Часть 1. Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы, зависящие от параметров

1. Случай постоянных пределов интегрирования

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Теорема 1 (**о непрерывности**).
Пусть функция $f(x,y) \in C([a,b]\times[c,d])$.

Тогда $I(y) \in C[c,d]$.

Док-во: $f(x,y)$ равномерно непрерывна на множестве $[a,b]\times[c,d] \Rightarrow$
$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0 : \forall\,y_1,y_2\in[c,d] : |y_1-y_2|<\delta, \forall\,x\in[a,b] \quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$
$|I(y_1)-I(y_2)| = |\int\limits_a^b f(x,y_1)dx - \int\limits_a^b f(x,y_2)dx| = |\int\limits_a^b (f(x,y_1)-f(x,y_2))dx| \le$
$\int\limits_a^b |(f(x,y_1)-f(x,y_2))|dx < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon \Rightarrow$
$|I(y_1)-I(y_2)|<\varepsilon$ при $|y_1-y_2|<\delta \Rightarrow$
$I(y)$ равномерно непрерывна на $[c,d] \Rightarrow I(y)\in C[c,d]$, ч.т.д. □

Теорема 2 (**интегрируемость**).
Пусть функция $f(x,y) \in C([a,b]\times[c,d])$.
Тогда $\forall t\in[c,d] \int\limits_c^t I(y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^t f(x,y)dy$

Док-во: Зафиксируем $t\in[c,d]$, тогда $f(x,y)\in C([a,b]\times[c,t]) \Rightarrow \exists \iint\limits_{[a,b]\times[c,t]} f(x,y)dxdy$,

$\forall\,x\in[a,b] \quad \exists\int\limits_c^t f(x,y)dy, \qquad \forall\,y\in[c,t] \quad \exists\int\limits_a^b f(x,y)dx \Rightarrow$
$\int\limits_c^t I(y)dy = \int\limits_c^t dy\int\limits_a^b f(x,y)dx = \iint\limits_{[a,b]\times[c,t]} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^t f(x,y)dy$ □

Теорема 3 (**о дифференцируемости**).
Пусть функции $f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \in C([a,b]\times[c,d])$.
Тогда $I(y)$ *дифференцируема на* $[c,d]$, *причем* $I'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$

Док-во: введем вспомогательную функцию $K(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$.
По теореме 1 $K(y)\in C[c,d]$ как и.з.п. от непрерывной функции
Рассмотрим $\forall t\in[c,d]$ и проинтегрируем $K(y)$ от c до t:

$\int\limits_c^t K(y)dy = \{$по теореме 2$\} = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^t \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = \{$формула Ньютона-Лейбница$\} =$
$\int\limits_a^b (f(x,t) - f(x,c))dx = I(t) - I(c)$ - интеграл от непрерывной функции с переменным верхним пределом,
т.к. $\frac{d}{dt}(\int\limits_c^t K(y)dy) = K(t)$,то $\exists \frac{d}{dt}(I(t) - I(c)) = K(t)$,
т.е. $I'(t) = K(t) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx$ □

2. Случай переменных пределов интегрирования

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

Теорема 1$'$ (о непрерывности).
Пусть функция $f(x,y) \in C([a,b] \times [c,d])$,
выполнены условия на границы:
$\alpha(y), \beta(y) \in C[c,d], \quad a \le \alpha(y) \le \beta(y) \le b$ [1].

$\Rightarrow$ *Тогда $I(y) \in C[c,d]$.*

Док-во: $I(y)$ определена на $[c,d]$.
Фиксируем $\forall\, y_0 \in [c,d]$ и в окрестности [2] y_0 представим $I(y)$ в виде:

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx = I_1(y) + I_2(y) - I_3(y)$$

По теореме 1 $\lim\limits_{y \to y_0} I_1(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx = I_1(y_0) = I(y_0)$
Покажем, что $\lim\limits_{y \to y_0} I_2(y) = 0$. Аналогично и для $\lim\limits_{y \to y_0} I_3(y) = 0$
По теореме о среднем значении:
$I_2(y) = f(\xi_y, y)(\beta(y) - \beta(y_0))$, где $\forall\, y \in [c,d] \quad \xi_y$ - между $\beta(y)$ и $\beta(y_0)$
При $y \to y_0$
$f(\xi_y, y) \to f(\beta(y_0), y_0), \quad \beta(y) - \beta(y_0) \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{y \to y_0} I_2(y) = 0$
Окончательно: $\lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0) + 0 - 0 = I(y_0)$ □

Теорема 2$'$ (дифференцируемость).
Пусть функция $f(x,y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \in C([a,b] \times [c,d])$
и выполнены условия на границы:
$\alpha(y), \beta(y) \in C[c,d], \qquad a \le \alpha(y) \le \beta(y) \le b \qquad \forall\, y \in [c,d]$
$\alpha(y), \beta(y)$ *дифференцируемы на* $[c,d]$.

Тогда $I'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y)$

[1] Вопрос: где мы в доказательстве воспользовались тем, что $\alpha(y) \le \beta(y)$?
[2] Вопрос: что такое окрестность точки с? Вспомните определения непрерывности и дифференцируемости на отрезке.

Док-во: Фиксируем $\forall y_0 \quad \in [c, d]$:

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx = I_1(y) + I_2(y) - I_3(y)$$

По теореме 3 $I_1'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial t}\, dx$

Покажем, что $I_2'(y_0) = \beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0)$. (Аналогично $I_3'(y_0) = \alpha'(y_0) f(\alpha(y_0), y_0)$

$\frac{I_2(y) - I_2(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = \{$теорема о среднем значении$\} =$

$= \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} f(\xi_y, y) \to \beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0)$, при $y \to y_0$ ч.т.д. $\square$

Примеры:

1. $(\int\limits_{y^2}^{y^3} e^{-x^2\cos(y)} dx)' = \int\limits_{y^2}^{y^3} e^{-x^2\cos(y)} (x^2 \sin y) dx + 3y^2 e^{-y^6 \cos y} - 2y e^{-y^4 \cos y} = \dots$

2. $0 < a < b$ Вычислим интеграл:

   $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y dx = \int\limits_a^b dy \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1 = \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} =$
   $= \ln(b+1) - \ln(a+1)$

Несобственные интегралы, зависящие от параметров

$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx \quad (*)$ - первого рода

$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ имеет особенность в одной из точек a или b - второго рода

Пока что мы будем рассматривать только несобственные и.з.п. первого рода.

Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Определение. $(*)$ *сходится равномерно на* Y,

если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R \geq A(\varepsilon), \forall\, y \in Y \quad |\int\limits_R^\infty f(x,y)dx| < \varepsilon$

Замечание: если $(*)$ сх-ся равномерно на $Y \Rightarrow (*)$ сходится $\forall\, y \in Y$

В дальнейшем мы будем подразумевать сходимость интеграла$\forall\, y \in Y$

При этом условии мы можем пользоваться таким представлением:

$I(y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{a+n-1}^{a+n} f(x,y)dx$

Пример: $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$

Исследуем на равномерную сходимость: 1) $\alpha \geq \alpha_0 > 1 \qquad$ 2) $\alpha > 1$

$\int\limits_A^\infty x^{-\alpha}dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_A^\infty = \frac{1}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}$ возьмём $A \geq 1$

1. $\alpha - 1 \geq \alpha_0 - 1$

   $A^{\alpha-1} \geq A^{\alpha_0-1} \Rightarrow \int\limits_A^\infty x^{-\alpha}dx \leq \frac{1}{(\alpha_0-1)A^{\alpha_0-1}} \xrightarrow{A\to\infty} 0 \Rightarrow$

   $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) : \forall R > A \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \varepsilon \quad \forall \alpha \geq \alpha_0$

2. $\varepsilon = 1, \forall R > 1 \quad \int\limits_R^\infty x^{-\alpha}dx = \frac{1}{(\alpha-1)R^{\alpha-1}} \xrightarrow{\alpha\to 1+0} \infty \Rightarrow$

   $\exists \alpha > 1 : \int\limits_A^\infty x^{-\alpha}dx \geq 1$

Критерий Коши равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра:

$(*)$ *сх-ся равномерно на* $Y \Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R_1, R_2 \geq A(\varepsilon), \forall\, y \in Y \quad |\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)dx| < \varepsilon$

(подразумевается, что $\forall\, y \in Y \quad f(x,y)$ *интегрируема на любом отрезке* $[R_1, R_2] \subset [a, \infty)$*)*

Док-во: $\boxed{\Rightarrow}$ $(*)$ сходится равномерно $\Rightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R \geq A(\varepsilon), \forall\, y \in Y \quad |\int\limits_R^\infty f(x,y)dx| < \varepsilon/2 \Rightarrow$

$\forall R_1, R_2 \geq A(\varepsilon)$

$|\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)dx| = |\int\limits_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx - \int\limits_{R_2}^{\infty} f(x,y)dx| \leq |\int\limits_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx| + |\int\limits_{R_2}^{\infty} f(x,y)dx| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

учитывая интегрируемость $(*)$ на любом отрезке $[R_1, R_2] \quad R_1, R_2 > a$, выполнены условия Критерия Коши

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R_1, R_2 \geq A(\varepsilon), \forall\, y \in Y \quad |\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)dx| < \varepsilon/2 \quad (1)$

Фиксируем произвольное $y_0 \in Y \Rightarrow$

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R_1, R_2 \geq A(\varepsilon) \quad |\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y_0)dx| < \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow$

$\int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx$ сходится в силу Критерия Коши для несобственного интеграла $\Rightarrow$

$\forall\, y_0 \in Y \quad \forall R_1 \geq a \quad \exists \int\limits_{R_1}^\infty f(x,y_0)dx \Rightarrow$ В (1) можем устремить $R_2 \to \infty$ (и предел будет существовать) : $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R_1 \geq A(\varepsilon), \forall\, y \in Y \quad |\int\limits_{R_1}^\infty f(x,y)dx| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow$

$(*)$ сходится равномерно по определению. $\square$

Признаки равномерной сходимости

Признак Вейерштрасса:

Пусть f(x,y) инт-ма по x в собственном смысле на $[a,R]$, $\forall R > a$, $\forall\, y \in Y$

Если $\forall\, x > a\ \forall\, y \in Y \quad |f(x,y)| \leq \phi(x)$ *и* $\int\limits_a^\infty \phi(x)dx$ *сходится* $\Rightarrow$

$(*)$ *сходится равномерно на* Y

Док-во: По Критерию Коши сходимости $\int\limits_a^\infty \phi(x)dx$:

$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a\ \forall R_1, R_2 \geq A(\varepsilon)\ |\int\limits_{R_1}^{R_2} \phi(x)dx| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall\, y \in Y\ |\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)dx| \leq \int\limits_{R_1}^{R_2} |f(x,y)|dx \leq \int\limits_{R_1}^{R_2} \phi(x)dx < \varepsilon \Rightarrow$

$(*)$ сходится равномерно на Y в силу Критерия Коши $\square$

Замечание: Признак Вейерштрасса применим лишь к абсолютно сходящимся интегралам.

Признак Дини:

Пусть f(x,y) непрерывна и неотрицательна на $[a,+\infty) \times [c,d]$ *и*

$\forall\, y \in [c,d] \quad \exists \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = I(y)$, *причем* $I(y) \in C[c,d]$.

Тогда $(*)$ *сходится равномерно на отрезке [c,d].*

Док-во: Рассмотрим последовательность из $I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$. Тогда:

1. $I_n(y) \in C[c,d]$ по теореме 1
2. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(y) = I(y), y \in [c,d]$, причем $I \in C[c,d]$
3. $I_n(y_0)$ неубывающая на [c,d] для $\forall\, y_0 \in [c,d]$
4. [c,d] - компакт $\Rightarrow$ выполнены все 4 условия признака Дини для функциональной последовательности

$I_n(y) \Rightarrow I_n(y) \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} I(y)$

Т.е. $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall\, y \in [c,d] \quad I(y) - I_n(y) = \int\limits_{a+n}^\infty f(x,y)dx < \varepsilon$

Т.к. $f(x,y) \geq 0$, то $\forall R \geq a + N(\varepsilon) \quad |\int\limits_R^\infty f(x,y)dx| \leq \int\limits_{a+N(\varepsilon)}^\infty f(x,y)dx < \varepsilon \Rightarrow$

$(*)$ сходится равномерно на [c,d] по определению. $\square$

$$(**) \quad \int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$$

Признак Дирихле-Абеля:

Пусть: (I) $\begin{cases} \text{f(x,y) инт-ма по x в собственном смысле на } [a,R] \quad \forall R \geq a, \forall y \in Y \\ g(x,y) \text{монотонна по } x \quad \forall y \in Y \end{cases}$

Тогда для равномерной сходимости (**) на Y достаточно выполнения одной из 2 пар условий:

1. a) $\{\int\limits_a^R f(x,y)dx\}$ равномерно ограничена,
   т.е. $\exists M > 0 : \forall y \in Y, \forall R \geq a \quad |\int\limits_a^R f(x,y)dx| \leq M$

   b) $g(x,y)$ равномерно сходится к 0 на Y при $x \to \infty$
   т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall x \geq A(\varepsilon) \quad \forall y \in Y \quad |g(x,y)| < \varepsilon$

2. a) $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ равномерно сходится на Y

   b) $g(x,y)$ равномерно ограничена на $[a,+\infty) \times Y$,
   т.е. $\exists M > 0 : \forall x \geq a, \forall y \in Y \quad |g(x,y)| \leq M$

Замечание: Если выполнены основные условия признака (I),
можем использовать вторую теорему о среднем (из 2го семестра):
$\forall y \in Y \qquad \forall R_1, R_2 \geq a$
$\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)g(x,y)dx = g(R_1,y)\int\limits_{R_1}^{\xi y} f(x,y)dx + g(R_2,y)\int\limits_{\xi y}^{R_2} f(x,y)dx$
ξ_y-между R_1 и R_2, зависит от y, R_1, R_2

Док-во:

1. Из (a) $\Rightarrow \forall R_1, R_2, \xi_y \geq a, \quad |\int\limits_{R_1}^{\xi y} f(x,y)dx| \leq 2M, |\int\limits_{\xi y}^{R_2} f(x,y)dx| \leq 2M$
   Из (b) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists A(\varepsilon) : \forall R_1, R_2 \geq A(\varepsilon), \forall y \in Y$
   $|g(R_1,y)| < \frac{\varepsilon}{4M}, |g(R_2,y)| < \frac{\varepsilon}{4M}$
   $\Rightarrow$Из т. о среднем: $|\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)g(x,y)dx| \leq \frac{\varepsilon}{4M}2M + \frac{\varepsilon}{4M}2M = \varepsilon \Rightarrow$
   (**) сходится равномерно по Критерию Коши

2. $(b) \Rightarrow \quad \forall R_1, R_2 \geq a \quad |g(R_1,y)| < M, |g(R_2,y)| < M$
   $(a) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R', R'' \geq A(\varepsilon), \forall y \in Y \quad |\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2M}$
   В частности, $|\int\limits_{R_1}^{\xi y} f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2M}, |\int\limits_{\xi y}^{R_2} f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall R_1, R_2, \xi y \geq A(\varepsilon)$
   $\Rightarrow$Из т. о среднем $|\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x,y)g(x,y)dx| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \Rightarrow$
   (**) сходится равномерно по Критерию Коши

$\square$

Примеры:

1. $\int\limits_1^\infty \frac{y^2\cos(xy)}{x+y^2}dx, y \in R$

   $f(x,y) = y\cos(xy), |\int\limits_1^\infty y\cos(xy)dx| \leq 2,$

   $g(x,y) = \frac{y}{x+y^2}$ монотонна по x $\forall\, y \in Y$

   $x + y^2 \geq 2\sqrt{x}|y| \Rightarrow |g(x,y)| \leq |\frac{y}{2\sqrt{x}|y|}| = |\frac{1}{2\sqrt{x}}|$

   $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} : \forall\, y \in Y, \forall\, x \geq A(\varepsilon) \Rightarrow |g(x,y)| < \dfrac{1}{2\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow$

   Интеграл сходится равномерно, т.к. выполнено 1) признака Дирихле-Абеля

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}dx, y \geq 0$

   $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ сходится и не зависит от $y \Rightarrow$ сходится равномерно,

   $|e^{-xy}| \leq 1, e^{-xy}$ монотонна по x $\forall\, y \geq 0$

   Интеграл сходится равномерно , т.к. выполнено 2) признака Дирихле-Абеля

Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметров

Теорема 4 (непрерывность).
Пусть $f(x,y) \in C[a,\infty) \times [c,d]$
$(*)$ *сходится равномерно на [c,d].*

Тогда $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *непрерывна на [c,d].*

Док-во: Пусть $I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$.

