Часть I.
Обыкновенные дифференциальные уравнения

п.1. Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальное уравнение является основой математического моделирования. Кратко о математическом моделировании. Дифференциальным уравнением называется соотношение между функциями и их производными. Если функции одной переменной, то имеем обыкновенные дифференциальные уравнения, если функции нескольких переменных, то дифференциальное уравнение в частных производных. Наш курс посвящен исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть на отрезке *[0,T]* определена *n* раз дифференцируемая функция $y(t)$ и ее производные $y'(t),\dots y^{(n)}(t)$. Переменные $t, y, y', \dots, y^{(n)}$ образуют *(n+2)* – мерное пространство. Если в области $D \in R_{n+2}$ определена функция $F(t, y, y', \dots, y^{(n)})$, то соотношение

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1.1)$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Решением (1.1) называется *n*-раз дифференцируемая функция $y(t)$, заданная на *[0,T]* и обращающая соотношение (1.1) в тождество. Порядком уравнения называется порядок старшей производной в (1.1). Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \qquad (1.2)$$

Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, легко записать в виде системы первого порядка

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dt} = y_2\ ; \\ &\frac{dy_2}{dt} = y_3\ ; \\ &\dots\dots\dots \\ &\frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n\ ; \\ &\frac{dy_n}{dt} = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Общий вид системы первого порядка, разрешенной относительно производных, называют нормальной системой

$$\frac{dy_m}{dt} = f_m(t, y_1, \dots, y_n)\ ; \qquad m = 1,2,\dots,n. \qquad (1.4)$$

Решением системы (1.4) называют совокупность дифференцируемых функций $\{y_1, \dots, y_n\}$, определенных на отрезке *[0,T],* которые при подстановке в (1.4) обращают их в тождество. При моделировании f_m могут быть непрерывными или разрывными, соответственно определяют функции y_m. Мы будем считать в дальнейшем f_m непрерывными функциями. Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Задача для дифференциального уравнения или системы состоит из уравнения (или системы) и дополнительных условий, которые должны обеспечить существование и единственность решения этой задачи. Обыкновенные дифференциальные уравнения моделируют явления и процессы, которые описываются одной функцией или вектор-функцией одного переменного.

1.1 Временные процессы, где *y(t)* характеризует изменение какого-либо параметра во времени. Обычно математическая модель описывает связь между $y(t)$, скоростью $y'(t)$ и ускорением $y''(t)$ процесса в виде:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

или более простая модель, связывающая $y(t)$ со скоростью $y'(t)$, в виде:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Если мы имеем несколько параметров модели $\overline{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$, связанных между собой и со скоростью $\overline{y}'(t)$ и ускорением $\overline{y}''(t)$ их изменения, то имеем системы дифференциальных уравнений в виде:

$$\overline{y}''(t) = \overline{F}(t, \overline{y}, \overline{y}') \qquad (1.5)$$

или, если связаны $\overline{y}(t)$ и $\overline{y}'(t)$,

$$\overline{y}'(t) = \overline{F}(t, \overline{y}).$$

Система (1.4) является нормальной, а система (1.5) не является нормальной. Систему (1.5) можно перевести в нормальную, если ввести обозначения $\overline{z}(t) = \{z_1, z_2, \dots, z_{2n}\}$, где

$$z_i(t) = \begin{cases} y_i(t) & i \in [1,n] \\ y'_{i-n}(t) & i \in [n+1, 2n] \end{cases}.$$

Тогда имеем нормальную систему для $\overline{z}(t)$

$$\overline{z}'_i(t) = \begin{cases} \overline{z}_{n+i}(t) & \text{при} \quad i \in [1,n] \\ f_i(t, \overline{z}) & \text{при} \quad i \in [n+1, 2n] \end{cases},$$

где $f_i(t, z) = F_{i-n}\left(t, \overline{z}^{(1)}, \overline{z}^{(2)}\right)$,

$$\overline{z} = \left\{\overline{z}^{(1)}, \overline{z}^{(2)}\right\}, \qquad \overline{z}^{(1)} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \qquad \overline{z}^{(2)} = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n).$$

Примеры математических моделей для временных процессов:

1. Радиоактивный распад .

$m(t)$ — масса распадающегося вещества. Количество распавшегося вещества Δm пропорционально количеству $m(t)$ и времени, т.е.

$\Delta m = -\alpha\, m(t) \Delta t \Rightarrow$ при $\Delta t \to 0$ имеем

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha\, m(t). \qquad (1.6)$$

Решение дифференциального уравнения $m(t) = Ce^{-\alpha t}$. Дополнительно условие – $m(t = t_0) = m_0$, тогда задача

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = -\alpha\, m(t) & t \in [t_0, t_0 + T]\ , \\ m(t_0) = m_0\ . \end{cases}$$

Решение задачи : $m(t) = m_0 e^{-\alpha\, (t - t_0)}$.

2. Размножение с миграцией.

$N(t)$ – численность популяции, изменяющейся во времени,

$f(t)$ – миграция. Уравнение имеет вид:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha\, N + f(t).$$

Его решение $N(t) = C_0 e^{\alpha t} + \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\alpha\, (t-\tau)} d\tau$.

Дополнительные условия: $N(t_0) = N_0$. Тогда задача имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \alpha\, N + f & t \in [t_0, t_0 + T] \\ N(t = t_0) = N_0\ . \end{cases};$$

Решение задачи:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha\, (t - t_0)} + \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\alpha\, (t-\tau)} d\tau.$$

1.2 Пространственные процессы, где *y(x)* описывает распределение параметра процесса вдоль оси *Ox.* Модели

$$\overline{y}''(x) = f\left(x, y(x), \overline{y}'\right) \qquad (1.7)$$

или

$$\overline{y}'(x) = \overline{F}\left(x, \overline{y}, \overline{y}'\right). \qquad (1.8)$$

Пример математической модели пространственного процесса:

Равновесие атмосферы в поле сил тяжести.

Давление $p(z)$ и плотность воздуха $\rho(z)$ в атмосфере изменяются с высотой z (z=0 земная поверхность). Если выделить маленький цилиндрический объем в воздухе высотой dz и площадью сечения S, то его вес равен $P = mg = \rho \cdot S \cdot dz \cdot g$, где g — земное ускорение. На этот цилиндр действует сила $F = -S \cdot dp$ за счет разности давления dp на разных концах цилиндра. Условие равновесия $F = P$ дает соотношение

$$-S \cdot dp = \rho \cdot g \cdot S \cdot dz \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dz} = -g\rho(z).$$

Для того, чтобы получить окончательно дифференциальное уравнение, необходимо из уравнения Клайперона $pV = mRT$, $m = \rho V$ выразить плотность $\rho(z)$ через давление $p(z)$:

$$\rho(z) = p(z)/RT(z); \;\; T(z) \text{ — температура воздуха.}$$

Откуда имеем

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT(z)} \cdot p(z). \qquad (1.9)$$

Решение этого уравнения дает барометрическую формулу

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{T(z)}}, \quad p_0 = p(z = 0), \qquad (1.10)$$

которая определяет убывание давления с высотой при известном распределении температуры $T(z)$.

п.2. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши). Понятие корректной постановки задачи. Лемма Гронуолла–Беллмана.

Рассмотрим вначале систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \overline{f}(t, \overline{y}), \qquad \{t, \overline{y}\} \in D. \qquad (2.1)$$

Ее решение $\overline{y} = \overline{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ представляет кривую в *(n+1)*-мерном пространстве $R_{n+1} = \{t, y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Эта кривая называется **интегральной кривой**. Подпространство $R_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ называют фазовым пространством. Проекция интегральной кривой на это пространство называется **фазовой траекторией** (или просто **траекторией**).(Пример из балистики).

Система (2.1) в каждой точке области *D*, где определена $\overline{f}(t, \overline{y})$, определяет направление $\overline{\tau} = \{1, f_1, \dots, f_n\}$. Эта область с заданным направлением называется **полем направлений**. Кривые, определенные уравнением $\overline{f}(t, \overline{y}) = const$, называют **изоклинами**. Это кривые в поле направлений выделяют постоянный наклон.

Пример для уравнения I порядка $y' = f(t, y)$; например, $f(t, y) = t^2 + y^2 = const \Rightarrow$ изоклины окружности.

Семейство интегральных кривых однопараметрическое $y = \varphi\,(t, C)$ – это общее решение дифференциального уравнения. Если положить $C = C_1$ (фиксированное значение), то мы получаем частное решение. Для однозначности решения (определение интегральной кривой) надо задать начальную точку, через которую проходит интегральная кривая $y(t = t_0) = y_0$.

Таким образом, задача Коши:

1) для уравнения I порядка

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & (t, y) \in D = \{t_0 \le t \le t_0 + T, a \le y \le b\}, \\ y(t = t_0) = y_0, \end{cases} \qquad (2.2)$$

2) для системы уравнений I порядка

$$\begin{cases} \overline{y}' = f(t, \overline{y}), & (t, \overline{y}) \in D = \{t_0 \le t \le t_0 + T, a_i \le y_i \le b_i\}, \\ \overline{y}(t = t_0) = \overline{y}^0, & i \in [1, n], \end{cases} \qquad (2.3)$$

3) для уравнения *n*-го порядка

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})\ , \\ y(t_0) = y_0,\;\; y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \qquad (2.4)$$

$$D = \left\{t_0 \le t \le t_0 + T, a_i \le y^{(i)} \le b_i, n \in [0, n-1]\right\}.$$

Корректность постановки задачи (Адамар)

При данной постановке задачи решение должно

1) существовать и

2) быть единственным.

Это определяет математическую разрешимость задачи. Кроме того, должно выполняться условие:

3) решение задачи должно быть устойчивым по отношению к изменениям правой части и начальных данных. Это определяет физическую детерминированность задачи.

Формулировка устойчивости решения: для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$|f_1 - f_2| < \delta$ и $|y_{01} - y_{02}| < \delta$ следует $|y_1 - y_2| < \varepsilon$, где

$$\begin{cases} y'_i(t) = f_i(t, y_i) \\ y_i(t = t_0) = y_{0i} \end{cases} \quad i \in [1, 2].$$

Мы последовательно должны рассмотреть все вопросы корректности задачи Коши.

Лемма **Гронуолла – Беллмана**.

Если непрерывная функция *Z(t)* удовлетворяет условию при $t \ge t_0$

$$0 \le Z(t) \le k\int_{t_0}^{t} Z(\tau) d\tau + g(t); \quad k = const, \qquad (2.5)$$

то выполняется оценка

$$0 \le Z(t) \le k\int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau + g(t). \qquad (2.6)$$

Доказательство.

1) Вначале выведем дифференциальную оценку.

Из $R'(t) \le kR(t) + g(t)$ при $t \ge t_0$ и $\begin{cases} R(t_0) = 0 \\ k = const \end{cases}$ следует

$$R(t) \le \int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau. \qquad (2.7)$$

Теперь проведем общее доказательство.

$$R'(t) - kR(t) \le g(t) \;\Rightarrow\; \left(R(t)e^{-kt}\right)' e^{kt} \le g(t) \;\Rightarrow\; R(t) \le \int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau.$$

2) Введем $R(t) = \int_{t_0}^{t} Z(\tau) d\tau$; $R(t_0) = 0$; $R' = Z(t)$.

Подставим в (2.5)

$$0 \le R'(t) \le kR(t) + g(t); \;\; \text{при} \ge t_0 \;\; R(t_0) = 0, \quad k = const. \qquad (2.8)$$

Тогда, согласно (2.7), получаем $R(t) \le \int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau$

или, подставив в правую часть (2.8) получим неравенство

$$0 \le Z(t) \le k\int_{t_0}^{t} g(\tau) e^{k(t-\tau)} d\tau + g(t).$$

Лемма доказана.

п.3. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения I-порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0\ , \end{cases} \qquad (3.1)$$

Лемма 3.1. **Задача Коши (3.1) эквивалентна интегральному уравнению**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau; \qquad t \in [t_0, t_0 + T]. \qquad (3.2)$$

Доказательство.

Пусть $\exists$ решение задачи Коши (3.1) $y = y(t)$. Подставив $y = y(t)$ в (3.1), получим тождество, которое можно проинтегрировать, и тогда имеем (3.2) $\Rightarrow$решение задачи Коши (3.1) является решением интегрального уравнения (3.2). В обратную сторону,если $\exists$ решение интегрального уравнения (3.2), то в силу непрерывности $f(\tau, t)$ по τ интеграл в (3.2) является дифференциальной функцией. Продифференцировав (3.2), получим (3.1) $\Rightarrow$ решение интегрального уравнения является решением задачи Коши. *Лемма доказана.*

Теорема 3.1 **Решение задачи Коши (3.1) для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной единственно, если**

1) $f(t, y)$ **непрерывна по** t **и** y **в области**

R: $t_0 < t < t_0 + T$; $y_0 - b < y < y_0 + b$**;**

2) $f(t, y)$ **удовлетворяет в области** *R* **условию Липшица по** y **т.е.**

$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le N|y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]$**.**

Доказательство теоремы 3.1.

Редуцируем задачу Коши в предположении $\exists$ решения к интегральному уравнению (3.2). Предположим, что оно имеет два решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Тогда их разность $U(t) = y_1(t) - y_2(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{cases} U(t) = \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))\right) d\tau \\ U(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Сделаем оценку, используя условия Липшица

$$|U(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_1) - f(\tau, y_2)| d\tau \le N\int_{t_0}^{t} |U(\tau)| d\tau \quad \text{при } t_0 < t < t_0 + \varepsilon,$$

где ε выбирается так, что $|y_m(t) - y_0| \le b, \quad m = 1, 2$ и можно использовать условия Липшица. Так как $N = const$, то по лемме Гронуолла - Беллмана при $g(t) \equiv 0$ имеем

$0 \le U(t) \le 0 \;\Rightarrow\; U(t) \equiv 0 \;\Rightarrow\; y_1 = y_2$. *Теорема доказана.*

Дальше можно распространить доказательство на больший интервал по t, пока выполняются условия теоремы. Для линейного уравнения единственность доказывается сразу для всего интервала по t, т.к. условия теоремы по y выполняются на всем интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$.

п.4. Теорема существования решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Т е о р е м а 4.1. **Решение задачи Коши (3.1) при выполении условий (1) и (2) теоремы 3.1 существует в интервале $t_0-h<t<t_0+h$, где $h=\min(T,b/M)$, где $\|f\|\le M$ в R.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как задача Коши эквивалентна интегральному уравнению (3.2), то докажем $\exists$ решения интегрального уравнения. Будем строить решение интегрального уравнения методом последовательных приближений.

$$y_n(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что если $y_{n-1}(t)\in R:\{t_0\le t\le t_0+T,|y-y_0|\le b\}$,
то и $y_n(t)\in R$, т.к.

$$|y_n-y_0|\le M|t-t_0|\le Mh\le b. \tag{4.2}$$

Поскольку $y_0\in R$, то по методу математической индукции все $y_n\in R$. Теперь докажем, что $\exists$ предел $Y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)$.

Представим

$$y_n=y_0+\sum_{m=1}^{n}(y_m-y_{m-1}). \tag{4.3}$$

П р и з н а к В е й е р ш т р а с с а.

Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k(t)$ определен на $t\in[t_0,t_0+T]$ и если существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k$ такой, что для всех $t\in[t_0,t_0+T]$ и для $\forall k$ справедлива оценка

$$|U_k(t)|\le C_k,$$

то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[t_0,t_0+T]$.

С л е д с т в и е.

Если $U_k(t)$ – непрерывная функция и ряд сходится равномерно, то предел ряда $V(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}U_k(t)$ – непрерывная функция.

Докажем, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(y_m-y_{m-1})$ сходится, тогда

$$Y(x)=y_0+\sum_{m=1}^{\infty}(y_m-y_{m-1}).$$

Для этого построим можарантную оценку членов ряда (4.3)

$$|y_1-y_0|=\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,y_0(\tau))d\tau\right|\le M|t-t_0|\le Mh,$$

$$|y_2-y_1|=\left|\int_{t_0}^{t}\big(f(\tau,y_1(\tau))-f(\tau,y_0(\tau))\big)d\tau\right|\le \quad \text{(используя условия Липшица)}$$

$$\le N\int_{t_0}^{t}|y_1-y_0|d\tau\le NM\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)d\tau\le NM\frac{|t-t_0|^2}{2}\le NM\frac{h^2}{2}$$

и т.д., получим по методу математической индукции

$$|y_m-y_{m-1}|\le MN^{m-1}\frac{h^m}{m!}.$$

Мажорантный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}MN^{m-1}\dfrac{h^m}{m!}$ сходится по признаку Даламбера

$$\lim_{m\to\infty}\frac{U_{m+1}}{U_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{Nh}{m+1}=0<1.$$

Следовательно, функциональный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(y_m-y_{m-1})$ сходится абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса при $|t-t_0|\le h$, и мы имеем предел

$$Y(t)=\lim_{n\to\infty}y_n(t), \tag{4.4}$$

причем $Y(t)$ – непрерывная функция. Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(\tau,y_{n-1})d\tau=\int_{t_0}^{t} f(\tau,Y(\tau))d\tau. \tag{4.5}$$

Так как $f(\tau,y_{n-1})$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 3.1, то $|f(t,y')-f(t,y'')|<\varepsilon$, если $|y'-y''|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{N}$ (N – коэффициент Липшица). Тогда $\exists\ n_0$ такое, что при $n-1>n_0$ имеем из условия $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(t)=Y(t)$, что $|y_{n-1}-Y(t)|<\delta$. Тогда $|f(t,y_{n-1})-f(t,Y)|\le\varepsilon\ (\delta)$ при $n-1>n_0$, причем $\varepsilon\ (\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(\tau,y_{n-1})d\tau=\int_{t_0}^{t} f(\tau,Y)d\tau.$$

Отсюда следует, что при $n\to\infty$ из

$$y_n(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,y_{n-1}(\tau)d\tau$$

имеем

$$Y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,Y(\tau))d\tau.$$

Продифференцировав, получим

$$\frac{dY}{dt}=f(t,Y(t)) \quad \exists Y(t).$$ *теорема доказана.*

n.5 Дифференциальное уравнение I-порядка, неразрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения.

Уравнение

$$F(t,y,y')=0 \quad \{t,y,y'\}\in D_3\in R_3. \tag{5.1}$$

Т е о р е м а 5.1. **Если в некотором замкнутом трехмерном параллелепипеде**

$$D_3:\{t_0-h<t<t_0+h,\ y_0-b<y<y_0+b,\ y_0'-c<y'<y_0'+c\}$$

с центром в точке (t_0,y_0,y_0'), где y_0' – действительный корень уравнения $F(t_0,y_0,y_0')=0$, выполнены условия

а) $F(t,y,y')$ непрерывна по совокупности аргументов вместе с частными производными $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$;

б) $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{t_0,y_0,y_0'}\ne 0$,

то в окрестности точки $t=t_0$ существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения (5.1), удовлетворяющее начальным условиям $y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_0'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Условия а), б) дают, что в точке (t_0,y_0,y_0') выполнены условия $\exists$ и ! неявной функции

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y) \\ y_0'=f(t_0,y_0) \end{cases},$$

причем f – непрерывна по t,y, а $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'}$ также непрерывна (это сильнее, чем условие Липшица по y.)

Следовательно, решение $\exists$ и ! .

Метод введения параметра.

Пусть уравнение разрешено относительно $y(t)$ т.е.

$$F(t,y,y')=y(t)-f(t,y')=0\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y'}\ne 0. \tag{5.2}$$

Обозначим $y'=p(t)$ (это введение параметра). Тогда предполагая $\exists\ y(t)$ решения уравнения (5.2), получим

$$\frac{dy}{dt}=p(t)=\frac{d}{dt}\big(f(t,p)\big)=\frac{\partial f(t,p)}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}.$$

Окончательно получаем уравнение для $p(t)$

$$\frac{dp}{dt}=f_1(t,p)=\frac{p(t)-\dfrac{\partial f(t,p)}{\partial t}}{\dfrac{\partial f(t,p)}{\partial p}}. \tag{5.3}$$

Это уравнение разрешено относительно производной. Найдем его общее решение $p=p(t,c)$.

Тогда

$$y(t)=f(t,p(t,c)). \tag{5.4}$$

Решение найдено. С – определено из начальных данных.

Общий случай введения параметра.

Уравнение (5.1). Введем $y'(t)=p(t)\Rightarrow$ имеем

$$F(t,y,p)=0. \tag{5.5}$$

(5.5) определяет поверхность в пространстве (t,y,p). Зададим эту поверхность параметрически

$$\begin{cases} t=T(u,v)\ ; \\ y=Y(u,v)\Rightarrow F(T(u,v),Y(u,v),\mathrm{P}(u,v)=0\Rightarrow v=V(u); \\ p=\mathrm{P}(u,v). \end{cases}$$

Найдем уравнение для v от u.

Так как $dy=pdt$, то, подставив

$$dy=\frac{\partial Y}{\partial u}du+\frac{\partial Y}{\partial v}dv;\ \ pdt=\mathrm{P}(u,v)\left(\frac{\partial T}{\partial u}du+\frac{\partial T}{\partial v}dv\right),$$

получим

$$\frac{\partial Y}{\partial u}du+\frac{\partial Y}{\partial v}dv=\mathrm{P}(u,v)\left(\frac{\partial T}{\partial u}du+\frac{\partial T}{\partial v}dv\right).$$

Откуда

$$\frac{dv}{du}=\Phi(u,v)=\frac{\mathrm{P}(u,v)\dfrac{\partial T}{\partial u}-\dfrac{\partial Y}{\partial u}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}-\mathrm{P}(u,v)\dfrac{\partial T}{\partial v}}. \tag{5.6}$$

Получили уравнение в (u,v), которое разрешено относительно производной $\dfrac{dv}{du}$.

n.6 Особые решения уравнения I-го порядка, неразрешенного относительно производной.

