text{согласно уравнению 31.1}).$$

Следовательно, $\frac{dU}{dt} = 0$ (вдоль характеристики) \Rightarrow

$\Rightarrow U = const$ (вдоль характеристики).

О п р е д е л е н и е. **Первым интегралом уравнения (31.1) называется функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, обращающаяся тождественно в постоянную, когда $M(x_1, \dots, x_n)$ движется вдоль характеристики (интегральной кривой системы 31.1).**

В частности, пусть $a_n(\bar{x}) \neq 0$, $M \in G$, тогда систему (31.3) можно записать в виде:

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i(\bar{x})}{a_n(\bar{x})}, \quad i \in [1, n-1], \quad (31.4)$$

начальные данные $x_i \Big|_{x_n=x_n^0} = x_i^0 \quad i \in [1, n-1]$.

Решение системы (31.4)

$$x_i = X_i(x_n, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad i \in [1, n-1]. \quad (31.5)$$

Функции X_i сопоставляют точки $\{x_i\}; \{x_i^0\}$.

Эти точки можно поменять местами, т.е.

$$x_i^0 = X_i(x_n^0, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i \in [1, n-1], \quad (31.6)$$

Функции $X_i(x_n^0, \bar{x})$ – первые интегралы, т.к. на решении (31.3) обращаются в $x_i^0 = const$.

Взаимная обратимость (31.5) и (31.6) означает неравенство нулю якобиана:

$$\frac{D(X_1, \dots, X_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{n-1})} \neq 0 \quad \text{при } M \in G. \quad (31.7)$$

Это означает, что X_1, \dots, X_{n-1} являются функционально независимыми первыми интегралами.

Т е о р е м а 31.2. **Всякое решение $\Psi(\bar{x})$ уравнения (31.1) является первым интегралом системы (31.4) и, наоборот, всякий первый интеграл системы (31.4) $\varphi(\bar{x})$ является решением уравнения (31.1).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть $\Psi(\bar{x}) = U(\bar{x})$ – решение уравнения (31.1) \Rightarrow если $\{x_i = x_i(t)\}$ – уравнение характеристик, то $\frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow U = const$ на характеристике $\Rightarrow \Psi(\bar{x})$ – первый интеграл.

2. $\varphi(\bar{x})$ – первый интеграл $\Rightarrow \varphi = const$ на характеристике, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ на характеристике $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ на характеристике (т.к. через каждую точку М проходит характеристика) $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ всюду в G, т.е. φ – решение (31.1)

Рассмотрим уравнение (31.1) в случае двух независимых переменных $U(x, y)$:

$$A(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad A, B \in C_1. \quad (31.8)$$

Если ввести вектор $\bar{a} = \{A(x, y), B(x, y)\}$ и $gradU = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right\}$, то (31.8) запишется в виде:

$$\bar{a} gradU = 0 \quad (31.9)$$

или $\frac{\partial U}{\partial a} = 0$ (производная по данному направлению \bar{a} равна нулю).

Вектор $\bar{a} = \{A, B\}$ коллинеарен вектору \bar{k} , касательному к кривой $U(x, y) = const$ (т.к. $gradU \perp \bar{k}$). Пусть $U(x, y) = const$ дает нам кривую Γ , которая задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (31.10)$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = B(x, y), \end{cases} \quad (31.11)$$

т.к. $\bar{k} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\}$. Система (31.11) определяет кривые (31.10), на которых $u(x, y) = const$.