По теореме 1 $I_n(y) \in C[c,d]$. Покажем, что $I_n \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} I$
Из равномерной сходимости $(*)$:

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall R > A(\varepsilon), \forall\, y \in [c,d] \quad |\int\limits_R^\infty f(x,y)dx| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall n \in N : a + n > A(\varepsilon) \quad |I(y) - I_n(y)| = |\int\limits_{a+n}^\infty f(x,y)dx| < \varepsilon$

Т.к $I_n(y) \in C[c,d]$ при $n \in N, \quad I_n \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} I \Rightarrow I(y)$ также непрерывна на отрезке $[c,d]$ как предельная функция последовательности непрерывных функций, ч.т.д. $\square$

Замечание: Теорема справедлива при любом множестве Y(не только для $Y = [c,d]$), не стоит забывать, что на непрерывность $I(y)$ можно исследовать только в предельной точке множества Y.

Теорема 5 (дифференцируемость).
Пусть $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C[a,+\infty) \times [c,d]$,
$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = I(y)$ *сходится* $\forall\, y \in [c,d]$,
$\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ *сходится равномерно на [c,d].*

Тогда $I'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \quad \forall\, y \in [c,d]$

Док-во: Рассмотрим $I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$

По теореме 3 $I_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

По теореме 4 (см. ее док-во) $I_n'(y)$ равномерно сходится на [c,d].

$I_n(y)$ сходится на [c,d] к I(y), ряд производных сходится равномерно $\Rightarrow$

По теореме о почленном дифференцировании функциональных последовательностей:

$I'(y) = \lim\limits_{n\to\infty} I_n'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, y \in [c,d]$ $\square$

Теорема 6 (собственное интегрирование).
Пусть $f \in C[a,+\infty) \times [c,d]$,
$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на [c,d] к I(y).*
Тогда $\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ *(при этом утверждается, что интеграл справа тоже сходится)*

Док-во: Достаточно показать, что $\lim\limits_{\rho\to\infty} \int\limits_a^\rho dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d I(y)dy \quad \text{(I)}$

$\int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^\rho dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\rho f(x,y)dx = \int\limits_c^d dy \int\limits_\rho^\infty f(x,y)dx$
Во втором интеграле поменяли порядок интегрирования в силу теоремы 2
Из равномерной сходимости f(x,y):

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) \geq a \quad \forall \rho \geq A(\varepsilon), \forall\, y \in [c,d] \quad |\int\limits_\rho^\infty f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{d-c}$

$|\int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^\rho dx \int\limits_c^d f(x,y)dy| \leq \int\limits_c^d dy |\int\limits_\rho^\infty f(x,y)dx| < \int\limits_c^d \frac{\varepsilon}{d-c} dy = \varepsilon,$

что означает существование предела и выполнения равенства (I) $\square$

Следствие: Можем изменить условия теоремы, чтобы равномерная сходимость следовала из признака Дини:

Пусть f(x,y) непрерывна и неотрицательна на $[a,\infty) \times [c,d]$,

$\forall\, y \in [c,d] \quad \exists I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, причем $I(y) \in C[c,d]$.

Тогда $\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$

Теорема 7 (несобственное интегрирование).
Пусть f(x,y) непрерывна и неотрицательна на $[a,\infty)\times[c,\infty)$,
$\forall\, x\geq a \quad \exists\int\limits_c^\infty f(x,y)dy=K(x), \qquad \forall\, y\geq c \quad \exists\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx=I(y),$
причем $K\in C[a,+\infty), I\in C[c,\infty)$.
Тогда если сходится один из интегралов $\int\limits_a^\infty K(x)dx, \int\limits_c^\infty I(y)dx$, *то сходится и другой,*
и они равны: $\boxed{\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy=\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx}$

Док-во: Пусть $\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ сходится.

Покажем, что $\lim\limits_{p\to+\infty}\int\limits_c^p dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ (определен $\forall p\geq c$ как интеграл от непрерывной функции)

По следствию теоремы 6: $\int\limits_c^p dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^p f(x,y)dy \quad \forall p\geq a$

Таким образом :
$|\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy-\int\limits_c^p dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx|=|\int\limits_a^\infty dx(\int\limits_c^\infty-\int\limits_c^p)|=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_p^\infty f(x,y)dy \boxed{=}$

Т.к. $\int\limits_a^\infty dx(\int\limits_c^\infty f(x,y)dy)$ сходится $\Rightarrow$

$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists R_1(\varepsilon)\geq a: \int\limits_{R_1}^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy<\varepsilon/2$

$\Rightarrow\int\limits_{R_1}^\infty dx\int\limits_p^\infty f(x,y)dy<\varepsilon/2 \quad \forall p\geq c$, т.к. $f(x,y)\geq 0$

$\boxed{=}\int\limits_a^{R_1} dx\int\limits_p^\infty f(x,y)dy+\int\limits_{R_1}^\infty dx\int\limits_p^\infty f(x,y)dy<\int\limits_a^{R_1} dx\int\limits_p^\infty f(x,y)dy+\varepsilon/2\boxed{<}$

Т.к. f(x,y) непрерывна и неотрицательна на $[a,R_1]\times[c,\infty)$,
$K(x)=\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ непрерывна на $[a,R_1]\Rightarrow$

по признаку Дини $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ сходится равномерно на $[a,R_1]\Rightarrow$

$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists p_1(\varepsilon):\forall\rho\geq p_1(\varepsilon),\forall\, y\in[a,R_1] \quad \int\limits_\rho^\infty f(x,y)dy<\frac{\varepsilon}{2(R_1-a)}\Rightarrow$

$\int\limits_a^{R_1} dx\int\limits_p^\infty f(x,y)dy<\varepsilon/2\Rightarrow$

$\boxed{<}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\Rightarrow\forall\rho\geq p_1(\varepsilon)\Rightarrow\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy-\int\limits_c^p dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx<\varepsilon$, ч.т.д. $\square$

Несобственные интегралы 2го рода, зависящие от параметров

$(\hat{*})\quad \int\limits_a^b f(x,y)dx, \forall\, y \in Y \quad f(x,y)$ интегрируема в собств. смысле на $\forall\, [a,c]$, где $a<c<b$ и функция f(x,y) имеет особенность при x=b.

Определение. $(\hat{*})\quad \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на Y, если*

$\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists b_1(\varepsilon) \in [a,b) :\ \forall \rho \in [b_1(\varepsilon), b], \forall\, y \in Y \quad |\int\limits_\rho^b f(x,y)dx| < \varepsilon$

Критерий Коши. $(\hat{*})$ *сходится равномерно на* $Y \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists b_1(\varepsilon) \in [a,b) :\ \forall \rho_1,\rho_2 \in [b_1(\varepsilon), b], \forall\, y \in Y \quad |\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f(x,y)dx| < \varepsilon$

Док-во: такое же, как и для интегралов 1го рода. □

Признаки Дини и Вейерштрасса аналогичны случаю интегралов 1го рода.

Признак Вейерштрасса:

Пусть f(x,y) интегрируема в собственном смысле на $\forall\, [a,c]$, *где* $a<c<b$,
$\exists \phi(x) : |f(x,y)| \le \phi(x) \quad \forall\, y \in Y, \forall\, x \in [a,b]$,
$\phi(x)$ *интегрируема в собственном смысле на* $[a,c], a<c<b$,
$\int\limits_a^b \phi(x)dx$ *сходится. Тогда* $(\hat{*})$ *сходится равномерно.*

Теоремы о непрерывности, дифференцируемости, собственном интегрировании остаются в силе. При исследовании свойств $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ полезна замена переменной: $t = \frac{b-a}{b-x}$, сводящая интеграл к $I(y) = \int\limits_1^\infty f(b - \frac{b-a}{t}, y)\frac{b-a}{t^2}dt$ - интегралу I рода.

Вычисление интеграла Дирихле

$$\boxed{I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx}$$

Введем вспомогательный интеграл $I(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}dx \quad (*), \quad y \ge 0$

Будем считать, что при x=0 подынтегральная функция равна 1, тогда она непрерывна при $x \ge 0, y \ge 0$, а интеграл от этого не изменился.

1. Пусть $f(x,y) = \frac{\sin x}{x}$, тогда $\int\limits_0^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на $y \ge 0$

2. $g(x,y) = e^{-xy}$ - монотонна по x, $|g(x,y)| \le 1$ - равномерно ограничена

$\Rightarrow (*)$ сх-ся равномерно на $y \ge 0$ по II паре условий Дирихле-Абеля

1. $\frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}$ - непрерывна на $x \ge 0$, $y \ge 0$ (при x=0 переопределили)
   $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\sin x}{x}\, e^{-xy}) = -\sin x\, e^{-xy} \in C(R^2)$

2. Сам интеграл, как мы уже доказали, сходится

3. При $y \geq y_0 > 0$ интеграл от производной :
   $\int\limits_0^\infty -\sin x\, e^{-xy} dx$ сх-ся равномерно по признаку Вейерштрасса:
   $|-\sin x\, e^{-xy}| \leq e^{-xy_0}$, интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-xy_0} dx$ - сходится

$\Rightarrow$ Выполнены условия теоремы 5 о дифференцируемости
$\Rightarrow I'(y) = -\int\limits_0^\infty \sin x\, e^{-xy} dx \quad \forall\, y \in [y_0, y_1], \quad 0 < y_0 < y_1 < \infty$

- $\int\limits_0^\infty \sin x\, e^{-xy} dx = -\int\limits_0^\infty e^{-xy} d(\cos x) = -\cos x e^{-xy}|_0^\infty - y\int\limits_0^\infty \cos x e^{-xy} dx =$
  $= 1 - y\int\limits_0^\infty e^{-xy} d(\sin x) = 1 - \left[y e^{-xy} \sin x|_0^{+\infty} + y^2 \int\limits_0^\infty \sin x e^{-xy} dx \right] = 1 - y^2 \int\limits_0^\infty \sin x e^{-xy} dx$
  $\Rightarrow I'(y) = -\int\limits_0^\infty \sin x\, e^{-xy} dx = -\frac{1}{1+y^2}$
- Интегрируем $\Rightarrow I(y) = -\arctan y + c$ при y>0
- Постоянную c найдем, посчитав $\lim\limits_{y \to \infty} I(y)$:
  При $y > 0 \quad |I(y)| \leq \int\limits_0^\infty e^{-xy} dx = \frac{1}{y} \to 0$, при $y \to \infty$, т.к. $|\frac{sinx}{x}| \leq 1$
  $\Rightarrow 0 = \lim\limits_{y \to \infty} I(y) = \lim\limits_{y \to \infty} -\arctan y + c = -\pi/2 + c \Rightarrow c = \pi/2$
- Докажем непрерывность I(y) в нуле, тогда $I(0) = \lim\limits_{y \to 0+0} I(y) = c = \pi/2$
  $I(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$- сх-ся равномерно при $y \geq 0$,
  подынтегральная функция непрерывна
  $\Rightarrow$ Непрерывность I(y) при $y \geq 0$ по теореме 4. Значит, $I(0) = \pi/2$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} d(\alpha x) = \begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx & ,\alpha > 0 \\ 0 & ,\alpha = 0 \\ \int\limits_0^{-\infty} \frac{\sin x}{x} dx & ,\alpha < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\, sgn(\alpha)}$$

Интегралы Эйлера

$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ - Гамма-функция

$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ - Бета-функция

1. Область сходимости

   Около 0: $t^{x-1}e^{-t} \backsim t^{x-1} \Rightarrow \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ сходится $\forall\, x > 0$

   На бесконечности:

   $|t^{x-1}e^{-t}| < e^{-t/2}$, при $t \geq t_0(x) \Rightarrow \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ сходится для $\forall\, x$

   Таким образом, $\Gamma(x)$ определена при x>0

   $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \backsim t^{x-1}$ около $0 \Rightarrow x > 0$
   $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \backsim (1-t)^{y-1}$ около $1 \Rightarrow y > 0$
   $\Rightarrow B(x,y)$ определена при $x > 0, y > 0$

2. Вычисление $\Gamma(n), n \in N$

   $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}dt = 1,$

   $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t}dt = -\int\limits_0^\infty t^x d(e^{-t}) = -t^x e^{-t}|_0^\infty + \int\limits_0^\infty x t^{x-1}e^{-t}dt \Rightarrow$

   $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall\, x > 0$ (не только натуральных)

   $n \in N \Rightarrow \Gamma(n+1) = n*(n-1)*\cdots 1*\Gamma(1) = n! \Rightarrow \boxed{\Gamma(n+1) = n!}$

3. Непрерывность и бесконечная дифференцируемость $\Gamma(x), x > 0$

   $\Gamma(x) = \int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int\limits_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

   Покажем, что оба интеграла сходятся равномерно $\forall\,[a,b], 0 < a < b < +\infty$

   $$|t^{x-1}e^{-t}| \leq \begin{cases} t^{a-1}e^{-t}, & 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t}, & t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

   по признаку Вейерштрасса Γ(x) сх-ся равномерно на $[a,b]$
   $\Rightarrow$ по теореме 4 о непрерывности $\Gamma(x) \in C[a,b]$
   $\Rightarrow \Gamma(x) \in C(0,\infty)$, т.к. a,b>0 - любые

   $\frac{d^k}{dx^k}(t^{x-1}e^{-t}) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t} \in C(0,\infty)$

   Чтобы использовать теорему о дифференцируемости, достаточно показать, что интегралы
   $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt,\ \int\limits_1^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt$
   сходятся равномерно на $\forall[a,b], 0 < a < b < \infty \quad \forall k \in N \Rightarrow$
   тогда, используя математическую индукцию и теорему 5, можно доказать:

   $\Gamma^{(k)}(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt$

   $$|t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k| \leq \begin{cases} t^{a-1}e^{-t}|\ln t|^k = t^{a-1}e^{-t}(-\ln t)^k, & 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t}|\ln t|^k = t^{b-1}e^{-t}(\ln t)^k, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

   $\int\limits_0^1 t^{a-1}e^{-t}(\ln t)^k dt$ сходится, т.к. для достаточно малых t можно подобрать $\delta > 0$: $|t^{a-1}e^{-t}(\ln t)^k| \leq t^{a-1-k\delta}, a - k\delta > 0$

$\int\limits_1^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt$ сходится,т.к. $|t^{b-1}e^{-t}(\ln t)^k| \leq t^b e^{-t}$ для достаточно больших t

<u>График $\Gamma(x)$:</u> $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(2) = 1! = 1$

$\Gamma''(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^2 dt > 0 \Rightarrow \Gamma'(x)$ монотонно возрастает $\Rightarrow$

у Γ(x) есть единственная точка минимума, которая находится между 1 и 2.

