30 апреля 2009 г.

Теория функций комплексного переменного.

Вариант 1.

Фамилия: Ковтунова Алиса

1. Пусть $z = x + iy$. Выразить $\operatorname{Re} \sin z$ через вещественнозначные функции x и y.

2. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{e^z \, dz}{z(1-z)^3},$$

если точка 1 лежит внутри, а точка 0 вне контура C.

3. Найти порядки всех нулей функции $e^{\operatorname{tg} z}$.

4. Разложить функцию $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $0 < |a| < |b|$ в ряд Лорана в окрестности точек $z = 0$, $z = a$, $z = \infty$.

5. Определить тип особых точек функции $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$, включая точку $z = \infty$.

6. Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех изолированных особых точек (исключая точку $z = \infty$)

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}.$$

7. Вычислить интеграл

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

8. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos^2 \varphi)^2}, \quad a > 0, \ b > 0.$$

1. Re sin z – ?

$\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

$\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ $\quad$ sin $\quad x, y \in \mathbb{R}$

$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$

—

+	±	−	+	±	+	−	+

куда делось?

2. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{e^z dz}{z(1-z)^3} = \dfrac{1}{2!} f^{(2)}(1) = \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{e^z}{z}\right)^{(2)}(1) = e$

$f(z)$

потерян знак!

1 – нуль 3 порядка

$\left(\dfrac{e^z}{z}\right)' = \dfrac{e^z z - e^z}{z^2} = \dfrac{e^z(z-1)}{z^2}$

$\left(\dfrac{e^z(z-1)}{z^2}\right)' = \dfrac{(e^z(z-1)+e^z)z^2 - 2ze^z(z-1)}{z^4} =$

$= \dfrac{ze^z(z-1) + ze^z - 2e^z(z-1)}{z^3} = \dfrac{(z-2)e^z(z-1)+ze^z}{z^3}$

±

$f^{(2)}(1) = \dfrac{-1\cdot e\cdot 0 + e}{1^3} = e$

3. $e^{\operatorname{tg} z} = e^{\frac{\sin z}{\cos z}}$

$\cos z \neq 0$

$z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$

—

$\left(\dfrac{1}{\cos^2 z}\right)' = +2\dfrac{\sin z}{\cos^3 z} = 2\dfrac{\cos^4 z + 3\cos^3 z}{\cos^6 z}$

$\left(\dfrac{\sin z}{\cos^3 z}\right)' = \dfrac{\cos^4 z + 3\cos^2 z \sin^2 z}{\cos^6 z}$

4. $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $\quad 0 < |a| < |b|$ $\quad z=0,\ z=a,\ z=\infty$

1). $z=0$. $\quad \dfrac{1}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{A}{z-a} + \dfrac{B}{z-b} = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{z-b} - \dfrac{1}{z-a}\right) =$

$A = \dfrac{1}{a-b} \quad B = \dfrac{1}{b-a}$

$= \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{1-z/b}\left(\dfrac{1}{-b}\right) + \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1-z/a}\right) = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{a}\right)^n - \dfrac{1}{b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{b}\right)^n\right) =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{z}{a}\right)^n - \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{z}{b}\right)^n\right]\cdot\dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{b-a}\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\left[\dfrac{1}{a^{n+1}} - \dfrac{1}{b^{n+1}}\right]$

2). $z=a$ $\quad \dfrac{1}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{1}{(z-a)(z-a+a-b)} = \{t = z-a\} =$

$= \dfrac{1}{t(t+a-b)} = \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{1}{\left(\frac{t}{a-b}+1\right)(a-b)}\right) = \dfrac{1}{(a-b)}\dfrac{1}{t}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{t}{(a-b)}\right)^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{n-1}}{(a-b)^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-a)^{n-1}}{(a-b)^{n+1}}$

3). $z=\infty$ $\quad \dfrac{1}{(z-a)(z-b)} = \dfrac{1}{(\frac{1}{w}-a)(\frac{1}{w}-b)} =$

$z=\frac{1}{w}$

$$= \frac{w^2}{(1-aw)(1-bw)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{w}{1-bw} - \frac{w}{1-aw}\right) = \frac{w}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(bw)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(aw)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b^n-a^n)w^{n+1}}{b-a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b^n-a^n)}{z^{n+1}(b-a)}$$

+

6. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)} = \dfrac{e^z}{z^2(z-3i)(z+3i)}$

$z=0$ - нуль II порядка

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{(z-3i)(z+3i)}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z(z^2+9)-2ze^z}{(z^2+9)^2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2+9-2z)}{(z^2+9)^2} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

$z=3i$ - нуль I порядка

$$\operatorname*{res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z\to 3i}\frac{e^z}{z^2(z+3i)} = \frac{e^{3i}}{-9\cdot 6i} = +\frac{e^{3i}\cdot i}{54}$$

$z=-3i$ - нуль I порядка

$$\operatorname*{res}_{z=-3i} f(z) = \lim_{z\to -3i}\frac{e^z}{z^2(z-3i)} = \frac{e^{-3i}}{+9\cdot 6i} = -\frac{i}{e^{3i}\cdot 54}$$

+

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$, $\quad a>0,\ b>0$

$dz = e^{i\varphi}\, i\, d\varphi$, $\quad \cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}\Big|_{|z|=1}$

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\cdot i\left(a+b\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2\right)^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{dz\cdot}{z\cdot i\left(\frac{1}{4}\left(4a+b\left(z^2+\frac{1}{z^2}+2\right)\right)\right)^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{z^4\, 16\, dz}{z\cdot i\,(4az^2+bz^4+b+2bz^2)^2} =$$

$$= \oint\limits_{|z|=1} \frac{16 \cdot z^3 dz}{i(bz^4 + z^2(4a+2b) + b)^2} \; = $$

верно!

$$D_{1/2} = (2a+b)^2 - b^2 = 4a^2 + 4ab$$

$z^2 = t$

$dt = 2z\,dz$

$$t_1 = \frac{-2a - b - \sqrt{4a^2+4ab}}{b} = \frac{-2\sqrt{a}\sqrt{a+b} - 2a - b}{b}$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{a^2+ab} - 2a - b}{b}$$

← верно.

$$= \oint\limits_{|t|=1} \frac{8t\,dt}{i(b(t-t_1)(t-t_2))^2} = \frac{8}{ib^2} \oint\limits_{|t|=1} \frac{t\,dt}{(t-t_1)^2(t-t_2)^2} \; \boxed{=}$$

в t_2:

$$\operatorname*{res}_{t=t_2} f(t) = \frac{1}{1!} \lim_{t \to t_2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{(t-t_1)^2} \right) \right) = \lim_{t \to t_2} \frac{(t-t_1)^2 - 2(t-t_1)t}{(t-t_1)^4} =$$

II порядка нуль

$$= \lim_{t \to t_2} \frac{(t-t_1) - 2t}{(t-t_1)^3} = \frac{b^2}{16(a^2+ab)} - \frac{2(+2\sqrt{a^2+ab} - 2a - b)}{b \cdot \frac{16(a^2+ab)}{b^3} \cdot (+4\sqrt{a^2+ab})} =$$

$$t_1 - t_2 = \frac{-4\sqrt{a^2+ab}}{b}$$

$$= \frac{b^2}{16(a^2+ab)} - \frac{(2\sqrt{a^2+ab} - 2a - b)b^2}{32(a^2+ab)^{3/2}}$$

$$|t_1| = \left| \frac{-2\sqrt{a^2+b^2} - 2a - b}{b} \right| > \left| -2 - 1 - \frac{2a}{b} \right| > 3, \text{ не входит в обл. } |t|=1$$

$$\boxed{=} \; \frac{8}{ib^2} \sum_i \operatorname*{res}_{z=z_i} f(z) = \frac{8}{ib^2} \left(\frac{b^2}{16(a^2+ab)} - \frac{(2\sqrt{a^2+ab} - 2a - b)b^2}{32(a^2+ab)^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i(a^2+ab)} - \frac{2\sqrt{a^2+ab} - 2a - b}{4i(a^2+ab)^{3/2}} = \frac{1}{2i(a^2+ab)} - \frac{2}{4i(a^2+ab)} +$$

$$+ \frac{2a+b}{4i(a^2+ab)^{3/2}} = \frac{2a+b}{4i(a^2+ab)^{3/2}}$$

почти верно.

+

3. $e^{tg\, z} = e^{\frac{\sin z}{\cos z}}$

$z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

порядок нуля:

$(\cos z)' = (-\sin z)\Big|_{\frac{\pi}{2}+\pi k} \neq 0$, то

$z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — нули первого порядка

Нет.

7. $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x\, dx}{x^2 - 2x + 10}$

—

—

5. $ctg\, z - \frac{1}{z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{z\cos z - \sin z}{z \sin z}$

Особ. точки $z = \infty$, $z = 0$, $z = \pi k$, $k \in Z \setminus \{0\}$

почему 1-го?

полюс ~~нр~~ 1-го порядка (т.к. знаменат. обращ. в 0, а числит. нет. при подстановке

существенно особая, т.к. и числит. и знаменатель обращаются в 0 при подстановке

Нет.

~~устранимая~~,

неизолированная особая точка

верно.

$\nexists \lim_{z\to\infty} (ctg z - \frac{1}{z}) =$

$= \lim_{z\to\infty} (ctg\, z)$

$\pm$

1. $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

$\sin iy = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$

$\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} =$

$\Rightarrow \cos iy = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2}$

$\sin z = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x =$

$= \sin x \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} + \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \cos x$

$\mathrm{Re} \sin z = \sin x \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \sin x \, \mathrm{ch}\, y$

+