Учебники

1) А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов „ТФКП"

2) А.И. Маркушевич → Теория аналитических функций
→ ~~Введение~~ Краткий курс теории аналитических ф-й

[Лекция 1] 09.02.06

Тема 1.

§ Комплексные числа и действия с ними.

§1 ~~Введение~~

$z = (a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$

$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$

$\exists\ z_1 = (a_1, b_1) \quad z_2 = (a_2, b_2)$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Пары вида $(a, 0)$ можно отождествить с вещ. числами a.

$\exists\ i = (0, 1)$

$(0,1)(0,1) = (-1, 0) = -1 \Rightarrow i^2 = -1$

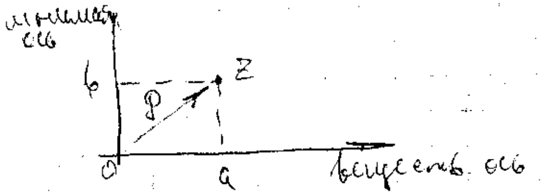
$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$ – алгебраич. форма числа z

$z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$ – сопряжённое число

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$

§2 Комплексная плоскость



$0 = (0, 0)$

$z = (a, b)$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ - модуль числа z

φ - аргумент z.

$\varphi = \operatorname{Arg} z = \{\varphi_0 + 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z}\}$, $\left[\begin{array}{l}\varphi_0 \in [0, 2\pi) \\ \varphi_0 \in (-\pi, \pi]\end{array}\right.$

φ_0 - главное значение аргумента

$\varphi_0 = \arg z$.

$a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$ $\quad \varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

если $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1 z_2 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\rho = \rho_1\rho_2 \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k \; (\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi})$

$\frac{z_1}{z_2} = r(\cos\psi + i\sin\psi)$

$r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\psi = \varphi_1 - \varphi_2 \pmod{2\pi}$

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, $n \in \mathbb{N}$ ф-ла Муавра

$\exists \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (пока формально)

$z = \rho e^{i\varphi}$ - показательная форма числа z

$z = \rho e^{i\varphi}$

$z_0^n = z$, z_0 - корень n-й степени из числа z.

$\exists z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$

$\rho_0^n e^{in\varphi_0} = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow$

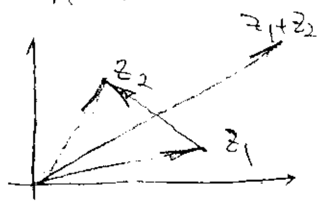
$\Rightarrow \rho_0^n = \rho$, $n\varphi_0 = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\rho_0 = \sqrt[n]{\rho}$ $\quad \varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + 2\frac{k}{n}\pi$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi}{n} + 2\frac{n-1}{n}\pi$

$\Rightarrow$ Из ненулевого комплекс. числа $\exists n$ корней n-й степени



$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

$\overrightarrow{z_1 z_2} = \{a_2 - a_1, b_2 - b_1\}$ - геом. изобр-е числа $z_2 - z_1$

$|z_2 - z_1|$

$|z - z_0| = R$, $|z - z_0| < R$, $|z - z_0| > R$

окр-ть радиуса R с центр. в т. z_0 — круг — множество точек, вне по отн-ю к кругу

—//—

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (из нер-ва тр-ка)

§3. Предел последовательности

$K_\varepsilon(z_0)$ – круг радиуса ε с центром в z_0

$K_\varepsilon(z_0)$ – ε-окр-ть т. z_0.

$|z - z_0| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N_\varepsilon \; |z_n - z_0| < \varepsilon$

$z_0 = a_0 + ib_0$, $z_n = a_n + ib_n$.

$\sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} < \varepsilon$.

Т.е. сх-ть посл-ти компл. чисел равносильна сх-ти двух вещ. посл-й

Теор. 1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0 \end{cases}$

$z_n = a_n + ib_n$
$z_0 = a_0 + ib_0$

Опр $\{z_n\}$ – огранич. посл-ть, если $\exists M > 0 : |z_n| \leq M \; \forall n$

Теор. 1.2 (т. Больцано-Вейерштрасса)

Из всякой ограниченной посл-ти компл. чисел можно извлечь сходящуюся подпосл-ть.

Опр $\{z_n\}$ – фунд. посл., если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$: $\forall n, m \geq N$ $|z_n - z_m| < \varepsilon$

Теор. 1.3 (критерий Коши)

Посл. $\{z_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ она фундамен-тальна.

§4 Бесконечно удаленная точка

Вводим особое компл. число ∞:

1. $|\infty| = +\infty$
2. $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$
3. Если $\alpha \neq 0, \infty$ $\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \cdot \infty = \infty$
4. $\frac{a}{\infty} = 0$
5. $\frac{\infty}{a} = \infty$
6. $\frac{\alpha}{0} = \infty$
7. $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ не определены.

Окрестностью ∞ считают $\forall$ мн-ва, заданные нер-ми $|z| > R$

$\forall A > 0 \; \exists N : |z_n| > A \; \forall n \geq N$ – б.б. посл-ть
Она сх-ся к числу ∞.

§5. Множества точек на комплексной плоскости

$\mathbb{C}$ – мн-во компл. чисел (конечн.)
$\overline{\mathbb{C}}$ – мн-во — " — (расшир.) (добавл. ∞)

$M \subset \mathbb{C}$ z_0 – внутр. т. M, если $z_0 \in M$ вместе с некот. окр-ю

M – открытое мн-во, если если $\forall$ т. мн-ва принадл. ему с нек. окр-ю.

Область 1) открытое мн-во 2) связное мн-во

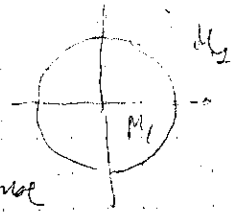
(связность – $\forall$ 2 точки мн-ва их можно соед-ть непр. кривой, целиком леж. в M.

$|z| < R$ — открыт. круг

$\rho_1 < |z-z_0| < \rho_2$ — открыт. кольцо } области

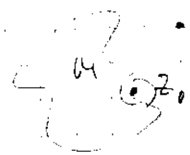
$|z-z_0| \le r$ — ~~не~~ не откр. мн-во.

$|z| \ne 1$ — откр., но не связн.



$M = M_1 \cup M_2$,

M_1 и M_2 — связные компоненты



z_0 — граничн., если в $\forall$ ε окр. ти есть точки, прин. мн-ву и не прин.

Мн-во всех таких точек — граница.

$M \cup \partial M$ — замкн. область

область

рассм. е. от z_0 до M

$\rho(z_0, M) = \inf\limits_{z \in M} |z - z_0|$

① если z_0 — предельн. точка M, то $\rho(z_0, M) = 0$

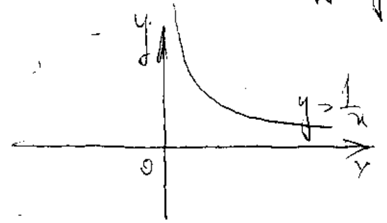
② если M — замкн. и $z_0 \in M$, то $\rho(z_0, M) > 0$.

16.02.06 [Лекция 2]

$M_1, M_2 \in \mathbb{C}$

$\rho(M_1, M_2) = \inf |z_1 - z_2|$ $z_1 \in M_1, z_2 \in M_2$.

Теор. 1.4 $\exists$ M_1 и M_2 — замкн. мн-ва (неперес.) и M_1 — ограниченное мн-во! тогда $\rho(M_1, M_2) > 0$.



$M_1 = \{O_x \cup O_y\}$

$M_2 = \{y = \frac{1}{x}\}$

$\rho(M_1, M_2) = 0$.

(Д/з) д-ть.

Тема 2.

<u>Функции комплексной переменной</u>

<u>Непрерывность и дифференцируемость</u>

Опр. $E \subset \mathbb{C}$, $w = f(z)$.

$\forall z \in E \to$ одно <u>или неск.</u> зн-й w.

Примеры функц. зависимостей

$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, z^n $(n \in \mathbb{N})$

$\sqrt[n]{z}$ $(n \in \mathbb{N})$ — пример многозначной (n-значн.) ф-и

$\mathrm{Arg}\, z$ — пример бесконечнозначной ф-и

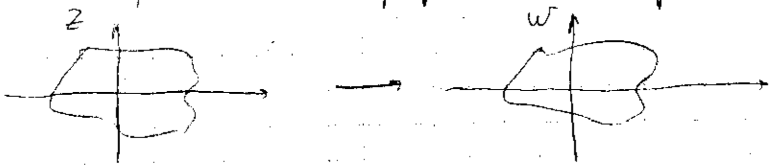
Вперёд будем рассматр. только однозначн. ф-и $w = f(z)$

$\mathrm{dom}\, f$ (domain) — обл. опр-я f

$\mathrm{im}\, f$ (image) — обл. зн-й f

$E \subset \mathrm{dom}\, f$

$f(E)$ – мн-во образов точек из E.



$z = x+iy$, $w = u+iv$

$w = f(z) \Leftrightarrow w = u(z) + i\,v(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Прим.

$w = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2ixy}_{v(x,y)}$

§1. Предел функции в точке

$E \subset \mathrm{dom}\, f$

z_0 – предельн. точка E.

Опр. $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z) = A$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $|f(z) - A| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$, $z \in E$

$z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = f(z) = u + iv$

$A = B + iC$.

Теор. 2.1 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = B \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = C \end{cases}$

Следствие $\exists \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = A_1$ $\exists \lim\limits_{z\to z_0} h(z) = A_2 \Rightarrow$

$\lim\limits_{z\to z_0} (g \pm_{\times} h) = A_1 \pm_{\times} A_2$ / если $A_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{z\to z_0} \left(\frac{g}{h}\right) = \frac{A_1}{A_2}$.

$\exists E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathrm{dom}\, f = [\alpha, \beta]$.

§2. Непрерывность

$E \subset \mathrm{dom}\, f$.

z_0 – предельн. точка E; $z_0 \in E$.

$f(z)$ непрерывна в т. z_0, если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Если f непр. в кажд. т. E, то говорят, что f непр. на E.

Обозн. $C(E)$ – мн-во ф-й непрерывных на E

Теор. 2.2 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases}$

Следствие 1) Если g и h непр. в т. $z_0 \Rightarrow$ $g \pm_{\times} h$ непр. в т. z_0. Если, кроме того, $h(z_0) \neq 0$, то $\frac{g}{h}$ непр. в т. z_0

2) Пусть $w = f(z)$ непр. в т. z_0, а $\zeta = g(w)$ непр. в т. $w_0 = f(z_0) \Rightarrow$ $\zeta = g(f(z))$ непр. в т. z_0.

$\exists E$ – компакт (замкнутое ограничен. мн-во)

3) Если $f(z) \in C(E) \Rightarrow f$ ограничена на E:

$\exists M > 0$: $|f(z)| \leq M$ для $\forall z \in E$

а) Если $f(z) \in C(E) \Rightarrow |f(z)|$ достигает на E своей точной нижней и верхней граней.