Фазовые траектории системы (31.11) являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)} \quad (\text{или} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}). \quad (31.12)$$

Интегральные кривые (31.12) называются характеристиками уравнения в частных производных (31.8). Обычно (31.12) записывают в симметричном виде:

$$\frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)}, \quad A^2 + B^2 \neq 0. \quad (31.13)$$

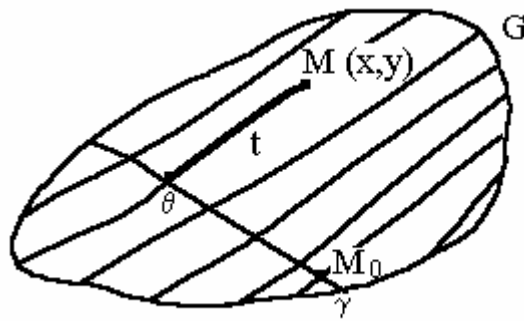
Т.к. A и B не обращаются одновременно в нуль, то уравнение (31.13) имеет единственное решение задачи Коши. Это означает, что через каждую точку области G проходит одна и только одна характеристика.

Пусть $U = U(x, y)$ – интегральная поверхность уравнения в частных производных (31.8). Как изменяется $U(x, y)$ вдоль характеристики $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$?

$$\begin{aligned} U = U(x(t), y(t)) &\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} = A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dU}{dt} \Big|_{x(t), y(t)} = 0 \Rightarrow U(x, y) = \text{const} \text{ на характеристике.} \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (31.8).

Через любую т. $M(x, y)$ проходит характеристика. Пусть γ – кривая, не совпадающая с характеристикой.



Ясно, что характеристики составляют однопараметрическое семейство. Зафиксируем т. M_0 на γ и обозначим расстояние до пересечения характеристики с γ от т. M_0 через θ . Тогда каждой характеристике соответствует свое θ . Если расстояние от M до γ по характеристике обозначим t , то каждой паре (x, y) соответствует своя пара (θ, t) , т.е.

$$\begin{cases} x = X(\theta, t) \\ y = Y(\theta, t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta = \Theta(x, y) \\ t = T(x, y) \end{cases} \quad (31.14)$$

В переменных θ, t уравнение характеристики

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (31.15)$$

т.к. вдоль характеристики при изменении t имеем $\theta = const$. Из (31.15) имеем, что вдоль характеристики

$$\Theta(x, y) = const. \quad (31.16)$$

Выражение (31.16) дает все характеристики, как семейство от параметра θ , т.е. $y = y(x, \theta)$. В переменных (θ, t) легко получить решение уравнения (31.8)

$$U(x, y) = U(X(\theta, t), Y(\theta, t)) = V(\theta, t).$$

На характеристике

$$\frac{dU}{dt} = 0 \text{ и } \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Это означает, что $V = F(\theta)$, где F – произвольная функция. Отсюда получаем, что общее решение уравнения (31.8) представимо в виде:

$$U(x, y) = F(\theta(x, y)), \quad (31.17)$$

где F – произвольная функция, а $\theta(x, y) = const$ на характеристике, $\theta(x, y)$ – первый интеграл.

Достаточно найти такую $\varphi(x, y)$, что на характеристике $\varphi(x, y) \Big|_{\text{хар}} = const$, тогда общее решение $U(x, y) = F(\varphi(x, y))$.

Задача Коши для уравнения (31.8) ставится следующим образом:

$$\begin{cases} A(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} = 0; & (x, y) \in G; \\ U(x, y) \Big|_{\gamma} = \omega(s); \end{cases} \quad (31.18)$$

где $\gamma = \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$ – кривая, не совпадающая с характеристикой ни на одном интервале

положительной длины, а $\omega(s)$ – заданная функция. Если нам известно $\theta(x, y)$, обращающееся в $const$ на характеристике (31.18), то общее решение есть $U = F(\theta(x, y))$.

Из начального условия на γ функция F определяется следующим образом:

$\theta(x, y) \Big|_{\gamma} = \theta(x(s), y(s)) = \xi(s)$. Разрешив уравнение $\xi(s) = \xi$, получим

$$s = \Omega(\xi) \Rightarrow \Omega(\theta(x, y)) \Big|_{\gamma} = \Omega(\xi) = S. \quad (31.19)$$

Решение представимо в виде:

$$U(x, y) = \omega(\Omega(\theta(x, y))). \quad (31.20)$$

Это решение уравнения (31.18) и удовлетворяет начальному условию $U \Big|_{\gamma} = \omega(s)$,

т.к. (31.20), согласно (31.19), на γ дает $\omega(s)$.