Особым называется такое решение, во <u>всех</u> точках которого нарушается единственность решения задачи Коши.

Рассмотрим вначале уравнение разрешенное относительно производной $y'=f(t,y)$. Нарушение единственности будет там, где нарушаются условия теоремы $\exists$ и !. Если - $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неограничено, то условие Липшица не выполнено и единственность нарушена.

Например :

$$\frac{dy}{dt}=y^{2/3};\ \ \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{2/3}\right)=\frac{2}{3}y^{-1/3}=\infty\ (y=0).$$

Решение уравнения

$$y=\frac{(t+c)^3}{27}.$$

Функция $y(t)=0$ является особым решением.

Рассмотрим общий случай

$$F(t,y,y')=0.$$

Если бы разрешили это уравнение, то для соответствующей ветви мы могли бы вычислить $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$. В соответствии с правилом дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'}. \tag{6.1}$$

Если $\partial F/\partial y$ – ограничено, то условием нарушения единственности $\left(\dfrac{\partial y'}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=\infty\right)$ будет

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \tag{6.2}$$

Таким образом, условием (необходимым) существования особого решения есть

$$\begin{cases} F(t,y,y')=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=0 \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} F(t,y,p)=0 \\ \dfrac{\partial F(t,y,p)}{\partial p}=0 \end{cases} \tag{6.3}$$

Исключив из системы (6.3) p, получим p-дискриминантную кривую $y=y(t)$, которая будет особым решением, если $y=y(t)$ является решением $F(t,y,y')=0$.

П р и м е р 1.

$$(y')^3-y^2=0\ ;\ F(y,p)=p^3-y^2;\ \ \frac{\partial F}{\partial p}=3p^2$$

Система

$$\begin{cases} p^3-y^2=0 \\ 3p^2=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ p=0 \end{cases}\Rightarrow y=0 \text{ – особое решение.}$$

П р и м е р 2.

$$(y')^2-ty'+y=0\ ;\ F(y,p)=p^2-tp+y;\ \ \frac{\partial F}{\partial p}=2p-t.$$

Система

$$\begin{cases} p^2-tp+y=0 \\ 2p-t=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=t^2/4 \\ p=t/2 \end{cases}\Rightarrow y=t^2/4$$ – особое решение, так как оно удовлетворяет уравнению

$$F\left(t,\frac{t^2}{4},\frac{t}{2}\right)=0.$$

Метод получения особых решений при известном общем решении.

Пусть известен общий интеграл уравнения $\Phi(t,y,c)=0$. Это семейство

решений. Особое решение есть огибающая этого семейства, т.е.

$$\begin{cases} \Phi(t,y,c)=0\ ; \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=0. \end{cases}$$

Исключая c, получим c-дискриминантную кривую $\varphi\ (t,y)=0$. Это особое решение, т.к. функция $\varphi\ (t,y)=0$ является решением дифференциального уравнения и в каждой точке нарушается единственность решения.

Для того, чтобы разрешить $\Phi(t,y,c)=0$ относительно $y=y(t,c)$ (или $t=t(y,c)$), необходимо, чтобы одновременно не обращались в ноль $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$, т.е. должно быть выполнено условие

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\ne 0.$$

Однако точки $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=0$ могут входить в огибающую, т.к.

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial c}dc=0\ \Rightarrow\ \text{при}\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\ \ \text{и}\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0\ \Rightarrow\frac{\partial\Phi}{\partial c}=0.$$

Чтобы исключить эти точки, мы должны записать условия $\exists$ особого решения

$$\begin{cases} \Phi(t,y,c)=0\ ; \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=0\ ; \\ \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\ne 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

П р и м е р:

$$(y')^2-ty'+y=0.$$

Общий интеграл

$$\Phi(t,y,c)=y-ct+c^2=0\ \ (\text{т.к. } y=c(t-c))\ ;$$

особое решение находим из системы

$$\begin{cases} y-ct+c^2=0 \\ -t+2c=0 \\ 1+c^2\ne 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial c}=-t+2c \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t}=-c;\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=1$$

Откуда $c=\dfrac{t}{2}$, а c – дискретная кривая $y=\dfrac{t}{2}t-\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{t^2}{4}$, $y=\dfrac{t^2}{4}$ – особое решение.

п.7. Общий интеграл уравнения I-го порядка. Интегральный множитель.

Уравнение $y'(t)=f(t,y)=-\dfrac{M}{N}$ $\;N\neq 0$ всегда можно представить в виде

$$M(t,y)dt+N(t,y)dy=0,\quad N\neq 0 \tag{7.1}$$

Если $M=\dfrac{\partial V}{\partial t}$, а $N=\dfrac{dV}{\partial y}$, то (7.1) уравнение в полных дифференциалах и мы имеем

$$Mdt+Ndy=\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial y}dy=dV=0. \tag{7.2}$$

Следовательно, имеем

$$V(t,y)=C. \tag{7.3}$$

Представление (7.3) — общий интеграл уравнения (7.1). Неявно представлено однопараметрическое семейство решений. Оно разрешимо, т.к. $N=\dfrac{dV}{\partial y}\neq 0$, следовательно,

$$y=y(t,C). \tag{7.4}$$

Если мы для уравнения (7.1) имеем задачу Коши $y(t=t_0)=y_0$, то $C=V(t_0,y_0)$ и общее решение

$$V(t,y)=V(t_0,y_0). \tag{7.5}$$

Это другое определение общего решения через задачу Коши для произвольного y_0.

Чтобы найти явное выражение решения (7.3) необходимо, чтобы $N\neq 0$. Если в некоторой точке $N=0$, а $M\neq 0$, то можно определить

$$t=t(y,C). \tag{7.6}$$

Если в некоторой точке одновременно $N=0$ и $M=0$, то это особая точка.

Т е о р е м а 7.1. **Необходимым и достаточным условием представления уравнения (7.1) в полных дифференциалах является условие $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial t}$ (если решение $\exists$).**

1) *Д о к а з а т е л ь с т в о н е о б х о д и м о с т и.*

$$M=\frac{\partial V}{\partial t};\quad N=\frac{\partial V}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial y}.$$

2) *Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и.*

Пусть

$$M=\frac{\partial V}{\partial t}\Rightarrow V(t,y)=\int_{t_0}^{t}M(t,y)dt+\varphi(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial y}=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial M}{\partial y}dt+\varphi'(y)=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial N}{\partial t}dt+\varphi'(y)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=N(t,y)-N(t_0,y)+\varphi'(y).$$

Возьмем $\varphi(y)=\displaystyle\int_{y_0}^{y}N(t_0,y)dy$, тогда $\varphi'(y)=N(t_0,y)\Rightarrow\dfrac{\partial V}{\partial y}=N(t,y)$

(это мы получим из $\dfrac{\partial V}{\partial t}=M$ и $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial t}$).

Теорема доказана.

Общее решение можно записать в виде:

$$V(t,y)=\int_{t_0}^{t}M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}N(t_0,y)dy=C, \tag{7.7}$$

если $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial t}$.

Предположим, что $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial t}$. Тогда можно поставить вопрос: существует ли такая функция $\mu(t,y)$, называемая интегрирующим множетелем, что

$$\mu M=\frac{\partial V}{\partial t};\quad \mu N=\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{7.8}$$

Т е о р е м а 7.2. **Если уравнение**

$$Mdt+Ndy=0$$

имеет общий интеграл $V(t,y)=C$, то это уравнение имеет интегрирующий множитель.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Имеем

$$Mdt+Ndy=0;\quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial t},$$

а из $V(t,y)=C$

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial y}dy=0.$$

Откуда имеем

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{M}{N}=-\frac{\partial V/\partial t}{\partial V/\partial y}\Rightarrow\exists\,\mu\quad\text{такое что,}$$

$$\frac{\partial V/\partial t}{M}=\frac{\partial V/\partial y}{N}=\mu\Rightarrow\mu M=\frac{\partial V}{\partial t},\ \mu N=\frac{\partial V}{\partial y}\Rightarrow$$

уравнение $\mu Mdt+\mu Ndy=0$ в полных дифференциалах.

Число интегрирующих множителей бесконечно, т.к. если μ – интегрирующий множитель, то $\mu\,\varphi(V)$, также интегрирующий множитель:

$$\mu Mdt+\mu Ndy=dV\Rightarrow\mu\,\varphi(V)Mdt+\mu\,\varphi(V)Ndy=\varphi(V)dV=dV_1,$$

где $V_1=\int\varphi(V)dV$.

Т е о р е м а 7.3. **Формула $\mu_1=\mu\,\varphi(V)$ дает любой интегрирующий множитель уравнения $Mdt+Ndy=0$ (если его решение $\exists$).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть μ и μ_1 два различных интегральных множителя

$$\Rightarrow\quad \mu Mdt+\mu Ndy=dV=0$$

$$\mu_1 Mdt+\mu_1 Ndy=dV_1=0$$

$$\Rightarrow\quad \mu M=\frac{\partial V}{\partial t};\ \mu N=\frac{\partial V}{\partial y};\ \mu_1 M=\frac{\partial V_1}{\partial t};\ \mu_1 N=\frac{\partial V_1}{\partial y}\Rightarrow$$

$$\frac{M}{N}=\frac{\partial V/\partial t}{\partial V/\partial y}=\frac{\partial V_1/\partial t}{\partial V_1/\partial y}\Rightarrow\begin{vmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial t} & \dfrac{\partial V}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial V_1}{\partial t} & \dfrac{\partial V_1}{\partial y}\end{vmatrix}=0.$$

Так как Якобиан функции V и V_1 равен нулю, то

$V_1=\psi(V)\Rightarrow\mu_1 Mdt+\mu_1 Ndy=dV_1=\psi'\,dV=\psi'(V)\mu Mdt+\psi'(V)\mu Ndy$

$\Rightarrow\quad \mu_1=\mu\,\psi'(V)$ или $\mu_1=\mu\,\varphi(V)$ для $\forall\,\mu,\mu_1$.

С л е д с т в и е. Если известно два интегральных множителя при $\mu/\mu_1\neq const$, то условие $\dfrac{\mu_1(t,y)}{\mu(t,y)}=C$ дает общее решение дифференциального уравнения т.к.

$$\frac{\mu_1}{\mu}=C\Rightarrow\frac{\mu\,\varphi(V)}{\mu}=C\Rightarrow\varphi(V)=C\Rightarrow V(t,y)=C\ \text{ – общее решение.}$$

Как найти $\mu(t,y)$?

Пусть

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial t},$$

но $\exists\,\mu$ такое, что

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial t}(\mu N).$$

Откуда получим

$$N\frac{\partial\mu}{\partial t}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)$$

1) Если $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0$ $\;(\mu=\mu(t))$, то

$$\frac{d\mu}{\mu}=f(t)dt=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)dt.$$

$\Rightarrow$ Если $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial t}\right)=f(t)$ (функция только от t), то

$$\mu(t)=e^{\int f(t)dt}. \tag{7.9}$$

2) Если $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial t}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)=\varphi(y)$ (функция только y), то $\mu=\mu(y)$ – функция только y, и мы имеем

$$\frac{d\mu}{\mu}=\varphi(y)\Rightarrow\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}. \tag{7.10}$$

п.8. Нормальные системы DY. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы и уравнения *n*-го порядка.

Нормальная система
$$\begin{cases}\dfrac{d\bar y}{dt}=\bar f(t,\bar y)\quad t\in[t_0,t_0+T]\\ \bar y(t=t_0)=\bar y^0\end{cases} \tag{8.1}$$

Т е о р е м а 8.1. **Если $\bar f=\{f_m(t,y_1,\ldots,y_n)\}$ для всех $m\in[1,n]$ удовлетворяет условиям**

1) непрерывности по всем аргументам в области

$|t-t_0|\leq T;\quad |y_m-y_m^0|\leq b$ (b – **одно и то же для** $\forall m$);

2) условию Липшица по $\bar y$, т.е.

$|f_m(t,\bar y')-f_m(t,\bar y'')|\leq K\{|y_1'-y_1''|+\ldots+|y_n'-y_n''|\}$ **для всех $m\in[1,n]$,**

то решение задачи Коши $\bar y(t)$ для нормальной системы дифференциальных уравнений существует и единственно на отрезке $|t-t_0|<h$, где $h=\min(T,{}^{b}\!/_{M})$, $|f_m|<M$ для $\forall m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Строится эквивалентная система интегральных уравнений

$$y_m(t)=y_m^0+\int_{t_0}^{t}f_m(\tau,y_1(\tau),\ldots,y_n(\tau))d\tau,\quad m\in[1,n]. \tag{8.2}$$

1) Доказательство эквивалентности аналогично лемме 3.1.

2) Доказательство единственности аналогично теореме 3.1, но только нужно учитывать векторный характер решения.

Пусть есть два решения

$$\bar y_1=\{y_{11},y_{12},\ldots,y_{1n}\}$$
$$\bar y_2=\{y_{21},y_{22},\ldots,y_{2n}\},$$

у которых не все y_{1k} равны y_{2k}, тогда не равна нулю функция

$$\Phi(t)=\sum_{k=1}^{n}|y_{1k}-y_{2k}|$$

Из (8.2) следует

$$y_{1k}-y_{2k}=\int_{t_0}^{t}\big(f_k(\tau,\bar y_1)-f_k(\tau,\bar y_2)\big)d\tau\Rightarrow|y_{1k}-y_{2k}|\leq K\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)d\tau\Rightarrow$$

Просуммировав по всем "k", получим

$$0\leq\Phi(t)\leq Kn\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)d\tau.$$

Из леммы Гронуолла - Беллмана имеем

$$0\leq\Phi(t)\leq 0\Rightarrow\Phi(t)\equiv 0\Rightarrow\bar y_1=\bar y_2.$$

Единственность доказана.

2) Доказательство существования аналогично теореме 4.1.

Строим итерационный процесс

$$\bar y^{(s)}(t)=\bar y^{(0)}+\int_{t_0}^{t}\bar f(\tau,\bar y^{(s-1)}_{(\tau)})d\tau\qquad(s\text{ – номер итерации}).$$

Если $\begin{cases}|t-t_0|\leq h\\ h=\min(T,b/M)\end{cases}$, то все $\bar y^{(s)}\in D$,

т.е. для $\forall s$ $\;|y_m^{(s)}-y_m^0|\leq b$,

т.к. $|y_m^{(s)}-y_m^0|\leq\displaystyle\int_{t_0}^{t}|f_m(\tau,\bar y^{(s-1)}_{(\tau)})|d\tau\leq M(t-t_0)\leq Mh\leq b$.

Рассматриваем сходимость ряда $\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty}\left(y_m^{(s)}-y_m^{(s-1)}\right)$.

Оценка : $\;\left|y_m^{(s)}-y_m^{(s-1)}\right|\leq M(nK)^{s-1}\dfrac{h^s}{s!}$.

Дальше все аналогично теореме 4.1. Мажорантный ряд сходится по признаку Даламбера. Функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно к непрерывной функции по признаку Вейерштрасса.

$\Rightarrow\lim\limits_{s\to\infty}y_m^{(s)}=Y_m(t);$ т.е. $\lim\limits_{s\to\infty}\bar y^{(s)}=\bar Y(t).$

$\Rightarrow\lim\limits_{s\to\infty}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\bar f(\tau,\bar y^{(s)}_{(\tau)})d\tau=\int_{t_0}^{t}\bar f\big(\tau,\bar Y(\tau)\big)d\tau\Rightarrow$

$\exists\ Y(t)$ такая, что

$$\bar Y(t)=\bar y^0+\int_{t_0}^{t}\bar f(\tau,\bar Y(\tau))d\tau.$$

Так как интегральное уравнение эквивалентно решению задачи Коши

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar Y}{dt}=\bar f(t,\bar Y(t))\\ \bar Y(t=t_0)=\bar y^0\end{cases},$$

то решение задачи Коши $\bar y(t)$ $\exists$.

Существование и единственность решения уравнения *n*-го порядка.

Имеем

$$\begin{cases}\dfrac{d^n y}{dt^n}=f\left(t,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right);\quad t\in[t_0,t_0+T];\\ y=y_0,y'(t_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)}.\end{cases} \tag{8.3}$$

Т е о р е м а 8.2. **Задача Коши (8.3) для уравнения *n*-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, правая часть которого $f\left(t,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ удовлетворяет условиям:**

1) непрерывности по всем аргументам и

2) условию Липшица по аргументам $(y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, имеет решение и притом единственное.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Сведем (8.3) к задаче Коши для нормальной системы

$$\bar y(t)=\left\{y_1=y(t),y_2=y'(t),\ldots,y_n=y^{(n-1)}(t)\right\};\ \bar y_0=\left\{y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)}\right\}.$$
$$\bar f(t,\bar y)=\{y_2,y_3,\ldots,y_n,f(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)\}$$

Тогда имеем нормальную систему

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar y}{dt}=\bar f(t,\bar y),\quad t\in[t_o,t_0+T];\\ \bar y(t=t_0)=\bar y_0.\end{cases}$$

Проверяем удовлетворяет ли $\bar f(t,\bar y)$ условиям 1) и 2) теоремы (8.1)? Удовлетворяет. *Следовательно, теорема 8.2 доказана.*

п.9. Непрерывность решений дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам. Регулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений. Понятие о сингулярном возмущении.

Задача Коши как модель. Начальные данные и правая часть зависят от параметров модели.

Задачу всегда можно свести к параметрам в правой части.

П р и м е р $U(t)=U$

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{dt}=F(t,U,\nu_1),\quad 0<t<T\\ U(t=0)=U_0(\nu_2),\quad |y-y_0|\leq A\end{cases}$$

Введем $y(t)=U(t)-U_0$, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f(t,y,\bar\mu),\quad 0<t<T\\ y(t=0)=0,\qquad |y|\leq a\end{cases}\quad\begin{vmatrix}f=F(t,y+U_0(\nu_2),\nu_1)\\ \bar\mu=(\nu_1,\nu_2)\end{vmatrix} \tag{9.1}$$

Достаточно рассмотреть один параметр μ.

Т е о р е м а 9.1. **Если в задаче Коши (9.1) $f(t,y,\mu)$ непрерывна по всем аргументам в области $D:\{0\leq t<T,\ |y|\leq a,\ |\mu-\mu_0|\leq b\}$ и удовлетворяет по переменной "y" условию Липшица**

$$|f(t,y_1,\mu)-f(t,y_2,\mu)|\leq K|y_1-y_2|$$

всюду в D, причем K не зависит от t и μ, то решение задачи (9.1) $y=y(t,\mu)$ определено в D и непрерывно по t и μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Доказательство опирается на лемму Гронуолла – Беллмана.

Рассмотрим $\Delta y=y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu)$.

$$\frac{dy(t,\mu+\Delta\mu)}{dt}=f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu);\ y(t_0,\mu+\Delta\mu)=0;$$

$$\frac{dy(t,\mu)}{dt}=f(t,y(t,\mu),\mu);\ y(t_0,\mu)=0;$$

откуда

$$\frac{d\Delta y}{dt}=f\big(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu\big)-f\big(t,y(t,\mu),\mu\big)\ \Rightarrow \tag{9.2}$$

Следовательно,

$$\Delta y=\int_{t_0}^{t}\Big\{\big(f(\tau,y(\tau,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(\tau,y(\tau,\mu),\mu+\Delta\mu)\big)+$$
$$+\big(f(\tau,y(\tau,\mu),\mu+\Delta\mu)-f(\tau,y(\tau,\mu),\mu)\big)\Big\}d\tau. \tag{9.3}$$

Используя условия Липшица по y и непрерывность функции $f(t,y,\mu)$ по μ, получим

$$|\Delta y|\leq K\int_{t_0}^{t}|\Delta y|\,d\tau+(t-t_0)\varepsilon(\delta);\ |\Delta\mu|\leq\delta;\ \varepsilon(\delta)\underset{\delta\to 0}{\to}0.$$

По лемме Гронуолла - Беллмана имеем

$$|\Delta y|\leq K\varepsilon(\delta)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)e^{k(t-\tau)}d\tau+t\varepsilon(\delta)\leq C\varepsilon(\delta).$$

Следовательно,

$$|\Delta y|\leq C\varepsilon(\delta)\quad\text{при}\quad|\Delta\mu|\leq\delta, \tag{9.4}$$

теорема доказана.

Изменения параметров задачи можно рассматривать как возмущение задачи. Тогда будем иметь:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f(y,t,\mu=0),\quad 0<t<T,\\ y(t=0)=0,\end{cases}\qquad\text{невозмущенная задача} \tag{9.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), & 0<t<T, \\ y(t=0)=0 & |\mu| \le \varepsilon . \end{cases} \qquad \text{возмущенная задача} \qquad (9.6)$$

Как связано возмущенное решение с невозмущенным?
Теория возмущений - исследование асимптотики $y(t,\mu)\quad \mu \to 0$.

Регулярное возмущение: это означает, что $f(y,t,\mu)$ – удовлетворяет условиям теоремы $\exists$ и ! и при $\mu \to 0$ эти условия не нарушаются, а $f(y,t,\mu)$ разлагается в степенной ряд по μ. Для регулярно возмущенных задач выполняются следующие теоремы. (Доказываем для одного уравнения. Легко переносится на системы).

Т е о р е м а 9.2 **Если правая часть в задаче Коши (9.1) $f(t,y,\mu)$ непрерывна по всем переменным вместе с частными производными по y,μ в D, то $\exists$ производная от решения по параметру μ непрерывная в D.**

Д о к а з а т е л ь с т в о
Из (9.2) , разделив на $\Delta\mu$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta y}{\Delta \mu}\right) = \frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu) - f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta\mu} + \\ + \frac{f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu) - f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}.$$

При $\Delta\mu \to 0$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \qquad (9.7)$$

т.к. $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial \mu}$ $\exists$ и непрерывны, то (9.7) есть уравнение для $\dfrac{\partial y}{\partial \mu} = U$

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial y}U + \dfrac{\partial f}{\partial \mu}, \\ U(t_0) = 0 . \end{cases} \qquad (9.8)$$

Правая часть линейна по $U \Rightarrow$ решение для (9.8) $\exists$ и ! . Значит $\exists$ $\dfrac{\partial y}{\partial \mu} = U$.