б) Если $f(z) \in C(E) \Rightarrow f(z)$ равномерно непр. на E.

$\exists\ E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ определяет непрерывную кривую ($\lambda(t)$ - непр.) (дугу, линию) γ

параметрич. ур-е кривой γ

Прим. $z = a\cos t + i\, b\sin t = \lambda(t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$x = a\cos t,\ y = b\sin t$ - эллипс.

(Д/з) Д-ть, что мн-во точек непрерывной кривой есть замкнутое мн-во

§3. Производная, дифференциал

$E \subset \mathrm{dom}\, f$.

z_0 - предельн. точка E.

$z_0 \in E$.

Если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то он называется производной ф-и f в т. z_0 и обозн.

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$$

Говорят, что $f(z)$ дифференц. в т. z_0

$z - z_0 = \Delta z$; $f(z) - f(z_0) = \Delta f$

Меор. 2.3 $f(z)$ диффер. в т. $z_0 \Leftrightarrow$
$\Delta f = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$

$\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

$A = f'(z_0)$

$w = f(z)$ дифф. в т. z_0

$\zeta = g(w)$ дифф. в т. $w_0 = f(z_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \zeta = g(f(z)) = G(z)$ дифферен-ма в т. z_0,
$G'(z_0) = f'(z_0)\, g'(w_0)$

§4. Условия Коши - Римана

$w = f(z)$ диффер. в т. $z_0 \in G$, G - область

$w = u + iv$; $u(x,y)$, $v(x,y)$

Меор. 2.4 (усл-е Коши - Римана)

Пусть обл. $G \subset \mathrm{dom}\, f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$f(z)$ дифф. в т. $z_0 \in G \Leftrightarrow u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в т. (x_0, y_0)

$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$, $u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0)$ (CR)

$\square$ ($\Rightarrow$) $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon \cdot \Delta z$

$z = x + iy$

$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$

$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$; $f'(z_0) = a + ib$

$f = u + iv$; $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$

$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y$

$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y$

Отсюда u, v - дифф. в т. (x_0, y_0)

$$\left.\begin{aligned} a &= u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ b &= v'_x(x_0,y_0) = -u'_y(x_0,y_0) \end{aligned}\right\} (*)$$

($\Leftarrow$) Примем обозн-е $(*)$ усл-е дифф-ти u и v

$$① \begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha|\Delta z|, & \alpha, \beta \to 0 \text{ при } |\Delta z| \to 0 \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta|\Delta z| & | \times i \end{cases}$$

$|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \underbrace{(a+ib)}_{A}\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + (\alpha + i\beta)|\Delta z| =$

$= A\Delta z + \varepsilon \Delta z$, где

$\varepsilon = \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta z}|\Delta z| \Rightarrow |\varepsilon| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \to 0$ при $\Delta z \to 0$ ■

$f'(z_0) = A = a + ib = u'_x + iv'_x =$

$= v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y =$

§5. Аналитические функции

Опр. (Маркушевич) $w = f(z)$ дифф. в каждой точке области G, наз. аналитической в G

Опр. (Свешников, Тихонов) $w = f(z)$ аналитическая в обл. G, если f дифф. в $\forall$ точке из G и $f'(z)$ непр. в G.

Аналитич. в т. $z_0 \equiv$ аналитич. в нек. окр-ти т. z_0

Пример. $w = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{u} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v}$

$z = x + iy$

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= u = e^x \cos y & v'_y &= e^x\cos y \\ u'_y &= -e^x \sin y & v'_x &= e^x \sin y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{CR выполн.}$$

Значит, w дифф. во всей пл-ти

$w' = u'_x + i v'_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = w$

$w' = w$

w - непрерывная ф-я от z

Т.к. w - непр. в $\mathbb{C}$, и $w' = w \Rightarrow w' \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow w$ - аналитич. во всей $\mathbb{C}$

w - целая аналитич. ф-я.

$w = e^z = \exp(z)$

При $z = i\varphi$ $x = 0, y = \varphi$ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Мн-во ф-й, аналитических в G обознач. $A(G)$

① $f \in A(G) \Rightarrow f \in C(G)$, ~~и дифф-сть~~

[Лекция 3] 22.02.02

② $f, g \in A(G) \Rightarrow f \pm g$, $f \times g \in A(G)$

если $g(z) \neq 0$ $\forall z \in G \Rightarrow \dfrac{f}{g} \in A(G)$

③ $w = f(z) \in A(G)$, $F = f(G)$;

$\zeta = g(w) \in A(\mathcal{E}) \Rightarrow \zeta = g(f(z)) \in A(G)$

④ $f \in A(G) \Rightarrow f(G)$ — область
G — область

⑤ $f \in A(G)$, $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in G$

$\exists\, w_0 = f(z_0)$

Асимптотическое обратной функции.

Тогда $\exists K_\varepsilon(w_0)$: в этой окр-ти $\exists\, z = \varphi(w)$

1) $\forall w \in K_\varepsilon(w_0)$: $f(\varphi(w)) = w$

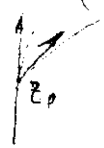
2) $\varphi \in A(K_\varepsilon(w_0))$

3) $\varphi'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$

⑥ $w = f(z) \in A(G)$

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$u(x,y) = C$
$v(x,y) = D$ — 2 семейства кривых уровня.



$z_0 = x_0 + i y_0$ (найдём угол между кривыми уровня)

$\{u'_x, u'_y\}\Big|_{(x_0,y_0)}$ и $\{v'_x, v'_y\}\Big|_{(x_0,y_0)}$ — нормали

$u'_x v'_x + u'_y v'_y \overset{(CR)}{=} u'_x v'_x - v'_x u'_x = 0 \Rightarrow$

cos угла между нормалями $= 0$, и сл-но, угол между кривыми равен $\frac{\pi}{2}$.

Вывод: линии уровня $u(x,y) = C$ и $v(x,y) = D$, определяемые ф-ей $f \in A(G)$

пересек. в кажд. т. G под прямым углом. Говорят что такие семейства кривых ортогональны.

§6. Геометрический смысл производной.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$\exists\, f'(z_0) \neq 0$

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f'(z_0)| \approx \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

$\exists\, f(z_0) = w_0$

$|f(z) - f(z_0)|$ — длина отр. $w\,w_0$.
$|z - z_0|$ — длина отр. $z\,z_0$.

$|f'(z_0)|$ — коэфф-т растяжения в т. z_0 под действием f.

γ: $z = \lambda(t)$, $t \in E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ · непр. кривая

$z = \lambda(t) = x(t) + i\,y(t)$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

В кажд. т. γ в т. $t_0 \in [\alpha,\beta]$ $\exists\, \lambda'(t_0)$.

$$\lim_{\substack{z \to z_0 = t_0 \\ z \in E}} \frac{\lambda(z) - \lambda(z_0)}{z - z_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0} = $$

$= \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + i \lim \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$.

$\exists \lambda'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0)$ и $y'(t_0)$

Пусть т. t_0 - неособая (т.е. не обращ. в нуль обе производные) $\exists$ $\lambda'(t_0) \neq 0$

$\lambda'(t_0) = x'(t_0) + i y'(t_0)$

$\operatorname{tg} \underbrace{\operatorname{Arg} \lambda'(t_0)}_{\varphi} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} =$

Из матем. ан-за 2 семестра:

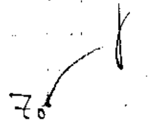
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $x'(t_0) \neq 0$ $\quad y = y(x)$ $\quad x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$

$y'_x(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

$= \operatorname{tg}$ угла между касательной к кривой $z = \lambda(t)$ (она же $y = y(x)$) в точке t_0 и веществ. осью

$\operatorname{Arg} \lambda'(t_0)$ есть угол между кас. к графику $z = \lambda(t)$ в т. t_0 и веществ. осью

Выясним смысл $\operatorname{Arg} f'(z_0)$



$\gamma: z = \lambda(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$\lambda(\alpha) = z_0$

Пусть $\gamma: \lambda(t)$ - неособ. ф-я, $\lambda'(t) \neq 0$.

$\exists w_0 = f(z_0)$ и $w = f(z)$

$\gamma \xrightarrow{f} w = f(\lambda(t)) = \mu(t)$, $t \in (\alpha, \beta]$

$\mu'(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cdot f'(\lambda(\alpha)) = \underbrace{\lambda'(\alpha)}_{\neq 0} \underbrace{f'(z_0)}_{\neq 0} \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Arg} \mu'(\alpha) = \operatorname{Arg} \lambda'(\alpha) + \operatorname{Arg} f'(z_0)$

$$\boxed{\operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg} \mu'(\alpha) - \operatorname{Arg} \lambda'(\alpha).}$$

Аргумент производной показ. насколько поворач. касательная при действии ф-и f.

Угол между касат. к γ и δ при действии ф-и f не изменяется

§6 Конформное отображение

Опр (локальная конформность)

Отображение, задаваемое непрерывной ф-ей $w = f(z)$ назыв. конформным в т. z_0, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через т. z_0.

Теор 25 Если $f'(z_0) \neq 0$, то отображение, задаваемое ф-ей f, конформно в т. z_0!

□ Фактич. д-во выше ■

Опр (глобальная конформность)

Пусть f отображает область D в обл. G. Если соответствие между точками областей D и G взаимно однозначное $(1-1)$ и f конформно в $\forall$ т. $z_0 \in D$, то говорят, что f отображает D в G конформно.

Тема 3.

Элементарные аналитические функции и реализуемые ими конформные отображения.

§1 Целые линейные функции

$w = L(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha, \beta = const$

Будем в дальнейшем предполагать, что $\alpha \neq 0$.

$L'(z) = \alpha \neq 0 \Rightarrow L(z)$ аналитическая

$L(z)$ осущ. взаимно однозн. соотв-е $\Rightarrow$ $L: \mathbb{C} \xrightarrow{\text{конформно}} \mathbb{C}$

Пусть $\alpha = 1$, $w = L(z) = z + \beta$. сдвиг компл. пл-ти на β.

$\alpha \neq 1$ $\quad \gamma = L(\gamma) = \alpha\gamma + \beta \Rightarrow \gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$

неподвижн. точка отображ-я $w = L(z)$

$\begin{cases} w = \alpha z + \beta \\ \gamma = \alpha\gamma + \beta \end{cases} \Rightarrow w - \gamma = \alpha(z - \gamma)$

$\alpha = \rho e^{i\varphi}$

$w - \gamma = \alpha(z-\gamma) = e^{i\varphi}\rho(z-\gamma)$

Конформн. отобр. состоит в растяжении с поворотом на $\arg\alpha$ в ρ раз.

$\exists \lim\limits_{z\to\infty} L(z) = \lim\limits_{z\to\infty}(\alpha z + \beta) = \infty$.