п.32 Постановка обратных задач для дифференциального уравнения второго порядка. Неустойчивость задачи определения правой части уравнения.

I Задача определения правой части дифференциального уравнения.

Дана краевая задача для неоднородного уравнения.

$$\begin{cases} y''(x) - \omega^2 y(x) = f(x) \quad , \quad x \in [0, H], \\ y(x=0) = 0 \quad , \quad y(x=H) = 0. \end{cases} \quad (32.1)$$

Требуется определить $f(x)$ по дополнительному условию

$$y'(x=0) = Z(\omega). \quad (32.2)$$

II Задача определения коэффициентов дифференциального уравнения .

Дана краевая задача для однородного уравнения:

$$\begin{cases} y''(x) - \omega^2 \alpha(x) y(x) = 0 \quad , \quad x \in [0, H], \\ y(x=0) = 1 \quad , \quad y(x=H) = 0 \quad , \quad \alpha(x) > 0; \end{cases} \quad (32.3)$$

требуется определить $\alpha(x)$ по дополнительному условию

$$y'(x=0) = Z(\omega). \quad (32.4)$$

Первая задача – линейная, а вторая – нелинейная. Обе задачи неустойчивы. Докажем неустойчивость первой задачи. Для этого редуцируем ее к интегральному уравнению первого рода.

Найдем функцию Грина $G(x, y)$ для задачи (32.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 G}{dx^2} - \omega^2 G = 0 \quad x \in [0, H], x \neq x_0, \\ G \Big|_{x=0} = 0, G \Big|_{x=H} = 0, \\ G(x = x_0 + 0, x_0) - G(x = x_0 - 0, x_0) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=x_0+0} - \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=x_0-0} = 1. \end{array} \right. \quad (32.5)$$

Представим функцию Грина в виде:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} A(e^{-\omega x} - e^{\omega x}) & \text{при } x \in [0, x_0] \\ B(e^{-\omega(H-x)} - e^{\omega(H-x)}) & \text{при } x \in [x_0, H] \end{cases} \quad (32.6)$$

Подставив в условия при $x = x_0$ в задаче (32.5), получим систему уравнений для определения A и B :

$$B(e^{-\omega(H-x_0)} - e^{\omega(H-x_0)}) - A(e^{-\omega x_0} - e^{\omega x_0}) = 0,$$

$$B(e^{-\omega(H-x_0)} + e^{\omega(H-x_0)}) + A(e^{-\omega x_0} + e^{\omega x_0}) = 1/\omega.$$

Откуда находим

$$A = \frac{1}{\omega D} (e^{-\omega(H-x_0)} - e^{\omega(H-x_0)}),$$

$$B = \frac{1}{\omega D} (e^{-\omega x_0} - e^{\omega x_0}),$$

где

$$D = (e^{-\omega x_0} + e^{\omega x_0})(e^{-\omega(H-x_0)} - e^{\omega(H-x_0)}) +$$

$$+ (e^{-\omega x_0} - e^{\omega x_0})(e^{-\omega(H-x_0)} + e^{\omega(H-x_0)}).$$

Подставив найденные A и B в (32.6), найдем

$$G(x, x_0) = \frac{\operatorname{ch} \omega(H-x-x_0) - \operatorname{ch} \omega(H-|x-x_0|)}{2\omega \operatorname{sh} \omega H}.$$

Тогда решение краевой задачи (32.1) запишется в виде:

$$y(x) = \int_0^H f(x_0) G(x, x_0) dx_0 \quad (32.7)$$

Подставив (32.7) в дополнительное условие (32.2) и учитывая, что

$$\left. \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\operatorname{sh} \omega(H-x_0)}{\operatorname{sh} \omega H},$$

получим:

$$\int_0^H f(x_0) \operatorname{sh} \omega(H-x_0) dx_0 = -Z(\omega) \operatorname{sh} \omega H \quad (32.8)$$

Это — интегральное уравнение I рода для $f(x_0)$ при известном $Z(\omega)$. Покажем неустойчивость интегрального уравнения I рода.