Теорема доказана.

Без доказательства приведем теорему о разложении решения возмущенной задачи по малому параметру μ.

Т е о р е м а 9.3. **Пусть в области $D:(t_0<t<t_0+T, |y-y_0| \le a, |\mu| \le \varepsilon)$ функция $f(t,y,\mu)$ обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и μ до порядка *(n+1)* включительно. Тогда существует сегмент $[t_0;t_0+T]$, на котором для решения $y(t,m)$ возмущенной задачи (9.6) справедливо асимптотическое представление**

$$y(t,\mu) = y(t,0) + \mu\frac{\partial y(t,0)}{\partial \mu} + \ldots + \frac{\mu^n}{n!}\frac{\partial^n y(t,0)}{\partial \mu^n} + O(\mu^{n+1}) \qquad (9.9)$$

Неравенство Чаплыгина.
Если имеются две задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f_1(t,y), \\ y(t_0) = y_0 , \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = f_2(t,z), \\ z(t_0) = z_0 , \end{cases}$$

причем в D выполняются условия
$f_1(t,y) \le f_2(t,y)$ и $y_0 \le z_0$, то при $t_0 < t < t_0+T$ имеем $y(t) \le z(t)$.

Сингулярное возмущение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), & t\in[0,T] , \\ y(t=0) = y_0, & |\mu| \le \varepsilon \end{cases}$$

возникает, если $f(y,t,\mu)$ при $\mu \to 0$ имеет нерегулярность, т.е. ведет себя особым (сингулярным) образом. Это, например,

1) $f(y,t,\mu=0)$ не удовлетворяет условиям теоремы $\exists$ и ! решения
2) $f \to \infty$ при $\mu \to 0$ и т.п.

Наиболее частый и практически важный случай – это малый параметр при старшей производной

$$\mu\, y_{(t)}^{(n)} = F(t,y,y',\ldots y^{(n-1)}) \qquad (9.10)$$

или, соответственно, система с малым параметром при одной производной

$$\begin{aligned} &\mu\frac{dy_1}{dt} = F_1(t,\overline{y}) \;\Rightarrow\; \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{\mu}F_1(t,y) = f_1(t,y,\mu) \to \infty \quad \text{при} \quad \mu \to 0; \\ &\frac{dy_2}{dt} = f_2(t,\overline{y}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_n}{dt} = f_n(t,\overline{y}). \end{aligned} \qquad (9.11)$$

п.10. Линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка и его свойства. Сведение к нормальной системе первого порядка. Существование решения.

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(n-k)}(t) = f(t), \;\; a_0(t) \ne 0, \;\; t\in[t_0,t_0+T] . \qquad (10.1)$$

$f(t) \equiv 0$ уравнение однородное,
$f(t) \ne 0$ уравнение неоднородное.

Т е о р е м а 10.1. **Линейность уравнения сохраняется при замене переменного $t=\varphi(\tau), \varphi \in C_n, \varphi' \ne 0$ и линейном преобразовании функции $y(t) = \alpha(t)z(t) + \beta(t), \alpha, \beta \in C_n, \alpha \ne 0$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. $t=\varphi(\tau) \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{1}{\varphi'(\tau)}\dfrac{dy}{d\tau}; \;\; \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{1}{\varphi'(\tau)}\dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{1}{\varphi'(\tau)}\dfrac{dy}{d\tau}\right)$

и т.д. $y^{(k)}$ линейная комбинация $\dfrac{d^k y}{d\tau^k}$.

Следовательно, сохраняется линейность уравнения.

2. $y = \alpha z + \beta \Rightarrow y' = \alpha z' + \alpha' z + \beta' \Rightarrow y'' = \alpha z'' + 2\alpha' z' + \alpha'' z + \beta''$
и т.д. все линейно. Приведя подобные члены, получим линейное уравнение.

Т е о р е м а 10.2. **Для линейного дифференциального уравнения выполняется принцип суперпозиции**

$$L_n\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{m} C_k L_n(y_k) \qquad (10.2)$$

Применение принципа суперпозиции:

1) Для суммы правых частей $f = \sum_{m=1}^{M} f_m$

$$L_n(y_m) = f_m \;\Rightarrow\; y = \sum_{m=1}^{M} y_m.$$

Это суммирование источников.

2) Разделение задачи Коши на неоднородную с нулевыми начальными данными и на однородную с начальными данными.

$$\begin{cases} L_n(y) = f \\ y(t_0) = y_0,\; y'(t_0) = y'_0,\; \ldots,\; y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

$$y = U(t) + V(t)$$

$$\begin{cases} L(U) = f, \\ U(t_0) = 0,\; \ldots,\; U^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} L(V) = 0, \\ V(t_0) = y_0,\; \ldots,\; V^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} . \end{cases}$$

3) Разделение начальных данных для однородного уравнения.

$$\begin{cases} L_n(y) = 0 \\ y(t_0) = y_0,\; \ldots,\; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{cases} \;\Rightarrow\; y = \sum_{m=1}^{n} U_m(t) y_0^{(m-1)}$$

$$\begin{cases} L(U_m) = 0 \\ U_m^{(k)}(t_0) = 0 \;\; k\in[0,n-1],\; k \ne m \\ U_m^{(m)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

4) Комбинация решений однородного уравнения есть решение однородного уравнения.

Т е о р е м а 10.3. ($\exists$ и ! решения на всем интервале).

Если коэффициенты $\alpha_k(t)$ и правая часть $f(t)$ есть непрерывные функции при $t\in[t_0,t_0+T]$, то решение $\exists$и ! на всем интервале $[t_0,t_0+T]$. (т.к. условия теоремы $\exists$ и ! выполняются на всем интервале).

Линейное дифференциальное уравнение (10.1) сводится к нормальной линейной системе дифференциальных уравнений. Введем вектор-функцию

$$\overline{u}(t) = \left(u_1 = y(t),\; u_2 = y'(t),\; \ldots, u_n = y^{(n-1)}(t)\right),$$

для которой получим нормальную линейную систему уравнений

$$u'_m(t) = \begin{cases} u_{m+1}(t) & \text{при} \quad m\in[1,n-1] \\ \sum_{k=1}^{n} b_k(t) u_{n-k+1}(t) + f(t) & \text{при} \;\; m=n,\; b_k = -\dfrac{a_k(t)}{a_0(t)}. \end{cases} \qquad (10.3)$$

В общем случае нормальная линейная система уравнений записывается в виде:

$$\overline{u}'(t) = \hat{A}\overline{u} + \overline{F} , \qquad (10.4)$$

где матрица $\hat{A} = \{\alpha_{mk}(t)\}$ $\quad m,k\in[1,n]$. В дальнейшем мы будем подробно рассматривать линейную систему дифференциальных уравнений, т.к. уравнение *n*-го порядка сводится к частному случаю такой системы.

п.11. Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Понижение порядка уравнения. Уравнение Риккати.

Рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = f(t) . \qquad (11.1)$$

Оно сводится к системе второго порядка введением вектор-функции $\overline{u}(t) = \left(u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t)\right)$, для которой получаем систему

$$\begin{cases} u'_1(t) = u_2(t) \\ u'_2(t) = -a_2(t)u_1(t) - a_1(t)u_2(t) + f(t) \end{cases}$$

или

$$\overline{u}'(t) = \hat{A}\overline{u} + \overline{f}, \;\; \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \;\; \overline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \qquad (11.2)$$

У линейного однородного уравнения ($f=0$) можно понизить порядок, введя новую функцию

$$Z(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}. \qquad (11.3)$$

Тогда

$$y'(t) = Z(t)y(t), \quad y'' = Z'y + Zy' = Z'y + Z^2 y . \qquad (11.4)$$

Подставив (11.4) в (11.1) при $f=0$, получим

$$Z'(t) + Z^2 + a_1(t)Z + a_2(t) = 0 . \qquad (11.5)$$

Полученное уравнение является уравнением Риккати.
Общий вид уравнения Риккати:

$$y'(t) = p(t)y^2 + q(t)y + r(t) ,$$

которое заменой искомой функции $y = -\dfrac{Z(t)}{p(t)}$ приводится к виду (11.5).

$$Z'(t) + Z^2(t) - \left(q(t) + \frac{p'}{p}\right)Z + r(t)p(t) = 0 .$$

В уравнении (11.5) можно убрать член, содержащий Z, не изменяя коэффициента при Z^2 с помощью замены искомой функции

$$Z(t) = u(t) - \frac{a_1(t)}{2}. \qquad (11.6)$$

Тогда из (11.5) получим

$$u'(t) = -u^2(t) + R(t); \quad R(t) = \frac{a_1^2 + 2a'_1}{4} - a_2 . \qquad (11.7)$$

Если $R(t) = const = R_0$, то переменные разделяются и мы имеем

$$\frac{du}{R_0 - u^2} = dt$$

или

$$u(t) = \sqrt{R_0}\cdot\frac{1 - e^{-2\sqrt{R_0}t}}{1 + e^{-2\sqrt{R_0}t}} \qquad (11.8)$$

Тогда, согласно (11.3) и (11.6), получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \sqrt{R_0}\cdot\frac{1 - e^{-2\sqrt{R_0}t}}{1 + e^{-2\sqrt{R_0}t}} - \frac{a_1(t)}{2} = q(t) . \qquad (11.9)$$

Откуда

$$y(t) = y(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau} . \qquad (11.10)$$

п.12. Общая теория однородных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Линейная однородная система

$$\begin{cases} y_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_i(t), \;\; i\in[1,n], \;\; t\in[t_0,t_0+T], \\ y_i(t_0) = y_i^0. \end{cases} \qquad (12.1)$$

Если обозначить матрицу $\hat{A} = \{a_{ik}(t)\}$, а $\overline{y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{Bmatrix}$, то задача Коши

$$\begin{cases} \overline{y}(t) = \hat{A}\overline{y}(t), & t\in[t_0,t_0+T] \\ \overline{y}(t_0) = \overline{y}^0 \end{cases}, \qquad (12.2)$$

$L(\overline{y}) \equiv \overline{y}' - A\overline{y}$ – линейный оператор, следовательно, к нему применим принцип суперпозиции

$$L\left(\sum_{m=1}^{M} C_m^{(m)}\overline{y}\right) = \sum_{m=1}^{M} C_m L({}^{(m)}\overline{y}). \qquad (12.3)$$

Через ${}^{(m)}\overline{y}$ – обозначаем *m*-ое решение, чтобы отличить от *m*-ой производной $\overline{y}^{(m)}$.

Если $\overline{f}(t) = \sum_{m=1}^{M} a_m \overline{f}^{(m)}$, то $\overline{y}(t) = \sum_{m=1}^{M} a_m^{(m)}\overline{y}$, где $L\left({}^{(m)}\overline{y}\right) = \overline{f}^{(m)}$.

Т е о р е м а 12.1. **Пусть ${}^{(1)}y(t),\ldots,{}^{(n)}y(t)$ - "*n*" решений однородной системы**

$$\overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0 . \qquad (12.4)$$

Тогда матрица

$$\hat{W}(t) = \begin{Bmatrix} {}^{(1)}y_1,\ldots,{}^{(n)}y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{(1)}y_n,\ldots,{}^{(n)}y_n \end{Bmatrix}$$

удовлетворяет матричному уравнению

$$\hat{W}'(t) - \hat{A}\hat{W}(t) = 0 \qquad (12.5)$$

и, обратно, если матрица $\hat{W}(t)$ удовлетворяет уравнению (12.5), то ее столбцы есть вектора, являющиеся решением уравнения (12.4).

Доказательство проводится покомпонентным дифференцированием.

Т е о р е м а 12.2. **Если $\hat{W}(t)$ - решение (12.5), то $\overline{y} = \hat{W}\overline{C}$ ($\overline{C}$ - постоянный вектор) удовлетворяет системе (12.4), а $\hat{Z} = \hat{W}\hat{C}$ ($\hat{C}$ - постоянная матрица) удовлетворяет матричному уравнению (12.5).**

Доказательство следует из принципа суперпозиций.

О п р е д е л е н и е . Векторные функции ${}^{(1)}y(t),\ldots{}^{(n)}y(t)$ – линейно зависимы на интервале $\tau = \{t_0,t_0+T\}$, если $\exists$ ненулевой постоянный вектор $\overline{C}$ такой, что выполняется тождество

$$\hat{W}\overline{C} \equiv 0 \quad \text{при} \quad \forall t\in\tau . \qquad (12.6)$$

Если условие (12.6) выполняется только при $\overline{C} \equiv 0$, то ${}^{(1)}\overline{y}(t),\ldots,{}^{(n)}\overline{y}(t)$ являются линейно независимыми.

О п р е д е л е н и е . Определителем Вронского для системы вектор- функций $\left\{{}^{(i)}y(t)\right\}$, $i\in[1,n]$ называется

$$\Delta(t) = Det\; \hat{W}(t) . \qquad (12.7)$$

Т е о р е м а 12.3. **Если решения $\left\{{}^{(k)}\overline{y}\right\}$ $k\in[1,n]$ однородной системы $\overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0$ линейно зависимы на $t\in\tau$, то определитель Вронского $\Delta(t) = 0$ для $\forall t\in\tau$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из линейной зависимости следует $\exists \bar C\neq 0$ такое, что $\hat W\bar C=0$. Это линейно однородная система для $\bar C$, следовательно, $Det\,\hat W=\Delta(t)=0$.

Т е о р е м а 12.4. **Если $\Delta(t)=0$ хотя бы для одного $t\in\tau$, то $\Delta(t)=0$ и для $\forall t\in\tau$, и, следовательно, $\{{}^{(k)}\bar y\}$ линейно зависимы на τ.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть при $t=t_0\in\tau$ имеем $\Delta(t_0)=0$. Тогда $\exists \bar C\neq 0$, которые удовлетворяют системе уравнений $\hat W(t_0)\bar C=0$. Возьмем $\bar y(t)=\hat W(t)\bar C$. Согласно теореме 12.2 $\bar y$ решение задачи Коши

$$\begin{cases}\bar y'-\hat A\bar y=0 \quad t\in\tau\\ \bar y(t_0)=0.\end{cases}$$

Следовательно, $\bar y\equiv 0\ \ \forall t\in\tau$ по теореме единственности решения задачи Коши. Тогда $\hat W\bar C=0$ для $\forall t\in\tau\Rightarrow Det\hat W=\Delta(t)=0$ для $\forall t\in\tau$.

Т е о р е м а 12.5 (альтернатива). **Определитель Вронского $\Delta(t)$ для решения $\{{}^{(k)}\bar y\}$ $k\in[1,n]$ однородной системы дифференциальных уравнений или $\Delta(t)\equiv 0$ для $\forall t\in\tau$, что означает линейную зависимость $\{{}^{(k)}\bar y\}$, или $\Delta(t)\neq 0$ для $\forall t\in\tau$, что означает линейную независимость $\{{}^{(k)}\bar y\}$.**

п.13. Фундаментальная система решений и общее решение для линейной системы дифференциальных уравнений.

О п р е д е л е н и е. **Фундаментальной системой** решений (Ф.С.Р.) однородной системы называется "n" линейно независимых решений $\{{}^{(k)}\bar y\}$, $k\in[1,n]$ этой системы, а соответственно матрица $\hat W=\{{}^{(1)}\bar y,{}^{(2)}\bar y,...,{}^{(n)}\bar y\}$ называется **фундаментальной матрицей системы**.

Фундаментальная матрица является решением матричного уравнения

$$\hat W'(t)=\hat A\hat W(t),$$

причем $Det\hat W\neq 0$.

Т е о р е м а 13.1. **Фундаментальная матрица существует.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Решение задачи Коши

$$\begin{cases}\hat W'(t)=\hat A\hat W \qquad t\in\tau\\ \hat W(t_0)=\hat E\end{cases}$$

дает фундаментальную матрицу, т.к.

$$\Delta(t_0)=Det\hat W(t_0)=Det\hat E\neq 0,$$

следовательно, по т.12.2 $\Delta(t)\neq 0$ при $\forall t\in\tau$ и решения $\{{}^{(k)}\bar y\}$ - линейно независимы.

Т е о р е м а 13.2. **Если $\hat W(t)$ – фундаментальная матрица для однородной системы, то ее общее решение представимо в виде: $\bar y(t)=\hat W\bar C$, где $\bar C$ - произвольный постоянный вектор.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Согласно т.12.2. $\bar y(t)=\hat W\bar C$ есть решение однородной системы $\bar y'=\hat A\bar y$. Надо показать, что мы можем удовлетворять произвольным начальным данным Коши $\bar y(t_0)=\hat W(t_0)\bar C=\bar y^0$, т.к. $Det\hat W(t_0)\neq 0\Rightarrow\exists\bar C$ для $\forall\bar y^0$.

С л е д с т в и е. **Решение задачи Коши для произвольных начальных данных $\bar y^0$ представимо в виде**

$$\bar y(t)=\hat Z(t,t_0)\bar y^0,$$

где импульсная функция $\hat Z(t,t_0)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases}\hat Z'(t)=\hat AZ(t), \qquad t\in\tau,\\ \hat Z(t_0)=\hat E.\end{cases}\qquad (13.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из теоремы 12.2. следует $\bar y(t)=\hat W(t)\bar C$, где

$\hat W(t_0)\bar C=\bar y^0\Rightarrow\bar C=\hat W^{-1}(t_0)\bar y^0\Rightarrow\bar y(t)=\hat Z(t,t_0)\bar y^0$, где

$$\hat Z(t,t_0)=\hat W(t)\hat W^{-1}(t_0). \qquad (13.2)$$

Легко видеть, что $\hat Z(t_0,t_0)=\hat E$ и $\hat Z(t)$ удовлетворяет (13.1).

п.14. Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений.

Т е о р е м а 14.1. **Если $\hat W(t)$ – фундаментальная матрица, а ${}^{(0)}\bar y(t)$ – частное решение уравнения $\bar y'=\hat A\bar y+\bar f$, то общее решение неоднородного уравнения представимо в виде:**

$$\bar y(t)=\hat W(t)\bar C+{}^{(0)}\bar y(t). \qquad (14.1)$$

Т е о р е м а 14.2. **Частное решение неоднородной системы с нулевыми начальными данными выражается через импульсную функцию в виде**:

$${}^{(0)}\bar y(t)=\int_{t_0}^{t}\hat Z(t,\tau)\bar f(\tau)d\tau, \qquad (14.2)$$

а общее решение задачи Коши с условием $\bar y(t)=\bar y^0$ представимо в виде

$$\bar y(t)=\hat Z(t,t_0)\bar y^0+\int_{t_0}^{t}\hat Z(t,\tau)\bar f(\tau)d\tau. \qquad (14.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) (14.3) получается из (14.1) и (14.2), поэтому надо доказать (14.2).

2) Формула (14.2) получается вариацией постоянной

$$\bar y(t)=\hat W(t)\bar C(t)$$

$$\bar y'(t)=\hat W'(t)C(t)+\hat W(t)\bar C'(t)=\hat A\hat W(t)C(t)+\bar f,$$

т.к. $\hat W'=AW$, то имеем $\hat W(t)\bar C'(t)=f(t)\Rightarrow\bar C'(t)=\hat W^{-1}(t)f(t)$.

Т.к. $\bar y(t_0)=0=\hat W(t_0)\bar C(t_0)\Rightarrow\bar C(t_0)=0\Rightarrow$

$$\bar C(t)=\int_{t_0}^{t}\hat W^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\Rightarrow\bar y(t)=\int_{t_0}^{t}\hat W(t)\hat W^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

что и требовалось доказать, т.к. $\hat W(t)\hat W^{-1}(\tau)=\hat Z(t,\tau)$.

п. 15. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае некратных корней характеристического уравнения.

Частное решение однородной системы $\bar y'=\hat A\bar y$ с постоянными коэффициентами будем искать в виде:

$$\bar y(t)=\bar\alpha\ e^{\lambda t};\ \ \bar\alpha\ \text{– постоянный вектор.} \qquad (15.1)$$

Тогда $\left(\hat A-\lambda\hat E\right)\bar\alpha\ =0.$

Для того, чтобы $\exists\bar\alpha\ \neq 0$, необходимо

$$M(\lambda)=Det\left(\hat A-\lambda\hat E\right)=0, \qquad (15.2)$$

где $M(\lambda)$ – характеристический многочлен для системы.