$L(\infty) = \infty$

§2 Дробно-линейные функции

$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d = const$, причем

$\Delta = ad - bc \neq 0$

Δ – определитель ф-и $L(z)$

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

п.1 Групповые св-ва дробно-линейных отображений

$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\alpha a z + \alpha b}{\alpha c z + \alpha d}$

$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2 \Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $\forall$ д/л функции $\exists$ представление с $\Delta = 1$.

Введем $L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $\quad L_2 = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$.

когда $L_1(z) = L_2(z)$ для $\forall z$

$$(a_1 z+b_1)(c_2 z+d_2) = (a_2 z+b_2)(c_1 z+d_1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1c_2 = a_2c_1$, $b_1d_2 = b_2d_1$, $a_1d_2+b_1c_2 = a_2d_1+b_2c_1$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{b_1}{b_2} \equiv \alpha$$

(если у одной из дробей числит. или знамен. $=0$, то и у второй тоже)

$L_1(z)$, $L_2(z)$

$$L = L_2(L_1(z)) = \frac{a_2\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}+b_2}{c_2\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}+d_2} = \frac{a_3z+b_3}{c_3z+d_3}$$

Проверим, что $\Delta_3 \neq 0$.

$a_3 = a_2a_1+b_2c_1$; $b_3 = a_2b_1+b_2d_1$; $c_3 = c_2a_1+d_2c_1$

$d_3 = c_2b_1+d_2d_1$

$L_1 \to A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ $\quad L_2 \to A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$L_3 \to A_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

Тогда $A_3 = A_2A_1$ (из ф-л $a_3, \dots, d_3$)

Т.к. $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_1 \neq 0 \Rightarrow \Delta_3 \neq 0$.

Значит, L (композиция L_1, L_2) – д/л ф-я.

$I(z) = z$ – тожд. отобр-е – тоже д/л

$I(z) = \dfrac{1\cdot z+0}{0\cdot z+1} \to I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
перекрест. ...

$w = L(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $\Delta = 1$.

$\hat{L}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$

$L\hat{L} = \hat{L}L = I$.

Мн-во д/л ф-й с опер-ей композиции есть группа, изоморфная группе 2×2-матриц с комплексн. эл-ми и опред-м, равным 1.

$SL_2(\mathbb{C})$ – спец. лин. группа 2-го пор-ка

[Лекция 4] 09.03.06

Конформность.

$\mathrm{dom}\, L = \{z \neq \delta = -\frac{d}{c}\}$

$c \neq 0$ $\quad \delta$ – особая точка.

$\mathrm{im}\, L = \mathrm{dom}\, L^{-1} = \{w \neq \frac{a}{c}\}$

$L^{-1}(z) = \frac{1}{\Delta} \cdot \dfrac{dz-b}{-cz+a}$, $z \neq \frac{a}{c}$

$$w' = L'(z) = \frac{\Delta}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

локальная конформность в ~~...~~: $\forall$ т. $\in \mathrm{dom}\, L$.

$\mathrm{dom}\, L \xrightarrow[\text{соответствие}]{L} \mathrm{im}\, L$

$z \to \delta \quad L(z) \to \infty$

$z \to \infty \quad L(z) \to \frac{a}{c} = e$

Положим $L(\delta) = \infty$; $L(\infty) = \frac{a}{c}$.

Значит, $L(z)$ однозн. отобр-е

$\overline{\mathbb{C}} \xrightarrow[\text{взаимн.-однозн.}]{L} \overline{\mathbb{C}}$

Всякая L однозн. конформный автоморфизм мн-ва $\overline{\mathbb{C}}$

$L \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ (Automorphizm)

Более того, можно п-ть, что такие отобр-е $\overline{\mathbb{C}}$ дают только L.

$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$(c \neq 0)$

$L(\infty) = \infty$.

$z = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ — неподвижная точка

$cz^2 - (a - d) z - b = 0$

$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$ корень вычет. на зн-я.

$I(z) = z$ — ф-я тождественная

Теор. 21. Пусть $L, \Lambda \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$,

z_1, z_2, z_3 попарно различны

если $L(z_i) = \Lambda(z_i)$, $i = \overline{1,3}$

$\Rightarrow$

$L(z) \equiv \Lambda(z)$

□ Положим $U = \Lambda^{-1} L$

$L(z_i) = \Lambda(z_i) \Rightarrow U(z_i) = z_i \quad i = 1,2,3$.

более мен., но у нее 2 таких точки

$\Rightarrow U = I \sim \Lambda^{-1} L = I \sim L = \Lambda$

■ Инвариантность двойного отношения

Теор. 22. Пусть z_1, z_2, z_3 — конечн. попарн. раз.

w_1, w_2, w_3 — // —

Построить ф-ю $L \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$:

$L(z_i) = w_i$

□ Из Сл. Т.21 $\Rightarrow$, что если реш.-е $\exists$, то

$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} : \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ (*)

Задача. Проверить, что (*) определяет как $L = w(z)$ дробно-лин. ф-ю от z.

■

a, b, c, d — попарно разл. числа

$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = (a, b, c, d)$

двойное (ангармонич.) соотношение

$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

(пример $\Rightarrow$ из (*))

Теор. 3.2 Двойное отношение есть инвариант д/л преобразования.

$L \in \mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$: a, b, c, d — попарно различные

$A = L(a)$, $B = L(b)$, $C = L(c)$, $D = L(d)$

$(a,b,c,d) = (A,B,C,D)$

□ Будем рассм. L как реш-е 3.1 для чисел a, b, d и A, B, D. Тогда L неявно определяется равенством (*)

$$\frac{w-A}{w-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{z-a}{z-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

$C = L(c) \Rightarrow$

значит, $(A,B,C,D) = (a,b,c,d)$ ■

Формула (*) сохраняет силу и в том сл-е, если какое-либо из чисел z и/или какое-либо из чисел $w_i = \infty$. В этом сл-е в (*) нужно удалить разности, содерж. бесконечн. члены.

Круговое свойство

Теор. 3.3 Д/л функция $L \in \mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ переводит прямую или окр-ть в прямую или окружность.

□ Прямые и окр-ти могут быть описаны ур-ями вида:

$$A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \quad (*)$$

$A = 0$, $B^2 + C^2 \neq 0$ — прямая

$A \neq 0$ и $B^2 + C^2 - AD > 0$ — окружность

$$\left(x^2 + 2\frac{B}{A}x + \frac{B^2}{A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{C^2}{A^2}\right) = \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2} - \frac{D}{A}$$

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2}$$

$x = \frac{z + \bar z}{2}$, $y = \frac{z - \bar z}{2i}$, $\mathcal{B} = B + iC$

$$A z \bar z + \bar{\mathcal{B}} z + \mathcal{B} \bar z + D = 0 \quad (**)$$

$A = 0$, $\mathcal{B} \neq 0$ прямая

$A \neq 0$, $|\mathcal{B}|^2 - AD > 0$ — окружн.

Д-во теор. 3.3

Начнем с простейш. ф-и $w = \frac{1}{z} = L_0$

Пусть Γ — произв. прямая или окружность, заданная ур-ем (**)

Положим $\Gamma' = L_0(\Gamma)$

Тогда Γ': $A \frac{1}{w \bar w} + \bar{\mathcal{B}} \frac{1}{w} + \mathcal{B} \frac{1}{\bar w} + D = 0 \sim$

$\sim D w \bar w + \mathcal{B} w + \bar{\mathcal{B}} \bar w + A = 0$

$D = 0$:
- $\to A = 0 \Rightarrow$ (по исходной посылке) $\mathcal{B} \neq 0 \Rightarrow$ прямая
- $\to A \neq 0 \Rightarrow |\mathcal{B}|^2 - AD = |\mathcal{B}|^2 > 0 \Rightarrow$ прямая

$D\neq 0$ → $A = 0 \Rightarrow E \neq 0 \Rightarrow |E|^2 - AD = |E|^2 > 0$ - окр.
→ $A \neq 0 \Rightarrow |E|^2 - AD > 0$ - окр-ть

Пусть $w = \underset{(c\neq 0)}{L(z)} = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\overbrace{bc-ad}^{-\Delta}}{c(cz+d)}$

$w = L(z) = L_2(\Lambda(L_1(z)))$

$z_1 = L_1(z) = cz+d$

$z_2 = \Lambda(z_1) = \frac{1}{z_1}$

$w = L_2(z_2) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c} z_2$

$\Rightarrow \forall$ д/л ф-я может быть предст. как композиция 3-х отобр., 2 из кот. - линейные, а одно инверсия, облад. ~~св-вом~~ круг. св-м!

Линейные тоже облад. этим св-м.

Это представл-е и уже доказ. справедливость св-ва для инверсии устанавливает круг. св-во для $\forall$ д/л ф-и.

$\measuredangle$ $w = \underset{(c\neq 0)}{L(z)} = \frac{az+b}{cz+d}$

$\delta = -\frac{d}{c}$ - особая точка

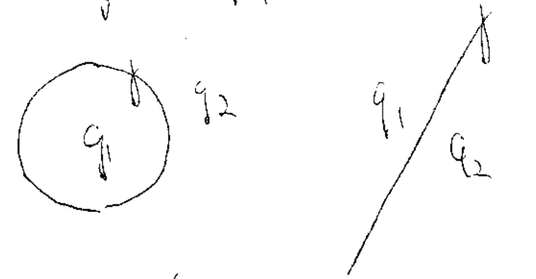
γ - произв. прямая (окр-ть) и $\measuredangle$ 2 ситуации

① γ проходит ч-з δ

Тогда $\Gamma = L(\gamma)$ должна проходить ч-з образ δ, т.е. ∞, т.е. быть не может

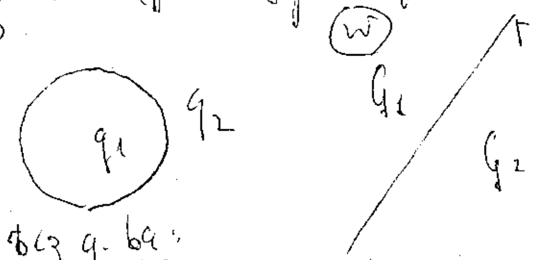
значит Γ - прямая.

② γ не прох. ч-з δ $\Rightarrow$ Γ не прох. ч-з ∞, значит, что Γ - окр-ть.



$\Gamma = L(\gamma)$ Здесь окр-ть Γ - прямая.

(z) (w)



без q. ва:

$q_1 \xrightarrow[\text{конф}]{L} \{q_1, q_2\}$ (в q_1 или q_2)

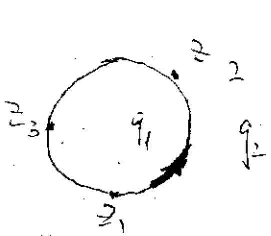
$q_2 \xrightarrow[\text{конф}]{L} \{q_1, q_2\}$ (в другую из q_1 или q_2)

Определим, в какие именно обл-ти перейдут q_1 и q_2. 2 способа.