$\lim\limits_{x\to 0+0} \Gamma(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = +\infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n+1) = n! \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \Gamma(x) = +\infty$

<u>Свойства B(x,y)</u>

1. Симетричность $B(x,y) = B(y,x)$ $\quad\{$замена $s = 1-t\}$

2. $\frac{B(x,y+1)}{y} = \frac{B(x+1,y)}{x}$

   Доказательство. $B(x,y+1) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \frac{1}{x}\int\limits_0^1 (1-t)^y dt^x =$

   $= \frac{1}{x}\left(t^x(1-t)^y\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 t^x d(1-t)^y\right) = \frac{1}{x}\left(0 + y\int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt\right) = \frac{y}{x}B(x+1,y)$ □

3. $B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$ $\Big($аналогично $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)\Big)$

   Доказательство. $x,y > 0 \quad B(x,y+1) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}dt =$

   $= \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt - \int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = B(x,y) - B(x+1,y) = B(x,y) - \frac{x}{y}B(x,y+1) \Rightarrow$

   $(x+y)B(x,y+1) = yB(x,y) \Rightarrow B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$ □

4. Замена $t = \dfrac{1}{\tau+1}, \quad t \in (0,1) \ \Rightarrow\ 0 < \tau < +\infty, dt = -\dfrac{d\tau}{(\tau+1)^2}$

   $B(x,y) = \int\limits_{+\infty}^0 \left(\dfrac{1}{\tau+1}\right)^{x-1}\left(\dfrac{\tau}{\tau+1}\right)^{y-1}\dfrac{-\,d\tau}{(\tau+1)^2} = \int\limits_0^\infty \dfrac{\tau^{y-1}d\tau}{(1+\tau)^{x+y}} = \int\limits_0^\infty \dfrac{\tau^{x-1}d\tau}{(1+\tau)^{x+y}}$

   Последнее равенство - следствие симметричности $B(x,y)$.

5. Связь между B(x,y) и Γ(x)

$$(*)\quad B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\quad x,y>0$$

Доказательство.

1) Докажем для случая x>1,y>1 $\quad B(x,y)\cdot\Gamma(x+y)=\int\limits_0^\infty d\tau\,\overbrace{\frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\cdot\int\limits_0^\infty dt\cdot e^{-t}t^{x+y-1}}^{\int\limits_0^\infty f(\tau,z)dz}=$

$$=\int\limits_0^\infty d\tau\cdot\tau^{x-1}\int\limits_0^\infty\frac{dt}{1+\tau}\cdot e^{-t}\left(\frac{t}{1+\tau}\right)^{x+y-1}=\Big\{z=\tfrac{t}{1+\tau}\ ,\ t=z(1+\tau)\ ,\ z\in(0,+\infty)\ \Big\}=$$

$$=\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_0^\infty dz\cdot\tau^{x-1}e^{-z}e^{-\tau z}z^{x+y-1}\overset{\otimes}{=}\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty d\tau\cdot\overbrace{\tau^{x-1}\,e^{-z}\,e^{-\tau z}\,z^{x+y-1}}^{f(\tau,z)}=$$

$$=\int\limits_0^\infty dz\cdot e^{-z}\int\limits_0^\infty d(\tau z)\cdot(\tau z)^{x-1}\,e^{-\tau z}\,z^{y-1}\ =\ \int\limits_0^\infty dz\cdot\underbrace{e^{-z}\,z^{y-1}\cdot\int\limits_0^\infty du\cdot u^{x-1}\,e^{-u}}_{\int\limits_0^\infty f(\tau,z)d\tau}\ =\ \Gamma(y)\cdot\Gamma(x)$$

⊗ Изменение порядка интегрирования возможно в силу теоремы 7:

a) $f(\tau,z)$ - непрерывна и неотрицательна на $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ при x>1, y>1

b) $\int\limits_0^\infty f(\tau,z)\,dz\ =\ \{\text{см. ранее}\}=\dfrac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\cdot\Gamma(x+y)$ - непрывна по τ при x>1

c) $\int\limits_0^\infty f(\tau,z)\,d\tau\ =\ \{\text{см. ранее}\}=e^{-z}\,z^{y-1}\ \cdot\Gamma(x)$ - непрывна по z

d) $\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_0^\infty f(\tau,z)\,dz\ =\ B(x,y)\cdot\Gamma(x+y)$ - сходится

2) Теперь можем доказать утверждение при x>0,y>0.

Действительно, $B(x,y)=\dfrac{x+y}{x}B(x+1,y)=\dfrac{x+y}{x}\dfrac{x+y+1}{y}B(x+1,y+1)=$

$=\{\text{пользуемся случаем 1}\}=\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\dfrac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}=$

$=\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\dfrac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}=\dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},x>0,y>0$ □

Замечание: Зная последнее свойство, легко восстановить забытые коэффициенты в 2,3.

Пример: $\Gamma(1/2)=\int\limits_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt=\{t=x^2\}=\int\limits_0^\infty x^{-1}e^{-x^2}2xdx=2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$

Асимптотическое поведение $\Gamma(x)$ при $x \to +\infty$

$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}(\frac{x}{e})^x(1+\alpha(x))$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$

При $x = n \in N$ получаем формулу Стирлинга:
$\Gamma(n+1) = n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+\alpha_n)$, $\quad \alpha_n$ - б.м. последовательность

Док-во: $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t}dt = \{t = x(\tau+1),\ \tau = 1 - \frac{t}{x} - 1 < \tau < \infty\} =$

$= \int\limits_{-1}^\infty x^x(\tau+1)^x e^{-x(\tau+1)} x d\tau = (\frac{x}{e})^x\, x \int\limits_{-1}^\infty e^{-x(\tau - \ln(\tau+1))} d\tau$

1. План наших действий: $\tau - \ln(\tau+1) = \frac{u^2}{2}$ и выразить $d\tau$ через du
   Обозначим $\phi(\tau) = \tau - ln(\tau+1)$
   $\phi'(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau+1} = \frac{\tau}{\tau+1} \Rightarrow \phi(\tau)$ - имеет единственный минимум в 0, $\phi(0) = 0$
   $\lim\limits_{\tau\to-1+0} \phi(\tau) = +\infty$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \phi(\tau) = +\infty$

   Пусть $u(\tau) = sgn\tau\sqrt{2(\tau - \ln(\tau+1))}$, тогда $\phi(\tau) = \frac{u^2}{2}$, $\quad \underline{-\infty < u < +\infty}$ [3]

   $$u'(\tau) = \begin{cases} sgn\,\tau\left(\sqrt{2\phi(\tau)}\right)' = \sqrt{2}\frac{sgn\,\tau}{2\sqrt{\phi(\tau)}}\phi'(\tau) > 0; \quad \text{при } \tau \neq 0 \\ \lim\limits_{\tau\to0} \frac{sgn\,\tau\sqrt{2(\tau - ln(\tau+1))}}{\tau} = \lim\limits_{\tau\to0} \frac{\sqrt{2(\tau-(\tau-\frac{1}{2}\tau^2+O(t^3)))}}{|\tau|} = \\ = \lim\limits_{\tau\to0} \frac{\sqrt{\tau^2+O(t^3)}}{|\tau|} = 1 > 0; \quad \text{при } \tau = 0 \end{cases}$$

   $\exists u'(\tau) \Rightarrow \tau - \ln(\tau+1) = \frac{u^2}{2}$ дифференцируема по τ.
   Дифференцируем: $\frac{\tau}{\tau+1} = u\frac{du}{d\tau} \Rightarrow$ при $\tau \neq 0 \quad \frac{d\tau}{du} = u\frac{\tau+1}{\tau} = u + \frac{u}{\tau} \quad (**)$

   Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:
   $\ln(\tau+1) = \tau - \frac{\tau^2}{2}\frac{1}{(1+\theta\tau)^2}$ $\quad , 0 < \theta = \theta(\tau) < 1$

   Таким образом, $\frac{u^2}{2} = \tau - \ln(\tau+1) = \frac{\tau^2}{2}\frac{1}{(1+\theta\tau)^2} \Rightarrow \{$т.к. $sgn\ u = sgn\ \tau$ и $1+\theta\tau > 0\}$
   $\left[u = \frac{\tau}{1+\theta\tau}\right] \Rightarrow \left[(1+\theta\tau)u = \tau\right] \Rightarrow \left[\tau(1-\theta u) = u\right] \Rightarrow \left[\frac{u}{\tau} = 1 - \theta u\ (\tau \neq 0)\right]$
   Подставим это в $(**)$: $\frac{d\tau}{du} = u + 1 - \theta u = 1 + (1-\theta)u \quad$ (при $\tau \neq 0$)
   При $\tau = 0 \quad \frac{du}{d\tau} = 1 \Rightarrow \frac{d\tau}{du} = 1 \Rightarrow$ формула справедлива и при $\tau = 0$.
   Итог: оценили $\frac{d\tau}{du} = 1 + (1-\theta)u$ [4] (не забываем, что θ - зависит от τ, u)

2. Итак, $\frac{d\tau}{du} = 1 + (1-\theta)u$, при $-\infty < u < +\infty$. Теперь делаем оценку:
   $\Gamma(x+1) = (\frac{x}{e})^x x \int\limits_{-1}^\infty e^{-x(\tau-\ln(\tau+1))} d\tau = (\frac{x}{e})^x x \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x\frac{u^2}{2}}[1 + (1-\theta)u]du \boxed{=}$
   1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-xu^2}{2}} du = \{s = u\sqrt{\frac{x}{2}}\} = \sqrt{\frac{2}{x}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}ds = \sqrt{\frac{2}{x}}\sqrt{\pi}$
   2) $|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-xu^2}{2}}(1-\theta)udu| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-xu^2}{2}}|u|du =$
   $= 2\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{-xu^2}{2}}udu = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{-xu^2}{2}}d\frac{u^2}{2} = \{\frac{xu^2}{2} = s\} = \frac{2}{x}\int\limits_0^\infty e^{-s}ds = \frac{2}{x}$
   $\boxed{=}$ (проверьте самостоятельно) $= \sqrt{2\pi x}(\frac{x}{e})^x(1+\alpha(x))$, $\quad |\alpha(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0, x \to \infty\square$

---

[3] Осознайте, откуда берутся эти пределы и зачем мы исследовали поведение $\phi(\tau)$
[4] Теперь вспомните, что мы доказывали, что $u'(\tau) > 0$. Где мы это использовали?

Часть 2. Ряды Фурье

Понятие ряда Фурье в евклидовом и почти евклидовом пространствах

Определение. *Пусть L - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. L называется **евклидовым**, если $\forall\, x, y \in L \to (x,y) \in \mathbb{R}$:*
1) $(x,y) = (y,x) \quad \forall\, x,y \in L$ *(симметрия)*
2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in L, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(линейность)*
3) $(x,x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in L$
4) $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение. *Линейное пространство L над полем $\mathbb{R}$ называется **почти евклидовым**, если $\forall\, x,y \in L \to (x,y) \in \mathbb{R}$ и (x,y) удовлетворяет 1), 2), 3).*

Замечание: Любое евклидово пространство является почти евклидовым.

Пример: $L^2_R[a,b]$ - пространство функций, интегрируемых в собственном смысле по Риману на отрезке $[a,b]$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt \quad (*)$$

1), 2), 3), следуют из свойств интеграла Римана, 4) не выполнено:
Пусть $x(t) = \begin{cases} 0, & x \in (a,b] \\ 1, & t = a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b x^2(t)dt = 0, \quad$ при этом $x \neq 0$

т.е. $L^2_R[a,b]$ почти евклидово.

Пример: $\hat{C}[a,b]$ - пр-во кусочно-непр. функций на $[a,b]$ со скалярным произведением $(*)$
$x \in \hat{C}[a,b] \Leftrightarrow x(t)$ непрерывна на $[a,b]$, за исключением конечного числа точек,при этом:
$\forall t \in (a,b) \quad \exists \quad x(t-0), \quad x(t+0); \quad \exists \quad x(a+0), \quad x(b-0).$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\left[x(t-0) + x(t+0)\right], \quad t \in (a,b) \\ x(a) = x(b) = \frac{1}{2}\left[x(a+0) + x(b-0)\right] \end{cases}$$

Например $\operatorname{sgn}(\sin t) \in \hat{C}[-\pi,\pi]$

Покажем, что $\hat{C}[a,b]$ - евклидово. Достаточно проверить выполнение четвертого свойства:
$0 = (x,x) = \int\limits_a^b x^2(t)dt = \{a = t_0 < ... < t_n = b;\, x(t) \in C(t_{k-1}, t_k),\, 1 \leq k \leq n\} = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x^2(t)dt$

$\Rightarrow \forall\, k = 1, ..., n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x^2(t)dt = 0 \quad \Rightarrow x(t) = 0$ при $t \in (t_{k-1}, t_k) \Rightarrow \quad x(t_{k-1}+0) = x(t_k-0) = 0$

Таким образом, $x(t_1) = ... = x(t_n) = x(a) = x(b) = 0 \quad \Rightarrow x(t) \equiv 0,\, t \in [a,b] \Rightarrow \hat{C}[a,b]$ – евклидово.
Замечание: $\hat{C}[a,b] \subset L^2_R[a,b]$ - потом мы воспользуемся этим фактом

Определение. *L - Линейное пространство над $\mathbb{R}$ называется* ***нормированным***, *если $\forall\, x \in L \to \|x\| \in \mathbb{R}$:*
1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in L$
2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in L$ (неравенство треугольника)
3) $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in L$
4) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение. *Пространство* ***почти нормированное,*** *если $\forall\, x \in L$ определено $\|x\| \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее 1),2),3).*

Замечание: Если L - нормированное, то L - почти нормированное.

Утверждение: *Пусть L - почти евклидово пространство. Тогда $\forall (x, y) \in L$ справедливо неравенство Коши-Буняковского:*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x) \cdot (y, y)} \quad (**)$$

Док-во: $\forall\, x, y \in L, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0 \Rightarrow (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) \geq 0$.
Если $(y, y) = 0$, то $(x, x) + 2\lambda(x, y) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow (x, y) = 0 \quad \Rightarrow (**)$
Если $(y, y) \neq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0 \Rightarrow (**)$. □

В $L^2_R[a, b]$ неравенство Коши-Буняковского имеет вид $\left|\int\limits_a^b x(t)y(t)dt\right| \leq \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt \cdot \int\limits_a^b y^2(t)dt}$ (частный случай неравенства Гельдера для интегралов)

Утверждение: *Пусть L - почти евклидово (соответственно евклидово).*
Тогда L можно сделать почти нормированным (соответственно нормированным), положив $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ (норма, согласованная со скалярным произведением).

Док-во: Достаточно проверить, что $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$:
$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \boxed{\leq} (x, x) + 2\sqrt{(x, x) \cdot (y, y)} + (y, y) = (x, x) + 2\sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} + (y, y) = (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □

Задачи к экзамену

1. L - нормированно. Показать, что если $\|x\|$ согласована с некоторым скалярным произведением, то $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$ (Критерий евклидовости нормы помните?)
2. $C[a, b]$. Положим $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$. Показать, что $\|\cdot\|$ - норма, не согласованная ни с каким скалярным произведением.
3. В пространстве функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$, $\|x\| = \int\limits_a^b \big|x(t)\big| dt$. Показать, что пространство почти нормировано, но норма не согласована ни с каким скалярным произведением.
4. Показать,что $(*)$ не является скалярным произведением для пространства $C(a, b)$.

Определение. *$\{\psi_n\}$ - система элементов из почти евклидова линейного пространства называется* ***ортонормированной системой*** *(ОНС), если $(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}\ \forall i, j \in \mathbb{N}$*

Определение. *$f \in L$, $\{\psi_n\}$ - ОНС в почти евклидовом линейном пространстве L.*
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \psi_k$, где $f_k = (f, \psi_k)$ называется рядом Фурье элементов f по системе $\{\psi_k\}$, f_k - коэффициенты Фурье. [5]

[5] Аналогия с разложением по ОНБ в конечномерном линейном пространстве должна быть очевидна ©

Задача о наилучшем приближении

$L_n = \{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k,\ c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}\}$- линейная оболочка первых n векторов системы

Необходимо найти $\inf\limits_{c_1,...,c_n\in\mathbb{R}} \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k\|$

$\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k\|^2 = (f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k, f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k) = (f,f) - 2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f,\psi_k) + (\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k, \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k) =$
$= \|f\|^2 - 2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 - 2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 +$
$\sum\limits_{k=1}^{n} (f_k - c_k)^2$, где $f_k = (f, \psi_k)$ - коэффициенты Фурье.

При $\sum\limits_{k=1}^{n} (f_k - c_k)^2 = 0$ достигается точная нижняя грань, подведем итог:

Теорема 1. $\inf\limits_{c_1,...,c_n\in\mathbb{R}} \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2}$ *и достигается* $\Leftrightarrow c_k = f_k,\ 1 \le k \le n$

Следствие: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \ge 0$ (вообще-то, мы им уже воспользовались)

Следствие: $\forall f \in L$ справедливо неравенство Бесселя: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$

Док-во: $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ все члены неубывающей последовательности ограничены константой $\|f\|^2 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$ □

Пример: Тригонометрическая система в $L_R^2[-\pi,\pi]$ (в $\hat{C}[-\pi,\pi]$):
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, ...$ - является ОНС (докажите это)

$f \rightsquigarrow \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(f_k^{(1)}\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + f_k^{(2)}\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right)$ - ряд Фурье функции f по этой системе

$$\begin{cases} f_0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)dx \\ f_k^{(1)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x)\cos kx dx \\ f_k^{(2)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x)\sin kx dx \end{cases} \Rightarrow \text{Положим} \quad \begin{cases} a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_k^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\ b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_k^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \end{cases}$$

Тогда $f \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k\cos kx + b_k \sin kx\right)$ - тригонометрический ряд Фурье (ТРФ)

Неравенство Бесселя для ТРФ, записанное в разных обозначениях:
$f_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\left(f_k^{(1)}\right)^2 + \left(f_k^{(2)}\right)^2\right) \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

$\frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \pi(a_k^2 + b_k^2) \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}$$

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ сходится, но не является рядом Фурье ни для какой функции $f \in L_R^2[-\pi,\pi]$ (иначе $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}},\ a_n = 0,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ расходится).

Замкнутые и полные ортонормированные системы

Определение. *Пусть $\{\psi_n\}$ - ОНС в почти евклидовом пространстве L. $\{\psi_n\}$ называется **замкнутой**, если $\forall f \in L$, $\forall \varepsilon \geq 0 \, \exists \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k \colon \; \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k\| \leq \varepsilon$*

Теорема 2 (Равенство Парсеваля)**.** *Пусть $\{\psi_n\}$ замкнута в L. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$*

Док-во: $\{\psi_n\}$ - замкнута $\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k \colon \; \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k\| < \sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ {задача о наилучшем приближении} $\Rightarrow \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$

Т.е. $\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists n \colon \; \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \geq \|f\|^2 - \varepsilon$. Но по нер-ву Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$. $\square$

Следствие: $\forall f \in L \quad \lim\limits_{n\to\infty} \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k\| = 0$, где $\{\psi_n\}$ - замкнутая ОНС.

Док-во: $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\square$

Замечание: В $L^2_R[a,b]$ сходимость по норме равносильна сходимости в среднем т.к. $\|f - g\| = \sqrt{\int\limits_a^b (f-g)^2 dx}$

Определение. *Пусть $\{\psi_n\}$ - ОНС в <u>евклидовом</u> пространстве L. $\{\psi_n\}$ называется **полной** в L, если $(f, \psi_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f = 0$*

Утверждение: *Пусть $\{\psi_n\}$ полна в <u>евклидовом</u> пространстве L. Тогда $\forall\, f, g \in L, \; f \neq g \quad \exists n \colon (f, \psi_n) \neq (g, \psi_n)$*
Док-во: $h = f - g$, $h \neq 0$. Т.к. $\{\psi_n\}$ полна, $\exists n \colon (h, \psi_n) \neq 0$, т.е. $(f, \psi_n) \neq (g, \psi_n)$ $\square$

Теорема 3. *Пусть L-евклидово и $\{\psi_n\}$ - замкнутая ОНС в L. Тогда $\{\psi_n\}$ полна в L.*

Док-во: Пусть $\exists f \in L \colon (f, \psi_n) = f_n = 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$.
Из равенства Парсеваля $\|f\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^2 = 0 \Rightarrow f = 0$ (по 4-му свойству нормы). $\square$

Лемма (об интегрируемости по периоду)**.** *Пусть f интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет период 2π. Тогда $\forall\, x \in \mathbb{R} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$*

Док-во: $\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t)dt = \int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} f(t)dt + \int\limits_{\pi}^{\pi-x} f(t)dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \{\tau = t + 2\pi\} = \int\limits_{\pi-x}^{\pi} f(\tau)d\tau + \int\limits_{\pi}^{\pi-x} f(t)dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ (докажите, что промежуточные интегралы определены) $\square$

Задача: Пусть L - евклидово, система $\{\psi_n\} : \forall f \in L$, $\forall \varepsilon \geq 0 \, \exists \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k \colon \; \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k\| \leq \varepsilon$, но не ОНС. По этой системе построить замкнутую ОНС в L.

Выражения для частичных сумм тригонометрического ряда Фурье и чезаровских сумм тригонометрического ряда Фурье

$f \in L^2_R[-\pi,\pi]$, периодическая с периодом 2π

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big) - \text{частичные суммы ТРФ}$$

$$\sigma_n(f,x) = \frac{S_0(f,x) + ... + S_{n-1}(f,x)}{n} - \text{чезаровские суммы ТРФ}$$

$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum\limits_{k=1}^{n} \big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \cdot \sin kx\big) =$

$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx)\right]dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt =$

$\{u = t - x$, подынтегральная функция периодична$\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku\right]du;$

$\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku\right] = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\left[\sin\frac{u}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} 2\sin\frac{u}{2}\cos ku\right] = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\left[sin\frac{u}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\sin(k+\frac{1}{2})u - \sin(k-\frac{1}{2})u\right] =$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} & u \neq 0 \quad \text{далее будем подразумевать именно эту функцию,} \\ n+\frac{1}{2} & u = 0 \quad \text{т.к. она – дробь сверху, доопределенная по непрерывности} \end{cases},$$

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}f(u+x)du \quad (*)$$

$D_n(u) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$ - ядро Дирихле.

Для $f \equiv 1$: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dt = 2$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt = b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin ntdt = 0 \Rightarrow S_n(f,x) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Подставим в $(*)$: $1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du \quad (\widehat{*})$

$$\sigma_n(f,x) = \tfrac{S_0(f,x)+...+S_{n-1}(f,x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_k(u)f(u+x)du\right] = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}f(u+x)du$$

$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})u = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}2\sin(k+\frac{1}{2})u\sin\frac{u}{2} = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(\cos ku - cos(k+1)u\big) =$

$= \dfrac{1-\cos un}{2\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{2\sin^2\frac{un}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{\sin^2\frac{un}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}f(u+x)du \quad (**)$$

Обозначим $\Phi_n(u) = \dfrac{\sin^2\frac{nu}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}$ - ядро Фейера, тоже доопределено при u=0 по непрерывности

Для $f \equiv 1$: $\sigma_n(f,x) \equiv 1$. Подставим в $(**)$: $\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)du = 1 \quad (\widehat{**})$

Теорема 4 (Фейера). *Пусть* $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. *Тогда* $\sigma_n(f,x) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$

Док-во: Продолжим функцию f с периодом 2π на всю прямую $\mathbb{R}$.
Т.к. $f \in C(\mathbb{R})$ и периодична, то f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$,
т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall u \in [-\delta,\delta], \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \big|f(x+u) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$
Кроме того, $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$: $\exists M > 0 \colon |f(x)| \le M \, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = (\widehat{**}) = \tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(u+x)du - f(x) \tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)du =$$

$$= \tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\big(f(u+x) - f(x)\big)du = \tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{-\delta}^{\delta} (\dots)du + \tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{\delta \le |u| \le \pi} (\dots)du$$

- $\left|\tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x+u) - f(x)| \Phi_n(u)du\right| \le \tfrac{\varepsilon}{2} \cdot \tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(u)du \le \tfrac{\varepsilon}{2} \cdot \tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)du = \tfrac{\varepsilon}{2}$

- $\left|\tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{\delta \le |u| \le \pi} (\dots)du\right| \le \tfrac{1}{\pi n} \int\limits_{\delta \le |u| \le \pi} 2M \, |\Phi_n(u)|du \le \tfrac{2M}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} du \le \tfrac{\varepsilon}{2}$ при n$\geqslant N_0(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon \quad \exists N_0(\varepsilon) \colon |\sigma_n(f,x) - f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon \, \forall x \in [-\pi,\pi] \Rightarrow \sigma_n(f,x) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$ ☐

Определение. ***Тригонометрическим многочленом*** *назовем функцию вида:*
$T_n(x) = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cos kx + d_k \sin kx$

Например, $S_n(f,x), \sigma_n(f,x)$ - тригонометрические многочлены

Теорема 5 (первая теорема Вейерштрасса). *Пусть* $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$.
Тогда f можно на $[-\pi,\pi]$ *равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, т.е.* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T(x)$ *- тригонометрический многочлен:* $\max\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$

Док-во: По т. Фейера $\sigma_n(f,x) \underset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$, где $\sigma_n(f,x)$ - триг. многочлен. ☐

Теорема 6 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть* $f \in C[a,b]$.
Тогда f можно на [a,b] равномерно приблизить многочленом (обычным), т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(x)$ *- многочлен:* $\max\limits_{x \in [a,b]} |P(x) - f(x)| < \varepsilon$

Док-во:

I. Докажем для частного случая : $[a,b] = [-\pi,\pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$.
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, T_n(x) = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cos kx + d_k \sin kx \, \colon \max\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$.
T(x) - линейная комбинация $\sin kx$, $\cos kx$, $0 \le k \le n$, каждая из этих функций представима степенным рядом с радиусом сходимости $R = \infty$
$\Rightarrow T(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, R = \infty$
На $[-\pi,\pi]$ степенной ряд сходится равномерно по теореме Абеля
$\Rightarrow \exists N \colon |T(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k| < \varepsilon/2, x \in [-\pi,\pi]$, обозначим $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$
$\Rightarrow |f(x) - P(x)| \le |f(x) - T(x)| + |T(x) - P(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall \, x \in [-\pi,\pi]$

II. Теперь случай : $[a,b]=[-\pi,\pi]$, но условий на значения нет
Подберем $g(x)$ вида: $g(x)=f(x)-\alpha x$, с условием $g(-\pi)=g(\pi)$,
т.е. $f(-\pi)+\alpha\pi=f(\pi)-\alpha\pi \Rightarrow \alpha=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi}$
$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists Q(x)$ - многочлен: $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|g(x)-Q(x)|<\varepsilon$ (из I шага)
$|g(x)-Q(x)|=|f(x)-\alpha x-Q(x)|=|f(x)-P(x)|$,
$P(x)=\alpha x+Q(x)$ - многочлен , $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon$, ч.т.д.