Т е о р е м а 15.1. **Пусть $\{\lambda_k\}$, $k\in[1,n]$ – простые корни характеристического уравнения (15.2), а ${}^{(k)}\bar y(t)={}^{(k)}\bar\alpha\ e^{\lambda_k t}$, где ${}^{(k)}\bar\alpha$ - нетривиальное решение системы**

$$\left(\hat A-\lambda_k\hat E\right){}^{(k)}\bar\alpha=0. \qquad (15.3)$$

Тогда ${}^{(k)}\bar y(t)$, $k\in[1,n]$ образуют Ф.С.Р. системы $\bar y'=\hat A\bar y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Функции $\{{}^{(k)}\bar\alpha\ e^{\lambda_k t}={}^{(k)}y(t)\}$ $k\in[1,n]$ являются решением системы дифференциальных уравнений, поэтому достаточно доказать их линейную независимость. Доказательство от противного. Пусть они линейно зависимы, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n}C_k{}^{(k)}\bar\alpha\ \ e^{\lambda_k t}=0\quad \sum_{k=1}^{n}C_k^2\neq 0 \qquad (15.4).$$

Пусть $C_1\neq 0$ (это не ограничивает общности), тогда запишем (15.4) в виде

$$C_1{}^{(1)}\bar\alpha e^{(\lambda_1-\lambda_n)t}+C_2{}^{(2)}\bar\alpha e^{(\lambda_2-\lambda_n)t}+...+C_n{}^{(n)}\bar\alpha=0.$$

Дифференцируя и умножая на $e^{-(\lambda_{n-1}-\lambda_n)t}$, получаем

$$(\lambda_1-\lambda_n)C_1{}^{(1)}\bar\alpha e^{(\lambda_1-\lambda_{n-1})t}+...+C_{n-1}^{(n-1)}\bar\alpha=0.$$

Дифференцируя и умножая на $e^{-(\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1})t}$, получаем

$$(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_1-\lambda_{n-1})C_1{}^{(1)}\bar\alpha\ e^{(\lambda_1-\lambda_{n-2})t}+...+C_{n-2}^{(n-2)}\bar\alpha=0$$

и т.д. Получаем, окончательно

$$(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_1-\lambda_{n-1})...(\lambda_1-\lambda_2)C_1{}^{(1)}\bar\alpha\ e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}=0. \qquad (15.5)$$

Т.к. λ_k – различны и ${}^{(1)}\bar\alpha\ \neq 0$, то $C_1=0$. Пришли к противоречию $\Rightarrow$ не $\exists C_k$ таких, что выполняется (15.4). $\Rightarrow$ Теорема доказана.

п.16. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений при кратных корнях характеристического уравнения.

Пусть λ_k – корень характеристического уравнения $Det(\hat A-\lambda\hat E)=0$ имеет кратность m_k. Мы знаем из алгебры, что для матрицы с кратным собственным значением λ_k собственные вектора ${}^{(j)}\bar e, j\in[1,m_k]$ находятся из жордановой формы

$$\begin{aligned}&\hat A^{(1)}\bar e=\lambda_k{}^{(1)}\bar e\\ &\hat A^{(2)}\bar e=\lambda_k{}^{(2)}\bar e+{}^{(1)}\bar e\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\hat A^{(m_k)}\bar e=\lambda_k{}^{(m_k)}\bar e+{}^{(m_k-1)}\bar e\end{aligned} \qquad (16.1)$$

где ${}^{(1)}\bar e$ – собственный вектор, ${}^{(2)}\bar e,{}^{(3)}\bar e,...,{}^{(m_k)}\bar e$ – присоединенные вектора.

Выберем решения нашей системы таким образом, чтобы для векторов, определяющих решения, получилась жорданова форма. Для этого выберем первое решение в виде ${}^{(1)}\bar y={}^{(1)}\bar e e^{\lambda_k t}$, где ${}^{(1)}\bar e$ – решение (нетривиальное) $\hat A^{(1)}\bar e=\lambda_k{}^{(1)}\bar e$.

Выберем второе решение для $\lambda=\lambda_k$ в виде:

$${}^{(2)}\bar y=({}^{(2)}\bar e+{}^{(1)}\bar e t)e^{\lambda_k t}\Rightarrow\hat A({}^{(2)}\bar e+{}^{(1)}\bar e t)e^{\lambda_k t}=\left\{\lambda_k({}^{(2)}\bar e+{}^{(1)}\bar e t)+{}^{(1)}\bar e t\right\}e^{\lambda_k t}$$

или $\hat A^{(2)}\bar e+t\hat A^{(1)}\bar e=(\lambda_k{}^{(2)}\bar e+{}^{(1)}\bar e)+t\lambda_k{}^{(1)}\bar e$ (т.к. $\hat A^{(1)}\bar e=\lambda_k{}^{(1)}\bar e$), то получим для определения ${}^{(2)}\bar e$ уравнение

$$\hat A^{(2)}\bar e=\lambda_k{}^{(2)}\bar e+{}^{(1)}\bar e. \qquad (16.2)$$

Если записать j - ое решение для λ_k в виде:

$${}^{(j)}\bar y=({}^{(j)}\bar e+t^{(j-1)}\bar e+\frac{t^2}{2!}{}^{(j-2)}\bar e+...+\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}{}^{(1)}\bar e)e^{\lambda_k t};\ j\in[1,m_k], \qquad (16.3)$$

тогда для ${}^{(1)}\bar e$ $j\in[1,m_k]$ получим жорданову форму (16.1). В алгебре известно, что если λ_k собственное значение матрицы $\hat A$ кратности m_k, то (16.1) дают m_k линейно независимых векторов ${}^{(j)}\bar e$, $j\in[1,m_k]$. Таким образом, приходим к утверждению

Т е о р е м а 16.1. **Каждому корню характеристического многочлена системы λ_k (кратности m_k) отвечает m_k решений, определенных (16.3), где ${}^{(j)}\bar e$ $j\in[1,m_k]$ является решением (16.1).**

Т е о р е м а 16.2. **Решения, определенные в т16.1, взятые для всех $k=1,..l$ $\left(\sum_{k=1}^{l}m_k=n\right)$ образуют Ф.С.Р.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Составим фундаментальную матрицу из решений ${}^{(j)}\bar y_{(k)}$ $k\in[1,l]$, $j\in[1,m_k]$

$$\hat W(t)=\{{}^{(1)}\bar y_1(t),...,{}^{(m_1)}\bar y_1,{}^{(1)}\bar y_2,...,{}^{(m_2)}\bar y_2,...,{}^{(1)}\bar y_l,...,{}^{(m_l)}\bar y_l\}.$$

Заметим, что ${}^{(j)}\bar y_{(k)}(t=0)={}^{(j)}\bar e_{(k)}$, тогда

$\Delta(t=0)=Det\hat W(t=0)=Det\left\{{}^{(j)}\bar e_{(k)}\right\}\neq 0$ (т.к. ${}^{(j)}\bar e_{(k)}$ - линейно независимы)

$\Rightarrow\Delta(t)\neq 0$ для $\forall t\in\tau\Rightarrow\{{}^{(j)}\bar y_{(k)}(t)\}$ линейно независимы $\Rightarrow$ они составляют Ф.С.Р.

п.17. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Исследование уравнения 2-го порядка. Формула Остроградского-Лиувилля.

$$L_n(y)=y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+...+p_ny=f(t) \qquad (17.1)$$

$$p_1,p_2,...,p_n=const.$$

Исследуем однородное уравнение 2-го порядка

$$y''(t)+\alpha\ y'(t)+ky(t)=f(t)\ . \qquad (17.2)$$

Сведем уравнение (12.2) к системе двух уравнений с двумя неизвестными функциями $u_1(t)=y(t)$,$u_2(t)=y(t)$. Тогда получим систему

$$\begin{cases}u_1'(t)=u_2(t)\\ u_2'(t)=-ku_1(t)-\alpha u_2(t)\end{cases},$$

или

$$\bar u'(t)=\hat A\bar u(t), \qquad (17.3)$$

где

$$\hat A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -k & -\alpha\end{pmatrix}. \qquad (17.4)$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$M(\lambda)=Det\left(\hat A-\lambda\hat E\right)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -k & -\lambda-\alpha\end{vmatrix}=0$$

или

$$\lambda^2+\alpha\lambda+k=0.$$

Откуда

$$\lambda_1=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4k}}{2};\quad\lambda_2=\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4k}}{2}. \qquad (17.5)$$

Возможны три случая.

1. $\alpha^2>4k$; λ_1,λ_2 – действительные и отрицательные, причем различные. Общее решение $y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$ т.к. $e^{\lambda_1 t}=y_1(t)$; $y_2(t)=e^{\lambda_2 t}$– линейно независимые функции. Их определитель Вронского

$$\Delta t=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t}\\ \lambda_1e^{\lambda_1 t} & \lambda_2e^{\lambda_2 t}\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\neq 0.$$

При начальных данных y_0 и y_0' получим:

$$y(t)=\frac{\lambda_2y_0-y_0'}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1y_0-y_0'}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t}.$$

Эти колебания не осциллирующие, а затухающие (апериодические).

2. $\alpha^2<4k$ корни комплексные, сопряженные

$$\lambda_1=-a+ib;\ \lambda_2=-a+ib;\ a=\frac{\alpha}{2};\ b=\frac{\sqrt{4k-\alpha^2}}{2}$$

$$y_1(t)=e^{-at}\cos bt;\ y_2(t)=e^{-at}\sin bt,$$

$y_1(t)$ и $y_2(t)$– линейно независимые функции, т.к. их определитель Вронского не равен 0:

$$\Delta t=\begin{vmatrix}e^{-at}\cos bt & e^{-at}\sin bt\\ -ae^{-at}\cos bt-be^{-at}\sin bt & -ae^{-at}\sin bt+be^{-at}\cos bt\end{vmatrix}=2be^{-2at}\neq 0.$$

Общее решение

$$y(t)=(C_1\cos bt+C_2\sin bt)e^{-at}.$$

Решение осциллирует и затухает. Если $\alpha=0$, то $a=0$ (затухания нет) и имеем

$y(t)=C_1\cos\sqrt{k}t+C_2\sin\sqrt{k}t)$ – периодические колебания.

3. Если $\alpha^2-4k=0$, то имеем кратные корни

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{\alpha}{2}=\lambda.$$

Имеем одно решение $y_1(t)=e^{-\frac{\alpha t}{2}}$.

Другим решением линейно независимым с y_1 является $y_2(t)=te^{-\frac{\lambda t}{2}}$. Их определитель Вронского не равен нулю:

$$\Delta t=\begin{vmatrix}e^{-\frac{\alpha t}{2}} & te^{-\frac{\alpha t}{2}}\\ -\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha t}{2}} & e^{-\frac{\alpha t}{2}}-\frac{\alpha}{2}te^{-\frac{\alpha t}{2}}\end{vmatrix}=e^{-\alpha t}\neq 0.$$

Общее решение $y(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda t}$.

Рассмотрим теперь вывод формулы Остроградского-Лиувилля. Пусть нам известно два независимых решения (17.2) $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения

$$y''(t)+p_1(t)y'(t)+p_2(t)y(t)=0 \qquad (17.6)$$

Тогда определитель Вронского

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1(t)y_2'(t)-y'(t)y_2(t).$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$\frac{d\Delta(t)}{dt}=y_1y_2''-y_1''y_2.$$

Подставим вторые производные из уравнения (17.6)

$$y_m''=-p_1(t)y_m'-p_2(t)y_m,\quad m\in[1,2].$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta(t)}{dt}&=-\left(p_1(t)y_2'+p_2(t)y_2\right)y_1+\left(p_1(t)y_1'+p_2(t)y_1\right)y_2=\\ &=-p_1(t)(y_1y_2'-y_1'y_2)=-p_1(t)\Delta(t)\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили

$$\frac{d\Delta(t)}{dt}=-p_1(t)\Delta(t). \qquad (17.7)$$

Решение этого уравнения дает выражение определителя Вронского через первый коэффициент дифференциального уравнения $p_1(t)$:

$$\Delta(t)=\Delta(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}p_1(\tau)d\tau} \qquad (17.8)$$

Это формула Остроградского - Лиувилля. $\Delta(t_0)$ находим из начальных данных, а по (17.8) $\Delta(t)$ при $\forall t\in[t_0,t_0+T]$. Формула (17.8) позволяет получить общее решение уравнения 2-го порядка, если известно одно частное решение уравнения (17.6). Пусть $y_1(t)$ – известное решение и $y(t)$ – общее решение. Тогда из (17.8) имеем

$$y_1(t)y'(t)-y_1'(t)y(t)=C_1e^{-\int p_1(t)dt},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{y_1(t)}\right)=\frac{C_1}{y_1^2(t)}e^{-\int p_1(t)dt}.$$

Окончательно,

$$y(t)=y_1(t)\left\{C_1\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-\int P_1(t)dt}}{y_1^2(t)}dt+C_2\right\}. \qquad (17.9)$$

Формула (17.9) дает выражение для общего решения дифференциального уравнения 2-го порядка через известное одно решение $y_1(t)$ и первый коэффициент уравнения $y_1(t)$.

п.18. Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость решения линейной системы.

Мы рассматривали все свойства дифференциальных уравнений, если решение определено на конечном интервале $t\in[t_0,t_0+T]$. Возникает вопрос, что будет с непрерывностью по начальным данным при $t\to\infty$. Это и входит в теорию устойчивости.

Имеем задачу Коши $\begin{cases} y'(t)=ay-1 \\ y(t=0)=\dfrac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow y_0(t)=\dfrac{1}{a}$ – решение.

Изменим начальные данные на малую величину δ

$$\begin{cases} y'=at-1 \\ y(t_0)=\dfrac{1}{a}+\delta \end{cases} \Rightarrow y(t)=\frac{1}{a}+\delta\ e^{at}.$$

Следовательно, $y(t)-y_0=\delta\ e^{at}$, при конечном t имеем

$$\left|y(t)-y_0(t)\right|\underset{\delta\to0}{\to}0,$$

а при $t\to\infty$ для $\forall\delta>0$ имеем $\begin{cases}(y(t)-y_0)\to0\\ a<0\end{cases}$ и $\begin{cases}(y(t)-y_0)\to\infty\\ a>0\end{cases}$.

Ясно, что безразлично какие начальные t_0. Поэтому в дальнейшем рассматриваем $0\le t<\infty$. Причем, изучаем $\overline{x}(t)=\overline{y}(t)-y(t=0)$, т.е. задача Коши для $\overline{x}(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt}=\overline{f}(t,\overline{x}(t)), \quad 0\le t<\infty \\ \overline{x}(t=0)=0, \quad (\overline{f}(t,\overline{x}=0)=0) \end{cases} \qquad (18.1)$$

т.е. $\overline{x}=0$ является решением (18.1).

Устойчивость определяется поведением решения (18.1) при $t\to\infty$, если в (18.1) возмутить начальное условие $\overline{x}(t=0)=\overline{x}_0$. Таким образом, вопрос об устойчивости связан с тем: остается ли решение на фазовой плоскости в окрестности точки покоя ($\overline{x}=0$) или выходит из нее.

Определение.

Решение задачи (18.1) $\overline{x}=0$ называется устойчивым по Ляпунову, если для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\|\overline{x}_0\|<\delta(\varepsilon)$ для всех $t>0$ справедливо неравенство

$$\|\overline{x}(t,x_0)\|<\varepsilon \qquad (18.2)$$

и асимптотически устойчивым, если кроме устойчивости выполняется условие: $\exists\delta_0>0$ такое, что при $\|\overline{x}_0\|<\delta_0<\delta(\varepsilon)$

$$\lim_{t\to\infty}\overline{x}(t,x_0)=0. \qquad (18.3)$$

Исследуем устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами. Для исследования необходимо иметь некоторые оценки, которые даются в лемме 18.1.

Лемма 18.1.

Справедливы следующие оценки:

1. $\overline{y}(t)=\left\{y_i(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}x_k(t)\right\}=\hat{A}\overline{x}$.

Если $|a_{ik}(t)|\le a(t)$, то

$$\|\overline{y}\|\le Ca(t)\|\overline{x}\| \qquad (18.4)$$

2. $\overline{y}=\left\{y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{ijl}(t)x_jx_l\right\}$, $|a_{ijl}|\le a(t)$, тогда

$$\|\overline{y}\|\le Ca(t)\|x\|^2. \qquad (18.5)$$

3. $\|\overline{x}+\overline{y}\|\le C\left(\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|\right)$. (18.6)

4. $\left\|\int\limits_0^t\overline{y}(\tau)d\tau\right\|\le C\int\limits_0^t\|\overline{y}(\tau)\|d\tau,\ 0\le t\le T.$ (18.7)

5. Для импульсной функции $\hat{Z}(t,t_0)=\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0)$ формулы (13.2) справедливо неравенство

$$\left|Z_{ij}(t,t_0)\right|=\left|Z_{ij}(t-t_0,0)\right|<Ce^{(p+\gamma)(t-t_0)}, \qquad (18.8)$$

где $p=\max\limits_{k\in[1,n]}(\operatorname{Re}\lambda_k)$, γ – положительная постоянная.

Доказательство.

1. $y_i^2=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)x_k(t)\right)^2\le a^2(t)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k(t)|\right)^2\le na^2(t)\|\overline{x}\|^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\|\overline{y}\|^2\le n^2a^2(t)\|\overline{x}\|^2\Rightarrow\|\overline{y}\|\le na(t)\|\overline{x}\|$

2.

$y_k^2=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{ijk}(t)x_jx_l\right)^2\le a^2(t)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}|x_j||x_l|\right)^2=$

$=a^2(t)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|\right)^2\left(\sum\limits_{l=1}^{n}|x_l|\right)^2\le a^2(t)\|\overline{x}\|^4\Rightarrow$

$\|\overline{y}\|^2\le ny_k^2\Rightarrow\ \|\overline{y}\|^2\le na^2(t)\|\overline{x}\|^4\ \Rightarrow\ \|\overline{y}\|\le\sqrt{n}a(t)\|\overline{x}\|^2.$

3. $(x_i+y_i)^2\le x_i^2+y_i^2+2|x_i||y_i|\le2(x_i^2+y_i^2)\Rightarrow$

$\|\overline{x}+\overline{y}\|\le\sqrt{2}\sqrt{\|\overline{x}\|^2+\|\overline{y}\|^2}\le\sqrt{2}(\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|)$

4. $\int\limits_0^t y_i(\tau)d\tau\le\int\limits_0^t\|\overline{y}\|d\tau\Rightarrow\left\|\int\limits_0^t\overline{y}(\tau)d\tau\right\|\le\sqrt{n}\int\limits_0^t\|\overline{y}\|d\tau$

5. Переходя к новой переменной $\tau=t-t_0$ в задаче $\begin{cases}\hat{Z}'=A\hat{Z}\\ \hat{Z}(t_0)=\hat{E}\end{cases}$,

приходим к $Z_{ij}(t,t_0)=Z_{ij}(t-t_0,0)$.

Тогда $\hat{Z}(t-t_0,0)=\hat{W}(t-t_0)\hat{W}(0)\Rightarrow\left|Z_{ij}(t-t_0,0)\right|\le Ce^{(p+\gamma)(t-t_0)0}$

т.к. $\left|W_{ij}(t-t_0)\right|\le\sum c_kt^je^{\lambda_k(t-t_0)}$, а $t^j\le e^{\gamma(t-t_0)}$, $p=\max\limits_k\operatorname{Re}\lambda_k$.

Теорема 18.1. **Решение линейной системы с постоянными коэффициентами**

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x}}{dt}=\hat{A}\overline{x}, \quad t>0; \quad \hat{A}=\{a_{ij}\}, \quad a_{ij}=const \\ \overline{x}(t=0)=0\end{cases} \qquad (18.9)$$

асимптотически устойчивое, если для всех корней характеристического многочлена выполняется условие

$$\operatorname{Re}\lambda_k<0 \ \textbf{для}\ \forall k, \qquad (18.10)$$

и неустойчиво, если хотя бы одно $\operatorname{Re}\lambda_k>0$.

Доказательство.

В п.15 и п.16 мы описали, как строится решение для λ_k.

$^{(m)}\overline{x}_{(k)}(t)=(\overline{c}_1+\overline{c}_2t+\ldots+\overline{c}_{m_k}t^{(m_{k-1})})e^{\lambda_kt}$

$\Rightarrow\left\|^{(m)}\overline{x}\right\|\le Ce^{(p_k+\gamma)t}$, где $p_k=\operatorname{Re}\lambda_k$.

Фундаментальная матрица решений $\hat{W}(t)$ $\begin{cases}\hat{W}'=\hat{A}\hat{W}\\ \hat{W}(t=0)=\hat{E}\end{cases}$

имеет столбцы из фундаментальных решений

$\Rightarrow\|\hat{W}\|\le Ce^{(p+\gamma)t}$, где $p=\max\limits_k\operatorname{Re}\lambda_k$.

Если в (18.9) возмутить начальные условия $\overline{x}(t=0)=\overline{\varepsilon}_0$, то решение (18.9) будет $\overline{x}(t)=\hat{W}(t)\overline{\varepsilon}_0\Rightarrow\ \|\overline{x}(t)\|\le\|\hat{W}\|\|\overline{\varepsilon}_0\|\le C\|\overline{\varepsilon}_0\|e^{(p+\gamma)t}$.

Если все $\operatorname{Re}\lambda_k<0$, то при $t\to\infty$ $\|\overline{x}(t)\|\to0$.

Если хотя бы одно $\operatorname{Re}\lambda_k=\lambda_0>0$, то $\|\overline{x}\|\ge C\|\overline{\varepsilon}_0\|e^{(\lambda_0-\gamma)t}\to\infty$ при $t\to\infty$.

Если $\exists\operatorname{Re}\lambda_k=0$, а остальные $\operatorname{Re}\lambda_k<0$, то вопрос об устойчивости сложен. Возможны разные варианты.

п.19. Исследование устойчивости решения системы по первому приближению.

Рассмотрим нелинейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x}}{dt}=\overline{f}(\overline{x}), \quad t>0, \ f(0)=0 \\ \overline{x}(0)=0\end{cases} \qquad (19.1)$$

Автономной называется система, правая часть которой не зависит от t.

Исследование на устойчивость по первому приближению проводится следующим образом:

1) Разлагаем $\overline{f}(\overline{x})$ в ряд, учитывая, что $\overline{f}(0)=0$. Тогда

$$\overline{f}(\overline{x})=\hat{A}\overline{x}+\overline{R} \qquad (19.2)$$

где $\hat{A}=\left\{a_{ij}=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\overline{x}=0}\right\}$, а $\overline{R}$ – остаточный член, который можно представить в виде;

$$\overline{R}=\{R_i\}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2f_i}{\partial x_j\partial x_l}\Big|_{\overline{x}=\theta\overline{x}}x_lx_j \ \text{(взяв в средней точке).} \qquad (19.3)$$

2) Рассмотрим устойчивость линейной части системы $\dfrac{d\overline{x}}{dt}=\hat{A}\overline{x}$. Если все $\operatorname{Re}\lambda_k$ матрицы $\hat{A}$ меньше нуля, то решения линеаризованной системы устойчивые.