Рассмотрим интегральное уравнение I рода:

$$\int_0^1 K(x, s) y(s) ds = F(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (32.9)$$

Пусть выполнены условия, при которых решение этого уравнения существует и единственно. Пусть $y_1(s)$ и $y_2(s)$ — непрерывные функции, являющиеся решениями интегрального уравнения (32.9) соответственно для правых частей $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Тогда возьмем:

$$y_2(s) = y_1(s) + A \sin ns. \quad (32.10)$$

Тогда

$$f_2(x) = \int_0^1 K(x,s)(y_1(s) + A \sin ns) ds =$$

$$= f_1(x) + A \int_0^1 K(x,s) \sin ns ds.$$

Заметим, что $\|y_2(s) - y_1(s)\|_C = \|A \sin ns\|_C = |A|$.

Если $|A|$ велико, то $y_1(s)$ и $y_2(s)$ отличаются сильно, но

$$\|F_2(x) - F_1(x)\|_C = |A| \left\| \int_0^1 K(x,s) \sin ns ds \right\|_C = \frac{|A|C}{n} < \varepsilon, \text{ если } n > N = |A|C/\varepsilon$$

Таким образом, малым изменениям $F(x)$ могут соответствовать большие изменения $y(s)$. Задача неустойчива.

Задачу можно сделать устойчивой, если предположить, что решение принадлежит более узкому классу. Например, пусть априори известно, что $y(s)$ дифференцируема и ее производная ограничена $const = C_0$, а правые части таковы, что они соответствуют этим решениям. Тогда задача станет устойчивой.

$$\|y_2 - y_1\|_C = |A| ; \|y_2' - y_1'\|_C = n|A| \leq C_0 \Rightarrow n \leq C_0/|A|.$$

$$\|F_2 - F_1\|_C = \frac{|A|C}{n} \geq \frac{|A|^2 C}{C_0}$$

$$\Rightarrow \|F_2 - F_1\|_C \geq \|y_2 - y_1\|_C^2 \frac{C}{C_0} \Rightarrow$$

Таким образом, если мало $\|F_2 - F_1\|_C$ то мало и $\|y_2 - y_1\|_C$.

Именно на этой основе и дано определение корректности задачи по Тихонову:

1. Априори известно, что решение существует и принадлежит более узкому множеству функций Y (называется множеством корректности);
2. Решение единственно;
3. Если правая часть принадлежит F , для которых решение принадлежит Y , то тогда задача устойчива.

п.33. Понятие функционала и вариации. Постановка вариационной задачи. Необходимые условия экстремума.

Функционалом называется отображение множества функций $y \in Y$ в множество чисел (аналогия с функцией, но заданной не на числовом, а на функциональном множестве).

Пример: время, затраченное на прохождение траектории $y = y(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, если скорость зависит от точки нахождения $v = v(x, y)$

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x, y)} dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

По аналогии с дифференциалом функции вводится понятие вариации функции.

Вариацией функции $y(x)$ (аргумента функционала) называется разность функций

$$\delta y = y(x) - y_1(x); y, y_1 \in Y \Rightarrow \delta y = \eta(x) \in Y,$$

причем $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ – класс с закрепленными концами.

Т.к. в функционал кроме $y(x)$ может входить $y'(x)$ и т.д. до $y^{(k)}(x)$, то кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле k -го порядка ($y \in C_k$), если мало δ_k , где

$$\delta_k = \max_{x \in [x_0, x_1]} \{|y - y_1|, |y' - y'_1|, \dots, |y^{(k)} - y^{(k)}_1|\}.$$

Функционал $\Phi[y(x)]$ называется непрерывным при $y = y_1(x)$ в смысле близости k -го порядка, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ можно найти δ такое, что

$$|\Phi(y) - \Phi(y_1)| < \varepsilon, \text{ если } \delta_k < \delta$$

(функции близости порядка k).