① фикс. $\forall$ т. $z_0 \in q_1$ и находим её образ $w_0 = L(z_0)$.

Если $w_0 \in q_1$ (или q_2), то $q_1 \xrightarrow{L} q_1$ (или q_2)

② Выберем на γ точки z_1, z_2, z_3 с условием, характеризующим: направление движ. по γ от z_1 к z_3 ч-з z_2 будет q_1 слева от себя (положит. направл. обхода).

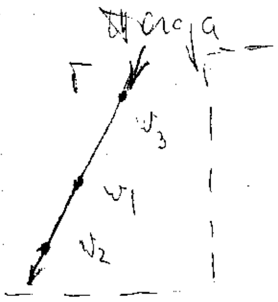


Решим. $w_1 = L(z_1)$,
$w_2 = L(z_2)$,
$w_3 = L(z_3)$

∃ наблюдатель движ. от w_1 к w_3 через w_2 видит слева от себя область g_1 (или g_2).

$g_1 \xrightarrow{L} G_1$ (или G_2)

Тогда



Пусть g - обл. на пл-ти z, либо полупл-ть, либо внутр. круга, либо внешность круга.

G - найд. на w этих же 3-х типов.

Тогда ∃ д/л преобразования $w=L(z)$, конформно отображающее g на G.

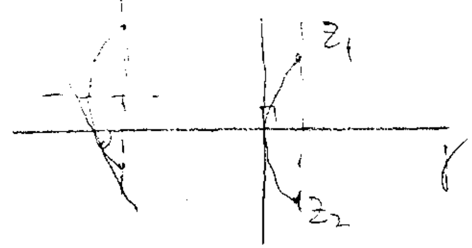
Фикс. ∀ т. z_1, z_2, z_3 на $\gamma = \partial g$, указывающие положит. напр. обхода для γ

Фикс. ∀ точки на пл-ти w на $\Gamma = \partial G$

— // — Γ

З.1. Строим $w=L(z)$ как реш-е задачи для тройк z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3.

Сохранение симметрии.



Если пара т. z_1 и z_2 расположена так, что прямая, проход. ч-з z_1 и z_2, или окр., проход. ч-з z_1 и z_2, ортогон. γ, то z_1 и z_2 симм. отн. γ.

Опр. Пусть γ - окружность, точки z_1 и z_2 симметричны относительно γ, если прямая и всякая окр., проходящие ч-з точки z_1 и z_2, ортогональны γ.

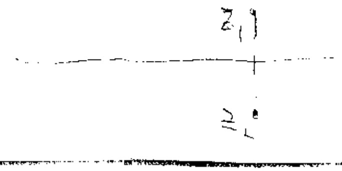
Задача 2. $\gamma: |z-z_0|=R$. Если z_1 и z_2 симм. отн. γ, то $|z_0-z_1||z_1-z_2|=R^2$

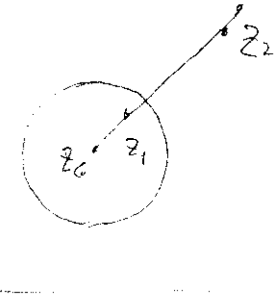
z_1 и z_2 леж. на одном луче, провед. из т. z_0 по разные стороны от γ.

Задача 3. $z_2 = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}$ верно для ∀ z_1, z_2, симм. отн. γ.

[Лекция 5]

Задача 2 $z_1 = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}$





z_1, z_2 — симм. отн. $\gamma: |z-z_0|=R$.

$|z_0 z_1|\,|z_0 z_2| = R^2 \Rightarrow z_2 = z_0 + \dfrac{R^2}{\overline{z_1 - z_0}}$

$|z_1 - z_0|$ — расст-е.

Теор. 3.11 Всякое д/л преобр-е $L(z) \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$ сохраняет симметричные пары точек отн. прямой или окр-и.

□ $L(z)$ д/л ф-я, z_1, z_2 — симм. отн. γ — прямая или окр-ть.

$\Gamma = L(\gamma)$, $w_1 = L(z_1)$, $w_2 = L(z_2)$

w_1 и w_2 симм. отн. Γ?

$\exists \Delta$ — прямая или окр-ть, проход. ч-з w_1 и w_2. Тогда $\delta = L^{-1}(\Delta)$ есть пр. или окр-ть, проход. ч-з z_1 и z_2.

$\Rightarrow \delta$ пере. γ ортогонально (z_1 и z_2 — симм. отн-но) $\Rightarrow \Delta$ перес. Γ ортог. (конформность ф-и $L(z)$) $\Rightarrow$

w_1 и w_2 симм. отн. Γ (всегда, т.к. $\forall \Delta$) ■

Пример) Построить $w = L(z) \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$, отображающую $|z|<R$ на $|w|<R$ так, что заданное α ($|\alpha|<R$) перех. в нач-ло ($w_0 = 0$)

1) $\alpha = 0$: $w=\mu z$, где $|\mu|=1$

… никаких других реш-й нет

2) $\alpha \neq 0$. т. α^* — симм. α отн. γ.

$\gamma: |z|=R$

$\alpha^* = \dfrac{R^2}{\bar\alpha}$ $\qquad \alpha \to 0 \;\; \alpha^* \to \infty$

$\Gamma: |w|=R$.

$w = \lambda \dfrac{z-\alpha}{z-\alpha^*}$

$w = \lambda \dfrac{z-\alpha}{z - \frac{R^2}{\bar\alpha}} = \underbrace{-\lambda\bar\alpha}_{\mu} \dfrac{z-\alpha}{R^2 - \bar\alpha z} = \mu \dfrac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}$

для т. писек $z = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$|w| = |\mu| \dfrac{|Re^{i\varphi} - \alpha|}{|R^2 - \bar\alpha R e^{i\varphi}|} = \dfrac{|\mu|}{R} \dfrac{|e^{i\varphi}|\,|R - \alpha e^{-i\varphi}|}{|R - \bar\alpha e^{i\varphi}|} =$

сопряж. ⇒ модули равны

$= \dfrac{|\mu|}{R} \equiv R$

$|\mu| = R^2$

$\mu = R^2 e^{i\psi}$

$w = R^2 e^{i\psi} \dfrac{z-\alpha}{R^2-\bar\alpha z}$ $\qquad 0 \le \psi \le 2\pi$.

Доп. усл-я для устр-я неоднозначности:

1) для заданной т. $z_0 \in \gamma$ указать желаемый образ $w_0 \in \Gamma$

2) потребовать, чтобы значение производной $L'(\alpha) > 0$.

$w^2 = R^2 \dfrac{z-\alpha}{R^2 - \bar\alpha z}$ — проверить

(ДЗ) Описать все д/л преобр-я, отображающие $\operatorname{Im} z > 0$ в единичный круг $w: |w|<1$

ф-я Жуковского

$w = \lambda(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\operatorname{dom} \lambda = \{z \neq 0\}$

в $\operatorname{dom} \lambda$ дифф. в $\forall$ т. и $\lambda'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ — опр-на и непр. при $z \neq 0$ $\Rightarrow$ аналитич. в $\{z \neq 0\}$

При $z \neq \pm 1$ $\Rightarrow$ локальн. конформность.

в т. $z = \pm 1$ конформность теряется (следует из дальнейшего анализа)

$\operatorname{im} \lambda = \overline{\mathbb{C}}$

т.к. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$z^2 - 2wz + 1 = 0$ при $\forall w$ им. реш-е z_1, z_2

$z_1 z_2 = 1$.

если $w = \pm 1 \Rightarrow z_1 = z_2$

Опр $\exists f(z) : A(G)$: $f(z_1) \neq f(z_2)$, если $z_1, z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$

Тогда говорят, что f однолистна в G

В противн. сл-е, f — многолистна в G

(можно говорить о двулистной, n-листн., счётнолистн. и т.д. ф-ии в G)

Если f многолистна в G, но однолистна в $g \subset G$, то g — область однолистности.

$\lambda(z)$ — двулистн. ф-я

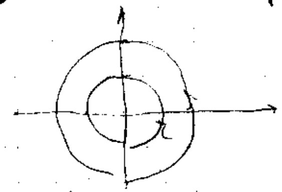
$|z| < 1$, $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ и т.д. — обл. однолистности

Рассм. $\lambda(\varphi) - \lambda(\alpha) = \infty$

$\gamma_r : z = r(\cos t + i \sin t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\Gamma_r = \lambda(\gamma_r)$



$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos t - i \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t - i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin t =$

$= a\cos t - i b \sin t$ — каноническое параметрич. ур-е эллипса

$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$

$b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)$

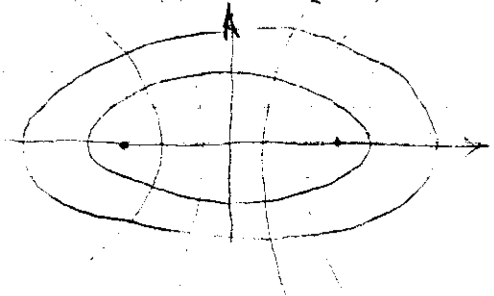
и перед i — обход в отриц. напр-и

$c^2 = a^2 - b^2 = 1$

$F_1(1, 0)$, $F_2(-1, 0)$ — фокусы

$r \to 0$, $a, b \to \infty$. $0 < r < 1$

$r \to 1$, $a \to 1$, $b \to 0$.



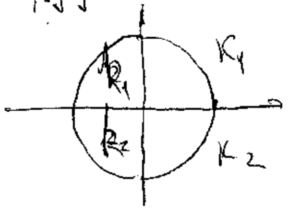
Таким образом, ед. круг $\{|z|<1\}$ под действ. ф-ии $\lambda(z)$ перех. в $\{\mathbb{C} \setminus [-1,1]\}$.

(в каждой т-ке из $[-1,1]$ или вырезан по стор. $[-1,1]$)

отобр-е конформно.