3) Исследуем как влияет на устойчивость нелинейная поправка $\overline{R}(\overline{x})$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x}}{dt}=A\overline{x}+\overline{R}(\overline{x}), \quad t>0 \\ \overline{x}(t=0)=\overline{x}_0\end{cases} \qquad (19.4)$$

Пусть $\hat{Z}(t,\tau)=\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)$ – импульсная функция для системы

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\hat{A}\overline{x}.$$

Тогда из (19.4) получим

$$\overline{x}(t)=\hat{Z}(t,0)\overline{x}_0+\int_0^t\hat{Z}(t,\tau)\overline{R}(\overline{x}(\tau))d\tau. \qquad (19.5)$$

Используя лемму 18.1, получим

$$\|\overline{R}\|\le C\|\overline{x}\|^2,$$

Тогда

$$\|\overline{x}\|\le Ce^{-\alpha t}\|x_0\|+C\int_0^te^{-\alpha(t-\tau)}\|x\|^2d\tau, \qquad (19.6)$$

где $\alpha=-(p+\gamma)$; $p=\max\limits_k\operatorname{Re}\lambda_k<0$, γ – любое положительное число, $p+\gamma<0$.

Чтобы из (19.6) получить оценку для $\|\overline{x}\|$ при $t\to\infty$, рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt}=\alpha z+cz^2, \quad t>0 \\ z(0)=z_0>c\|x_0\|, \quad c>0\end{cases} \qquad (19.7)$$

Сведем к интегральному уравнению, считая $f=cz^2$,

$$z(t)=z_0e^{-\alpha t}+c\int_0^te^{-\alpha(t-\tau)}z^2(\tau)d\tau. \qquad (19.8)$$

Сравнивая (19.6) и (19.8), получаем

$$z(t)>\|\overline{x}\| \ \text{при любом}\ t\ge0. \qquad (19.9)$$

Доказательство

$z(t)$ и $\|\overline{x}(t)\|$ непрерывны и при $t=0$ $z(0)>c\|\overline{x}_0\|=\|\overline{x}(0)\|$. Следовательно, $z(t)>\|\overline{x}(t)\|$ при $0<t<t_1$. Пусть $z(t_1)=\|\overline{x}(t_1)\|$. Тогда

$z(t_1)=z_0e^{-\alpha t_1}+c\int\limits_0^{t_1}e^{-\alpha(t_1-\tau)}z^2(\tau)d\tau>$

$>c\|x_0\|e^{-\alpha t_1}+c\int\limits_0^{t_1}e^{-\alpha(t_1-\tau)}\|\overline{x}(\tau)\|d\tau=\|\overline{x}(t_1)\|$. То есть, $z(t_1)>\|\overline{x}(t_1)\|$.

Пришли к противоречию. $\Rightarrow z(t)>\|\overline{x}(t)\|$ при $\forall t$.

Теперь оценку $\|\overline{x}(t)\|$ получаем из оценки $z(t)$, для которой имеется аналитическое решение

$$z(t)=\frac{\alpha z_0}{cz_0+(\alpha-cz_0)e^{\alpha t}} \qquad (19.10)$$

При $z_0<\dfrac{\alpha}{c}$ имеем $z(t)>0$ и имеем

$$0<z(t)\le\frac{\alpha z_0}{(\alpha-cz_0)}e^{-\alpha t}\Rightarrow\|\overline{x}(t)\|<\frac{\alpha z_0}{(\alpha-cz_0)}e^{-\alpha t}\underset{t\to\infty}{\to}0.$$

Имеем асимптотическую устойчивость.

Теорема 19.1. **Пусть в некоторой окрестности точки покоя $\overline{x}=0$ правая часть автономной системы $\overline{f}(\overline{x})$ непрерывна вместе с производными до 2-го порядка включительно. Тогда, если все λ_k характеристические числа матрицы**

$$\hat{A}=\left\{a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\overline{x}=0}\right\}$$

удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_k<0$, **то тривиальное решение системы** (19.1) **асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно λ_k имеет** $\operatorname{Re}\lambda_k>0$, **то решение неустойчиво**.

п.20. Исследование траектории в окрестности точки покоя.

Исследование проводим в двумерном случае $\bar{x}=\{x_1(t),x_2(t)\}$ для системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\hat{A}\bar{x};\quad \hat{A}=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \tag{20.1}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{фазовая траектория} \quad \frac{dx_1}{dx_2}=\frac{a_{11}x_1+a_{12}x_2}{a_{21}x_1+a_{22}x_2} \tag{20.2}$$

Точка $\bar{x}=0$ является особой в уравнении (20.1). Предположим, что в системе (20.1) $\lambda=0$ не является корнем характеристического уравнения и корни различны $\lambda_1\neq\lambda_2$. В этом случае общее решение (20.1) имеет вид:

$$\bar{x}=C_1\bar{\alpha}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+C_2\bar{\alpha}^{(2)}e^{\lambda_2 t}, \tag{20.3}$$

где $\bar{\alpha}^{(1)},\bar{\alpha}^{(2)}$ – собственные вектора матрицы $\hat{A}$, соответственно для λ_1 и λ_2.

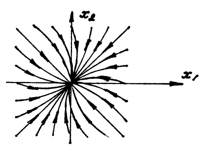
Тогда

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{x_2'(t)}{x_1'(t)}=\frac{C_1\lambda_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t}+C_2\lambda_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t}}{C_1\lambda_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t}+C_2\lambda_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t}}. \tag{20.4}$$

Рассмотрим различные случаи для разных соотношений между λ_1 и λ_2.

1. Действительные λ одного знака.

1а. $\mathrm{Im}\,\lambda_1=\mathrm{Im}\,\lambda_2=0,\ 0>\lambda_1>\lambda_2$ (отрицательные характеристические числа). Точка покоя,согласно теореме 19.1, асимптотически устойчива. Если $C_1\neq 0$, то при $t\to\infty$ $\dfrac{dx_2}{dx_1}=\dfrac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}}=\beta_1\Rightarrow$ при $t\to\infty$ имеем асимптотическую прямую $x_2=\beta_1 x_1$ (проходит через точку покоя). Если $C_1=0$, то имеем $\dfrac{dx_2}{dx_1}=\dfrac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}}=\beta_2$ (прямая $x_2=\beta_2 x_1$)



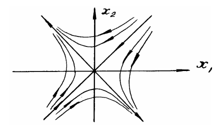
Такая точка покоя называется "узлом".

1б. $\mathrm{Im}\,\lambda_1=\mathrm{Im}\,\lambda_2=0,\ \lambda_2>\lambda_1>0$ (положительные характеристические числа). Получается та же картина, но точка покоя неустойчива и "узел" расходящийся (стрелки идут от начала координат).

2. Действительные λ разного знака.

Пусть $\lambda_1>0,\ \lambda_2<0$ $(\mathrm{Im}\,\lambda_1=0,\ \mathrm{Im}\,\lambda_2=0)$. Точка покоя, согласно теореме 19.1, неустойчива. Если $C_1\neq 0$, то $x_2=\beta_1 x_1$, а, если $C_1=0$, то $x_2=\beta_2 x_1$.

Полученные прямые называются "сепаратрисами".



Точка называется "седлом". Точка вначале идет к центру, но затем переходит на другую прямую и уходит в ∞.

3. Случай разных комплексных характеристических чисел

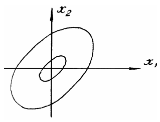
$$\lambda_1=\lambda=p+iq;\quad \lambda_2=\lambda^*=p-iq.$$

В этом случае решение представляется в виде:

$$\begin{cases} x_1(t)=e^{pt}(\alpha\cos qt+\beta\sin qt) \\ x_2(t)=e^{pt}(\gamma\cos qt+\delta\sin qt) \end{cases} \tag{*}$$

причем, из линейной независимости, следует

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0 \tag{**}$$



3а. Случай чисто мнимых λ $(p=0)$.

Тогда из системы (*) находим:

$$\sin qt=\frac{\gamma\,x_1(t)-\alpha\,x_2(t)}{-\alpha\delta+\beta\gamma}$$

$$\cos qt=\frac{+\delta\,x_1(t)-\beta\,x_2(t)}{\alpha\,\delta-\beta\,\gamma}.$$

Используя тождество $\sin^2 qt+\cos^2 qt=1$, получим

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_1-\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_2\right)^2+\left(\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\lambda}x_1-\frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_2\right)^2=1.$$

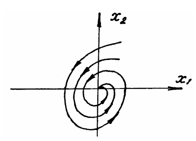
Это эллипсы. Точка покоя устойчива, но не асимптотически. Эта точка называется **"центром"**.

В зависимости от начальных данных точка вращается вокруг центра (точка покоя), что соответствует эллипсу.

3б. $p\neq 0$. Исключая $\cos qt$ и $\sin qt$, получим

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_1-\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_2\right)^2+\left(\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_1-\frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}x_2\right)^2=e^{2pt}.$$

Это **эллиптическая спираль**. При $p<0$ имеем асимптотическую устойчивость, а при $p>0$ – неустойчива. Точка называется **"фокус"**.



п.21. Постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Формула Лагранжа.

1. В краевой задаче условия задают не только в начальной точке $t=t_0$, т.е. задача не локальна. Для уравнения 2-го порядка условие на двух концах $t=t_0$ и $t=t_0+T$.

2. Физически имеем два случая:

– имеется временной отрезок $[t_0,t_0+T]$, надо найти решение задачи, когда при частичных начальных данных в t_0 мы получим решение, обладающее некоторыми данными в конце при t_0+T.

– имеется пространственный отрезок $0<x<l$ и на обоих его концах (краях) заданы условия (граничные). Математически это выглядит одинаково.

3. Для уравнения n-го порядка

$$L_n(y)=y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_ny(x)=f(x),\quad x\in[0,l],$$

при $x=0$ $\gamma_i(y)=\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}y^{(j)}(x=0)=\mu_i,\ i\in[1,m]$,

при $x=l$ $\Gamma_i(y)=\sum_{j=0}^{n-1}b_{ij}y^{(j)}(x=l)=\nu_i,\ i\in[1,s]$,

$$m+s=n.$$

4. Для систем дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\hat{A}\bar{y}+f(x),\quad 0<x<l,$$

$$\gamma(\bar{y})=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j(x=0)=\mu_i,\ i\in[1,m],$$

$$\Gamma(\bar{y})=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}y_j(x=l)=\nu_i,\ i\in[1,s],$$

$$m+s=n.$$

5. В практике наиболее широко используются уравнения 2-го порядка

$$\begin{cases} L(y)=\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)-q(x)y(x)=f(x),\ x\in[0,l],\ p(x)>0 \\ \gamma(y)=\alpha_1y'(0)+\beta_1y(0)=u_0 \\ \Gamma(y)=\alpha_2y'(l)+\beta_2y(l)=u_l. \end{cases} \tag{21.1}$$

Задачу всегда можно свести к неоднородному уравнению с однородным краевым условием. Пусть $\varphi(x)$ – некоторая функция, такая, что $\gamma(\varphi)=u_0,\ \Gamma(\varphi)=u_l$. Тогда введем $u(x)=y(x)-\varphi(x)$ и получим

$$\begin{cases} L(u)=\tilde{f},\ \tilde{f}=f-L(\varphi), \\ \gamma(u)=0, \\ \Gamma(u)=0. \end{cases} \tag{21.2}$$

6. Задача на собственные значения (как задача с обратной линейной связью, т.е. $f(x,y)=-\lambda\,\rho(x)y(x)$)

$$\begin{cases} L(y)=-\lambda\,\rho(x)y(x), \\ \gamma(y)=0;\ \Gamma(y)=0. \end{cases} \tag{21.3}$$

Требуется найти такие $\{\lambda_k\}$ (собственные значения), для которых существует нетривиальное решение краевой задачи (21.3) $\{y_k(x)\}$ (собственные функции).

Рассматриваем функции $y(x)$, заданные на $[0,l]$, непрерывные, дифференцируемые и имеющие непрерывную вторую производную, т.е. $y(x)\in C_2$. Решением краевой задачи (21.2) называется $y(x)\in C_2$, которое удовлетворяет уравнению $L(y)=f(x),\ x\in(0,l)$ и краевым условиям $\gamma(y)=0$ при $x=0$ и $\Gamma(y)=0$ при $x=l$.

Любые $y(x),z(x)\in C_2$ удовлетворяют тождеству Лагранжа

$$zL(y)-yL(z)=\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right)\right), \tag{21.4}$$

Т е о р е м а 21.1. **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения $L(y)=0$, то их определитель Вронского равен**

$$\Delta(y_1,y_2)=\frac{C}{p(x)}, \tag{21.5}$$

причем при $y_1(x)\neq 0$, общее решение можно представить в виде:

$$y(x)=C_1y_1(x)+Cy_1(x)\int_0^x\frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)}. \tag{21.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из тождества Лагранжа (21.4) при $L(y_1)=L(y_2)=0$ следует

$$p(x)\left(y_2(x)\frac{dy_1}{dx}-y_1(x)\frac{dy_2}{dx}\right)=C, \tag{21.7}$$

следовательно, справедливо (21.5).

Если $y_1(x)\neq 0$, то разделив (21.7) на $y_1^2(x)$, получим (при $y_2(x)=y(x)$), ($y(x)$ – независима от y_1)

$$\frac{y_1(x)y'(x)-y_1'(x)y(x)}{y_1^2(x)}=\frac{C}{p(x)y_1^2(x)}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)=\frac{C}{p(x)y_1^2(x)}.$$

Проинтегрировав, получим окончательно

$$y(x)=y_1(x)\left(C_1+C\int_0^x\frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)}\right),$$

т.е. получили (21.6). *Теорема доказана.*

п.22. Формула Грина. Построение решения краевой задачи с помощью функции Грина.

Проинтегрируем формулу Лагранжа (21.4) и получим

$$\int_0^l(zL(y)-yL(z))dx=\left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right)\right]\Bigg|_0^l. \tag{22.1}$$

Это выражение называют формулой Грина. Если $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же однородным граничным условиям, то $z\dfrac{dy}{dx}-y\dfrac{dz}{dx}=0$ при $x=0$ и $x=l$. Откуда имеем

$$\int_0^l(zL(y)-yL(z))dx=0 \tag{22.2}$$

при $\gamma(z)=\gamma(y)=0;\ \Gamma(z)=\Gamma(y)=0$.

Функция Грина для краевой задачи, имеющей единственное решение.

Пусть однородная краевая задача $L(y)=0,\ \gamma(y)=0,\ \Gamma(y)=0$ имеет только тривиальное решение, а $p(x)>0$ (или <0) на интервале $x\in[0,l]$ (т.е. $p(x)\neq 0$ для $\forall x\in[0,l]$).

Тогда функцией Грина такой задачи называется функция $G(x,\xi)$, являющаяся решением следующей задачи:

1. По x $L(G)=0$ при $x\in(0,\xi)$ и $x\in(\xi,l)$.
2. При $x=0,\ x=l$ граничные условия
$$\gamma(G)=0,\ \Gamma(G)=0. \tag{22.6}$$
3. $G\in C_2$ при $x\in(0,\xi)$ и $x\in(\xi,l)$, а при $x=\xi$ условия сопряжения
$$[G]_{x=\xi}=0,\quad \left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi}=1/p(\xi).$$

С л е д с т в и е. $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

Т е о р е м а 22.1. **Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной краевой задачи $\exists$ для любой непрерывной на $[0,l]$ функции $f(x)$ и выражается через функцию Грина в виде**:

$$y(x)=\int_0^lG(x,\xi)f(\xi)d\xi. \tag{22.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказывается проверкой

$$y(x)=\int_0^xG(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^lG(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

$$y'(x)=\int_0^x\frac{dG(x,\xi)}{dx}f(\xi)d\xi+\int_x^l\frac{dG(x,\xi)}{dx}f(\xi)d\xi,$$

$$(p(x)y'(x))'=\int_0^x\frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right)f(\xi)d\xi+\int_x^l\frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right)f(\xi)d\xi+$$

$$+p(x)f(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\Big|_{\xi=x-0}-f(x)p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\Big|_{\xi=x+0}.$$

Учитывая, что $\left[\dfrac{dG}{dx}\right]_{x=\xi}=-\left[\dfrac{dG}{dx}\right]_{\xi=x}=\dfrac{1}{p(x)}$, получим

$$(py')'=\int_0^l\frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right)f(\xi)d\xi+f(x).$$

Следовательно,

$$L(y)=\int_0^lL(G(x,\xi))f(\xi)d\xi+f(x)$$

$$\Rightarrow L(y)=f(x).$$

Аналогично, $\gamma(y)=\Gamma(y)=0$, т.к. $\gamma(G)=\Gamma(G)=0$.

Теорема доказана.

п.23. Существование функции Грина. Постановка краевой задачи при существовании решения однородной задачи.

Мы показали, что решение неоднородной краевой задачи выражается формулой (22.7) с помощью функции Грина. Необходимо доказать $\exists$ функции Грина.

Построим 2 решения следующих задач Коши:

а. При $0\le x\le\xi$	б. При $\xi\le x\le l$
$L(y_1)=0$,	$L(y_2)=0$,
$y_1(0)=-\alpha_1$,	$y_2(l)=-\alpha_2$,
$y_1'(0)=\beta_1$.	$y_2'(l)=\beta_2$.
Заметим, что	
$\gamma(y_1)=0$,	$\Gamma(y_2)=0$,
$\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$.	$\alpha_2^2+\beta_2^2\neq 0$.

Функции $y_1(x,\xi)$ и $y_2(x,\xi)$ $\exists$, т.к. есть теорема $\exists$ решения задачи Коши. Представим функцию Грина в виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} C_1y_1(x), & 0\le x\le\xi, \\ C_2y_2(x), & \xi\le x\le l. \end{cases}$$

Заметим, что

1. $L(G)=0$ при $x\in[0,\xi],\ x\in[\xi,l]$.
2. При $x=0,\ x=l$ выполняются краевые условия $\gamma(G)=\Gamma(G)=0$.
3. Осталось доказать, что можно подобрать C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись условия сшивания при $x=\xi$:

$$[G]_{x=\xi}=C_2y_2(\xi)-C_1y_1(\xi)=0,$$

$$\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi}=C_2y_2'(\xi)-C_1y_1'(\xi)=1/p(\xi).$$

Функции $y_1(x),\ y_2(x)$ – линейно независимы, т.к. y_1 не удовлетворяет однородному краевому условию $\Gamma(y_1)=0$ при $x=l$, иначе $\exists$ решение однородной краевой задачи. Тогда $\Delta(y_1,y_2)\neq 0$, а, согласно теореме 21.1,

$$\Delta(y_1,y_2)p(\xi)=C=const. \tag{23.1}$$

Следовательно, мы имеем:

$$C_1=\frac{y_2(\xi)}{C};\quad C_2=\frac{y_1(\xi)}{C}.$$

Окончательно, получаем функцию Грина в виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{C}, & 0\le x\le\xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{C}, & \xi\le x\le l, \end{cases} \tag{23.2}$$

где C находится согласно (23.1). Легко видеть, что $G(x,\xi)=G(\xi,x)$. Доказано существование функции Грина для случая, когда однородная задача имеет только тривиальное решение. Функция G единственна, т.к. однородная задача не имеет решений.

II. Рассмотрим теперь случай, когда однородная краевая задача имеет нетривиальное решение, причем других линейно независимых решений нет.

Рассмотрим для простоты I краевую задачу и пусть однородная краевая задача имеет решение $\varphi_0(x)$, т.е.

$$\begin{cases} L(\varphi_0)=0,\ x\in(0,l), \\ \varphi_0(0)=0,\ \varphi_0(l)=0\ \ (\gamma(\varphi_0)=0,\ \Gamma(\varphi_0)=0). \end{cases} \tag{23.3}$$

Т.к. любая $\varphi(x)=C\varphi_0(x)$ является решением задачи (23.3), то для единственности требуется дополнительное условие нормировки:

$$\int_0^l\varphi_0^2(x)dx=1. \tag{23.4}$$

Л е м м а 23.1. **Необходимым условием разрешимости неоднородной краевой задачи является ортогональность правой части уравнения $f(x)$ к решению однородной задачи (23.3) φ_0.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{cases} L(y)=f \\ \gamma\ (y)=\Gamma(y)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L(\varphi_0)=0 \\ \gamma\ (\varphi_0)=\Gamma(\varphi_0)=0 \\ \int_0^l \varphi_0^{\ 2}(x)dx=1 \end{cases}$$

Применяя формулу Грина и учитывая, что $y(x)$ и $\varphi_0(x)$ удовлетворяют однородному краевому условию, получим:

$$\int_0^l \left(\varphi_0(x)L(y(x))-y(x)L(\varphi_0)\right)dx=0.$$

Откуда

$$\int_0^l f(x)\varphi_0(x)dx=0. \tag{23.5}$$

Л е м м а 23.2. **Однородная краевая задача с дополнительным условием ортогональности решения к $\varphi_0(x)$ имеет только тривиальное решение, т.е. задача**

$$\begin{cases} L(y)=0, \\ \gamma\ (y)=\Gamma(y)=0, \\ \int_0^l \varphi_0(x)y(x)dx=0, \end{cases} \tag{23.6}$$

имеет только решение $y\equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Т.к. однородная краевая задача имеет единственное линейно независимое решение $\varphi_0(x)$, то имеем $y(x)=C\varphi_0(x)$. Тогда из условия ортогональности имеем

$$0=\int_0^l y(x)\varphi_0(x)dx = C\int_0^l \varphi_0^{\ 2}(x)dx=C\ ,$$

$$C=0 \Rightarrow y(x)=0.$$

Таким образом, если однородная краевая задача имеет единственное нормированное решение $\varphi_0(x)$

$$\begin{cases} L(\varphi_0)=0, \quad x\in[0,l], \\ \varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0, \quad \int_0^l \varphi_0^{\ 2}(x)dx=1, \end{cases}$$

то постановка неоднородной краевой задачи в этом случае будет

$$\begin{cases} L(y)=f(x), \quad x\in(0,l), \\ y(0)=y(l)=0 \quad (\gamma\ (y)=0,\ \Gamma(y)=0), \\ \int_0^l f(x)\varphi_0(x)dx=0, \quad \int_0^l y(x)\varphi_0(x)dx=0, \end{cases} \tag{23.7}$$

т.е. дополнительные условия ортогональности правой части и решения к $\varphi_0(x)$.