Линейным функционалом называется функционал $L[y]$, удовлетворяющий условиям

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$$

$\alpha, \beta - const.$

Пример.

$$L(y) = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y') dx.$$

Вариация функционала – это главная, линейная по отношению к δy , часть приращения функционала

$$\Delta \Phi = \Phi(y + \delta y) - \Phi(y) \xrightarrow{\delta y \rightarrow 0} \delta \Phi + O(\delta y^2).$$

Другое определение:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = \Delta \Phi = \Phi(y + \alpha \delta y) - \Phi(y) &\Rightarrow \\ \delta \Phi = \left. \frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

Вариационные задачи – задачи на экстремум функционала. Например, найти

$$\min_y T = \min_y \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x, y)} dx,$$

где $v(x, y)$ – задано, а $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Частный случай – задача о брахистроне.

Задача о геофизических линиях

$$\min l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx; \varphi(x, y, z) = 0.$$

Необходимое условие экстремума функционала $\delta\Phi(y) = 0$.

О п р е д е л е н и е. Функционал $\Phi(y)$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ max (или min), если значение функционала $\Phi(y)$ на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше (не меньше), чем $\Phi(y_0)$, т.е.

$$\Delta\Phi \Big|_{y_0} \leq 0 \quad (\text{или } \Delta\Phi \Big|_{y_0} \geq 0).$$

Т е о р е м а 33.1 Если функционал $\Phi(y)$, имеющий вариацию, достигает максимума (или минимума) при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ внутренняя точка области определения функционала, то при $y_0(x)$

$$\delta\Phi(y) \Big|_{y=y_0(x)} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

При фиксированных $y_0(x)$ и δy функционал $\Phi(y_0(x) + \alpha \delta y) = \varphi(\alpha)$. По предположению $\varphi(\alpha)$ достигает max (или min) при $\alpha = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\Phi(y_0(x) + \alpha \delta y)) \Big|_{\alpha=0} = \delta\Phi = 0.$$

Если экстремум достигается для $y(x)$ близких к y_0 нулевого порядка, то экстремум **сильный**, если для близких к y_0 первого (или выше) порядка, то экстремум **слабый**.

Близость в C или в C_k .

п.34. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.

Л е м м а 34.1 Основная лемма.

Если для каждой непрерывной на $[x_0, x_1]$ функции $\eta(x)$ [$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$] выполняется условие

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0,$$

где $\Phi(x)$ непрерывная на $[x_0, x_1]$ функция, то $\Phi(x) \equiv 0$ при $x \in [x_0, x_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $\exists \bar{x} \in [x_0, x_1]$ такое, что $\Phi(\bar{x}) \neq 0$. Тогда из непрерывности $\Phi(x) \Rightarrow$, что \exists окрестность $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ т. \bar{x} , где $\Phi(x)$ сохраняет знак.

Взяв

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [\bar{x}_0, \bar{x}_1] \\ \geq 0 & x \in [\bar{x}_0, \bar{x}_1] \end{cases}$$

получим;

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \Phi(x)\eta(x)dx \neq 0.$$

Пришли к противоречию $\Rightarrow \Phi(x) \equiv 0$.

Уравнения Эйлера.

Т е о р е м а 34.1 **Необходимым условием экстремума функционала**
 $\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ **при** $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ **является выполнение на экстремали**
 $y(x)$ **уравнения Эйлера.**

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0.$$

Доказательство.

Пусть $y(x)$ – экстремаль (т.е. на $y(x)$ достигается экстремум $\Phi(y)$). Тогда зададим параметрическое семейство функций

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y; \quad \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0.$$

На этом семействе имеем $\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y')dx$.