III. Обобщим для произвольного отрезка $[a,b]$ при помощи линейной замены: $x=\alpha t+\beta$, переводящей $x\in[a,b]$ в отрезок $t\in[-\pi,\pi]$
$$\begin{cases}-\pi\alpha+\beta=a\\ \pi\alpha+\beta=b\end{cases} \Rightarrow \beta=\tfrac{a+b}{2},\ \alpha=\tfrac{b-a}{2\pi}\neq 0,\ t=\tfrac{x-\beta}{\alpha}$$
$f(x)\in C[a,b]$. Пусть $F(t)=f(\alpha t+\beta)$. Тогда $F(t)\in C[-\pi,\pi]$
$\Rightarrow \exists\, Q(t)$ - многочлен: $\max\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|F(t)-Q(t)|<\varepsilon$ (по шагу II)
$\Rightarrow \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-Q(\frac{x-\beta}{\alpha})|<\varepsilon \Rightarrow P(x)=Q(\frac{x-\beta}{\alpha})$ - искомый многочлен $\square$

Замкнутость тригонометрической системы

Теорема 7. *Тригонометрическая система* $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\dots\}$ *замкнута в* $L^2_R[-\pi,\pi]$

Док-во:
Нужно показать, что $\forall\, f\in L^2_R[-\pi,\pi]\ \forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\, T(x)-$ триг. многочлен : $\|f-T(x)\|<\varepsilon$

1. $\exists g_1\in \hat{C}[-\pi,\pi]:||f-g_1||<\varepsilon/3$
f интегрируема по Риману $\Rightarrow$
а) f ограничена на $[-\pi,\pi]$, т.е. $\exists M>0:|f(x)|\le M\ \forall x\in[-\pi,\pi]$
б) $\exists\,\tau$ - разбиение $[-\pi,\pi]:-\pi=x_0<\dots<x_l=\pi:\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-s_\tau(f)<\dfrac{\varepsilon^2}{18M}$
$$s_\tau(f)=\sum_{k=1}^{l}m_k\Delta x_k,\ m_k=\inf_{[x_{k-1},x_k]}f(x)$$
$$g_1(x)=\begin{cases}m_k, & x\in(x_{k-1},x_k),1\le k\le l\\ \frac{m_k+m_{k+1}}{2}, & x=x_k,\ k=1,\cdots,l-1\\ \frac{m_1+m_n}{2}, & x=\pm\pi\end{cases} \Rightarrow |g_1(x)|\le M,\text{ т.к. } |m_k|\le M$$
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_1(x)dx=s_\tau(f)$$
Таким образом, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-s_\tau(f)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g_1(x))dx=$
$$=\{f(x)-g_1(x)\ge 0 \text{ кроме конечного числа точек}\}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g_1(x)|dx<\frac{\varepsilon^2}{18M}$$
$$||f-g_1||=\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g_1(x))^2dx}\le\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g_1(x)|\,(|f(x)|+|g_1(x)|)\,dx}\le$$
$$\le\sqrt{2M\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g_1(x)|dx}\le\sqrt{2M\tfrac{\varepsilon^2}{18M}}=\varepsilon/3$$

2. . Строим $g_2 \in C[-\pi,\pi]$, $g_2(-\pi) = g_2(\pi)$, $||g_2 - g_1|| < \varepsilon/3$.
   В $g_2(x)$ δ-окрестности точек разрыва $g_1(x)$ заменяем линейными функциями
   $g_2(x) = g_1(x)$ вне $[-\pi, -\pi+\delta] \cup [x_1-\delta, x_1+\delta] \cup \dots \cup [\pi-\delta, \pi]$
   $g_2(x)$ линейна на каждом сегменте, причем $g_2(x) \in C[-\pi,\pi]$,
   $g_2(-\pi) = g_2(\pi)$, $|g_2(x)| \le M$, $x \in [-\pi,\pi] \Rightarrow |g_1(x) - g_2(x)| \le 2M$
   $||g_1 - g_2|| = \sqrt{\int\limits_{[-\pi,-\pi+\delta]\cup[x_1-\delta,x_1+\delta]\cup\dots\cup[\pi-\delta,\pi]} (g_1(x) - g_2(x))^2 dx} \le \sqrt{(2M)^2 2\delta l} < \varepsilon/3$ для достаточно малых δ

3. Покажем, что $\exists T(x) : ||g_2 - T|| < \varepsilon/3$
   Для $g_2(x)$ (о чудо!) выполнены условия первой теоремы Вейерштрасса
   $\Rightarrow \exists T(x)$: тригонометрический многочлен: $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |g_2(x) - T(x)| \le \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$
   $$||g_2(x) - T(x)|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (g_2(x) - T(x))^2 dx} \le \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9\cdot 2\pi} dx} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{9}\frac{1}{2\pi}2\pi} = \varepsilon/3 \Rightarrow$$

$||f(x) - T(x)|| \le ||f - g_1|| + ||g_1 - g_2|| + ||g_2 - T|| \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$
$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists T(x)$ $-$ тригонометрический многочлен : $||f(x) - T(x)|| < \varepsilon$ □

Следствия:

1. $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, $f \in L_R^2[-\pi,\pi]$ - **равенство** Парсеваля

2. $\lim\limits_{n\to\infty} ||f(x) - S_n(f,x)|| = 0$ (см. следствие из теоремы 2)

3. $\{S_n(f,x)\}$ сходится к f(x) в среднем на $[-\pi,\pi]$, т.к. $||f(x) - S_n(f,x)|| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(f,x))^2 dx$

4. $\forall [a,b] \subset [-\pi,\pi] \quad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b S_n(f,x)dx$

   Док-во: Сходимость в среднем на $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ сходимость
   в среднем на $\forall [a,b] \subset [-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ почленная интегрируемость на $[a,b]$,ч.т.д. □

5. $\hat{C}[-\pi,\pi] \subset L_R^2[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$ тригонометрическая система замкнута в $\hat{C}[-\pi,\pi]$ и (+евклидовость пространства) полна в $\hat{C}[-\pi,\pi]$

6. $f, g \in \hat{C}[-\pi,\pi]$, $f \ne g$. Тогда ряды Фурье для f и g не могут совпадать
   (все коэффициенты Фурье $f \ne g$ не могут совпадать - свойство полных ОНС)

Задачи к экзамену

1. Будет ли замкнутой $\{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\}$ в $L_R^2[-\pi,\pi]$?

2. Будет ли замкнутой $\{\frac{\sin nx}{c_n}\}$, $c_n^2 = \int\limits_0^{\pi} \sin^2 nx dx$ в $L_R^2[0,\pi]$?

Теорема 8 (Локальная теорема Фейера).
Пусть f интегрируема на $[-\pi,\pi]$, период $f = 2\pi$; в точке $x_0 \quad \exists\, f(x_0+0),\ f(x_0-0)$.
Тогда $\sigma_n(f,x_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$

Док-во: $\sigma_n(f,x_0) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\Phi_n(t)\,dt$. В силу четности ядра Фейера и ($\hat{**}$):

$\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}\Phi_n(t)dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right] = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+0)\,\Phi_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0-0)\,\Phi_n(t)\,dt$

Таким образом, $\sigma_n(f,x) - \frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right] =$

$$= \frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\Phi_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}\left[f(x_0+t)-f(x_0-0)\right]\Phi_n(t)\,dt = I_1^n + I_2^n$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_1^n = 0$ (аналогично $\lim\limits_{n\to\infty} I_2^n = 0$)

- $\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0$ (можно считать $\delta<\pi$) : $|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\varepsilon \quad \forall t\in[0,\delta)$
- f ограничена на R (т.к. интегрируема по Риману и периодична) $\Rightarrow \exists M>0 : |f(x)|\le M \quad \forall x\in R$

$$I_1^n = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\delta}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\Phi_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

- $\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\delta}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\Phi_n(t)\,dt\right| < \frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\delta}\varepsilon\,\Phi_n(t)\,dt < \varepsilon\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n\in\mathbb{N}$
- $|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\le 2M \quad \sin^2\frac{nt}{2}\le 1,\ \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\le\frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}$
  $\left|\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left[f(x_0+t)-f(x_0+0)\right]\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt\right| \le \frac{2M}{2\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}dt \le \frac{\pi M}{\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{C}{n}\le\frac{\varepsilon}{2}$ при $n\ge N_0(\varepsilon)$

$\Rightarrow |I_1^n| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при $n\ge N_0(\varepsilon) \ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_1^n = 0$

□

Следствие: Пусть $f\in L_R^2[-\pi,\pi]$, периодична с периодом 2π,
$\exists\, f(x_0\pm 0)$, ТРФ функции f(x) сходится в точке x_0: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0)$
тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$

Док-во: $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(f,x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0)$ (регулярный метод Чезаро), причем по локальной теореме Фейера этот предел равен $\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$ □

Простейшие условия равномерной сходимости и почленной дифференцируемости тригонометрического ряда Фурье

Определение. *f(x) имеет на [a,b]* ***кусочно-непрерывную производную****, если $\exists\, a = x_0 < \dots < x_l = b$, f дифференцируема на $[a,b]\setminus\bigcup\limits_{j=0}^{l}\{x_j\}$, $\exists f'(x_{j-1}+0),\ f'(x_j-0),\ f'\in C(x_{j-1},x_j)$ при $j=1,..,l$* [6]

[6] оцените разницу с понятием: производная функции кусочно-непрерывна

Пример: $f(x) = |x|$ на $[-\pi, \pi]$ имеет кусочно-непрерывную производную

Теорема 9. *Пусть* $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$,

$f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на отрезке $[-\pi, \pi]$

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \rightsquigarrow f(x)$ *ТРФ функции f(x)*

$\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)) \rightsquigarrow f'(x)$ *ТРФ функции f'(x),* ***доопределенной*** *произвольным образом в точках разрыва*

Тогда

1. *ТРФ функции f'(x) получен почленным дифференцированием ТРФ f(x),*
   т.е. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = -kb_k$, $\beta_k = ka_k$, $k \in \mathbb{N}$,
   иными словами, $\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)] = \left(\frac{a_0}{2}\right)' + \sum\limits_{k=1}^{\infty} [a_k \cos'(kx) + b_k \sin'(kx)]$[7]

2. *ТРФ функции f(x) сходится на* $[-\pi, \pi]$ *абсолютно и равномерно к f(x)*

Док-во:

1. $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \sum\limits_{j=1}^{l} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x) \cos kx dx = \{\text{интегрирование по частям}\} =$
   $= \frac{1}{\pi} \sum\limits_{j=1}^{l} \left[f(x) \cos kx \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) k \sin kx dx \right] = \frac{1}{\pi} [\,\text{f}(\pi)\text{cos}\pi\text{k-f}(-\pi)cos(-\pi\text{k})\,] +$
   $+ \frac{k}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0 + kb_k \;\Rightarrow\; \alpha_k = kb_k$. Аналогично $\beta_k = -k\alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$

2. Достаточно показать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$.
   Тогда ТРФ f(x) сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$ по пр. Вейерштрасса;
   (а ряд самой функции будет сходиться к ней самой: периодически продолжаем $f(x)$ на $\mathbb{R}$ и пользуемся следствием локальной теоремы Фейера $\Rightarrow$ ТРФ функции f(x) сходится к f(x)).

   $|a_k| + |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} \le \frac{1}{2}(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}) + \frac{1}{2}(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}) = \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} + \frac{1}{k^2}$
   $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ сходится в силу равенства Парсеваля, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится
   $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$ сходится $\square$

Замечание: В условии предыдущей теоремы $\lim\limits_{k\to\infty} k(|a_k| + |b_k|) = 0$

Док-во: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ сходится $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |\alpha_k| = \lim\limits_{k\to\infty} |\beta_k| = 0$.
Но $|\alpha_k| + |\beta_k| = k(|a_k| + |b_k|)$ $\square$

Пример: $f(x) = \sin x^{10}$ Исследовать на равномерную сходимость ТРФ на $[-\pi, \pi]$

$f(x) \in C[-\pi, \pi],\; f(-\pi) = f(\pi),\; f'(x) \in C[-\pi, \pi]$
$\Rightarrow$ ТРФ функции f(x) равномерно сходится к f(x) на $[-\pi, \pi]$.

[7] подразумевается почленное равенство рядов, а не равенство сумм

Теорема 10. *Пусть* $f(x),\ f'(x), \cdots ,\ f^{(m)}(x) \in C[-\pi,\pi]$,
$f^{(m)}(x)$ *имеет кусочно-непрерывную производную на* $[-\pi,\pi]$,
$f(-\pi) = f(\pi),\ f'(-\pi) = f'(\pi), \cdots ,\ f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi)$.

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos{(kx)} + b_k \sin{(kx)}) \rightsquigarrow f(x)$,

$\frac{\alpha_0^{(j)}}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(j)} \cos{(kx)} + \beta_k^{(j)} \sin{(kx)}) \rightsquigarrow f^{(j)}(x),\ 1 \le j \le m+1$

Тогда

1. $\alpha_0^{(j)} = 0 \qquad \alpha_k^{(j)} \cos kx + \beta_k^{(j)} \sin kx = a_k (\cos kx)^{(j)} + b_k (\sin kx)^{(j)} \quad 1 \le j \le m+1$
2. *ТРФ функции* $f^{(j-1)}(x)$ *равномерно сходится к* $f^{(j-1)}(x)$ *на* $[-\pi,\pi]$ $1 \le j \le m+1$

Док-во: Надо m раз применить предыдущую теорему ☐

Замечание: В условии предыдущей теоремы $\lim\limits_{k\to\infty} k^{m+1}(|a_k| + |b_k|) = 0$

Док-во: $|\alpha_k^{(m+1)}| + |\beta_k^{(m+1)}| = k^{m+1}(|a_k| + |b_k|),\ \lim\limits_{k\to\infty} |\alpha_k^{(m+1)}| + |\beta_k^{(m+1)}| = 0$
т.к. справедливо равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(m+1)})^2 + (\beta_k^{(m+1)})^2 < \infty$. ☐

Комплексная запись тригонометрического ряда Фурье

$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx},\ k = 0, 1, \cdots$
Если f(x) вещественная $\Rightarrow\ c_{-k} = \overline{c_k},\ k = 0, 1, \cdots$

$$\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ \Rightarrow\ c_0 e^{i0x} = \frac{a_0}{2} \\ c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i \sin kx)dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad k \in N \\ c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i \sin kx)dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx \quad k \in N \end{cases}$$

$$\text{итог}: \quad f(x) \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,\ k \in Z$$

Как и следовало ожидать, в комплексных числах все стало более естественно и логично - исчезла несимметричность $(\exists a_0, \nexists b_0)$, пропал коэффициент $1/2$
$f(\phi = x) \rightsquigarrow \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\phi} = \{z = e^{i\phi}\} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ - ряд Лорана на единичной окружности[8]
Мы по значению функции на единичной окружности восстановили её ряд Лорана
(при условиях на функцию, с точностью до значений в точках разрыва)

При этом коэффициенты ряда находятся согласно известному правилу:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \{z = e^{ix},\ f_1(z) = f(x)\} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{f_1(z)}{z^{k+1}} dz,\ k \in Z$$

В условии теоремы 9: $f'(x) \rightsquigarrow \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, ik\, e^{ikx}$

[8] вот и тайна удобства множества $[-\pi,\pi]$ - это угол, а также требований: 2π-периодичность, $f(-\pi) = f(\pi)$ и т.п. - более естественно задавать функцию на единичной окружности

Интегральный модуль непрерывности и его свойства

Определение. *Интегральный модуль непрерывности f на [a,b]:*
$\hat{\omega}_{[a,b]}(f,\delta) \overset{def}{=} \sup\limits_{|h|\le\delta} \int\limits_a^b |f(t+h)-f(t)|dt,\ \delta>0,$
f должна быть интегрируема по Риману на [a,b] и её период равен b-a

Из определения очевидно, что $\hat{\omega}_{[a,b]}(f,\delta)$ неотрицательная и неубывающая по δ
Введем обозначение : $\hat{\omega}(f,\delta) = \hat{\omega}_{[-\pi,\pi]}(f,\delta)$

Теорема 11. $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \hat{\omega}(f,\delta) = 0$

Док-во: f д.б. интегрируема по Риману на $[-\pi,\pi]$ и 2π-периодична, $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$
Из замкнутости $L^2_R[-\pi,\pi]$: $\forall\varepsilon>0 \quad \exists T(x)$ - триг. многочлен: $||f-T|| \le \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$[9],

- $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)-T(t)|dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)-T(t)| * 1\ dt = (\,|f(t)-T(t)|\,,1) \le \{\text{неравенство Коши} - \text{Буняковского}\} \le \Big\| |f-T| \Big\|\, ||1|| = \Big\| f-T \Big\|\, ||1|| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2 dt} = \frac{\varepsilon}{3}$
- $|f(t)-f(t+h)| \le |f(t)-T(t)| + |T(t)-T(t+h)| + |T(t+h)-f(t+h)| \quad \Rightarrow$
  $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)-f(t+h)|dt \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)-T(t)|dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(t)-T(t+h)|dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(t+h)-f(t+h)|dt$
- Заметим, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+h)-T(t+h)|dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)-T(t)|dt \le \frac{\varepsilon}{3}$
  в силу леммы об интегрируемости по периоду
- T имеет период 2π и непрерывна на R $\Rightarrow$ T равномерно непрерывна на R
  $\exists\delta>0 : \forall h\in[-\delta,\delta] \quad \forall t\in R \quad |T(t+h)-T(t)| \le \frac{\varepsilon}{6\pi} \Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(t+h)-T(t)|dt \le \frac{\varepsilon}{3}$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)-f(t+h)|dt \le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon \Rightarrow \hat{\omega}(f,\delta)\le\varepsilon \ \Rightarrow \lim\limits_{\delta\to 0+0}\hat{\omega}(f,\delta)=0$ □

Теорема 12. *Пусть f,g* $\in L^2_R[-\pi,\pi]$ *и периоды f и g равны* 2π.
Рассмотрим $F_x(t) = f(x+t)g(t) \qquad x\in R$

Тогда $\hat{\omega}(F_x,\delta)$ *равномерно по* $x\in R$ *сходится к 0 при* $\delta\to 0+0$,
т.е. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_0>0 : \forall\delta\in(0,\delta_0) \quad \forall x\in R \quad \hat{\omega}(F_x,\delta)<\varepsilon$

Док-во: f,g ограничены на R $\Rightarrow \exists M\ge 0 : |f(t)|\le M, |g(t)|\le M \quad \forall t\in R$
$|F_x(t+h)-F_x(t)| = |f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t)| \le$
$\le \Big| g(t+h)\,[f(x+t+h)-f(x+t)] \Big| + \Big| f(x+t)\,[g(t+h)-g(t)] \Big| \le$
$\le M\Big| f(x+t+h)-f(x+t) \Big| + M\Big| g(t+h)-g(t) \Big| \quad (**),$
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)-f(x+t)|dt = \{\tau = x+t\} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+h)-f(\tau)|d\tau$
Интегрируем (**) на $[-\pi,\pi]$, взяв $|h|\le\delta$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |F_x(t+h)-F_x(t)|dt &\le M\int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+h)-f(\tau)|d\tau + M\int_{-\pi}^{\pi} |g(\tau+h)-g(\tau)|d\tau \\ |\hat{\omega}(F_x,\delta)| &\le M(\hat{\omega}(f,\delta)+\hat{\omega}(g,\delta)) \to 0\,(\text{по предыдущей теореме}) \end{aligned}$$

[9] подразумеваются норма и скалярное произведение пространства $L^2_R[-\pi,\pi]$

выражение справа не зависит от x - значит, стремление равно(душное)мерное $\square$

Теорема 13. *Пусть* $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$, a_n, b_n *- коэффициенты Фурье функции* f

Тогда $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \le \frac{1}{2\pi}\hat{\omega}(f, \frac{\pi}{n})$

Док-во: $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = \{y = x - \frac{\pi}{n}\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f(y+\frac{\pi}{n})e^{iny+i\pi}\,dy =$

$= \{e^{iny+i\pi} = -e^{iny}\} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y+\frac{\pi}{n})e^{iny}\,dy$

$2(a_n + ib_n) = \frac{1}{\pi}[\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(t+\frac{\pi}{n}))e^{int}dt] \Rightarrow$

$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n + ib_n| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[|f(t) - f(t+\frac{\pi}{n})| * 1\right]dt \le \frac{\hat{\omega}(f,\frac{\pi}{n})}{2\pi}$ $\square$

Следствие: Пусть f, g, F_x удовлетворяют условиям теоремы 12,
$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_x(t)\cos nt\,dt$, $b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_x(t)\sin nt\,dt$ - коэффициенты Фурье F_x.
Тогда $a_n(x) \rightrightarrows 0$, $b_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$

Док-во: $\sqrt{a_n^2(x) + b_n^2(x)} \le \frac{1}{2\pi}\hat{\omega}(F_x, \frac{\pi}{n}) \rightrightarrows 0; \quad a_n(x), b_n(x) \le \sqrt{a_n^2(x) + b_n^2(x)}$ $\square$

Следствие: Пусть f - 2π-периодична, f,g $\in L^2_R[-\pi,\pi]$.

Тогда $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos nt\,dt,\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin nt\,dt \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$.

Док-во: Меняем, если нужно, функцию g(x) в точке $-\pi$, чтобы $g(-\pi) = g(\pi)$, и периодически продолжаем. На значения интегралов это не повлияет.
Применяем предыдущее следствие. $\square$

Лемма. *Пусть* f *-* 2π*-периодична,* $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$, $\delta \in (0,\pi)$.

Тогда $C_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$

Док-во: $C_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$

$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\frac{\sin nt\cdot\cos\frac{t}{2} + \cos nt\cdot\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt =$

$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g_1(t)\cdot\sin nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g_2(t)\cdot\cos nt\,dt \overset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0+0$ согласно предыдущему следствию, где обозначили $g_1(t) = \begin{cases}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} & \delta\le|t|\le\pi\\ 0 & |t|<\delta\end{cases}$ $\quad g_2(t) = \begin{cases}1 & \delta\le|t|\le\pi\\ 0 & |t|<\delta\end{cases}$ $\square$

Принцип локализации Римана

Сходимость (и предел) ТРФ функции f(x) (f - 2π-периодична, f $\in L^2_R[-\pi,\pi]$) в точке x_0 зависят лишь от поведения функции f(x) в сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Док-во:

$$S_n(x_0,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}dt+\mathrm{C}_n(x_0),\ \delta\in(0,\pi),\quad (\circledast)$$

интеграл учитывает значения функции на $[x_0-\delta,x_0+\delta]$,

$\mathrm{C}_n(x_0)\overset{x_0\in R}{\rightrightarrows} 0$ - очевидно, не играет роли $\square$

Лемма (Уточненная Римана).
Пусть f - 2π-периодична, $f\in L^2_R[-\pi,\pi]$, $\exists [a,b]:\ f_{[a,b]}\equiv 0$.

Тогда $\forall\,\delta\in(0,\frac{b-a}{2})$ ТРФ функции f(x) равномерно сх-ся к 0 на $[a+\delta,b-\delta]$.

Док-во: $(\circledast)\Rightarrow S_n(f,x)=\mathrm{C}_n(x)\overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$ $\square$

Следствие: Пусть f_1,f_2 - 2π-периодичны, $f_1,f_2\in L^2_R[-\pi,\pi]$,
$f_1(x)=f_2(x),\ \forall x\in[a,b]$, ТРФ функции $f_1(x)$ сходится равномерно на [a,b].

Тогда $\forall\,\delta\in(0,\frac{b-a}{2})$ ТРФ функции $f_2(x)$ сходится равномерно к $f_1(x)$ на $[a+\delta,b-\delta]$.

Док-во: $S_n(f_2,x)=S_n(f_1,x)+S_n(f_2-f_1,x)$,
$S_n(f_1,x)\rightrightarrows f_1(x)$, $S_n(f_2-f_1,x)\rightrightarrows 0\Rightarrow S_n(f_2,x)\rightrightarrows f_1(x)$ (как сумма двух равномерно сходящихся последовательностей). $\square$

Замечание: из равномерной сходимости на $[a+\delta,b-\delta]$ $\forall\delta\in(0,\frac{b-a}{2})$ следует равномерная сх-сть на $\forall\,[c,d]\subset(a,b)$

Пример: $f(x)=\begin{cases}x^{10} & x\in[0,\pi/2]\\ \sin x & x\in[-\pi,0]\\ \sqrt{x} & x\in[\pi/2,\pi)\end{cases}$ и f(x) имеет период 2π

Исследовать на равномерную сходимость f(x) на $[\delta,\pi/2-\delta]$
$g(x)=x^{10}$ непрерывна вместе с производной, $g(-\pi)=g(\pi)$
$\Rightarrow$ ТРФ функции g(x) равномерно сходится к g(x) на $[0,\pi/2]$
на $[0,\pi/2]\Rightarrow$ТРФ f(x) равномерно сходится к f(x)=g(x) на $[\delta,\pi/2-\delta]\subset[0,\pi/2]$

Определение. *f удовлетворяет в т.x_0* ***условию Гельдера*** *порядка $\alpha\,(\alpha\in(0,1])$ справа (слева), если $\exists\,f(x_0+0)$, $\exists\,c_1,\delta_1>0:\ |f(x_0+t)-f(x_0+0)|<c_1t^\alpha, t\in(0,\delta_1)$ (соответственно, $\exists\,f(x_0-0)$, $\exists\,c_2,\delta_2>0:\ |f(x_0+t)-f(x_0-0)|<c_2|t|^\alpha, t\in(-\delta_2,0)$.*

Пример: x^2 удовл. условию Гельдера порядка α в точке 0 слева и справа, $\forall\,\alpha\in(0,1]$.

Замечание: Если f(x) дифференцируема в точке x_0,
то f(x) удовлетворяет в т. x_0 условию Гельдера порядка 1:

$\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)\Rightarrow|f(x_0+t)-f(x_0)|\le(|f'(x_0)|+1)|t|$ при $|t|<\delta$

Теорема 14. *Если f - 2π-периодична, $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$, в точке x_0 функция удовлетворяет условию Гельдера порядка α_1 справа и α_2 слева $(\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1])$,*

тогда ТРФ функции f(x) сходится в точке x_0 к $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$

Док-во: Пусть $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$
$\Rightarrow f$ удовлетворяет условию Гельдера порядка α в точке x_0 и справа, и слева.
Вспомним,что $D_n(t) \overset{def}{=} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$, $D_n(-t) = D_n(t)$

$(\hat{*}) \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}$

$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt,$

$$S_n(f,x) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+0)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0-0)D_n(t)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{0}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]D_n(t)dt +$$
$$\{\text{проверьте!}\} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\left(f(x+t) - \frac{[f(x_0+0)+f(x_0-0)]}{2}\right)D_n(t)dt = I_n^1 + I_n^2 + I_n^3$$

- $\sin\frac{t}{2} \ge \frac{t}{\pi}$,[10] $t \in [0,\pi]$. Оценим ядро Дирихле: $|D_n(t)| \le \dfrac{1}{2\frac{|t|}{\pi}} = \frac{\pi}{2|t|}$, $t \in [-\pi,\pi]$

  Из условия Гельдера: $|I_1^n| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} ct^{\alpha}\frac{\pi}{2|t|}dt = \frac{c}{2}\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}dt = \frac{c}{2}\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$ при $\delta = \delta(\varepsilon)$

  Аналогично $|I_n^2| \le \frac{\varepsilon}{3}$ (для **всех** n , т.к. все зависящее от n, оценено 1)

- $I_n^3 \to 0$ по лемме перед принципом локализации,
  т.к. подынтегральная функция - 2π-периодична, $\in L^2_R[-\pi,\pi]$
  Значит, $\exists N(\varepsilon, \delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon):\ |I_n^3| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \ge N(\varepsilon)$

Значит: $\left|S_n(f,x) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]\right| < \varepsilon$, $\forall n \ge N(\varepsilon)$ □

Уточненные условия равномерной сходимости ТРФ

$\omega_{[a,b]}(f,\delta) = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2\in[a,b]\\|x_1-x_2|<\delta}} |f(x_1)-f(x_2)|$ - модуль непрерывности f(x) на [a,b]

Определение. *f принадлежит на [a,b] к **классу Гельдера** порядка $\alpha (\alpha \in (0,1])$, (обозначется $f \in C^{\alpha}[a,b]$), если $\omega_{[a,b]}(f,\delta) = \underline{O}(\delta^{\alpha})$.*

При $\alpha = 1$ означает липшицевость функции на $[a,b]$

Замечание: $f \in C^{\alpha}[a,b] \Rightarrow f \in C[a,b]$
Замечание: Если f дифференцируема на [a,b] и $f'(x)$ ограничена на [a,b], то $\alpha = 1$

Док-во: $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$
$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1-x_2)| \le M(x_1-x_2) \le M\delta$, если $|x_1-x_2| \le \delta$ □

[10] вспоминаем курс ТФКП - там этот факт доказывался очень просто графически.

Теорема 15. *Пусть* $f \in C^\alpha[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$.