Вне внешность единичн. круга $\lambda(z)$ действ. также $\Rightarrow$

$|z|>1 \xrightarrow[\text{конф.}]{\lambda(z)} \{\mathbb{C} \setminus [-1,1]\}$

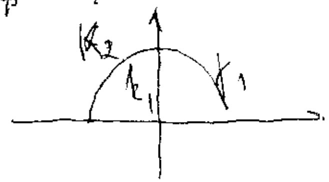


$\{|z|<1, \operatorname{Im} z>0\} \xrightarrow[\text{конф}]{\lambda(z)}$

$\Rightarrow \{\operatorname{Im} w<0\}$

k_2 $\{|z|<1, \operatorname{Im} z<0\} \xrightarrow[\text{конф}]{\lambda(z)} \{\operatorname{Im} w>0\}$

K_2 $\{|z|>1, \operatorname{Im} z>0\} \xrightarrow[\text{конф}]{\lambda(z)} \{\operatorname{Im} w<0\}$



$\{\operatorname{Im} z>0\} = k_1 \cup K_2 \cup \gamma_1 \xrightarrow{\lambda(z)}$

$\xrightarrow[\text{конф}]{} \{\mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,+\infty))\}$

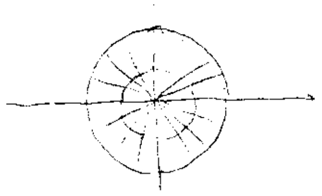
Прямая γ_2: $z = t(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, α - фикс. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$0<t<1$ - отрезок

$\Gamma_2 = \lambda(\gamma_2)$

$w = \lambda(z) = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\sin\alpha$

$u = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cos\alpha \quad |\cos\alpha$



$v = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\sin\alpha \quad |:\sin\alpha$

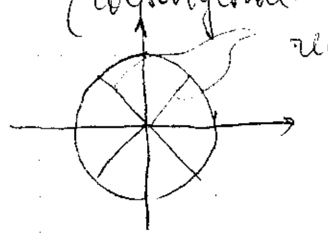
$0<t<1$

искл. t, возв. в кв., вычит. из 1, 2.

$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$

$c^2 = a^2+b^2 = 1$ $\quad 1, -1$ - фокусы гиперболы, одни и те же для $\forall \gamma$, (см. рис.)

(софокусные гиперболы)



четверть радиусов есть 1/4 гиперболы

(?) в кажд. часть гипер. перех. отр. в 1-й четв.

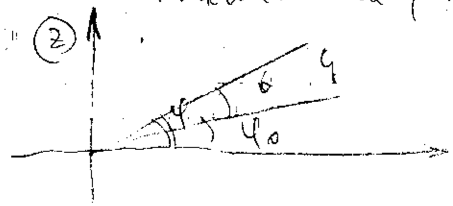
$\forall$ эллипс перес. с гипер. под углом $90°$. (из-за конформности)

Ф-я $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n>1$

Определена и симметрична в $\mathbb{C} \Rightarrow$ целая.

$w' = n z^{n-1} \neq 0 \quad \forall z \neq 0 \Rightarrow$ в $\forall$ т. $z \neq 0$ лок. конформн.

Многолистная (n - листная)



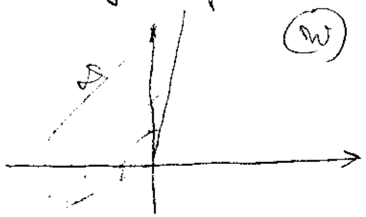
$\theta = \varphi_1 - \varphi_0 \leq \frac{2\pi}{n}$.

G – обл. однолистности $w = z^n$.

$\arg z = \varphi_0 \overset{w=z^n}{\Rightarrow} \operatorname{Arg} w = n\varphi_0 + 2\pi k$

$\arg z = \varphi_1 \overset{w=z^n}{\Rightarrow} \operatorname{Arg} w = n\varphi_1 + 2\pi k$

$G \xrightarrow[\text{конф}]{w=z^n} \Delta \qquad \Delta \sim n\alpha.$



При $z=0$ лок. конформн. разрушается.

Показательная функция

$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$

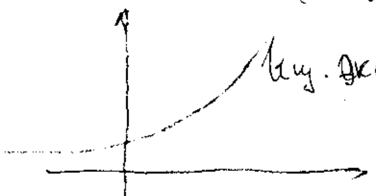
$z = x+iy$

$\operatorname{dom} e^z = \mathbb{C}$; $(e^z)' = e^z$

① $|e^z| = e^x \neq 0 \Rightarrow 0 \notin \operatorname{im} e^z$

② $y \in \operatorname{Arg} e^z$

③ $e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi))$



$2\pi i$ - период

$\operatorname{Im} e^z = \{w \neq 0\}$

$w = e^z$ Покажем что ур-е разрешимо отн. z.

$|w| = |e^z| = e^x \Rightarrow x = \ln|w|$

$e^x(\cos y + i\sin y)$

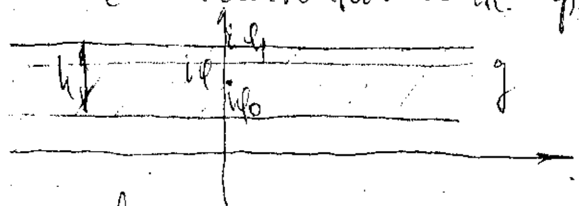
$y \in \operatorname{Arg} w$

$z = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w$ - все реш-я

Каждое наз-ся натуральным логарифмом числа w.

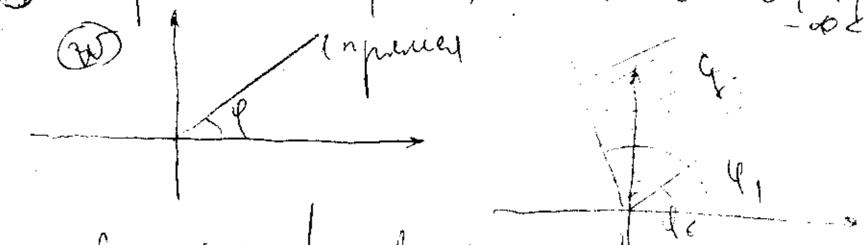
При переменном w ф-ла опр. ф-ю $z = \operatorname{Ln} w$

e^z - бесконечнолистн. ф-я



$k = \varphi_1 - \varphi_0 \leq 2\pi$. G - обл. однолистности e^z

$\gamma: z = t + i\varphi \xrightarrow{e^z} \Gamma: w = e^z = e^t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $-\infty < t < \infty$



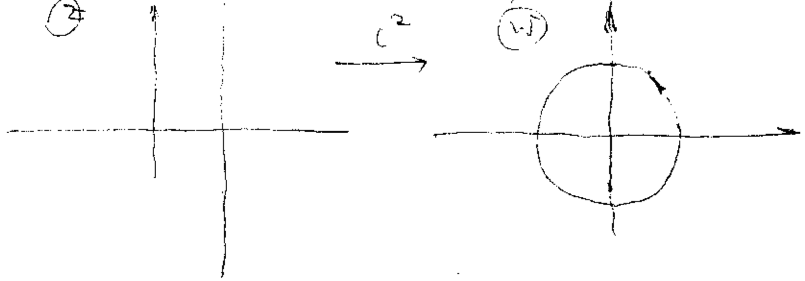
$G: \varphi_0 + 2\pi k \leq \operatorname{Arg} w < \varphi_1 + 2\pi k$

$G \xrightarrow[\text{конф}]{e^z} G$

[Лекция 6]

Посмотрим куда e^z переводит $z = c + it$, $-\infty < t < \infty$

$w = e^z = e^c(\cos t + i\sin t)$



(Д/З) Д-ть, что прямые на пл-ти z, не паралл. никакой коорд. оси, переводятся e^z в логарифмич. спираль:

$\rho = e c^{k\varphi}$ в (полярн. коорд.)

Тригонометрические и гиперболические функции

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$; $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$

$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$

$\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ - целые (т.е. аналитические в $\mathbb{C}$)

$\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ - период $2\pi i$

$\cos z$, $\sin z$ - период 2π

если $z = x \in \mathbb{R}$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ $\Rightarrow \cos z = \cos x$

На веществ. оси компл. ф-и совпадают с веществ[енными].

Можно показать:

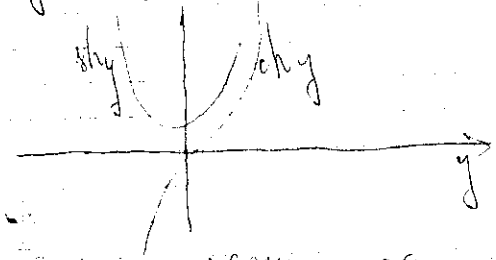
$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$

$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$

$\operatorname{ch} y \geq |\cos z| \geq \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|$

$\operatorname{ch} y = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} \geq |\sin z| \geq$ ~~всегда~~ $|\operatorname{sh} y|$

Вне вещ. оси $\cos z$ и $\sin z$ не обращ. в нуль



Но лишь стрем. от вещ. оси $\cos$ и $\sin$ неограничены ($\to \infty$), растут по модулю,

В компл. ан-е верно тождество $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Верны также теоремы сложения и умножения (проверяется подстановкой)

Также для гиперболич. ф-и:

$\operatorname{ch} z = \cos(iz)$, $\operatorname{sh} z = -i\sin(iz)$

$\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ — период π

$\operatorname{cth} z$, $\operatorname{th} z$ — период πi.

$(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$.

$\measuredangle$ $w = \cos z$.

$\exists\ t = e^{iz} \Rightarrow w = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$

$\Rightarrow$ cos — суперпозиция экспоненты и ф-и Жуковского.

(Д/З) ② Д-ть, что $w = \cos z$ в обл. $G = \{0 < x < \pi\}$ однолистно и отобр. на $G = \{\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}\}$

Тема 4.

Интегрирование функций комплексной переменной

L: $z = \lambda(t) = x(t) + i\,y(t)$

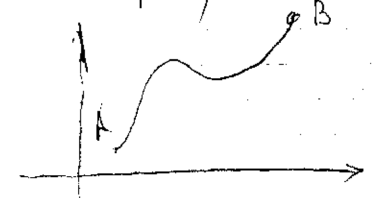
$\alpha \le t \le \beta$

$\exists\ \lambda(t)$ — кусочно-гладкая компл. ф-я (тогда $x(t), y(t)$ — к.-гл. вещ. ф-и)

$A = \lambda(\alpha)$ $\quad B = \lambda(\beta)$, $\alpha \le \beta$

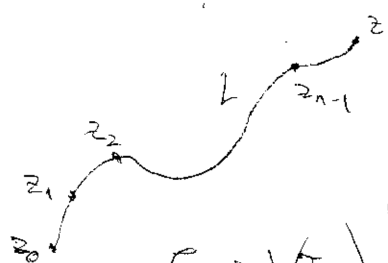
напр-е L: AB

напр-е $-L$: BA



Особая точка $x'(t_0) = y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda'(t_0) = 0$.

$\exists$ у $\lambda(t)$ нет особых точек.



$w = f(z)$ кусочно-непрерывна вдоль L.

$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$.

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$

$\zeta_i = \lambda(\tau_i)$ $\quad t_{i-1} < \tau_i < t_i$, $i = \overline{1,n}$

$S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

$\delta = \max_{1 \le i \le n} |t_i - t_{i-1}|$

$f(z)$ интегр. по L

Комплексный интеграл от f по L: $\int_L f(z)\,dz$.

$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$

$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + i\,v(\xi_k, \eta_k) = u_k + i v_k$.

$S(t_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)$

~~[illegible]~~

$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (v\,dx + u\,dy)$

Свойства комплексных интегралов.