Необходимые условия экстремума

$$\delta \Phi = 0 \Rightarrow \varphi'(\alpha = 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} + F_{y'} \frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right\} dx \Rightarrow$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \{ F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \} dx - \text{интегрируем по частям:}$$

$$\varphi'(0) = (F_y \delta y) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right] \delta y(x) dx = 0 \Rightarrow$$

по основной лемме $F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0$ (уравнение Эйлера) или

$$\begin{cases} F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0, & x \in [x_0, x_1], \\ y(x_0) = y_0, & y(x_1) = y_1, \end{cases}$$

п.35. Функционалы, содержащие производные порядка выше первого и зависящие от нескольких функций. Необходимые условия экстремума.

Функционал от нескольких функций.

$$\begin{cases} \Phi(\bar{y}) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx, \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0, \bar{y}(x_1) = \bar{y}^{(1)}, \end{cases}$$

$$y = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}.$$

Варьируем $\bar{y} + \delta\bar{y}$; $\delta\bar{y} = \{\delta y_1, \dots, \delta y_n\}$. Так как $\delta\bar{y}_i$ любая непрерывная на $[x_0, x_1]$ функция, обращающаяся на концах в нуль $\delta y_i(x_0) = \delta y_i(x_1) = 0$, то всегда можно все δy взять равными нулю, кроме δy_i и тогда получим уравнение Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = 0 \quad i \in [1, n].$$

Функционал со старшими производными.

$$\begin{cases} \Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \\ y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}. \end{cases}$$

Пусть $y(x)$ – экстремаль имеет $2n$ непрерывных производных. Варьируем ее в параметрическом в виде: $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$, причем при x_0 и x_1 имеем

$$\delta y = 0, \delta y' = 0, \dots, \delta y^{(n-1)} = 0. \quad (*)$$

Тогда

$$\varphi(\alpha) = \Phi(y + \alpha \delta y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha \delta y, \dots, y^{(n)} + \alpha \delta y^{(n)}) dx,$$

$$\varphi'(\alpha = 0) = \delta \Phi = \int_{x_0}^{x_1} \{F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}\} dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая (*), получим

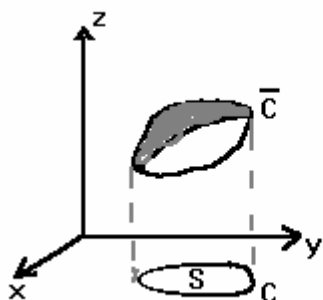
$\delta \Phi = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} (F_{y^{(k)}}) \delta y dx = 0$, δy – любая непрерывная функция. Тогда по основной лемме:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} (F_{y^{(k)}}) = 0 \quad \text{уравнение Эйлера-Пуассона.}$$

п.36. Многомерные вариационные задачи. Уравнение Эйлера-Остроградского.

Исследуем функционал от функции двух переменных $z(x, y)$, т.е.

$$\Phi(z(x, y)) = \iint_S F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy$$



$$z(x, y) \Big|_{x, y \in C} = z_0(x, y).$$

Все допустимые поверхности $z(x, y)$ проходят через контур \bar{C} (его проекция C).

$$\text{Вариация } z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha \delta z(x, y) \quad \delta z(x, y) \Big|_C = 0.$$

$$\varphi(\alpha) = \iint_S F(x, y, z + \alpha \delta z, \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha (\delta z)_x, \frac{\partial z}{\partial y} + \alpha (\delta z)_y) dx dy,$$

$$\delta \Phi = \varphi'(\alpha = 0) = \iint_S \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q \right) dx dy,$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_p \delta z) = \frac{\partial F_p}{\partial x} \delta z + F_p \delta p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_q \delta z) = \frac{\partial F_q}{\partial y} \delta z + F_q \delta q.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \iint_S \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy + \\ &+ \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q \delta z) \right) dx dy \end{aligned}$$

По формуле Грина

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_C (N dy - M dx) \Rightarrow \\ \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q \delta z) \right) dx dy &= \\ = \oint_C (F_p \delta z dy - F_q \delta z dx) &= 0 \quad (\text{т.к. на } C \delta z = 0) \\ \Rightarrow \delta \Phi &= \iint_S \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy. \end{aligned}$$

Т.к. δz – произвольная непрерывная функция, то по основной лемме уравнение Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0.$$

Пример:

$$\Phi = \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Delta u = 0.$$

Это уравнение Лапласа.

п.37. Вариационные задачи на условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Найти экстремум функционала, зависящего от нескольких функций.

$$(*) \begin{cases} \Phi(\bar{y}) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx ; y = \{y_1, \dots, y_n\} \\ \text{при дополнительных условиях} \\ \varphi_i(x, y) = 0 \quad i \in [1, m], \quad m < n \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0 ; \bar{y}(x_1) = \bar{y}^1 ; \varphi_i(x_0, \bar{y}^0) = 0 ; \varphi_i(x_1, \bar{y}^1) = 0 \end{cases}$$

Уравнения $\varphi_i(x, \bar{y}) = 0$ предполагаются независимыми. Пусть они независимы как функции от первых m переменных y_1, y_2, \dots, y_m , т.е.

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0.$$

Т е о р е м а 37.1 Вектор функция $\bar{y}(x)$, реализующая условный экстремум (*), удовлетворяет при соответствующем выборе множителей $\lambda_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) уравнениям Эйлера, составленным для функционала

$$\tilde{\Phi}(\bar{y}) = \int_{x_0}^{x_1} (F(x, \bar{y}, \bar{y}') + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i(x, y)) dx$$

Функции $\lambda_i(x)$ $i \in [1, m]$ и $\bar{y}(x)$ определяется из уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \tilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx}(\tilde{F}_{y'_k}) = 0, \quad k \in [1, n] \\ \varphi_i(x, \bar{y}) = 0, \quad i \in [1, m] \end{cases}, \quad (37.1)$$

где

$$\tilde{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i(x, y). \quad (37.2)$$

Доказательство. Если \bar{y} – экстремаль задачи (*), то

$$\delta \Phi = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^n (F_{y_k} \delta y_k + F_{y'_k} \delta y'_k) dx = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\delta y_k(x_0) = \delta y_k(x_1) = 0$, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^n \left(F_{y_k} - \frac{d}{dx} (F_{y'_k}) \right) \delta y_k dx = 0. \quad (37.3)$$

Но применить основную лемму нельзя из-за того, что δy_k не произвольны, т.к. есть связь через условия $\varphi_i = 0$.

Т.к. δy_k малы, то связи можно линеаризовать, разлагая в ряд Тейлора и пренебрегая $(\delta y)^2$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \delta y_k = 0, \quad i \in [1, m]. \quad (37.4)$$

Умножив (37.4) на $\lambda_i(k)$, проинтегрировав по x , просуммировав по i и сложив с (37.3), получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_k} \right) \right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right) \delta y_k dx = 0$$

или, введя \tilde{F} , получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{k=1}^n \left(\tilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx} (\tilde{F}_{y'_k}) \right) \right) \delta y_k dx = 0. \quad (37.5)$$

Пока δy_k не являются независимыми и основную лемму применить нельзя. Возьмем λ_i $i \in [1, m]$ такими, что удовлетворяется

$$\begin{cases} F_{y_k} - \frac{d}{dx} (F_{y'_k}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = 0 \\ \text{при } k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (37.6)$$

Это – линейная система с определителем, не равным нулю $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \neq 0$

\Rightarrow система имеет решение, а(37.5) для данных $\{\lambda_i\}$ имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{k=m+1}^n \left(\tilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx} (\tilde{F}_{y'_k}) \right) \right) \delta y_k dx = 0.$$

Теперь δy_k при $k \in [(m+1), n]$ независимы и можно использовать основную лемму. В результате получим:

$$\tilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx} (\tilde{F}_{y'_k}) = 0 \quad k \in [(m+1), n].$$

Учитывая (37.6), получим окончательно

$$\begin{cases} \tilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx} (\tilde{F}_{y'_k}) = 0 & k \in [1, n] \\ \varphi_i(x, \bar{y}) = 0 & i \in [1, m] \end{cases}$$

Теорема доказана.