Тогда ТРФ f(x) равномерно сходится к f(x) на $[-\pi,\pi]$

Док-во: Периодически продолжаем функцию f на $\mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = f(x)$.
По условию : $\exists c_1 : \omega_{[-\pi,\pi]}(f,\delta) \le c_1\delta^\alpha$, докажем : $\omega_{[-2\pi,2\pi]}(f,\delta) \le 2c_1\delta^\alpha$
$x_1,\ x_2 \in [-2\pi, 2\pi]$; $|x_1 - x_2| < \delta$

- Если $x_1, x_2 \in [-\pi,\pi] \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < c_1\delta^\alpha$
- Если $x_1, x_2 \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - 2\pi) - f(x_2 - 2\pi)| < c_1\delta^\alpha$
- Если $x_1, x_2 \in [-2\pi, -\pi] \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 + 2\pi) - f(x_2 + 2\pi)| < c_1\delta^\alpha$
- точка π- между x_1, x_2 :
  $|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(\pi)| + |f(\pi) - f(x_2)| \le c_1|x_1 - \pi|^\alpha + c_1|\pi - x_2|^\alpha \le 2c_1\delta^\alpha$
- аналогично : точка $-\pi$- между x_1, x_2

$$S_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}[f(x+t) - f(x)]D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}f(x)\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} D_n(t)dt =$$

$$I_n^1(x) + I_n^2(x) - I_n^3(x),\ x \in [-\pi,\pi]$$

1. $|I_n^1(x)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} 2c_1|t|^\alpha \frac{\pi}{2|t|}dt = 2c_1\frac{|\delta|^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, \forall x \in [-\pi,\pi]$[11]
   при $\delta(\varepsilon) \in (0,\pi)$: $\frac{2c_1\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$
2. По лемме перед принципом локализации $I_n^2 \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$
3. По ней же $\int\limits_{\delta<|t|<\pi} D_n(t)dt \to 0$, $|f(x)| \le M$, т.к. f периодическая и интегрируемая
   $\Rightarrow |I_n^3| \le M|\int\limits_{\delta<|t|<\pi} D_n(t)dt| \to 0,\ I_n^3(x) \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$
   $\Rightarrow \exists N(\varepsilon, \delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon) :\ |I_n^2(x) - I_n^3(x)| \le \frac{2\varepsilon}{3} \quad \forall x \in R,\ \forall n \ge N(\varepsilon)$

Окончательно $\forall n \ge N(\varepsilon),\ \forall x \in [-\pi,\pi] \quad |f(x) - S_n(f,x)| < \varepsilon$ □

Определение. *Функция f называется* ***кусочно-гельдеровой*** *на* $[-\pi,\pi]$,
если $\exists\ -\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$, *в точках* x_j $\exists f(x_{j-1}+0),\ f(x_j - 0),\ 1 \le j \le n$

а функции $f_j(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (x_{j-1}, x_j) \\ f(x_{j-1}+0) & x = x_{j-1} \\ f(x_j - 0) & x = x_j \end{cases}$

удовлетворяют: $f_j \in C^{\alpha_j}[x_{j-1}, x_j]$, $\alpha_j \in (0,1]$, $1 \le j \le n$

[11]заметьте, что здесь мы использовали принадлежность к классу Гельдера на $[-2\pi, 2\pi]$, а не $[-\pi,\pi]$

Замечание: Положим $f(\pi) = f(-\pi)$ (меняя функцию f в одной точке). Это не изменит ряда Фурье. Продолжим f(x) периодически на $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x \in (x_{j-1}, x_j) & f \text{ удовлетворяет условию Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_j \\ x = x_j \ (1 \le j \le n-1) & \text{усл. Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_{j+1} \text{ справа, } \alpha_j \text{ слева} \\ x = \pm\pi & \text{усл. Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_1 \text{ справа, } \alpha_n \text{ слева} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ТРФ сходится в т. x_j к $\frac{1}{2}[f(x_j - 0) + f(x_j + 0)]$, $1 \le j \le n-1$,
в точках $x = \pm\pi$ к $\frac{1}{2}[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$, в остальных точках x к f(x)

Теорема 16. *f - кусочно-гельдерова, в обозначениях в определении:* $[a, b] \subset (x_{j-1}, x_j)$.
Тогда ТРФ функции f(x) сходится равномерно к функции f(x) на [a,b]

Док-во: $\exists \delta > 0 \quad [a, b] \subset (x_j + 2\delta, x_j - 2\delta)$

введем $g(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in [x_{j-1} + \delta, x_j - \delta] \\ \text{линейна на } [-\pi,\ x_{j-1} + \delta], [x_j - \delta,\ \pi] \\ g(-\pi) = g(\pi) = 0 \end{cases}$

ТРФ функции g(x) сходится равномерно к g(x) по теореме 15
и применим к функциям $f_1 = g,\ f_2 = f$, следствие уточненной леммы Римана ☐

Определение. *f принадлежит **классу Дини-Липшица** на [a,b],*
если $\omega_{[a,b]}(f, \delta) = \overline{o}\,(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}})$

Теорема 17 (Дини-Липшица). *<u>Без доказательства</u>*
Пусть f принадлежит на $[-\pi, \pi]$ классу Дини-Липшица,
тогда ТРФ функции f(x) сходится равномерно к f(x) на $[-\pi, \pi]$.

Замечание: $\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{\sqrt{l}}, \frac{\sin\frac{\pi}{l}x}{\sqrt{l}}, \cdots, \frac{\cos\frac{\pi n}{l}x}{\sqrt{l}}, \ldots$ - ОНС на $[a,\ a + 2l]$, замкнута в $L^2_R[a, a + 2l]$

$f \in L^2_R[a, a + 2l] \quad f \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\frac{\pi k}{l}x + b_k \sin\frac{\pi k}{l}x)$,

где $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(t)\cos(\frac{\pi k}{l}t)dt,\ b_k = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(t)\sin(\frac{\pi k}{l}t)dt$

Задача к экзамену: Написать равенство Парсеваля для f через a_k, b_k

Преобразование Фурье

Определение. $f \in L_R(\mathbb{R})$, *(иногда обозначают $L_1(\mathbb{R})$) если f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b] \subset R$, и, кроме того,* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ *сходится*

Пример: $f(x) = e^{-x^2}, f(x) \in L_R(\mathbb{R})$
Лемма. *Пусть $f \in L_R(\mathbb{R})$.*

Тогда $\forall x \in R \quad \exists \hat{f}(x) \stackrel{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ixt}dt = (*)$, *причем*

a) $\hat{f}(x) \in C(R)$,
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \hat{f}(x) = 0$

Док-во:

- $f(t)e^{ixt}$ интегрируема по Риману на любом отрезке (как произведение интегрируемых функций), $|f(t)e^{ixt}| = |f(t)| \Rightarrow (*)$ сходится абсолютно и равномерно по x на R.

- Докажем пункт a
  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 : \int\limits_{R\setminus[-A,A]} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**)$

  $\forall x \in R \quad \hat{f}(x+\Delta x) - \hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{it(x+\Delta x)} - e^{ixt})\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]\,dt =$

  $= \int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]\,dt + \int\limits_{R\setminus[-A,A]} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]\,dt$. Оценим оба интеграла:

- $|\int\limits_{R\setminus[-A,A]} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]dt| \le \int\limits_{R\setminus[-A,A]} \Big|f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]\Big|dt \le 2\int\limits_{R\setminus[-A,A]} |f(t)|dt \le \frac{2\varepsilon}{3}$

- $1-e^{iy}$ непрерывна по y $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall y \in (-\delta,\delta) \quad |1-e^{iy}| < \frac{\varepsilon}{3(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt+1)}$

  $\Rightarrow \Delta x \in (-\frac{\delta}{A}, \frac{\delta}{A}) \Rightarrow t\Delta x \in (-\delta,\delta) \Rightarrow$

  $\Big|\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{ixt}[1-e^{it\Delta x}]dt\Big| \le \int\limits_{-A}^{A} |f(t)||1-e^{it\Delta x}|dt < \frac{\varepsilon}{3}\frac{\int\limits_{-A}^{A}|f(t)|dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt+1} \le \frac{\varepsilon}{3}$

Окончательно $|\hat{f}(x+\Delta x) - \hat{f}(x)| < \varepsilon$ при $\forall \Delta x \in (-\frac{\delta}{A}, \frac{\delta}{A}) \quad \forall x \in R$

- Докажем пункт b: возьмем $A > 0 : \int\limits_{R\setminus[-A,A]} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}$,

  $|\hat{f}(x)| \le |\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{itx}dt| + \int\limits_{R\setminus[-A,A]} |f(t)|dt < |\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{itx}\,dt| + \frac{\varepsilon}{3}$

  Строим ступенчатую функцию $g(t) : \;\; f(t) \ge g(t)$ всюду на [-A,A] , кроме конечного числа точек и условием:
  $\int\limits_{-A}^{A} f(t)dt - \int\limits_{-A}^{A} g(t)dt = \int\limits_{-A}^{A} (f(t)-g(t))dt < \int\limits_{-A}^{A} |f(t)-g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}$

  Раз f интегрируема по Риману $\Rightarrow \exists\, T : -A = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = A :$
  $\int\limits_{-A}^{A} f(t)dt - s_T(t) < \frac{\varepsilon}{3}$, где $s_T(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta t_k$, $m_k = \inf\limits_{t\in[t_{k-1},t_k]} f(t)$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

  Пусть $g(t) = \begin{cases} m_k, t \in (t_{k-1}, t_k) \\ t \in \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} - \text{произвольно} \end{cases} \quad \Rightarrow \int\limits_{-A}^{A} g(t)dt = s_T(t)$

- $|\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{itx}\,dt| = |\int\limits_{-A}^{A} (f(t)-g(t))e^{itx}\,dt + \int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}\,dt| \le$

  $\le \int\limits_{-A}^{A} |f(t)-g(t)|\,|e^{itx}|\,dt + |\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}\,dt| < \frac{\varepsilon}{3} + |\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt|$

  $\Rightarrow |\hat{f}(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt|$

  Оценим $\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt$:

  $|\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt| = \Big|\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} m_k e^{itx}dt\Big| = \Big|\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\frac{e^{it_kx}-e^{it_{k-1}x}}{ix}\Big| \le \frac{1}{|x|}\sum\limits_{k=1}^{n} 2|m_k| = \frac{c}{|x|}$

  $\Rightarrow |\int\limits_{-A}^{A} g(t)e^{itx}dt| < \frac{\varepsilon}{3}$ при достаточно больших по модулю x

  $\Rightarrow |\hat{f}(x)| < \varepsilon$ при достаточно больших $|x|$, ч.т.д.

$\square$

Следствие: Если $f \in L_R(\mathbb{R})$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos xt dt = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin xt dt = 0$

Док-во: $e^{ixt} = \cos xt + i\sin xt$ и применим пункт b) $\square$

Определение. *Функция $\hat{f}(x)$ называется **преобразованием Фурье(Фурье-образом)** функции f(t).*

Определение. *$f(t) \in L_R(\mathbb{R})$ разложима в точке t_0 в интеграл Фурье, если существует v.p. $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{+R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx$*

Теорема 18. *Если $f \in L_R(\mathbb{R})$ и в точке t_0 f удовлетворяет условию Гельдера порядка α слева и справа,*

$$\textit{тогда v.p. } \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{-it_0x}\, dx = \frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2} \qquad (***)$$

Вспомогательное утверждение:

$f \in L_R(\mathbb{R})$, $\forall t_0 \in R$ $\quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+t_0)\frac{\sin Ru}{u}\, du$

Док-во утверждения:

$\int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}e^{-it_0x}dt = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ix(t-t_0)}dt = \{u = t - t_0\} =$

$= \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+t_0)e^{ixu}du =^{12} \left\{ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists A(\varepsilon) > 0 : \forall A_1, A_2 \geq A \qquad \int\limits_{R\setminus[-A_1,A_2]} |f(u+t_0)|du < \frac{\varepsilon}{2R} \right\} =$

$= \underline{\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)e^{ixu}du}$ +остаток.

- $|\text{остаток}| = \left| \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{R\setminus[-A_1,A_2]} f(u+t_0)e^{ixu}du \right| \leq \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{R\setminus[-A_1,A_2]} |f(u+t_0)|du <$
  $< \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varepsilon}{2R}du = \varepsilon$

- В подчеркнутом интеграле меняем порядок интегрирования:[13]
  $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)e^{ixu}du = \int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)du \int\limits_{-R}^{R} e^{ixu}dx =$
  $= \int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)du\, \frac{e^{iuR}-e^{-iuR}}{iu} = 2\int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)\frac{\sin uR}{u}du$

Таким образом, $| \int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx - 2\int\limits_{-A_1}^{A_2} f(u+t_0)\frac{\sin uR}{u}du| < \varepsilon \quad \forall A_1, A_2 \geq A(\varepsilon)$

$\Rightarrow \int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+t_0)\frac{\sin uR}{u}du$, делим на 2π и получаем утверждение $\square$

[12] f только интегрируема, а не непрерывна - не можем просто поменять порядок интегрирования
[13] это можно делать по т. из прошлого семестра ?

Док-во теоремы: $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin Ru}{u}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\sin Ru}{u}du = \{\text{инт. Дирихле}, \ R > 0\} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\frac{f(t_0+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin Ru}{u} f(t_0+0)\,du$

$\frac{f(t_0-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\sin Ru}{u} f(t_0-0)\,du$

Условие Гельдера порядка α слева и справа в $t_0 \ \Rightarrow \ \exists\, c > 0, \ \exists\, \delta_0 > 0:$

$\begin{cases} |f(t_0+u) - f(t_0+0)| < Cu^\alpha & u \in (0, \delta_0) \\ |f(t_0+u) - f(t_0-0)| < C|u|^\alpha & u \in (-\delta_0, 0) \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \ 0 < \delta < \delta_0 \ \Rightarrow \ \frac{C\delta^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{5}$. В след. выкладке используем это δ:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx - \frac{1}{2}[f(t_0+0) + f(t_0-0)] \quad = \quad \{\text{вспом. утверждение}\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+t_0)\frac{\sin Ru}{u}du - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t_0+0)\frac{\sin Ru}{u}du \quad - \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(t_0-0)\frac{\sin Ru}{u}du =$$

$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta [f(u+t_0) - f(t_0+0)]\frac{\sin Ru}{u}du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 [f(u+t_0) - f(t_0-0)]\frac{\sin Ru}{u}du +$

$+ \int\limits_{R\setminus[-\delta,\delta]} f(u+t_0)\frac{\sin Ru}{u} - \frac{1}{\pi}f(t_0+0)\int\limits_\delta^\infty \frac{\sin Ru}{u}du - \frac{1}{\pi}f(t_0-0)\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin Ru}{u}du = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5$

- $|I_1| < \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta Cu^\alpha \frac{1}{u}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta Cu^{\alpha-1}du = \frac{C\delta^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{5}$ (из выбора δ)
  $|I_2| < \frac{\varepsilon}{5}$ - аналогично $\forall R > 0$
- $I_3: \phi(u) = \begin{cases} \frac{f(u+t_0)}{u} & |u| \geq \delta \\ 0 & |u| < \delta \end{cases}, \phi(u) \in L_R(\mathbb{R}) \Rightarrow$ по следствию основной леммы
  $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)\sin(Ru)du = 0 \Rightarrow I_3 < \frac{\varepsilon}{5}$ для достаточно больших R
- $\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin Ru}{u}du = \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\sin Ru}{u}du = \{Ru = y\} = \int\limits_{\delta R}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy \ \xrightarrow{R\to\infty} \ 0,$
  $\Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty} I_4 = \lim\limits_{R\to\infty} I_5 = 0 \ \Rightarrow \ |I_4| < \frac{\varepsilon}{5}, |I_5| < \frac{\varepsilon}{5}$ для достаточно больших R

Значит, $|I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5| < \varepsilon$ для достаточно больших R $\Rightarrow (***)$:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{+R} \hat{f}(x)e^{-it_0x}dx = \frac{f(t_0+0) + f(t_0-0)}{2}$$

$\square$

Подведем итог :

Пусть $f(x) \in L_R(R)$ $\quad f(x) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, $x \in R$

f удовлетворяет условию Гельдера в каждой т. $x \in R$

$$\text{тогда} \begin{cases} \hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t)dt & - \text{определена на}\, \mathbb{R} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\hat{f}(x)dx & - \text{справедливо (обратное преобразование Фурье)} \end{cases}$$

Вторая формула также называется формулой обращения.