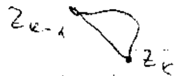
① $\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz$

② $L = L_1 \cup L_2$ (L_1, L_2 не им. общ. внутр. точек)

$\int_L \ldots = \int_{L_1} \ldots + \int_{L_2} \ldots$

③ $\int_L (c_1 f_1 + c_2 f_2)dz = c_1 \int_L f_1 dz + c_2 \int_L f_2 dz$

④ $\left| \int_L f(z)dz \right| \le \int_L |f(z)|\, d\sigma$



следует из $|\sigma(\lambda_k \tau_n)| \le \sum_{k=1}^{n} |f(~~\xi~~ \zeta_k)| d\sigma_k$

④' $\left| \int_L f(z)dz \right| \le M \cdot$ длина L

$M = \sup_{z \in L} |f(z)|$

⑤ $L:\ z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$

$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\lambda(t)) \lambda'(t)\, dt.$

Пример. Вычисл. $I = \int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it} dt}{\rho e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$

$z = a + \rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

$dz = \rho i e^{it} dt$

Интегральная теорема Коши

Опр Кривая $z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ назыв. замкнутой, если $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$

Опр Точка $z_0 = \lambda(t_1) = \lambda(t_2)$, $(t_1, t_2) \ne (\alpha, \beta)$ назыв. кратной точкой кривой L.

Опр Кривая без кратных точек назыв. простой или жордановой

Опр Замкн. жорданова кривая наз. контуром

Ин-л по контуру C – контурн. ин-л

Обозн.: $\oint_C f(z)dz$

C делит пл-ть на 2 части:

int (внутр)

ext (внеш)

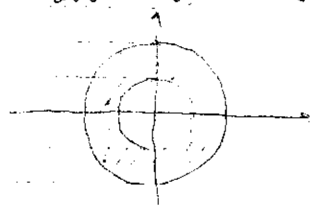
Положит. напр-е обхода контура – при кот. обл. int C слева от себя.

Далее будем $\oint_C f dz$, $\oint_{C^-} f dz$ – положит. и отриц. напр-е подсчета ин-ла.

Опр Область g назыв. ~~одно~~ односвязной, если контур $\gamma \subset g \Rightarrow$ ~~...~~ int $\gamma \subset g$.

В противн. сл-е говорится про неодносв. области

Если ∂g – контур, то g – односвязная область.



– неодносвязн. область

Основная теорема. Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непр. в замкн. области $\bar{D}$, ограничен-ной контуром C и имеют производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, непрерывные в открытой области D

Тогда $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{C+} P\,dx + Q\,dy$

при условии, что ин-л в лев. части существует, хотя бы как несобст-венный.

Интегральная теорема Коши. Пусть $f(z) \in A(g)$ - аналитична в обл. g. Для всякого контура γ, такого, что $\gamma \subset g$, $\mathrm{int}\,\gamma \subset g$, справедливо рав-во

$\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = 0.$

□ Положим $D = \mathrm{int}\,\gamma$ $(D \subset g)$

$\overline{D} = D \cup \gamma$

$\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = \oint\limits_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\oint\limits_\gamma (v\,dx + u\,dy) =$

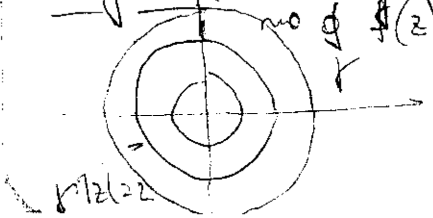
$= \iint\limits_D (\underbrace{-v'_x - u'_y}_{0})\,dx\,dy + i\iint\limits_D (\underbrace{u'_x - v'_y}_{0})\,dx\,dy = 0$

■

Лекция 7

Т. $f(z) \in A(g)$, если $\gamma \subset g$, $\mathrm{int}\,\gamma \subset g \Rightarrow \oint f(z) = $

Следствие. Если g - односвязн. обл. и $f(z) \in A(g)$, то $\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = 0$, $\forall \gamma \in g$.



$g: 1 < |z| < 3$

$f(z) = \frac{1}{z}$

$\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z} = 2\pi i$

Т. (Обобщенная теорема Коши) Пусть g - односвязн. область с граничным контуром γ. Если $f \in A(g) \cap C(\overline{G})$, то $\oint f(z)\,dz = 0.$

□ Док-во остается тем же, что и в т. Коши, но двойные интегралы нужно понимать как несобственные (приближаем ин-ла (соотв.) в $D \subset g$, кот. $= 0$)

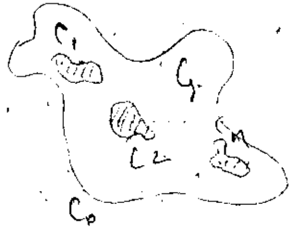
■

Опр. g наз. многосвязной областью ($(n+1)$-связной), если граница ∂g есть т.к. составной контур, т.е. $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$,

где 1) $C_1 \ldots C_n \in \mathrm{int}\,C_0$ (C_0 - внешний контур, $C_1 \ldots C_n$ - внутр. контуры)

2) $C_i \cap C_j = \varnothing$, $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,n})$

3) $C_i \not\subset \mathrm{int}\,C_j$, $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,n})$



Положит. направ-е обхода C_i: наблюдатель видит G слева от себя.

Теорема (о составном контуре)

Пусть G - $(n+1)$-связная область с границей $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$

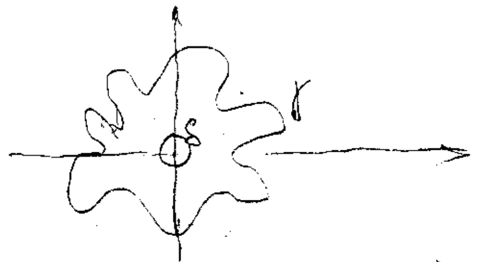
$f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$

Тогда $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

□ Д-во остается прежним с учетом того, что основная теорема верна для многосвязных областей. ■

$$\oint_{C^+} f(z)\,dz = \oint_{C_0^+} \dots + \oint_{C_1^+} \dots + \dots + \oint_{C_n^+} \dots = 0.$$

$$\oint_{C_0^+} f(z)\,dz = \oint_{C_1^+} f(z)\,dz + \dots + \oint_{C_n^+} f(z)\,dz$$



$\oint_\delta \frac{dz}{z} = 2\pi i$ (сл-е из

$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \oint_\delta \frac{dz}{z} = 2\pi i$)

Опр Пусть $f(z) \in C(G)$. Ф-я $F(z) \in A(G)$ назыв. первообразной ф-и f, если $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$.

Совокупность всех первообразных ф-и f в области G назыв. её неопределенным интегралом в обл. G.

Если $F(z)$ - первообр. $f(z)$ в G, то неопред. интеграл f в G описывается формулой

$$\Phi(z) = F(z) + C$$

Пусть $\Phi(z)$ - произв. первообр. f. Положим $w(z) = \Phi(z) - F(z)$

$w'(z) = \Phi' - F' = 0$ $\forall z \in G$.

$w \in A(G)$

$w(z) = u + iv$

$w'(z) = 0 \Rightarrow u'_x \equiv 0;\ u'_y \equiv 0;\ v'_x \equiv 0;\ v'_y \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y) = C_1,\ v(x,y) = C_2 \Rightarrow w(z) = C_1 + iC_2 = C.$

Следующие 3 усл-я эквивалентны ($P, Q \in C(G)$)

1) для $\forall$ замкн. кривой $L \subset G$ $\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0$.

2) ин-л $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от выбора пути, соедин. A и B.

3) $\exists$ непрерывно дифференцируемая в G функция $U(x,y)$: $dU = P\,dx + Q\,dy$

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = U(B) - U(A)$$

$f(z) \in C(G)$, $L \in G$

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy$$

След. 3 св-ва эквивалентны.

1) (с-во-во)

$\oint_L f(z)dz = 0.$

2) $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ не завис. от выбора пути, соед. z_0 и z.

3) $\exists\ U, V$ (непр. дифф. в G):

$dU = u\,dx - v\,dy$

$dV = v\,dx + u\,dy$

Теорема (о первообразной).

Пусть $f(z) \in C(G)$ и $f(z)$ облад. в G (с-вом с-вами). Тогда: 1) $F(z) \in A(G)$ 2) $F'(z) = f(z)$.

$\zeta = \xi + i\eta$

□ $\int_{z_0}^{z} u\,d\xi - v\,d\eta = U(x,y) - U(x_0,y_0)$

$\int_{z_0}^{z} v\,d\xi + u\,d\eta = V(x,y) - V(x_0,y_0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = U(x,y) + iV(x,y) + c,$

$c = -U(x_0,y_0) - iV(x_0,y_0).$

$U'_x = u \quad U'_y = -v \quad \Rightarrow \quad U'_x = V'_y$

$V'_x = v \quad V'_y = u \quad\quad U'_y = -V'_x.$

вып. усл-е К-Р $\Rightarrow F(z) \in A(G)$

$F'(z) = U'_x + iV'_x = u + iv = f(z)$ ■

Следствие 1. Условия т. о первообразной выполнены, если G - односвязн. обл. (с-во выполн. в силу т. Коши) и $f(z) \in A(G)$.

Следствие 2. В условиях т. о первообразной

$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + C.$

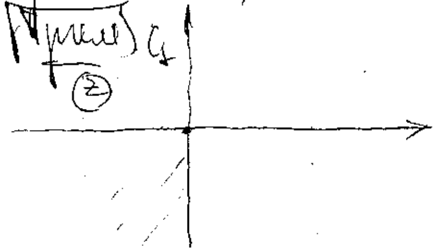
Следствие 3 (ф-ла Ньютона-Лейбница)

Пусть $\Phi(z)$ - произв. первообразн.

$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + C$

$z = z_0$: $\Phi(z_0) = C \Rightarrow \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0) = \Phi(\zeta)\Big|_{z_0}^{z}$

Пример 2



G - односвязн. обл.,

$f(z) = \frac{1}{z} \in A(G)$

$z_0 = 1$

$F(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$

Согласно т. о первообразной $F(z) \in A(G)$, $F'(z) = \frac{1}{z}$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

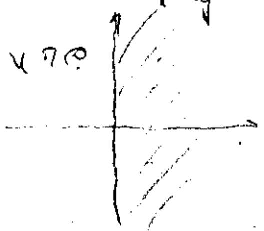
$\ln z = \ln|z| + i\arg z$ - главн. зн-е натур. логарифма числа z

если $z = x + iy$

$\ln|z| = \ln(x^2+y^2) = u$

$u'_x = \frac{x}{x^2+y^2} \quad u'_y = \frac{y}{x^2+y^2}$

$x>0$



$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$v'_x = -\frac{y}{x^2+y^2} = -u'_y$ $\Rightarrow$ усл. К-Р. вып.

$v'_y = \frac{x}{x^2+y^2} = u'_x$.

$\Rightarrow \ln z \in A(G)$

$\ln' z = u'_x + i v'_x = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{1}{z}$.

$F(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln z$.

<u>Интегральная ф-ла Коши</u>

Пусть $f(z) \in A(G)$, $L \subset G$, $\operatorname{int} L \subset G$

Тогда для $\forall z_0 \in \operatorname{int} L$ верно

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

(ин-л Коши)

□ $\gamma_\rho : |z-z_0| = \rho \quad (\gamma_\rho \subset \operatorname{int} L)$

2-связн. обл. D с границей $L \cup \gamma_\rho$

$\triangleleft\ g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$

по т. о составном контуре

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = 1.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z_0)\,dz}{z-z_0} = f(z_0)$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \max_{z\in\gamma_\rho} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\underbrace{|z-z_0|}_{=\rho}}\, 2\pi\rho =$$

$$= \max_{z\in\gamma_\rho} |f(z)-f(z_0)| \to 0 \text{ при } \rho\to 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \to f(z_0)$$

■

<u>Замечание 1)</u> если G - односвязн. область с граничным контуром L, $f(z) \in A(G) \wedge C(\bar G)$, то ф-ла Коши справедлива для L. и $\forall z_0 \in G$.

05.04.06. Лекция 7

2) Пусть $|z-z_0| = \rho$ или $L: z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ — окружн. $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}\rho i e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi$$ — ф-ла о среднем значении.

3) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in \operatorname{int} L \\ 0, & z_0 \in \operatorname{ext} L \end{cases}$$

$g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ — аналитич. при $z_0 \in \operatorname{ext} L \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по интегр. теор. Коши $\frac{1}{2\pi i}\oint_L g(z)\,dz = 0$

<u>Интегралы, зависящие от параметра.</u>

$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ Если f, f'_y непр. $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, то $J'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$

<u>Обобщение:</u>

1) вместо одного может быть неск. параметров:

$J(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n)\,dx$

$f, f'_{y_1}, \dots, f'_{y_n}$ — непр., то

$$\frac{\partial J}{\partial y_i} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_i}\,dx$$

2) $J(z_1, \dots, z_n) = \int_L P(x, y, z_1, \dots, z_n) + Q(x, y, z_1, \dots, z_n)\,dy$

$F(z) = \int_L \varphi(z, \zeta)\,d\zeta$

<u>Требования:</u>

1) ζ измен. вдоль кривой L, $z \in G$ (на мн-ве G)

2) при фикс. ζ $\varphi(z,\zeta) \in A(G)$

3) φ, φ'_z непрерывны по совокупности переменных z и ζ (в $G \times L$).

<u>Теорема</u> (о дифференцировании интеграла с параметром)

Пусть выполнены усл-я 1-3. Тогда:

1) $F(z) \in A(G)$

2) $F'(z) = \int_L \varphi'_z(z,\zeta)\,d\zeta$.

□ $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$

$\varphi = u(x,y,\xi,\eta) + i\,v(x,y,\xi,\eta)$

$F(z) = \int_L u\,d\xi - v\,d\eta + i\int_L v\,d\xi + u\,d\eta = U(x,y) + iV(x,y)$

φ, φ'_z непр. $\Rightarrow u, v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$ непр. в $G \times L$

$U'_x = \int_L u'_x\,d\xi - v'_x\,d\eta$

$V'_y = \int_L v'_y\,d\xi + u'_y\,d\eta = \int_L u'_x\,d\xi - v'_x\,d\eta \Rightarrow$

$\Rightarrow U'_x = V'_y$; и аналогично $U'_y = -V'_x$

Выполнены усл-я К-Р для $F(z)$

U'_x, U'_y, V'_x, V'_y непр. и удовл. усл. CR $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $F(z)$ имеет непр. произв. в G, т.е. $F(z) \in A(G)$

$F'(z) = U'_x + iV'_x = \int_L u'_x d\xi - v'_x d\eta + i\int_L v'_x d\xi + u'_x d\eta =$

$= \int_L (u'_x + iv'_x)(d\xi + id\eta) = \int_L \varphi'_z dz.$

■

Теорема (о бесконечной дифференцируемости)

Пусть $f(z) \in A(D)$. Тогда в $\forall$ точке $z \in D$ f имеет производные всех порядков.

□ Фиксируем $z \in D$. Проведем контур L так, чтобы

$L \subset D$, $\text{in}\, L \subset D$, $z \in \text{int}\, L$.

Ин-л Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$\frac{\ }{\zeta - z}$ — аналитич. при фикс. ζ $\Rightarrow$ по пред. теореме можно дифф-ть

$\zeta \in L$, $z \in G = \text{int}\, L$.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (*)$$

■

Замечания Если G — односвязн. область с границей (контуром) L, $f(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$, то в $(*)$ интегрирование можно проводить по L для $\forall z \in G$.

Следствия теоремы о бесконечной дифференцируемости

① Производная аналитической ф-и сама является аналитич. ф-ей.

$f(z)$ имеет пр. $f'(z) \to f''(z) \to f'''(z) \to \ldots$

② Т (Теорема Морера)

Пусть G — односвязная область, $f(z) \in C(G)$ и обладает С-св-м в G. Тогда $f(z) \in A(G)$

□ Вып. усл-я т. о первообразной, в обл. G $\exists F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$, $F'(z) = f(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по сл-ю ① $\Rightarrow$ $f(z) \in A(G)$

■

③ Т (теорема Лиувилля)

Если целая ф-я $f(z)$ ограничена во всей плоскости, то $f = \text{const}$.

□ $\exists M > 0$: $|f(z)| \le M$ для $\forall z \in \mathbb{C}$

Фикс. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ — возьмем L — окружн.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

$$|f'(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \max_{|z-z_0|=R} \frac{|f(z)|}{\boxed{|z-z_0|^2}_{R^2}} 2\pi R \le \frac{M}{R}.$$

При $R \to \infty$ имеем $f'(z_0) = 0$.

Ввиду произвольности z_0 $f' \equiv 0 \Rightarrow f = const$.

■

(4) Т (основная т. алгебры)

Всякий многочлен ст. $n \geq 1$ имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы 1 корень.

□ Пусть P не им. корней в $\mathbb{C}$. Тогда

$f(z) = \frac{1}{P(z)}$ есть целая ф-я. Поскольку $P(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, то $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ и ограничена, ограничена во всей плоскости $\Rightarrow$ {т. по т. Лиувилля} $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(z)$ - const $\Rightarrow P(z) = const$

Получили противоречие.

Значит, $P(z)$ имеет корни в $\mathbb{C}$

■

(5) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Тема 6

Ряды аналитических функций.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum x_n + i \sum y_n$, $a_n = x_n + i y_n$.

Числовой компл. ряд.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, все u_n опред. в G –

функциональн. компл. ряд.

поточечн. сход. $\forall z \in G$.

равномерн. сход.: ряд $\sum u_n(z)$ сх-ся равномерно к $f(z)$ в обл G, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n \geq N$, $\forall z \in G$: $\left|f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)\right| < \varepsilon$.

Обозн.: $\sum u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows} f(z)$

Верен пр. Коши

Пр. Вейерштрасса. $\sum u_n(z)$, $z \in G$; $\sum c_n$;

$|u_n(z)| \le c_n$, $\forall n$, $\sum c_n < +\infty$.

Тогда $\sum u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows}$; $\sum |u_n(z)| \underset{G}{\rightrightarrows}$.

Задача. Пусть $\sum u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows}$; $\varphi(z)$ огр. в G (т.е. $\exists M > 0$: $|\varphi(z)| \le M$ для $\forall z \in G$) $\Rightarrow$ $\sum \varphi(z) u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows}$

Теор. 5.1. Пусть $u_n \in C(G)$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

$\sum u_n(z) \underset{G}{\rightrightarrows} f(z)$. Тогда:

1) $f(z) \in C(G)$

2) для $\forall$ кривой $L \subset G$ возможно почленное интегрирование т.е.

$$\int_L f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L u_n(z)\,dz$$

Опр Ряд $\sum u_n(z)$ сходится в G нормально если он сходится равномерно на $\forall$ компакте содержащемся в G.

(можно было бы ограничиться треб-ем равном. сх-ти на всяком замкн. круге, внутр. по отн-ю к G)

26.04.06 [Лекция]

Теор (1-я теорема Вейерштрасса)

Пусть ряд $\sum u_n(z)$ сход. к ф-ии $f(z)$ нормально в обл. G и $u_n(z) \in A(G)$

Тогда

1) $f(z) \in A(G)$

2) $\sum u_n$ можно почленно дифференцировать $\forall$ число раз (т.е. при $\forall k \in N$

$$f^{(k)}(z) = \sum u_n^{(k)}, \forall z \in G, \forall k \in N$$

3) все продифференцированные ряды сходятся в G нормально

$\square$ Докажем 1) и 2). ; 3) — для обд. р-ва (б/д)

1) Пусть z_0 — произвольная точка из G и

$\overline{K}_R(z_0): |z-z_0| \le R \subset G$

По т. 5.1 $f(z) \in C(\overline{K}_R(z_0))$ (норм. сх-ть)

и для $\forall$ контура $\gamma \subset K_R(z_0)$ имеем

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum \underbrace{\oint_\gamma u_n(z)\,dz}_{=0,\text{ т.к. } K_R(z_0) \text{ односв. обл. } u_n(z) \in A(G)} = 0.$$

$f(z) \in C(K_R(z_0))$ и имеет в нем C-свойство

По т. Морера $f(z) \in A(K_R(z_0))$ ($K_R(z_0)$ — односвязн. обл.),

ввиду произв-ти т. z_0 $f(z) \in A(G)$

2) Пусть z_0 — произв. точка из G и

$\gamma_\rho: |z-z_0| = \rho \subset G$.

$\triangle$ рав-во $f(z) = \sum u_n(z)$ (*) в точках $z \in \gamma_\rho$.

Фиксир. $k \in N$ и умножим обе части (*) на $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}, z \in \gamma_\rho.$$

Ряд справа $\rightrightarrows$ на γ_ρ (сх-ся равномерно, т.к. $\sum u_n(z) \rightrightarrows$ на γ_ρ, $\left|\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\right| = \frac{1}{\rho^{k+1}}$,

т.е. $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$ ограничена (по задаче из прошл. лекции))

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$$

$\mathcal{M}$в. част. $f^{(k)}(z_0)$ (д-ко при n в т. $\circ$ бескон. дифференц-ти)

$f^{(k)}(z_0) = \sum u_n^{(k)}(z_0)$

~~Всл~~ ввиду пр-ти z_0 утв. 2 д-но.

■

Теор. (2-я теорема Вейерштрасса)

Обл. G ограничена контуром Γ, простым или составным,

$u_n(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$, $n = 1, 2, \ldots$

Если ряд $\sum u_n(z) \rightrightarrows$ на контуре Γ, то он сх-ся равномерно в $\bar{G}$.

□ д-во в конце курса ■

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (*)$$

Теор. 5.2 (Коши-Адамар). Пусть $R = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$ (CH)

Если $R = 0$, то ряд $(*)$ сх-ся только в т. z_0.

Если $R > 0$ (включая случай $R = \infty$), то ряд $(*)$ сх-ся абсолютно в круге $K_R(z_0)$: $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$.

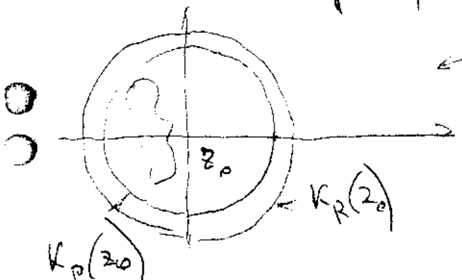
R - радиус сх-ти, $K_R(z_0)$ - круг сх-ти ряда $(*)$.

Лемма В круге $K_R(z_0)$ ряд $(*)$ сх-ся нормально.

□ Пусть K - произвольный компакт $\subset K_R(z_0)$

Тогда $\exists \bar{K}_\rho(z_0)$: $|z - z_0| \le \rho$ такой, что $\bar{K}_\rho(z_0) \subset K_R(z_0)$ и $K \subset \bar{K}_\rho(z_0)$

$\leftarrow \rho(K, \partial K_R(z_0)) = \delta > 0$



Ряд $(*)$ сх-ся абс. в т. $z = z_0 + \rho$, т.е. сходится ряд $\sum |c_n| \rho^n$

Этот ряд мажорирует ряд $(*)$ в круге $K_\rho(z_0)$. По пр-ку Вейерштрасса ряд $(*) \underset{K_\rho(z_0)}{\rightrightarrows}$ $\Rightarrow$ $(*) \underset{K}{\rightrightarrows}$

■

Следствие 1) $f(z) \in A(K_R(z_0))$

2) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\ldots(n-k+1) \cdot (z-z_0)^{n-k}$ $(**)$

3) полаг. в $(*)$, $(**)$ $z = z_0$, имеем $c_0 = f(z_0)$, $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ } - формулы Тейлора для коэф-в.

Зн-но, коэф-ты сх. ряда $(*)$ однозначно опр-ся его суммой $f(z)$.

$\boxed{\text{Прим.}}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n$

$c_n = 1 \Rightarrow R = 1.$

$|z-z_0| < 1$

$f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (z-z_0)^k =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)} = \dfrac{1}{1-(z-z_0)}$

Ряд Тейлора.

Теор. (Тейлора)

Пусть $f(z) \in A(G)$

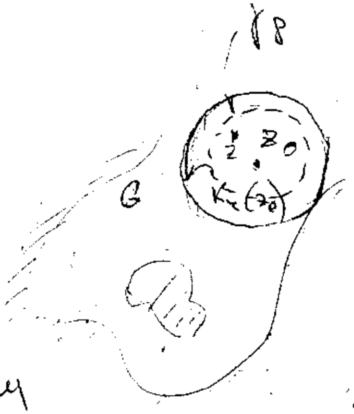
Если $z_0 \in G$

и $r = \rho(z_0, \partial G)$,

то в круге $K_r: |z-z_0| < r$,

$f(z)$ представляется рядом

$f(z) = \sum c_n (z-z_0)^n$ и это представление $(!)$



$\square$ Фикс. $z \in K_r(z_0)$ и построим окружность

$\gamma_\rho: |z-z_0| = \rho \subset K_r(z_0)$ и $z \in \operatorname{int} \gamma_\rho$

По интегральной ф-ле Коши

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$

При фикс. ζ $\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{(\zeta - z_0) - (z-z_0)} =$

$= \dfrac{1}{\zeta - z_0} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \dfrac{1}{\zeta - z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \dfrac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

Заметим, что ряд в правой части $\overset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}$

(мажорируется положит. рядом

$\left(\max\limits_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(z)|\right) \cdot \sum \dfrac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$)

Почленно инт-м:

$\dfrac{1}{2\pi i} \oint \underbrace{\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}_{f^{n}(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{\text{обозн. } c_n} (z-z_0)^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$

$n = 0, 1, \ldots$

В виду произвольности т. $z \in K_r(z_0)$ теорема д-на.

∎

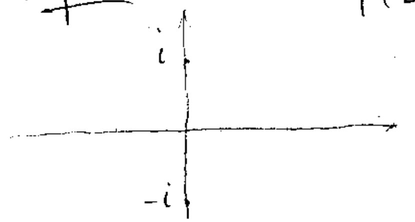
Может возникнуть подозрение, что c_n завис. от z неявно (при выборе окр-ти), но

$$\oint\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi$$

не содерж. z

(по т. о составном контуре)

Прим $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ $\quad G = \{z \neq \pm i\}$.



$z_0 = 0$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, $|z|<1$

$z_0 = 1$: $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$

$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-1+1-i} = \frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}} =$

$\left|\frac{z-1}{1-i}\right| < 1 \quad \wedge \quad |z-1| < \sqrt{2}$

$= \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1-i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}}$

Аналогично $\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1+i)^n}$

(при $|z-1| < |1-i| = \sqrt{2}$)

$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)(z-1)^n =$

$= \left\{ 1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \quad 1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} \right\} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin((n+1)\frac{\pi}{4})}{2^{\frac{n+1}{2}}} (z-1)^n$

(CH) $\Rightarrow R = \sqrt{2}$.

Теорема единственности.

Пусть E – подмн. обл. G, которое имеет хотя бы одну <u>конечную</u> предельную точку z_0.

Теор. 1-я формул-ка Может существовать не более одной функции $f(z) \in A(G)$, принимающей заданные значения в точках из E.

<u>2-я форм-ка</u> $\exists\ \varphi(z) \in A(G)$ и $\varphi(z) = 0$ $\forall z \in E$. Тогда $\varphi(z) \equiv 0$, $z \in G$

задача: д-ть эквив-ть $(1) \wedge (2)$

(2-я ⇒ 1-я формул-ки)

(1) $\exists\ \{z_k\} \subset E$ $\quad \{z_k\} \to z_0$ и $z_k \neq z_0$ $\forall k$.

Пусть $r = \rho(z_0, \partial G)$

Докажем, что $\varphi(z) = 0$ $\forall z \in K_r(z_0)$

$\varphi(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$ (по теор. Тейлора)

$\exists\ z = z_k \Rightarrow \quad 0 = \varphi(z_k) = c_0 + c_1(z_k - z_0) + c_2(z_k-z_0)^2 + \ldots$

Переходя к пред. при $k \to \infty$ получ $c_0 = 0$.

Лекция 7 $\qquad$ 27.04.06

$\exists\ c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} = 0$.

$\varphi(z) = c_n(z-z_0)^n + c_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \ldots$

$0 = \varphi(z_k) = c_n(z_k - z_0)^n + c_{n+1}(z_k-z_0)^{n+1} + \ldots \quad \Big| : (z_k - z_0)^n$

$c_n + c_{n+1}(z_k - z_0) + \ldots = 0$.

при $k \to \infty$ $\quad z_k \to z_0 \Rightarrow c_n = 0$.

По инд. и $c_1 = c_2 = \dots = 0$.

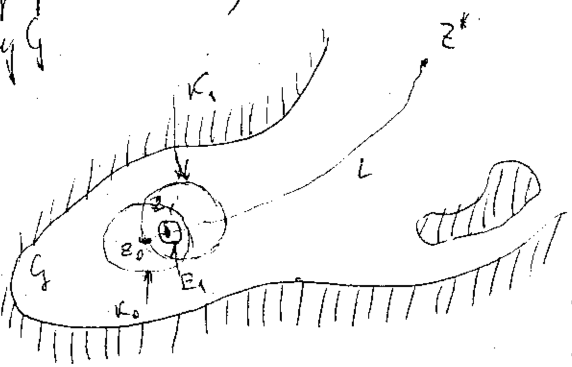
$\varphi(z) \equiv 0$ в круге $K_2(z_0)$

(2) Пусть z^* — произв. т. из G

Соединим z_0 и z^* непр. кривой $L \subset G$

Пусть $\delta = \rho(L, \partial G) > 0$

Положим $K_0 = K_\delta(z_0)$



Возьмем т. z_1 на кривой L так, чтобы длина сегмента $z_0 z_1$ на L была $\frac{\delta}{2}$

Тогда $z_1 \in K_0$ и $E_1 = K_{\varepsilon_1}(z_1) \subset K_0$
окр-ть т. z_1

Постр. круг $K_1 = K_\delta(z_1)$. К K_1 и E_1 применим рассужд-я из 1-й части д-ва. $\Rightarrow$ $\varphi(z) \equiv 0$ для $\forall z \in K_1$

Возьмем z_2 на L: дл. $z_1 z_2$ равна $\frac{\delta}{2}$

$z_2 \in K_1$, $E_2 = K_{\varepsilon_2}(z_2) \subset K_1$

Строим $K_2 = K_\delta(z_2)$, примен. к K_2 и E_2 рассуж-я из 1-й части $\Rightarrow \varphi(z) = 0$ $\forall z \in K_2$.

Применяя эти рассужд-я, дойдем до z_n: $z^* \in K_\delta(z_n)$

$\varphi(z) = 0$ $\forall z \in K_n \Rightarrow \varphi(z^*) = 0$.

Ввиду произв-ти z^* $\varphi(z) = 0$ в G

Следствия и приложения теоремы единственности

Пусть $f(z) \in A(G)$ и A — фиксир. число.

Всякая т. $z_0 \in G$: $f(z_0) = A$, назыв. A-точкой ф-и f.

Число $k \in \mathbb{N}$ назыв. кратностью (= порядком) A-точки z_0, если

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

$$f(z) = A + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k+1} + \dots$$

Если $A = 0$, то z_0 — нуль ф-и f.

$\boxed{\text{Пример}}$ 1. $f(z) = \cos z$.

$z_0 = 2k\pi$ $\quad z_0$ — 1-точка ф-и $f(z)$

$f'(z) = -\sin z$, $\quad f'(z_0) = 0$.

$f''(z) = -\cos z$, $\quad f''(z_0) \neq 0$.

z_0 — точка кратности 2.

2. $f(z) = \sin z - z$.

$z_0 = 0$ $\quad z_0$ — нуль ф-и $f(z)$

$f'(z) = \cos z - 1$, $\quad f'(0) = 0$.

$f''(z) = -\sin z$, $\quad f''(0) = 0$

$f'''(z) = -\cos z$ $\quad f'''(0) \neq 0$.

z_0 — точка кратн. 3 (тройной нуль)

Следствие 1 Пусть $f(z) \in A(G)$ и $f(z) \neq const$, $\mathbb{F}$-компакт, вложенный в G.

Тогда $\forall$ числа A в $\mathbb{F}$ может содержаться лишь <u>конечн.</u> число A-точек ф-и f.

$\square$ $\exists E \subset \mathbb{F}$ – бесконечное множество A-точек ф-и f. