

30 апреля 2009 г.

Теория функций комплексного переменного.

Вариант 1.

Фамилия:

Кевтунов Аиша

1. Пусть $z = x + iy$. Выразить $\operatorname{Re} \sin z$ через вещественнозначные функции x и y .

2. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3},$$

если точка 1 лежит внутри, а точка 0 вне контура C .

3. Найти порядки всех нулей функции $e^{1g z}$.

4. Разложить функцию $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $0 < |a| < |b|$ в ряд Лорана в окрестности точек $z = 0$, $z = a$, $z = \infty$.

5. Определить тип особых точек функции $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$, включая точку $z = \infty$.

6. Найти вычеты функции $f(z)$ относительно всех изолированных особых точек (исключая точку $z = \infty$)

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}.$$

7. Вычислить интеграл

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

8. Вычислить интеграл

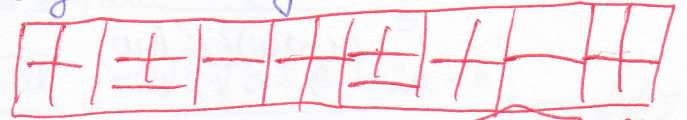
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos^2 \varphi)^2}, \quad a > 0, b > 0.$$

1. $\operatorname{Re} \sin z = ?$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \sin x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \\ \cos \varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \end{aligned}$$

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$



2. $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3} = \frac{1}{2!} f^{(2)}(1) = \frac{1}{2!} \left(\frac{e^z}{z} \right)^{(2)}(1) = e$

1-кратно 3 порядка

$$\left(\frac{e^z}{z} \right)' = \frac{e^z z - e^z}{z^2} = \frac{e^z(z-1)}{z^2}$$

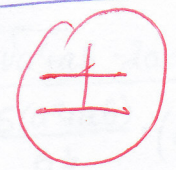
$$\left(\frac{e^z(z-1)}{z^2} \right)' = \frac{(e^z(z-1) + e^z)z^2 - 2ze^z(z-1)}{z^4} =$$

$$= \frac{ze^z(z-1) + ze^z - 2e^z(z-1)}{z^3} = \frac{(z-2)e^z(z-1) + ze^z}{z^3}$$

$$f^{(2)}(1) = \frac{-1 \cdot e \cdot 0 + e}{1^3} = e$$

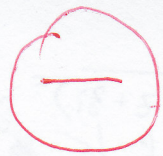
выда нуль!

номерок знак!



3. $e^{\operatorname{tg} z} = e^{\frac{\sin z}{\cos z}}$

$\cos z \neq 0$
 $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$



$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin z}{\cos^3 z} \right)' &= +2 \frac{\sin z}{\cos^3 z} = 2 \frac{\cos^4 z + 3\cos^2 z \sin^2 z}{\cos^6 z} \\ \left(\frac{\sin z}{\cos^3 z} \right)' &= \frac{\cos^4 z + 3\cos^2 z \sin^2 z}{\cos^6 z} \end{aligned}$$

4. $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$

$0 < |a| < |b| \quad z \neq 0, z \neq a, z \neq \infty$

1). $z \neq 0. \quad \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) =$

$A = \frac{1}{a-b} \quad B = \frac{1}{b-a}$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{1 - z/b} \left(\frac{1}{-b} \right) + \frac{1}{a} \frac{1}{1 - z/a} \right) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^n - \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b} \right)^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{z}{a} \right)^n - \frac{1}{b} \left(\frac{z}{b} \right)^n \right] \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}} \right]$$

2). $z = a \quad \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{(z-a)(z-a+a-b)} = \frac{1}{t(z-a)} =$

$$= \frac{1}{t(t+a-b)} = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\left(\frac{t}{a-b} + 1 \right) (a-b)} \right) = \frac{1}{(a-b)} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{a-b} \right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n-1}}{(a-b)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-a)^{n-1}}{(a-b)^{n+1}}$$

3). $z = \infty$

$z = \frac{1}{w}$

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{w}-a\right)\left(\frac{1}{w}-b\right)} =$$

$$= \frac{w^2}{(1-aw)(1-bw)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{w}{1-bw} - \frac{w}{1-aw} \right) = \frac{w}{b-a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (bw)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (aw)^n \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^n - a^n)w^{n+1}}{b-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b^n - a^n)}{z^{n+1}(b-a)}$$



6. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} = \frac{e^z}{z^2(z-3i)(z+3i)}$

$z=0$ - нуль II порядка

$$\text{res } f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{(z-3i)(z+3i)} \right) =$$

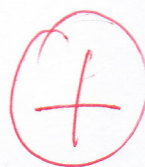
$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{e^z(z^2+9) - 2ze^z}{(z^2+9)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z^2+9-2z)}{(z^2+9)^2} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

$z=3i$ - нуль I порядка

$$\text{res } f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^z}{z^2(z+3i)} = \frac{e^{3i}}{-9 \cdot 6i} = + \frac{e^{3i} \cdot i}{54}$$

$z=-3i$ - нуль I порядка

$$\text{res } f(z) = \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{e^z}{z^2(z-3i)} = \frac{e^{-3i}}{+9 \cdot 6i} = - \frac{i}{e^{3i} \cdot 54}$$



8. $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$, $a > 0, b > 0$

$$dz = e^{i\varphi} i d\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad |z|=1$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \cdot i \left(a + b \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right)^2 \right)^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \cdot i \left(\frac{1}{4} (4a + b(z^2 + \frac{1}{z^2} + 2)) \right)^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{z^4 16 dz}{z \cdot i (4az^2 + bz^4 + b + 2bz^2)^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{16 \cdot z^3 dz}{i(bz^4 + z^2(4a+2b) + b)^2} \quad (=)$$

$$D_{1/2} = (2a+b)^2 - b^2 = 4a^2 + 4ab$$

$$z^2 = t$$

$$dt = 2z dz$$

$$t_1 = \frac{-2a-b - \sqrt{4a^2+4ab}}{b} = \frac{-2\sqrt{a}\sqrt{a+b} - 2a-b}{b} \quad \leftarrow \text{внутри!}$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{a^2+ab} - 2a-b}{b}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{8t dt}{i(b(t-t_1)(t-t_2))^2} = \frac{8}{ib^2} \oint_{|t|=1} \frac{t dt}{(t-t_1)^2 (t-t_2)^2} \quad (=)$$

$$b \cdot t_2: \text{res } f\left(\frac{t}{b}\right) = \frac{1}{1!} \lim_{t \rightarrow t_2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{(t-t_1)^2} \right) \right) = \lim_{t \rightarrow t_2} \frac{(t-t_1)^2 - 2(t-t_1)t}{(t-t_1)^4} =$$

II порядок нуль

$$= \lim_{t \rightarrow t_2} \frac{(t-t_1) - 2t}{(t-t_1)^3} = \frac{b^2}{16(a^2+ab)} - \frac{2(2\sqrt{a^2+ab} - 2a-b)}{b \cdot \frac{16(a^2+ab)}{b^3} \cdot (4\sqrt{a^2+ab})} =$$

$$t_1 - t_2 = \frac{-2\sqrt{a^2+ab}}{b}$$

$$= \frac{b^2}{16(a^2+ab)} - \frac{(2\sqrt{a^2+ab} - 2a-b)b^2}{32(a^2+ab)^{3/2}}$$

$$|t_1| = \left| \frac{-2\sqrt{a^2+ab} - 2a-b}{b} \right| > \left| -2 - 1 - \frac{2a}{b} \right| > 3, \text{ не входит в } \text{одн. } |t|=1$$

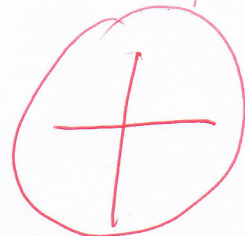
~~III~~

$$\boxed{=} \frac{8}{ib^2} \sum_{i=1} \text{res } f(z) = \frac{8}{ib^2} \left(\frac{b^2}{16(a^2+ab)} - \frac{(2\sqrt{a^2+ab} - 2a-b)b^2}{32(a^2+ab)^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i(a^2+ab)} - \frac{2\sqrt{a^2+ab} - 2a-b}{4i(a^2+ab)^{3/2}} = \frac{1}{2i(a^2+ab)} - \frac{2}{4i(a^2+ab)} +$$

$$+ \frac{2a+b}{4i(a^2+ab)^{3/2}} = \frac{2a+b}{4i(a^2+ab)^{3/2}}$$

норму берно.



$$3. e^{+g^z} = e^{\frac{\sin z}{\cos z}}$$

$$z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

корректно ищем:

$$(\cos z)' = (-\sin z) \Big|_{\frac{\pi}{2} + \pi k} \neq 0, \text{ то}$$

$$z = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

ищем первую корректно

$$7. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$$



Мин.



$$5. \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{z \cos z - \sin z}{z \sin z}$$

Особ. точки $z = \infty, z = 0, z = \pi k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

почему $1-20$?
 потому что $1-20$ порядка (т.к. знаменат. обращ. в 0, а числит. нет. при подстановке)

существенно особая,

Мин.

т.к. и числит. и знаменател. обращаются в 0 при подстановке

~~устранимая,~~

неизолированная особая точка

верно.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} (\operatorname{ctg} z)$$



$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$$

$$\sin z = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x =$$

$$= \sin x \frac{e^{-y} + e^y}{2} + \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \cos x$$

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{sh} y \sin x.$$