Первое условие согласно лемме 23.1, а второе согласно лемме 23.2. Осталось доказать $\exists$ решения поставленной задачи.

п.24. Обобщенная функция Грина и представление решения с ее помощью.

Обобщенной функцией Грина для краевой задачи, имеющей единственное нормированное решение однородной краевой задачи $\varphi_0(x)$, называется функция $G_0(x,\xi\ )$, удовлетворяющая задаче:

1. По x уравнению $L(G_0)=-\varphi_0(\xi\ )\varphi_0(x),\ \ x\in(0,\xi\ )$ и $x\in(\xi\ ,l)$.
2. По x граничному условию $G(0,\xi\ )=G(l,\xi\ )=0$.
3. В т. $x=\xi$ условию сопряжения

$$\left[G_0\right]_{x=\xi}=0,\ \left[\frac{dG_0}{dx}\right]_{x=\xi}=1/p(\xi\ ).$$

4. Условию ортогональности к $\varphi_0(x)$:

$$\int_0^l G_0(x,\xi\ )\varphi_0(x)dx=0.$$

Т е о р е м а 24.1. **Обобщенная функция Грина существует и единственна**.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Если было бы две обобщенные функции, то их разность удовлетворяла бы однородной краевой задаче и была бы ортогональна к φ_0. Согласно лемме 23.2 решение такой задачи $\equiv 0 \Rightarrow$ решение единственно.

Докажем теперь $\exists\ G_0(x,\xi\ )$.

Рассмотрим три функции:

1. $\varphi_0(x);\ \ L\varphi_0=0;\ \ \varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0,$
2. $\varphi_1(x)$ – линейно независимое с $\varphi_0(x)$ решение уравнения $L(\varphi_1)=0$, причем $\Delta(\varphi_1,\varphi_0)=\varphi_1\varphi'_0\text{-}\varphi'_1\varphi_0=1/p(x)$,
3. $\omega\ (x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} L(\omega\ )=-\varphi_0(\xi\ )\varphi_0(x), \quad x\in[0,l], \\ \omega\ (0)=0, \\ \omega\ '(0)=0. \end{cases} \tag{24.1}$$

Отметим, что $\varphi_1(0)\neq 0$ и $\varphi_1(l)\neq 0$, иначе в этих точках $\Delta(\varphi_1,\varphi_0)=0$, а функции φ_1 и φ_0 линейно независимы.

Легко показать, что выполняется соотношение

$$\frac{\omega\ (l)}{\varphi_1(l)}=\varphi_0(\xi\ )\ . \tag{24.2}$$

Для этого применим к φ_0 и ω формулу Грина

$$\int_0^l (\varphi_0 L(\omega\ )-\omega\ L(\varphi_0))dx=\left\{p(x)\left(\varphi_0\omega\ '-\varphi'_0\omega\right)\right\}\Big|_0^l\ .$$

Учитывая свойства φ_0 и ω , получим

$$-\varphi_0(\xi\ )\int_0^l \varphi_0^{\ 2}(x)dx=-p(l)\varphi'_0(l)\omega\ (l)$$

$$\varphi_0(\xi\ )=p(l)\varphi'_0(l)\omega\ (l)=\frac{\omega\ (l)}{\varphi_1(l)}\left(p(l)\varphi'_0(l)\varphi_1(l)\right).$$

Из $\Delta(\varphi_1,\varphi_0)=1/p(x) \Rightarrow \varphi_1(l)\varphi'_0(l)=1/p(l)$.

Поэтому имеем (24.2)

$$\varphi_0(\xi\ )=\frac{\omega\ (l)}{\varphi_1(l)}.$$

Представим теперь обобщенную формулу Грина в виде:

$$G_0(x,\xi\ )=\omega\ (x)+\begin{cases} C_1\varphi_1(x)+C_3\varphi_0(x); & 0\le x\le\xi \\ C_2\varphi_1(x)+C_4\varphi_0(x); & \xi\ \le x\le l \end{cases}.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению $LG_0=-\varphi_0(\xi\ )\varphi_0(x)$, а другие условия для G_0 должны быть выполнены подбором $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$.

Граничные условия и условия сопряжения дают:

$$\begin{cases} \omega\ (0)+C_1\varphi_1(0)+C_3\varphi_0(0)=0 \\ \omega\ (l)+C_2\varphi_1(l)+C_4\varphi_0(l)=0 \\ C_2\varphi_1(\xi\ )+C_4\varphi_0(\xi\ )-C_1\varphi_1(\xi\ )-C_3\varphi_0(\xi\ )=0 \\ C_2\varphi'_1(\xi\ )+C_4\varphi'_0(\xi\ )-C_1\varphi'_1(\xi\ )-C_3\varphi'_0(\xi\ )=1/p(\xi\ ) \end{cases} \tag{24.3}$$

Учитывая, что $\varphi_0(0)=0,\ \varphi_0(l)=0,\ \omega\ (0)=0,\ \omega\ '(0)=0$ и $\dfrac{\omega\ (l)}{\varphi_1(l)}=\varphi_0(\xi\ )$, получим первые два уравнения системы в виде:

$$C_1\varphi_1(0)=0$$
$$\varphi_0(\xi\ )\varphi_1(l)+C_2\varphi_1(l)=0.$$

Откуда $C_1=0;\ C_2=-\varphi_0(\xi\ )$. Тогда вторая пара уравнений системы примет вид:

$$\begin{cases} -\varphi_0(\xi\ )\varphi_1(\xi\ )+(C_4-C_3)\varphi_0(\xi\ )=0 \\ -\varphi_0(\xi\ )\varphi'_1(\xi\ )+(C_4-C_3)\varphi'_0(\xi\ )=\dfrac{1}{p(\xi)}=\varphi_1(\xi\ )\varphi'_0(\xi\ )-\varphi'_1(\xi\ )\varphi_0(\xi\ ) \end{cases}$$

Эти два уравнения эквивалентны и дают:

$$C_4-C_3=\varphi_1(\xi\ ).$$

Таким образом, имеем

$$C_1=0,\ C_2=-\varphi_0(\xi),\ C_4=C_3+\varphi_1(\xi\ ). \tag{24.4}$$

Мы из четырех уравнений получили только три решения, т.к. 3-е и 4-е уравнения были тождественны из-за соотношения (24.2).

Учитывая (24.4), получим $G_0(x,\xi\ )$ в виде:

$$G_0(x,\xi\ )=\omega\ (x)+\begin{cases} C_3\varphi_0(x) & 0\le x\le\xi \\ \varphi_1(\xi\ )\varphi_0(x)-\varphi_1(x)\varphi_0(\xi\ )+C_3\varphi_0(x) & \xi\ \le x\le l. \end{cases}$$

Подставив это выражение в условие ортогональности $G_0(x,\xi\ )$ к $\varphi_0(x)$, получим:

$$\int_0^l \omega\ (x)\varphi_0(x)dx+C_3\int_0^l \varphi_0^{\ 2}(x)dx+$$
$$+\int_\xi^l \left(\varphi_1(\xi\ )\varphi_0(x)-\varphi_1(x)\varphi_0(\xi\ )\right)\varphi_0(x)dx=0.$$

Откуда находим

$$C_3=\varphi_0(\xi\ )\int_\xi^l \varphi_0(x)\varphi_1(x)dx-\varphi_1(\xi\ )\int_\xi^l \varphi_0^{\ 2}(x)dx-\int_0^l \omega\ (x)\varphi_0(x)dx$$

Функция $G_0(x,\xi\ )$ полностью определена и удовлетворяет всем условиям задачи. $\exists\ G_0(x,\xi\ )$ доказано.

Т е о р е м а 24.2. **Необходимым и достаточным условием однозначности и разрешимости неоднородной краевой задачи является условие ортогональности правой части уравнения к собственной функции $\varphi_0(x)$. При этом решение представляется через обобщенную функцию Грина в виде**:

$$y(x)=\int_0^l G_0(x,\xi\ )f(\xi\ )d\xi$$

и оно ортогонально к $\varphi_0(x)$.

Доказательство проводится проверкой удовлетворения $y(x)$ всем условиям задачи, аналогично доказательству теоремы (22.1).

п.25. Задача Штурма-Лиувилля и ее свойства.

Задачей Штурма-Лиувилля называется задача на собственные значения для дифференциального уравнения $L(y)=(py')'-qy$, где

$p(x)>0$ – непрерывная дифференцируемая функция,

$q(x)$ – непрерывная функция на $[0,l]$.

Постановка задачи.

Найти собственные значения $\{\lambda_k\}$, при которых однородная краевая задача

$$\begin{cases} L(y)+\lambda\ \rho\ (x)y(x)=0, \quad x\in[0,l] \\ \gamma\ (y(0))=0,\ \ \Gamma(y(l))=0,\ \ \rho\ (x)>0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения, $\{y_k(x)\}$ – собственные функции. Предполагаем, что $\lambda=0$ не является собственным значением.

Т е о р е м а 25.1. **Если λ_k собственное значение задачи Штурма-Лиувилля, то ему соответствует единственная собственная функция $y_k(x)$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим, что существуют две собственные функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$. Тогда они должны быть линейно независимы. Но при $x=0$ выполняется граничное условие

$$\begin{cases} \alpha_1 y'_k(0)+\beta_1 y_k(0)=0 \\ \alpha_1 z'_k(0)+\beta_1 z_k(0)=0. \end{cases}$$

Т.к. $\exists$ отличное от нуля решение (α_1,β_1), то однородная алгебраическая система должна иметь определитель, равный нулю. Следовательно,

$\Delta(y_k,z_k)=0$ при $x=0 \Rightarrow$

$\Delta(y_k,z_k)=0$ при $\forall x\in(0,l) \Rightarrow$

$y_k(x),\ z_k(x)$ – линейно зависимы $\Rightarrow$

возможна только одна собственная функция для данного λ_k.

Т е о р е м а 25.2. **Собственные функции $y_k(x)$ и $y_m(x)$ для разных собственных значений $\lambda_k\neq\lambda_m$ ортогональны с весом $\rho\ (x)$, т.е.**

$$\int_0^l \rho\ (x)y_k(x)y_m(x)dx=0 \quad k\neq m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Т.к. $y_k(x)$ и $y_m(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям, то из формулы Грина имеем

$$\int_0^l \left\{y_k(x)L\left(y_m(x)\right)-y_m(x)L\left(y_k(x)\right)\right\}dx=0.$$

Подставим $L(y_s)=-\lambda\ \rho\ (x)y_s(x)$, получим

$$(\lambda_k-\lambda_m)\int_0^l \rho\ (x)y_k(x)y_m(x)dx=0,$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 25.3. **Для граничных условий I или II рода $y(0)=0$ (или $y'(0)=0$); $y(l)=0$ (или $y'(l)=0$) и при $q(x)\ge 0$ все собственные значения задачи Штурма - Лиувилля положительны, $\lambda_n>0$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Умножим уравнение Штурма - Лиувилля при λ_n на $y_n(x)$ и проинтегрируем по x. Тогда

$$\int_0^l y_n(x)\left\{\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)-q(x)y_n(x)+\lambda_n\rho\ (x)y_n(x)\right\}dx=0\ .$$

Откуда найдем:

$$\lambda_n=\frac{\int_0^l q(x)y_n^{\ 2}(x)dx-\int_0^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)\cdot y_n(x)dx}{\int_0^l \rho\ (x)y_n^{\ 2}(x)dx}\ .$$

Проинтегрировав по частям и учитывая граничные условия, получим;

$$-\int_0^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)y_n(x)=\left(p(x)y'_n(x)y_n(x)\right)\Big|_0^l+\int_0^l p(x)\left[\frac{dy_n}{dx}\right]^2 dx\ .$$

Окончательно получим:

$$\lambda_n=\frac{\int_0^l p(x)\left[y'_n(x)\right]^2 dx+\int_0^l q(x)y_n^{\ 2}(x)dx}{\int_0^l \rho\ (x)y_n^{\ 2}(x)dx}\ ,$$

т.к. $p(x)>0,\ \rho\ (x)>0,\ q(x)\ge 0$, то имеем $\lambda_k>0$.

Д о п о л н е н и е. Результат теоремы 25.3 $\lambda_k>0$ переносится и на третье краевое условие $\gamma\ (y)=\alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=0$, если $\beta_1/\alpha_1>0,\ \left(\alpha_1^{\ 2}+\beta_1^{\ 2}\neq 0\right)$ и на условие $\Gamma(y)=\alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0$, если $\beta_2/\alpha_2<0,\ \left(\alpha_2^{\ 2}+\beta_2^{\ 2}\neq 0\right)$.

п.26. Редукция задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.

Запишем задачу Штурма - Лиувилля в виде неоднородной задачи:

$$\begin{cases} L(y)=f,\ f=-\lambda\ \rho\ y \\ \gamma\ (y)=0 \\ \Gamma(y)=0. \end{cases} \tag{26.1}$$

Т.к. $\lambda=0$ не является собственным значением, следовательно, с помощью функции Грина $G(x,\xi\ )$ (22.7) имеем:

$$y(x)+\lambda\int_0^l G(x,\xi\ )\rho\ (\xi\ )y(\xi\ )d\xi\ =0.$$

Если ввести новую функцию $y(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt{\rho\ (x)}}$, $\rho\ (x)>0$, то интегральное уравнение запишется в виде:

$$u(x)+\lambda\int_0^l K(x,\xi\ )u(\xi\ )d\xi\ =0 \tag{26.2}$$

$$K(x,\xi\ )=\sqrt{\rho\ (x)\rho\ (\xi\ )}G(x,\xi\ ).$$

Т.к. $G(x,\xi\ )=G(\xi\ ,x)$, то ядро $K(x,\xi\ )=K(\xi\ ,x)$, т.е. (26.2) – интегральное уравнение с симметричным ядром, и мы можем использовать теорию Шмидта.

Интегральное уравнение (26.2) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Интегральное уравнение (26.2) эквивалентно задаче на собственные значения (26.1), т.е. $\forall$ решение (26.2) $\{u_m(x),\lambda_m\}$ является решением (26.1) $\left\{y_m(x)=\dfrac{u_m(x)}{\sqrt{\rho\ (x)}},\lambda_m\right\}$ и наоборот.

Из теории интегральных уравнений с симметричным ядром:

1. Если число собственных значений интегрального уравнения (26.2) конечно, то ядро уравнения называется вырожденным и представимо в виде:

$$K(x,\xi\ )=\sum_{m=1}^n \frac{u_m(x)u_m(\xi\ )}{\lambda_m}. \tag{26.3}$$

2. Справедлива теорема Гильберта - Шмидта: если правая часть интегрального уравнения

$$u(x)+\lambda\int_0^l K(x,\xi\ )u(\xi\ )d\xi=f(x), \tag{26.4}$$

функция $f(x)$ истокообразно представима, т.е. $\exists h(x)\in C$ такая, что

$$f(x)=\int_0^l K(x,\xi\ )h(\xi\ )d\xi\ , \tag{26.5}$$

то $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0,l]$ ряд по собственным функциям интегрального уравнения

$$f(x)=\sum_{m=1}^\infty f_m u_m(x);\ u_m(x)+\lambda_m\int_0^l K(x,\xi\ )u_m(\xi\ )d\xi=0. \tag{26.6}$$

Т е о р е м а 26.1. **Ядро $K(x,\xi\ )$ интегрального уравнения (26.2) является невырожденным, а, следовательно, у него и у задачи Штурма - Лиувилля существует бесконечное (счетное) множество собственных значений $\{\lambda_k\}$ и соответствующая им бесконечная последовательность $\{y_n(x)\}$ собственных ортонормированных функций.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим, что ядро $K(x,\xi\ )$ вырожденное

$$G(x,\xi\ )=\frac{1}{\sqrt{\rho\ (x)\rho\ (\xi\ )}}\sum_{m=1}^n \frac{u_m(x)u_m(\xi\ )}{\lambda_m}. \tag{26.7}$$

Интегральное уравнение (26.2) имеет собственные функции те же, что и дифференциальное уравнение $\Rightarrow$ они непрерывны и дифференцируемы на $(0,l)$.

Тогда $G(x,\xi)$ из (26.4) тоже непрерывная дифференцируемая функция, но это противоречит условию скачка $G'(x,\xi)$ при $x=\xi$. Следовательно, $K(x,\xi)$ – невырожденное ядро и имеет $\{\lambda_k\}$ и $\{u_k\}$ – счетное число собственных значений и собственных функций. Функции u_k – ортонормированные $\Rightarrow$

$$\int_0^l \rho(x) y_k^2 dx = 1$$

$$\int_0^l \rho(x) y_m(x) y_k(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

Ортогональность с весом $\rho(x)$.

п.27. Решение неоднородного интегрального уравнения с симметричным ядром. Теорема Стеклова.

Используя теорему Гильберта-Шмидта, мы можем получить решение неоднородного интегрального уравнения (26.4) в виде разложения по собственным функциям $u_m(x)$. Умножив скалярно (26.4) на $u_m(x)$, получим

$$c_m + \lambda \int_0^l u_m(x) dx \int_0^l K(x,\xi) u(\xi) dx = f_m , \qquad (27.1)$$

где $c_m = (u, u_m)$; $f_m = (f, u_m)$.

Т.к. ядро симметрично, то, согласно определению собственных функций (26.6), получим:

$$\int_0^l K(x,\xi) u_m(x) dx = \int_0^l K(\xi, x) u_m(x) dx = -\frac{u_m(\xi)}{\lambda_m}. \qquad (27.2)$$

Подставив (27.2) в (27.1), найдем

$$c_m - \frac{\lambda}{\lambda_m} \int_0^l u(\xi) u_m(\xi) d\xi = f_m$$

или

$$c_m \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right) = f_m .$$

Откуда получаем

$$c_m = f_m \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda} = f_m + \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda} f_m .$$

Зная c_m, мы можем найти решение неоднородного интегрального уравнения:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda} f_m u_m(x). \qquad (27.3)$$

Эта формула работает для истокообразно представимых $f(x)$.

Разложением решения задачи по $u_m(x)$ можно решать неоднородные дифференциальные уравнения. Обоснованием этого является следующая теорема.

Т е о р е м а 27.1. **Теорема Стеклова.**

Если дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,l]$ функция $z(x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям $\gamma(z)=0$ и $\Gamma(z)=0$, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0,l]$ ряд по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Т.к. $z(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то $Lz = f$, где f – непрерывная функция. Т.к. $'z'$ удовлетворяет краевым условиям, то она представима через функцию Грина в виде:

$$z(x) = \int_0^l G(x,\xi) f(\xi) d\xi ,$$

т.е. $z(x)$ – истокообразованное представление функции $\Rightarrow$ по теореме Гильберта-Шмидта

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n(x) ,$$

$$z_n = \int_0^l z(x) y_n(x) \rho(x) dx ,$$

причем $\int_0^l \rho(x) y_n^2(x) dx = 1$.

Используя теорему Стеклова, мы можем решать неоднородную краевую задачу разложением по собственным функциям.

Имеем задачу

$$L(y) = f,$$
$$\gamma(y) = \Gamma(y) = 0$$

и $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Разложим решение $y(x)$ в ряд по $y_m(x)$:

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} d_m y_m(x).$$

Учитывая, что

$$L(y_m) = -\lambda_m \rho(x) y_m ,$$

получим

$$L(y) = -\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \rho \, d_m y_m = f .$$

Откуда находим

$$d_m = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^l f(x) y_m(x) dx$$

или

$$y(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x)}{\lambda_m} \int_0^l f(x) y_m(x) dx .$$

Мы получили выражение для решения нашей задачи через правую часть $f(x)$ и собственные функции, соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

п.28. Поведение решения задачи Штурма-Лиувилля при $x=0$, если $p(x=0)=0$.

Пусть $p(x) = x\varphi(x)$ при $x \to 0$, $\varphi(0) \neq 0$ и $p(x) > 0$ при $x \in (0,l]$.

Тогда относительно $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимых решений задачи Штурма - Лиувилля. можно доказать следующее утверждение.

Л е м м а 28.1.

Если $p(x) = x\varphi(x)$ при $x \to 0$ и $\varphi(x)$ – ограничена, $\varphi(0) \neq 0$, $p(x) > 0$ при $0 < x < l$, а $g(x) = q(x) - \lambda\rho(x)$ ограничено (или может $\to \infty$ при $x \to 0$), то для ограниченного в точке $x=0$ решения задачи Штурма - Лиувилля $y_1(x)$ выполняется условие

$$\lim_{x \to 0} p(x) y_1'(x) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. $g(x)$ – ограничено. Тогда проинтегрируем уравнение

$$\int_x^{x_1} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right) dx = \int_x^{x_1} g(x) y_1(x) dx, \quad 0 < x < x_1 < l .$$

Откуда

$$p(x) y_1'(x) = p(x_1) y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} g(\xi) y_1(\xi) d\xi = Q(x),$$

$$\lim_{x \to 0} p(x) y_1'(x) = \lim_{x \to 0} Q(x) = C .$$

Покажем, что $C=0$. $Q(x)$ – непрерывно и ограничено на $0 < x < x_1$, причем $y_1(x) = y_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{Q(\xi) d\xi}{p(\xi)}$.

Т.к. $p(\xi) = \xi\varphi(\xi)$, то

$$\lim_{x \to 0} y_1(x) = A < \infty; \; A = y_1(x_1) - \int_0^{x_1} \frac{Q(\xi) d\xi}{\xi \varphi(\xi)} .$$

Интеграл сходится, если $Q(\xi) \underset{\xi \to 0}{\to} 0$.

2. Случай $g(x) \to \infty$ при $x \to 0$, $p(x)$ – дифференцируемая функция. Легко показать, что ограниченная $y_1(x)$ монотонна при $0 < x < x_1$, где $g(x) > 0$, (т.к. $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$, то $\exists x_1$ такое, что $g(x) > 0$ при $0 < x < x_1$), Если $y_1(x)$ немонотонна при $0 < x < x_1$, то она имеет или отрицательный $\min$ или положительный $\max$.

В этой точке $y' = 0 \Rightarrow$

$$py'' + p'y' - g(x)y(x) = 0 \Rightarrow \frac{y''}{y(x)} = \frac{g(x)}{p(x)}, \text{ но } \frac{g(x)}{p(x)} > 0, \text{ а}$$

$$\frac{y''}{y} < 0 \begin{cases} y > 0, \; y'' < 0 \\ y < 0, \; y'' > 0. \end{cases}$$

Пришли к противоречию $\Rightarrow$ $y_1(x)$ монотонна при $0 < x < x_1 \Rightarrow$

$Q(x) = p(x_1) y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} g(\xi) y_1(\xi) d\xi$ – монотонна ($g > 0$, y_1 – монотонна) и имеет конечный или бесконечный предел. Если предел $\exists$, то согласно случаю 1 он $=0$! Окончательно

$$\lim_{x \to 0} p(x) y_1'(x) = 0 .$$

Л е м м а 28.2.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения $L(y) + \lambda\rho y = 0$, а $p(x) = x\varphi(x)$, $\varphi(x) > 0$, $x \in [0,l]$, то, если $y_1(x)$ – ограниченная функция, $\lim_{x \to 0} y_1(x) = C < \infty$, то $y_2(x)$ – неограниченная функция при $x \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Согласно (22.4) из $\Delta(y_1, y_2) = \frac{C}{p(x)} \Rightarrow$

$$y_2(x) = y_1(x) \left\{ C_1 + C \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{p(\xi) y_1^2(\xi)} \right\}$$

или (т.к. $p(\xi) = \xi\varphi(\xi)$, $\varphi(\xi)$ – ограничена)

$$y_2(x) = \left[C_1 + C \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi \varphi(\xi) y_1^2(\xi)} \right] : \frac{1}{y_1(x)} .$$

Если $y_1(x) \neq 0$ при $x=0$, то интеграл расходится при $x \to 0$, $y_2(x)$ – неограничена при $x \to 0$. Если $y_1(x) \to 0$ при $x \to 0$, то имеем неопределенность, которую раскрываем по Лопиталю

$$\lim_{x \to 0} y_2(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left[C_1 + C \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{p(\xi) y_1^2(\xi)} \right]}{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y_1(x)} \right]} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{C / p(x) y_1^2(x)}{-y_1' / y_1^2(x)} = -C \lim_{x \to 0} \frac{1}{p(x) y'(x)} = \infty ,$$

согласно лемме 28.1.

Л е м м а 28.3.

Если в лемме 28.2 функция $y_1(x) = x^n Z(x)$ при $x \to 0$, а $Z(0) = const \neq 0$, то

$$y_2(x) = \begin{cases} \frac{\psi_1(x)}{x^n}; \; \psi_1(0) = const \neq 0, \; n > 0 \\ \psi_2(x) \ln\frac{1}{x}; \; \psi_2(0) = const \neq 0, \; n = 0 \end{cases} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$y_2(x) = y_1(x) \left\{ C_1 + C \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi \varphi(\xi) y_1^2(\xi)} \right\} =$$

$$= x^n Z(x) \left\{ C_1 + C \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\varphi(\xi) Z^2(\xi) \xi^{2n+1}} \right\} =$$

$$= x^n Z(x) \left\{ C_1 + \frac{C}{\varphi(x^*) Z^2(x^*)} \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi^{2n+1}} \right\}$$

по теореме о среднем $0 < x^* < x_0$. Интегрируя получим искомое.

п.29. Уравнение Бесселя. Построение решения в виде степенных рядов.

Уравнением Бесселя называется уравнение

$$\left(x Z_\nu'(x)\right)' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) Z_\nu(x) = 0, \; x \in (0, \infty) \qquad (29.1)$$

$Z_\nu(x)$ – называется цилиндрической функцией ν -го порядка. Т.к. $p(x) = x \Rightarrow p(0) = 0$, то одна цилиндрическая функция ограничена, а другая имеет особенность при $x \to 0$.

Решение уравнения Бесселя легко получить в виде степенного ряда. Из (29.1) имеем

$$x^2 Z_\nu''(x) + x Z_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) Z_\nu = 0.$$

Представим

$$Z_\nu(x) = x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k . \qquad (29.2)$$

Подставим в уравнение, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(\sigma + k)^2 - \nu^2 \right] a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0$$

или

$$\left(\sigma^2 - \nu^2\right) a_0 + \left[(\sigma+1)^2 - \nu^2 \right] a_1 x +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left[(\sigma + k)^2 - \nu^2 \right] a_k + a_{k-2} \right\} x^k = 0.$$

Считая $a_0 \neq 0 \Rightarrow \sigma = \pm\nu$, возьмем $\sigma = \nu$, тогда

$$(2\nu + 1) a_1 = 0; \; a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(2\nu + k)} .$$

Считая $\nu \geq 0$, получим

$$a_1 = 0, \; a_3 = 0 \text{ и т.д. } a_{2m+1} = 0 \quad m \in [0, \infty]$$

$$a_0 \neq 0, \; a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)} \text{ и т.д.}$$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m! (\nu + 1)(\nu + 2) ... (\nu + m)} .$$

Таким образом Z_ν определяется с точностью до постоянного множителя.

При выборе $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ получим Бесселеву функцию первого рода ν -го порядка.

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ – гамма функция

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \; x > 0; \; \Gamma(n+1) = n!, \; \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} .$$

Для $x \leq 0$ берем из $\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x \sin \pi x}$.

При $x = -n$ $(n = 0, 1, 2, ..., \infty)$ $\Gamma(-n) = \pm\infty$,

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+\nu} \Gamma(m+1) \Gamma(m + \nu + 1)}$$

имеем

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} .$$

Это при $\nu \geq 0$, а при отрицательных ν имеем $\nu \neq -n$ (n – целое)

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} .$$

Это продолжение $\Gamma(x)$ на отрицательное, но нецелое. $J_\nu(x)$ – ограниченное решение, $J_{-\nu}(x)$ – неограниченное решение. Это линейно независимые решения.

Если $\nu=-n$, то легко показать, что $J_{-n}(x)=J_n(x)(-1)^n$,

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n},$$

т.к. $\Gamma(k-n+1)=\pm\infty$ при $k\le n-1$.

Введя $k=m+n$, получим

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}=(-1)^nJ_n(x).$$

При целых $\nu=n$ линейно независимой функцией к $J_n(x)$ является функция Неймана $N_n(x)$ или функция Бесселя второго рода n-го порядка.

п.30. Собственные функции краевой задачи для уравнения Бесселя.

Краевая задача для уравнения Бесселя

$$L(y)=(ty'(t))'-\frac{\nu^2}{t}y(t)=-\lambda\, ty(t),\ t\in(0,l)$$

$y(x=0)$ – ограничена, $y(x=l)=0$ (или $y'(x=l)=0$.)

$$p(t)=t;\ q(t)=\frac{\nu^2}{t};\ \rho\ (x)=x.$$

Замена переменных $t=x/\sqrt{\lambda}$ приводит к уравнению Бесселя $\Rightarrow$ $y(t)=Z_\nu\left(\sqrt{\lambda}\ t\right)$, где $Z_\nu\left(\sqrt{\lambda}\ t\right)$ – ограниченная цилиндрическая функция, а из условия $Z_\nu\left(\sqrt{\lambda}\ l\right)=0$ (или $Z'_\nu\left(\sqrt{\lambda}\ l\right)=0$) находим $\{\lambda_k\}$ – собственные значения и соответствующие $\varphi_n=Z_\nu\left(\sqrt{\lambda_n}\,t\right)$ – собственные функции, ортогональные с весом $\rho=x$

$$\int_0^l\varphi_n(x)\varphi_m(x)xdx=0,\ n\ne m.$$

Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувиля: найти такие $\{\lambda_k\}$, при которых задача

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy(x)}{dx}\right)=-\lambda xy(x),\ x\in[0,l],\\ y(x=l)=0,\end{cases}\qquad(30.1)$$

имеет нетривиальное решение, непрерывное вместе со своими 2-мя производными.

Сделаем замену переменного $x=\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}$, $y\left(x=\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)=Z(t)$.

Тогда придем к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(t\dfrac{dZ(t)}{dt}\right)+tZ(t)=0,\ t\in\left[0,\sqrt{\lambda}l\right],\\ Z(t=\sqrt{\lambda}l)=0.\end{cases}$$

Это уравнение имеет одно ограниченное решение

$$Z(t)=CJ_0(t);\ y(x)=CJ_0(\sqrt{\lambda}x).\qquad(30.2)$$

Краевое условие при $x=l$ дает трансцендентное уравнение для определения собственных значений $\{\lambda_k\}$

$$J_0(\sqrt{\lambda_k}l)=0,\ k\in[1,\infty),\qquad(30.3)$$

т.к. функция Бесселя имеет ∞ число корней. Таким образом, мы имеем собственные ортонормированные функции для уравнения (30.1) в виде:

$$y_k=\frac{J_0(\sqrt{\lambda_k}x)}{a_k};\ a_k^2=\int_0^lJ_o^2(\sqrt{\lambda_k}x)xdx,\ k\in[1,\infty),\qquad(30.4)$$

которые ортогональны с весом x:

$$\int_0^ly_k(x)y_m(x)xdx=\begin{cases}0 & k\ne m\\ 1 & k=m\end{cases}\qquad(30.5)$$

Любая непрерывная дважды дифференцируемая функция $f(x)$ на отрезке $[0,l]$ может быть разложена в ряд:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_ky_k(x),\qquad(30.6)$$

где

$$f_k=\int_0^lf(x)y_k(x)xdx.\qquad(30.7)$$

п.31 Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Рассматривается функция многих переменных

$U(\bar{x})=U(x_1,x_2,\dots,x_n)$; $\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$; $i\in[1,n]$ – частные производные.

$F\left(x_1,\dots,x_n,U,\dfrac{\partial U}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial U}{\partial x_n}\right)=0$ – уравнение в частных производных I порядка.

Линейное уравнение

$$\sum_{i=1}^na_i(\bar{x})\frac{\partial U}{\partial x_i}=0,\ \bar{x}\in R_n,\qquad(31.1)$$

$a_i(\bar{x})$ при $\bar{x}\in G\in R_n$ непрерывные функции со своими первыми частными производными.

$$\sum_{i=1}^na_i^2(\bar{x})\ne0,\ \bar{x}\in G\qquad(31.2)$$

Рассматриваем уравнение (31.1) с условием (31.2)

$$\sum_{i=1}^na_i(\bar{x})\frac{\partial U}{\partial x_i}=0;\ \sum_{i=1}^na_i^2(\bar{x})\ne0,\ \bar{x}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}.$$

Для этого уравнения имеем систему дифференциальных уравнений для фазовых траекторий

$$\frac{dx_1}{a_1(\bar{x})}=\frac{dx_2}{a_2(\bar{x})}=\dots=\frac{dx_n}{a_n(\bar{x})}.\qquad(31.3)$$

Интегральные кривые системы (31.3) называются характеристиками исходного уравнения. Через каждую точку $M(x_1,\dots,x_n)\in G$ проходит одна и только одна характеристика.

Теорема 31.1. **Вдоль характеристики решение $U(\bar{x})$ сохраняет постоянное значение.**

Доказательство.

Если $\{x_i(t)=x_i\}$ параметрическое задание характеристики, то

$\dfrac{dU}{dt}=\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial U}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial U}{\partial x_i}a_i=0$ (согласно уравнению 31.1).

Следовательно, $\dfrac{dU}{dt}=0$ (вдоль характеристики) $\Rightarrow$

$\Rightarrow U=const$ (вдоль характеристики).

Определение. **Первым интегралом уравнения (31.1) называется функция $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, обращающаяся тождественно в постоянную, когда $M(x_1,\dots,x_n)$ движется вдоль характеристики** (интегральной кривой системы 31.1).

В частности, пусть $a_n(\bar{x})\ne0$, $M\in G$, тогда систему (31.3) можно записать в виде:

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{a_i(\bar{x})}{a_n(\bar{x})},\quad i\in[1,n-1],\qquad(31.4)$$

начальные данные $x_i\Big|_{x_n=x_n^0}=x_i^0$ $i\in[1,n-1]$.

Решение системы (31.4)

$$x_i=X_i(x_n,x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0),\ i\in[1,n-1].\qquad(31.5)$$

Функции X_i сопоставляют точки $\{x_i\}$, $\{x_i^0\}$.

Эти точки можно поменять местами, т.е.

$$x_i^0=X_i(x_n^0,x_1,x_2,\dots,x_n),\ i\in[1,n-1],\qquad(31.6)$$

Функции $X_i(x_n^0,\bar{x})$ – первые интегралы, т.к. на решении (31.3) обращаются в $x_i^0=const$.

Взаимная обратимость (31.5) и (31.6) означает неравенство нулю якобиана:

$$\frac{D(X_1,\dots,X_{n-1})}{D(x_1,\dots x_{n-1})}\ne0\quad\text{при } M\in G.\qquad(31.7)$$

Это означает, что $X_1,\dots,X_{n-1}$ являются функционально независимыми первыми интегралами.

Теорема 31.2. **Всякое решение $\Psi(\bar{x})$ уравнения (31.1) является первым интегралом системы (31.4) и, обратно, всякий первый интеграл системы (31.4) $\varphi(\bar{x})$ является решением уравнения (31.1).**

Доказательство.

1. Пусть $\Psi(\bar{x})=U(\bar{x})$ – решение уравнения (31.1) $\Rightarrow$ если $\{x_i=x_i(t)\}$ – уравнение характеристик, то $\dfrac{dU}{dt}=0\Rightarrow U=const$ на характеристике $\Rightarrow\Psi(\bar{x})$ – первый интеграл.

2. $\varphi(\bar{x})$ – первый интеграл $\Rightarrow\varphi=const$ на характеристике, $\dfrac{d\varphi}{dt}=0$ на характеристике $\Rightarrow\sum_{i=1}^na_i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0$ на характеристике (т.к. через каждую точку М проходит характеристика) $\Rightarrow\sum_{i=1}^na_i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0$ всюду в G, т.е. φ – решение (31.1)

Рассмотрим уравнение (31.1) в случае двух независимых переменных $U(x,y)$:

$$A(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}=0,\ A,B\in C_1.\qquad(31.8)$$

Если ввести вектор $\bar{a}=\{A(x,y),B(x,y)\}$ и $gradU=\left\{\dfrac{\partial U}{\partial x},\dfrac{\partial U}{\partial y}\right\}$, то (31.8) запишется в виде:

$$\bar{a}gradU=0\qquad(31.9)$$

или $\dfrac{\partial U}{\partial a}=0$ (производная по данному направлению $\bar{a}$ равна нулю).

Вектор $\bar{a}=\{A,B\}$ коллинеарен вектору $\bar{k}$, касательному к кривой $U(x,y)=const$ (т.к. $gradU\perp\bar{k}$). Пусть $U(x,y)=const$ дает нам кривую Г, которая задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}\qquad(31.10)$$

Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=B(x,y),\end{cases}\qquad(31.11)$$

т.к. $\bar{k}=\left\{\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right\}$. Система (31.11) определяет кривые (31.10), на которых $u(x,y)=const$. Фазовые траектории системы (31.11) являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B(x,y)}{A(x,y)}\ \left(\text{или } \frac{dx}{dy}=\frac{A(x,y)}{B(x,y)}\right).\qquad(31.12)$$

Интегральные кривые (31.12) называются характеристиками уравнения в частных производных (31.8). Обычно (31.12) записывают в симметричном виде:

$$\frac{dx}{A(x,y)}=\frac{dy}{B(x,y)},\ A^2+B^2\ne0.\qquad(31.13)$$

Т.к. A и B не обращаются одновременно в нуль, то уравнение (31.13) имеет единственное решение задачи Коши. Это означает, что через каждую *точку области G проходит одна и только одна характеристика.*

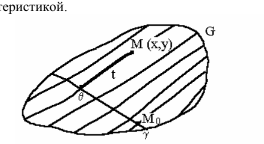
Пусть $U=U(x,y)$ – интегральная поверхность уравнения в частных производных (31.8). Как изменяется U(x,y) вдоль характеристики $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$?

$$U=U(x(t),y(t))\Rightarrow\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}=A\frac{\partial U}{\partial x}+B\frac{\partial U}{\partial y}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dU}{dt}\Big|_{x(t),y(t)}=0\Rightarrow U(x,y)=const \text{ на характеристике.}$$

Общее решение уравнения (31.8).

Через любую т. *M(x,y)* проходит характеристика. Пусть γ – кривая, не совпадающая с характеристикой.



Ясно, что характеристики составляют однопараметрическое семейство. Зафиксируем т.M_0 на γ и обозначим расстояние до пересечения характеристики с γ от т.M_0через θ. Тогда каждой характеристике соответствует свое θ. Если расстояние от М до γ по характеристике обозначим t, то каждой паре (x,y) соответствует своя пара (θ,t), т.е.

$$\begin{cases}x=X(\theta,t)\\ y=Y(\theta,t)\end{cases};\ \begin{cases}\theta=\Theta(x,y)\\ t=T(x,y).\end{cases}\qquad(31.14)$$

В переменных θ,t уравнение характеристики

$$\frac{d\theta}{dt}=0,\qquad(31.15)$$

т.к. вдоль характеристики при изменении t имеем $\theta=const$. Из (31.15) имеем, что вдоль характеристики

$$\Theta(x,y)=const.\qquad(31.16)$$

Выражение (31.16) дает все характеристики, как семейство от параметра θ, т.е. $y=y(x,\theta)$. В переменных (θ,t) легко получить решение уравнения (31.8)

$$U(x,y)=U(X(\theta,t),Y(\theta,t))=V(\theta,t).$$

На характеристике

$$\frac{dU}{dt}=0\ \text{ и }\ \frac{d\theta}{dt}=0\Rightarrow\frac{dU}{dt}=\frac{\partial V}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial V}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial t}=0.$$

Это означает, что $V=F(\theta)$, где F – произвольная функция. Отсюда получаем, что общее решение уравнения (31.8) представимо в виде:

$$U(x,y)=F(\theta(x,y)),\qquad(31.17)$$

где F – произвольная функция, а $\theta(x,y)=const$ на характеристике, $\theta(x,y)$ – первый интеграл.

Достаточно найти такую $\varphi(x,y)$, что на характеристике $\varphi(x,y)\big|_{хар}=const$, тогда общее решение $U(x,y)=F(\varphi(x,y))$.

Задача Коши для уравнения (31.8) ставится следующим образом:

$$\begin{cases}A(x,y)\dfrac{\partial U}{\partial x}+B(x,y)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0;\ (x,y)\in G;\\ U(x,y)\big|_\gamma=\omega(s);\end{cases}\qquad(31.18)$$

где $\gamma=\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\end{cases}$ – кривая, не совпадающая с характеристикой ни на одном интервале положительной длины, а $\omega(s)$ – заданная функция. Если нам известно $\theta(x,y)$, обращающееся в $const$ на характеристике (31.18), то общее решение есть $U=F(\theta(x,y))$. Из начального условия на γ функция F определяется следующим образом:

$\theta(x,y)\big|_\gamma=\theta(x(s),y(s))=\xi(s)$. Разрешив уравнение $\xi(s)=\xi$, получим

$$s=\Omega(\xi)\Rightarrow\Omega(\theta(x,y))\big|_\gamma=\Omega(\xi)=S.\qquad(31.19)$$

Решение представимо в виде:

$$U(x,y)=\omega(\Omega(\theta(x,y))).\qquad(31.20)$$

Это решение уравнения (31.18) и удовлетворяет начальному условию $U\big|_\gamma=\omega(s)$, т.к. (31.20), согласно (31.19), на γ дает $\omega(s)$.

п.32 Постановка обратных задач для дифференциального уравнения второго порядка. Неустойчивость задачи определения правой части уравнения.

I Задача определения правой части дифференциального уравнения.

Дана краевая задача для неоднородного уравнения.

$$\begin{cases}y''(x)-\omega^2y(x)=f(x),\ \ x\in[0,H],\\ y(x=0)=0,\ \ y(x=H)=0.\end{cases}\qquad(32.1)$$

Требуется определить $f(x)$ по дополнительному условию

$$y'(x=0)=Z(\omega).\qquad(32.2)$$

II Задача определения коэффициентов дифференциального уравнения.

Дана краевая задача для однородного уравнения:

$$\begin{cases}y''(x)-\omega^2\alpha(x)y(x)=0,\ \ x\in[0,H],\\ y(x=0)=1,\ \ y(x=H)=0,\ \ \alpha(x)>0;\end{cases}\qquad(32.3)$$

требуется определить $\alpha(x)$ по дополнительному условию

$$y'(x=0)=Z(\omega).\qquad(32.4)$$

Первая задача – линейная, а вторая – нелинейная. Обе задачи неустойчивы. Докажем неустойчивость первой задачи. Для этого редуцируем ее к интегральному уравнению первого рода.

Найдем функцию Грина $G(x,y)$ для задачи (32.1)

$$\begin{cases}\dfrac{d^2G}{dx^2}-\omega^2G=0\qquad x\in[0,H],x\ne x_0,\\ G\big|_{x=0}=0,\ G\big|_{x=H}=0,\\ G(x=x_0+0,x_0)-G(x=x_0-0,x_0)=0,\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=x_0+0}-\dfrac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=x_0-0}=1.\end{cases}\qquad(32.5)$$

Представим функцию Грина в виде:

$$G(x,x_0)=\begin{cases}A(e^{-\omega x}-e^{\omega x}) & \text{при } x\in[0,x_0]\\ B(e^{-\omega(H-x)}-e^{\omega(H-x)}) & \text{при } x\in[x_0,H]\end{cases}\qquad(32.6)$$

Подставив в условия при $x=x_0$ в задаче (32.5), получим систему уравнений для определения A и B:

$$B(e^{-\omega(H-x_0)}-e^{\omega(H-x_0)})-A(e^{-\omega x_0}-e^{\omega x_0})=0,$$

$$B(e^{-\omega(H-x_0)}+e^{\omega(H-x_0)})+A(e^{-\omega x_0}+e^{\omega x_0})=1/\omega.$$

Откуда находим

$$A=\frac{1}{\omega D}(e^{-\omega(H-x_0)}-e^{\omega(H-x_0)}),$$

$$B=\frac{1}{\omega D}(e^{-\omega x_0}-e^{\omega x_0}),$$

где

$$D=(e^{-\omega x_0}+e^{\omega x_0})(e^{-\omega(H-x_0)}-e^{\omega(H-x_0)})+$$
$$+(e^{-\omega x_0}-e^{\omega x_0})(e^{-\omega(H-x_0)}+e^{\omega(H-x_0)}).$$

Подставив найденные A и B в (32.6), найдем

$$G(x,x_0)=\frac{\operatorname{ch}\,\omega\,(H-x-x_0)-\operatorname{ch}\,\omega\,(H-|x-x_0|)}{2\omega\operatorname{sh}\omega H}.$$

Тогда решение краевой задачи (32.1) запишется в виде:

$$y(x)=\int_0^H f(x_0)G(x,x_0)dx_0 \tag{32.7}$$

Подставив (32.7) в дополнительное условие (32.2) и учитывая, что

$$\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\frac{\operatorname{sh}\omega\,(H-x_0)}{\operatorname{sh}\,\omega H},$$

получим:

$$\int_0^H f(x_0)\operatorname{sh}\omega\,(H-x_0)dx_0=-Z(\omega)\operatorname{sh}\omega\,H \tag{32.8}$$

Это — интегральное уравнение I рода для $f(x_0)$ при известном $Z(\omega)$. Покажем неустойчивость интегрального уравнения I рода.

Рассмотрим интегральное уравнение I рода:

$$\int_0^1 K(x,s)y(s)ds=F(x),\quad x\in[0,1]. \tag{32.9}$$

Пусть выполнены условия, при которых решение этого уравнения существует и единственно. Пусть $y_1(s)$ и $y_2(s)$ — непрерывные функции, являющиеся решениями интегрального уравнения (32.9) соответственно для правых частей $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Тогда возьмем:

$$y_2(s)=y_1(s)+A\sin ns. \tag{32.10}$$

Тогда

$$f_2(x)=\int_0^1 K(x,s)(y_1(s)+A\sin ns)ds=$$

$$=f_1(x)+A\int_0^1 K(x,s)\sin ns)ds.$$

Заметим, что $\|y_2(s)-y_1(s)\|_C=\|A\sin ns\|_C=|A|$.

Если $|A|$ велико, то $y_1(s)$ и $y_2(s)$ отличаются сильно, но

$$\|F_2(x)-F_1(x)\|_C=|A|\ \left\|\int_0^1 K(x,s)\sin nsds\right\|_C=\frac{|A|C}{n}<\varepsilon,\text{если } n>N=|A|C/\varepsilon$$

Таким образом, малым изменениям $F(x)$ могут соответствовать большие изменения $y(s)$. Задача неустойчива.

Задачу можно сделать устойчивой, если предположить, что решение принадлежит более узкому классу. Например, пусть априори известно, что $y(s)$ дифференцируема и ее производная ограничена $const=C_0$, а правые части таковы, что они соответствуют этим решениям. Тогда задача станет устойчивой.

$$\|y_2-y_1\|_C=|A|\ ;\|y_2'-y_1'\|_C=n|A|\le C_0\Rightarrow n\le C_0/|A|.$$

$$\|F_2-F_1\|_C=\frac{|A|C}{n}\ge\ \frac{|A|^2C}{C_0}$$

$$\Rightarrow\|F_2-F_1\|_C\ge\|y_2-y_1\|_C^2\frac{C}{C_0}\Rightarrow$$

Таким образом, если мало $\|F_2-F_1\|_C$ то мало и $\|y_2-y_1\|$.

Именно на этой основе и дано определение корректности задачи по Тихонову:

1. Априори известно, что решение существует и принадлежит более узкому множеству функций Y (называется множеством корректности);

2. Решение единственно;

3. Если правая часть принадлежит F, для которых решение принадлежит Y, то тогда задача устойчива.

п.33. Понятие функционала и вариации. Постановка вариационной задачи. Необходимые условия экстремума.

Функционалом называется отображение множества функций $y\in Y$ в множество чисел (аналогия с функцией, но заданной не на числовом, а на функциональном множестве).

Пример: время, затраченное на прохождение траектории $y=y(x)$, $x\in[x_0,x_1]$, если скорость зависит от точки нахождения $v=v(x,y)$

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(x,y)}dx=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx.$$

По аналогии с дифференциалом функции вводится понятие вариации функции.

Вариацией функции $y(x)$ (аргумента функционала) называется разность функций

$$\delta y=y(x)-y_1(x);\ y,y_1\in Y\Rightarrow\delta y=\eta\,(x)\in Y,$$

причем $\eta\,(x_0)=\eta\,(x_1)=0$ – класс с закрепленными концами.

Т.к. в функционал кроме $y(x)$ может входить $y'(x)$ и т.д. до $y^{(k)}(x)$, то кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле k-го порядка ($y\in C_k$), если мало δ_k, где

$$\delta_k=\max_{x\in[x_0-x_1]}\{|y-y_1|,|y'-y_1'|,...,|y^{(k)}-y^{(k)}{}_1|\}.$$

Функционал $\Phi[y(x)]$ называется непрерывным при $y=y_1(x)$ в смысле близости *k*-го порядка, если для любого положительного $\varepsilon>0$ можно найти δ такое, что

$|\Phi(y)-\Phi(y_1)|<\varepsilon$, **если** $\delta_k<\delta$

(функции близости порядка k).

Линейным функционалом называется функционал $L[y]$, удовлетворяющий условиям

$L(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha L(y_1)+\beta L(y_2)$

α,β - $const$.

Пример.

$$L(y)=\int_{x_0}^{x_1}(p(x)y+q(x)y')dx.$$

Вариация функционала – это главная, линейная по отношению к δy, часть приращения функционала

$$\Delta\Phi=\Phi(y+\delta y)-\Phi(y)\xrightarrow[\delta y\to 0]{}\delta\Phi+O(\delta y^2).$$

Другое определение:

$$\varphi\,(\alpha)=\Delta\Phi=\Phi(y+\alpha\,\delta\,y)-\Phi(y)\Rightarrow$$

$$\delta\Phi=\frac{\partial\varphi\,(\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

Вариационные задачи – задачи на экстремум функционала. Например, найти

$$\min_y T=\min_y\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(x,y)}dx,$$

где $v(x,y)$ – задано, а $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$.

Частный случай – задача о брахистроне.

Задача о геофдезических линиях

$$\min l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx\,;\varphi\,(x,y,z)=0.$$

Необходимое условие экстремума функционала $\delta\Phi(\mathrm{y})=0.$

Определение. Функционал $\Phi(y)$ достигает на кривой $y=y_0(x)$ max (или min), если значение функционала $\Phi(y)$ на любой близкой к $y=y_0(x)$ кривой не больше (не меньше), чем $\Phi(y_0)$, т.е.

$\Delta\Phi\Big|_{y_0}\le 0$ (или $\Delta\Phi\Big|_{y_0}\ge 0$).

Теорема 33.1 **Если функционал $\Phi(y)$, имеющий вариацию, достигает максимума (или минимума) при $y=y_0(x)$, где $y_0(x)$ внутренняя точка области определения функционала, то при $y_0(x)$**

$$\delta\Phi(y)\Big|_{y=y_0(x)}=0.$$

Доказательство.

При фиксированных $y_0(x)$ и δy функционал $\Phi(y_0(x)+\alpha\,\delta\,y)=\varphi\,(\alpha)$. По предположению $\varphi\,(\alpha)$ достигает max (или min) при $\alpha=0\Rightarrow\varphi'(0)=0\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\Phi(y_0(x)+\alpha\,\delta\,y))\Big|_{\alpha=0}=\delta\Phi=0.$$

Если экстремум достигается для $y(x)$ близких к y_0 нулевого порядка, то **экстремум сильный**, если для близких к y_0 первого (или выше) порядка, то **экстремум слабый.**

Близость в C или в C_k.

п.34. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.

Лемма 34.**1 Основная лемма.**

Если для каждой непрерывной на $[x_0,x_1]$ функции $\eta\,(x)[\,\eta\,(x_0)=\eta\,(x_1)=0]$ выполняется условие

$$\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta\,(x)dx=0,$$

где $\Phi(x)$ непрерывная на $[x_0,x_1]$ функция, то $\Phi(x)\equiv 0$ при $x\in[x_0,x_1]$.

Доказательство.

Пусть $\exists\,\bar{x}\in[x_0,x_1]$ такое, что $\Phi(\bar{x})\ne 0$. Тогда из непрерывности $\Phi(x)\Rightarrow$, что $\exists$ окрестность $[\bar{x}_0,\bar{x}_1]$ т. $\bar{x}$, где $\Phi(x)$ сохраняет знак.

Взяв

$$\eta\,(x)=\begin{cases}0 & x\notin[\bar{x}_0,\bar{x}_1]\\ \ge 0 & x\in[\bar{x}_0,\bar{x}_1]\end{cases},$$

получим;

$$\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta\,(x)dx=\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1}\Phi(x)\eta\,(x)dx\ne 0.$$

Пришли к противоречию $\Rightarrow\Phi\,(x)\equiv 0.$

Уравнения Эйлера.

Теорема 34.1 **Необходимым условием экстремума функционала $\Phi(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$ при $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ является выполнение на экстремали $y(x)$ уравнения Эйлера.**

$$F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})=0.$$

Доказательство.

Пусть $y(x)$ – экстремаль (т.е. на $y(x)$ достигается экстремум $\Phi(y)$). Тогда зададим параметрическое семейство функций

$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\,\delta y$; $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0.$

На этом семействе имеем $\varphi\,(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha\delta\,y,y'+\alpha\delta\,y')dx.$

Необходимые условия экстремума

$$\delta\Phi=0\Rightarrow\varphi'\,(\alpha=0)=0\Rightarrow$$

$$\varphi'\,(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\{F_y\frac{\partial\,y(x,\alpha)}{\partial\,\alpha}+F_{y'}\frac{\partial\,y'(x,\alpha)}{\partial\,\alpha}\}\Rightarrow$$

$\varphi'\,(0)=\int_{x_0}^{x_1}\{F_y\delta\,y+F_{y'}\delta\,y'\}dx$ – интегрируем по частям:

$$\varphi'\,(0)=(F_y\delta\,y)\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}[F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}]\delta\,y(x)dx=0\Rightarrow$$

по основной лемме $F_y-\dfrac{dF_{y'}}{dx}=0$ (уравнение Эйлера) или

$$\begin{cases}F_y-F_{xy'}-y'F_{yy'}-y''F_{y'y'}=0\,,x\in[x_0,x_1],\\ y(x_0)=y_0\ \ ,\ y(x_1)=y_1,\end{cases}$$

п.35. Функционалы, содержащие производные порядка выше первого и зависящие от нескольких функций. Необходимые условия экстремума.

Функционал от нескольких функций.

$$\begin{cases}\Phi(\bar{y})=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\bar{y},\bar{y}')dx,\\ \bar{y}(x_0)=\bar{y}^0\ ,\bar{y}(x_1)=\bar{y}^{(1)},\end{cases}$$

$y=\{y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\}.$

Варьируем $\bar{y}+\delta\bar{y}$; $\delta\bar{y}=\{\delta\mathrm{y}_1,...,\delta y_n\}$. Так как $\delta\bar{y}_i$ любая непрерывная на $[x_0,x_1]$ функция, обращающая на концах в нуль $\delta y_i(x_0)=\delta y_i(x_1)=0$, то всегда можно все δy взять равными нулю, кроме δy_i и тогда получим уравнение Эйлера

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}(F_{y_i'})=0\ \ i\in[1,n].$$

Функционал со старшими производными.

$$\begin{cases}\Phi(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',...,y^{(n)})dx,\\ y(x_0)=y_0\,,y'(x_0)=y_0',...,y^{(\mathrm{n}\text{-}1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\\ y(x_1)=y_1\,,y'(x_1)=y_1',...,y^{(\mathrm{n}\text{-}1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}.\end{cases}$$

Пусть $y(x)$ – экстремаль имеет $2n$ непрерывных производных. Варьируем ее в параметрическом в виде: $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\,\delta y$, причем при x_0 и x_1 имеем

$$\delta y=0,\delta y'=0,...,\delta y^{(n-1)}=0. \tag{*}$$

Тогда

$$\varphi\,(\alpha)=\Phi(y+\alpha\,\delta\,y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha\,\delta\,y,...,y^{(n)}+\alpha\,\delta\,y^{(n)})dx,$$

$$\varphi'\,(\alpha=0)=\delta\,\Phi=\int_{x_0}^{x_1}\{F_y\delta\,y+F_{y'}\delta\,y'+...+F_{y^{(n)}}\delta\,y^{(\mathrm{n})}\}dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая (*), получим

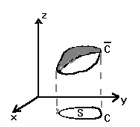
$\delta\,\Phi=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}(F_{y^{(k)}})\delta\,ydx=0,$ $\delta\,y$ – любая непрерывная функция. Тогда по основной лемме:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}(F_{y^{(k)}})=0\quad\text{уравнение Эйлера-Пуассона.}$$

п.36. Многомерные вариационные задачи. Уравнение Эйлера-Остроградского.

Исследуем функционал от функции двух переменных $z(x,y)$, т.е.

$$\Phi(z(x,y))=\iint_S F(x,y,z,\frac{\partial\,z}{\partial\,x},\frac{\partial\,z}{\partial\,y})dxdy$$



$$z(x,y)\Big|_{x,\,y\in C}=z_0(x,y).$$

Все допустимые поверхности $z(x,y)$ проходят через контур $\bar{C}$ (его проекция C).

Вариация $z(x,y,\alpha)=z(x,y)+\alpha\,\delta z(x,y)\quad\delta z(x,y)\Big|_C=0.$

$$\varphi\,(\alpha)=\iint_S F(x,y,z+\alpha\,\delta\,z,\frac{\partial\,z}{\partial\,x}+\alpha\,(\delta\,z)_x,\frac{\partial\,z}{\partial\,y}+\alpha\,(\delta\,z)_y)dxdy,$$

$$\delta\,\Phi=\varphi'(\alpha=0)=\iint_S(\frac{\partial\,F}{\partial\,z}\delta\,z+\frac{\partial\,F}{\partial\,p}\delta\,p+\frac{\partial\,F}{\partial\,q}\delta\,q)dxdy,$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z)=\frac{\partial F_p}{\partial x}\delta z+F_p\delta p\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta z)=\frac{\partial F_q}{\partial y}\delta z+F_q\delta q\ .$$

Откуда

$$\delta\,\Phi=\iint_S(\frac{\partial\,F}{\partial\,z}-\frac{\partial\,F_p}{\partial\,x}-\frac{\partial\,F_q}{\partial\,y})\delta\,zdxdy+$$

$$+\iint_S(\frac{\partial}{\partial\,x}(F_p\delta\,z)+\frac{\partial}{\partial\,y}(F_q\delta\,z))dxdy$$

По формуле Грина

$$\iint_S(\frac{\partial\,N}{\partial\,x}+\frac{\partial\,M}{\partial\,y})dxdy=\oint_C(Ndy-Mdx)\Rightarrow$$

$$\iint_S(\frac{\partial}{\partial\,x}(F_p\delta z)+\frac{\partial}{\partial\,y}(F_q\delta z))dxdy=$$

$$=\oint_C(F_p\delta zdy-F_q\delta zdx)=0\ \ (\text{т.к. на } C\ \delta z=0)$$

$$\Rightarrow\delta\,\Phi=\iint_S(\frac{\partial\,F}{\partial\,z}-\frac{\partial\,F_p}{\partial\,x}-\frac{\partial\,F_q}{\partial\,y})\delta zdxdy.$$

Т.к. δz – произвольная непрерывная функция, то по основной лемме уравнение Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F_p}{\partial x}-\frac{\partial F_q}{\partial y}=0.$$

Пример:

$$\Phi=\iint_D\left\{\left(\frac{\partial\,z}{\partial\,x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,z}{\partial\,y}\right)^2\right\}dxdy\Rightarrow\frac{\partial^{\,2}z}{\partial\,x^2}+\frac{\partial^{\,2}z}{\partial\,y^2}=\Delta u=0.$$

Это уравнение Лапласа.

п.37. Вариационные задачи на условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Найти экстремум функционала, зависящего от нескольких функций.

$$(*)\begin{cases} \Phi(\bar{y}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\bar{y},\bar{y}')dx \ ; \ y = \{y_1,...,y_n\} \\ \text{при дополнительных условиях} \\ \varphi_i(x,y) = 0 \ \ i \in [1,m], \ \ m < n \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0; \ \bar{y}(x_1) = \bar{y}^1; \varphi_i(x_0,\bar{y}^0) = 0; \varphi_i(x_1,\bar{y}^1) = 0 \end{cases}$$

Уравнения $\varphi_i(x,\bar{y}) = 0$ предполагаются независимыми. Пусть они независимы как функции от первых m переменных $y_1, y_2, \dots, y_m$, т.е.

$$\frac{D(\varphi_{1,} \ \varphi_{2, \ \dots,} \ \varphi_m)}{D(y_{1,} \ y_{2, \ \dots,} \ y_m)} \neq 0.$$

Т е о р е м а 37.**1 Вектор функция $\bar{y}(x)$, реализующая условный экстремум (*), удовлетворяет при соответствующем выборе множителей $\lambda_i(x)$ $(i = 1,\dots,m)$ уравнениям Эйлера, составленным для функционала**

$$\widetilde{\Phi}(\bar{y}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (F(x,\bar{y},\bar{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x,y))dx$$

Функции $\lambda_i(x)$ $i \in [1,m]$ и $\bar{y}(x)$ определяется из уравнения Эйлера

$$\begin{bmatrix} \widetilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k}) = 0, \ k \in [1,n] \\ \varphi_i(x,\bar{y}) = 0, \ \ i \in [1,m] \end{bmatrix}, \qquad (37.1)$$

где

$$\widetilde{F}(\bar{x},\bar{y},\bar{y}') = F(\bar{x},\bar{y},\bar{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x,y) \ . \qquad (37.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\bar{y}$ – экстремаль задачи (*), то

$$\delta\Phi = \int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{k=1}^{n}(F_{y_k}\delta y_k + F_{y'_k}\delta y'_k)dx = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\delta y_k(x_0) = \delta y_k(x_1) = 0$, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{k=1}^{n}\left(F_{y_k} - \frac{d}{dx}(F_{y'_k})\right)\delta y_k dx = 0. \qquad (37.3)$$

Но применить основную лемму нельзя из-за того, что δy_k не произвольны, т.к. есть связь через условия $\varphi_i = 0$.

Т.к. δy_k малы, то связи можно линеаризовать, разлагая в ряд Тейлора и пренебрегая $(\delta y)^2$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\delta y_k = 0 \ \ , \quad i \in [1,m]. \qquad (37.4)$$

Умножив (37.4) на $\lambda_i(k)$, проинтегрировав по *x*, просуммировав по i и сложив с (37.3), получим:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'_k})\right) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_k}\right)\delta y dx = 0$$

или, введя $\tilde{F}$, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\widetilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k})\right)\right)\delta y_k dx = 0. \qquad (37.5)$$

Пока δy_k не являются независимыми и основную лемму применить нельзя.

Возьмем λ_i $i \in [1,m]$ такими, что удовлетворяется

$$\begin{cases} F_{y_k} - \frac{d}{dx}(F_{y'_k}) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k} = 0 \\ \text{при} \quad k = 1,2,\dots,m \end{cases} \qquad (37.6)$$

Это – линейная система с определителем, не равным нулю $\frac{D(\varphi_1,\dots\varphi_m)}{D(x_1,\dots x_m)} \neq 0$

$\Rightarrow$ система имеет решение, а(37.5) для даннных $\{\lambda_i\}$ имеет вид:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{k=m+1}^{n}\left(\widetilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k})\right)\right)\delta y_k dx = 0.$$

Теперь $\delta_k y$ при $k \in [(m+1),n]$ независимы и можно использовать основную лемму. В результате получим:

$$\widetilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k}) = 0 \quad k \in [(m+1),n].$$

Учитывая (37.6), получим окончательно

$$\begin{cases} \widetilde{F}_{y_k} - \frac{d}{dx}(\widetilde{F}_{y'_k}) = 0 \quad k \in [1,n] \\ \varphi_i(x,\bar{y}) = 0 \quad \ i \in [1,m] \end{cases}$$

Теорема доказана.

Если $\varphi_i(\bar{y}) = 0$, т.е. нет зависимости от *x*, то $\lambda_i = const$. Задача решается проще.

Мы рассмотрели случай конечных связей, зависящих только от *x* и *y*. Такие связи $\varphi_i(x,\bar{y}) = 0$ называются неголономными. Возможны диф. связи:

$$\varphi_i(x,\bar{y},\bar{y}') = 0,$$

которые называются **голономными**. Теорема 37.1 переносится и на случай голономных связей.