Если $\varphi_i(\bar{y}) = 0$, т.е. нет зависимости от x , то $\lambda_i = const$. Задача решается проще.

Мы рассмотрели случай конечных связей, зависящих только от x и y . Такие связи $\varphi_i(x, \bar{y}) = 0$ называются неголономными. Возможны диф. связи:

$$\varphi_i(x, \bar{y}, \bar{y}') = 0,$$

которые называются **голономными**. Теорема 37.1 переносится и на случай голономных связей.

Содержание

Часть I. Обыкновенные дифференциальные уравнения 3

п.1. Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.	3
п.2. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши). Понятие корректной постановки задачи. Лемма Гронуолла–Беллмана.	7
п.3. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения I-порядка, разрешенного относительно производной.	9
п.4. Теорема существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.	10
п.5. Дифференциальное уравнение I-порядка, неразрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения.	13
п.6. Особые решения уравнения I-го порядка, неразрешенного относительно производной.	15
п.7. Общий интеграл уравнения I-го порядка. Интегральный множитель.	18
п.8. Нормальные системы ДУ. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы и уравнения n -го порядка.	22
п.9. Непрерывность решений дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам. Регулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений. Понятие о сингулярном возмущении.	25
п.10. Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка и его свойства. Сведение к нормальной системе первого порядка. Существование решения.	28
п.11. Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Понижение порядка уравнения. Уравнение Риккати.	30
п.12. Общая теория однородных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.	32
п.13. Фундаментальная система решений и общее решение для линейной системы дифференциальных уравнений.	34
п.14. Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений.	35

п. 15. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае некратных корней характеристического уравнения.	36
п.16. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений при кратных корнях характеристического уравнения.	37
п.17. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Исследование уравнения 2-го порядка. Формула Остроградского-Лиувилля.	38
п.18. Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость решения линейной системы.	42
п.19. Исследование устойчивости решения системы по первому приближению.	45
п.20. Исследование траектории в окрестности точки покоя.	47

Часть II. Краевые задачи и вариационное исчисление 51

п.21. Постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Формула Лагранжа.	51
п.22. Формула Грина. Построение решения краевой задачи с помощью функции Грина.	53
п.23. Существование функции Грина. Постановка краевой задачи при существовании решения однородной задачи.	55
п.24. Обобщенная функция Грина и представление решения с ее помощью.	58
п.25. Задача Штурма-Лиувилля и ее свойства.	61
п.26. Редукция задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.	63
п.27. Решение неоднородного интегрального уравнения с симметричным ядром. Теорема Стеклова.	65
п.28. Поведение решения задачи Штурма-Лиувилля при $x = 0$, если $p(x = 0) = 0$.	68
п.29. Уравнение Бесселя. Построение решения в виде степенных рядов.	71
п.30. Собственные функции краевой задачи для уравнения Бесселя.	73
п.31. Линейные уравнения в частных производных первого порядка.	74
п.32. Постановка обратных задач для дифференциального уравнения второго порядка. Неустойчивость задачи определения правой части уравнения.	79

п.33. Понятие функционала и вариации. Постановка вариационной задачи. Необходимые условия экстремума.	83
п.34. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.	85
п.35. Функционалы, содержащие производные порядка выше первого и зависящие от нескольких функций. Необходимые условия экстремума.	87
п.36. Многомерные вариационные задачи. Уравнение Эйлера-Остроградского.	88
п.37. Вариационные задачи на условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.	90