Замечание: формулы остаются справедливыми, если перенести минус в показателе экспоненты из второй формулы в первую - иногда преобразование Фурье определяют так.
Коэффициент $\frac{1}{2\pi}$ тоже иногда кочует (а то и разносится на две формулы в виде $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$)

Замечание: все вышесказанное справедливо и при $f(x)$ - комплексной, докажите это, опираясь на случай $f(x)$ - вещественной.

Упражнение: определите Фурье-образы чисто вещественных (чисто мнимых) четных и нечетных функций. Далее идет результат для вещественных четных и нечетных функций

- Пусть $f(t)$ - **четная вещественная**: $f(t) = f(-t)$

$\hat{f}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx + i \sin tx) f(t)dt =$

$= 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \cos tx f(t)dt$ - 'косинус'-преобразование Фурье, $\hat{f}(x)$ - *четная вещественная*

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx - i \sin tx)\hat{f}(x)dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \hat{f}(x) \cos tx dx$ - обратное 'косинус'-пр. Фурье

- Пусть $f(t)$ - **нечетная вещественная**: $-f(t) = f(-t)$

$\hat{f}(x) = 2i \int\limits_{0}^{+\infty} \sin tx f(t)\, dt$ - 'синус'-преобразование Фурье, $\hat{f}(x)$ - *нечетная мнимая*

$f(t) = -\frac{i}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin tx\, \hat{f}(x)\, dx$ - обратное 'синус'-преобразование Фурье

Пример функции $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, ТРФ которой расходится в нуле

Приведем пример, показывающий существенность условий Гельдера или Дини-Липшица для сходимости ТРФ. Его придумал Фейер в начале XX века.

Возьмем неотрицательный сходящийся ряд: $b_n \geq 0,\ \forall n \in N,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится.

Какой именно - решим потом, пока проведем исследования для произвольного b_n

При $x \in [0,\pi]$ функцию определим: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$,

$|b_n \sin nx| \leq b_n \Rightarrow$ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi] \Rightarrow f \in C[0,\pi]$

При $x \in [-\pi,0]$ доопределим четным образом: $f(-x)=f(x) \ \Rightarrow\ f \in C[-\pi,\pi],\ f(-\pi)=f(\pi)$

Частичная сумма ТРФ фунции f(x) в нуле:

$S_k(f,0) = \frac{a_0}{2} + a_1 + \dots + a_k$, т.к. синусы не дают вклада при $x=0$

$$a_j = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos jx\,dx = \{\, f(x)\cos jx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos jx - \text{сходится абс. и равномерно, можем почленно интегрировать}\} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int\limits_0^{\pi} 2\sin nx \cos jx dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int\limits_0^{\pi} (\sin{(n-j)x} + \sin{(n+j)x})dx$$

После перегруппировки получим:

$$S_k(f,0) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int\limits_0^{\pi} [\sin nx + \sin{(n-1)x} + \sin{(n+1)x} + \sin{(n-2)x} + \sin{(n+2)x} + \cdots$$
$$\cdots + \sin{(n-k)x} + \sin{(n+k)x}]dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_{nk},$$

где $\beta_{nk} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} [\sin nx + \sin{(n-1)x} + \dots + \sin{(n-k)x} + \sin{(n+k)x}]dx$

Покажем,что $\beta_{nk} \geq 0 \quad \forall n,\, k \in N$:

Если $n \geq k$, то в [...] входят $\sin mx,\ m \geq 0 \Rightarrow \beta_{nk} \geq 0$

Если $n < k$, то $[\underbrace{\sin{(n-k)} + \dots + \sin{(k-n)x}}_{0} + \sin{(k-n+1)x} + \dots + \sin{(k+n)x}] =$

$= \sin{(k-n+1)x} + \dots + \sin{(k+n)x} \Rightarrow \beta_{nk} \geq 0$

$b_n \geq 0,\ \beta_{nk} \geq 0 \ \Rightarrow\ S_k(f,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\beta_{nk} \geq b_k\beta_{kk}$

$$\beta_{kk} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} [\sum_{j=1}^{2k} \sin jx]dx = \{\int\limits_0^{\pi} \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m}\Big|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^m}{m} \geq 0,\ m \in N\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1}) > \frac{2}{\pi}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k}) = \frac{1}{\pi}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}) \geq^{14} \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{k+1}\frac{dx}{x} = \frac{\ln{(k+1)}}{\pi} > \frac{\ln k}{\pi}$$

$S_k(f,0) \geq b_k\beta_{kk} \geq \frac{b_k \ln k}{\pi}$

Возьмем $b_k = \begin{cases} \frac{1}{m^2} & k = 2^{m^3} \\ 0 & \text{при остальных}\, k \end{cases},\ b_k \geq 0,\ \forall k \in N,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ - сходится

при $k = 2^{m^3}$: $S_k(f,0) \geq \frac{b_k \ln k}{\pi} \geq \frac{1}{\pi}\frac{1}{m^2}\ln 2^{m^3} = \frac{1}{\pi}m \ln 2 \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

значит $S_i(f,0)$ не может иметь конечного предела

[14] доказывается графически или оценкой интеграла

Вдалеке от формальностей (редакторский бред)

Как уже намекалось, ОНС являются в некотором смысле "счетным" продолжением идеи ОНБ в конечномерном пространстве.

В конечномерном случае мы исследовали разложение по произвольному базису, сведя задачу нахождения коэффициентов к решению СЛАУ, доказали существование и единственность разложения.

В бесконечномерном мы сразу перешли к ОНС, т.к. единственный для нас способ получить коэффициенты разложения - скалярное произведение.

Различных ОНС в бесконечномерном пространстве может быть великое множество (одни перестановки порядка векторов в ОНС и выбор "подсистем"[15] дают континуум вариантов). Из примера с "подсистемами" следует простая мысль - разложение элемента не по всем ОНС будет стремиться к нему по норме, т.е. разложение не будет "адекватным" .

Поэтому мы ввели понятие замкнутости ОНС - потребовали существование[16] разложения для каждого элемента. С однозначностью разложения проблем нет - читателю предлагается проверить, что два различных разложения по ОНС не могут стремиться к одному элементу по норме.

Но в почти евклидовом пространстве есть проблема - один ряд может сопоставляться двум разным элементам f и g: $\|f-g\|=0$ (например, функции, отличающиеся в одной точке), что означает невозможность по ряду Фурье однозначно восстановить элемент. Полнота фактически означает возможность по ряду восстановить элемент (пример : триг. система полна в $\hat{\mathrm{C}}[-\pi,\pi]$ - ряду Фурье соответствует единственная функция [17], хотя он к ней не обязан стремиться даже поточечно).

Ну а интеграл Фурье - это "континуальное" продолжение все той же идеи.

Введем скалярное произведение для комплекснозначных функций, опред. на $X\subset\mathbb{R}$[18]

$$(f,g)_X=\int\limits_X f(x)\overline{g(x)}dx$$

тогда ряд Фурье: $f(x)\rightsquigarrow\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}_k\psi_k(x)\quad \hat{f}_k=(\,f,\,\psi_k\,)_{[-\pi,\pi]},\ \psi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ikx}\,,\ \ (\psi_i,\psi_j)=\delta_{ij}$

интеграл Фурье: $f(x)\rightsquigarrow\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_t\psi_t(x)\,dt\quad \hat{f}_t=\,f,\,\psi_t\,)_{\mathbb{R}},\qquad \psi_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{itx}\,,$

$(\psi_{t_1},\psi_{t_2})=\delta\,(t_1-t_2)$ - дельта-функция Дирака (обобщенная функция).[19]

По сути, мы написали разложение по континуальной системе функций (язык чешется сказать - континуальному базису - но нет, удержусь).

---

[15]подсистемой ОНС $\{\psi_i\}$ назовем $\{\psi_{k_i}\}$ - которая тоже будет ОНС

[16]Просто разложение по ОНС есть всегда - теперь я подразумеваю "адекватное" разложение, которое будет стремиться к своему элементу по норме

[17]Догадались, как её восстановить по ряду Фурье? Это неплохая задачка для проверки памяти.

[18]Здесь и далее опущены все требования на функции, важные детали в духе главного значения интеграла, его возможной неримановости, возможной принадлежности образа Фурье к обобщенным функциям - я не претендую на математическую строгость

[19]Про дельта-функцию можно сказать много интересного - поэтому я помолчу, а если вам интересно - вы сами все узнаете. Это "континуальная" замена дельты Кронекера. Кстати, не пытайтесь доказать это равенство - без регуляризации интеграла (либо условий на пространство функций) это безнадежно.

А зачем? (редакторский бред)

Часто у студентов первого курса возникает логичный вопрос: "И зачем это все?".
Ко второму курсу этот вопрос зачастую отпадает - правда, не из-за того, что ответ был найден. Попытаемся немного развеять ощущение идеальной бесполезности

- Возьмем случайную одномерную величину, имеющую плотность распределения f(x).
  и её характеристическую функцию $\chi(t) = \mathbb{E}\, e^{itX} = \int\limits_R e^{itx} f(x)dx$ - узнаем в ней Фурье-образ плотности.
  Ну а в формуле обращения - обратное преобразование Фурье.
  - А если плотности, т.е. производной функции распределения F(x) нет? Например, у нас дискретная случайная величина?
  - Среди обычных функций производной нет. А среди обобщенных есть - при этом Фурье-образом обобщенной производной будет обычная функция.
    Правда, всё это (и обобщенные функции, и матожидание) - лишь замаскированный интеграл Лебега
- Интеграл Фурье (многомерный) применяется для решения уравнений математической физики, использующих оператор Лапласа (иногда позволяя найти фундаментальную систему решений)
  - Уравнения теплопроводности, диффузии
  - Уравнения струны, мембраны (уравнения волновых процессов)
  - Уравнение Шредингера эволюции квантовой частицы
  - Система уравнений Максвелла в виде для 4х-потенциала с калибровкой Лоренца
- Ряды Фурье и интегралы Фурье важны при частотном анализе сигнала - на самом деле, они просто "раскладывают" функцию на частоты
  Периодические функции раскладываются при помощи ряда Фурье по волнам (волновым функциям) кратных частот (и только по ним!). Кстати, равенство Парсеваля в данном случае имеет физический смысл аддитивности энергии волн разных частот. [20]
- Ряды Фурье можно использовать для компактного и удобного представления изображений и звукового сигнала - по сути, хранится просто конечная сумма ряда Фурье. Согласитесь, звук (волну по своей природе) и представлять логичнее в виде волн. Заодно выполняется другая важная задача - отсеянье скачкообразных шумов. В качестве тренировки предлагаю вспомнить другие методы аппроксимации, и понять, чем они в данном случае лучше или хуже.

[20] Коли уж коснулся - у интеграла Фурье есть равенство, аналогичное равенству Парсеваля. Только оно называется свойством сохранения L_2-нормы.

Вообще об этом курсе (редакторский бред)

Курс довольно узкий и общипанный до минимума - того минимума, которого достаточно, чтобы принимать экзамен. При этом он несодержателен - выбор магических коэффициентов, разбиение разницы двух функций на 3,4,5 интегралов(по желанию), оценка подынтегрального выражения сверху - явно не те методы, которые надо выучивать студенту.[21] Отдельным пунктом - отсутствие объяснений логики в доказательствах, хотя логика в курсе действительно есть и она хорошо продумана.

Я бы с огромной радостью перекроил многие вещи в курсе. Вот те вещи, которые я бы изменил:

1. Добавил бы сходимость и равномерную сходимость функций, зависящих от параметра (так сделано в ИСС). Негоже проходить мимо этого пункта и сразу бежать к сходимости интегралов - все равно, что проходить ряды без последовательностей. Неплохо бы добавить предел, порожденный метрикой - странно оставлять на третий курс то, что надо было пройти на первом.

2. Довольно серьезной переработки требует фрагмент, посвященный ядрам Дирихле и Фейера. Принятые нами ядра неудобны, и смысл от этих обозначений практически теряется, но это дань традиции, старой недальновидной традиции. Далее, вместо занудного выписывания доказательств десятков лемм/следствий/теорем о сходимости сумм, куда как полезнее было бы просто посмотреть на эти ядра и их поведение в окрестности нуля и вне её - это проливает свет на поведение частичных сумм. Вместо этого в курсе предлагается учить огромное количество абсолютно незапоминаемого текста. Свел бы под единый знаменатель и интеграл Фурье, введя интегральное ядро : $I_R(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin Ru}{u/2}$. Кстати, сравните с исправленным ядром Дирихле: $\overline{D_n}(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)u}{\sin u/2}$.

3. Использовать синусы и косинусы - это безвкусно. Подчас те же магические (для вещественного случая) доказательства в комплексных числах и короче, и понятнее, и красивее. Лучше запомнить одну формулу для комплексного случая, чем 5 для вещественного. [22]Вдобавок, в комлексных числах проще увидеть сходство интеграла и ряда Фурье (например, у ряда Фурье в комплексной форме тоже надо считать главное значение ряда). Вообще, мне кажется, даже после 2х курсов можно понять, что sin и cos - это всего лишь порождения мнимой экспоненты, не влезающей в $\mathbb{R}$. Далеко не всегда стоит сразу овеществлять решение.

4. Показал бы родственную связь Ряда Фурье и Ряда Лорана, а также Интеграла Фурье и Интеграла Лапласа.

Но методичка писалась для того, чтобы помочь сдать экзамен. Так что - увы, но придется оставить всё так до лучших времен.

[21]Теперь, когда я сдал, наконец, все 4 семестра матанализа, я могу говорить о нем всё, что думаю.
[22]Кстати, попробуйте написать в синусах и косинусах многомерный ряд (или интеграл) Фурье. Почувствуйте разницу.

Лекции по математическому анализу, факультет ВМиК, 4й семестр

Лекции составлены по курсу Домриной Александры Владимировны, прочтенному на третьем потоке ВМиК в 2009 году

20 сентября 2009 г.

Печатная версия лекций подготовлена студентами 217-й группы:

Рогожников Алексей

(редакция, верстка, синхронизация работы)

Стрелковский Никита

(осн. TEX- набор)

Федорова Саша

(автор рукописного варианта, поиск опечаток)

Молчанов Александр

(TEX- набор)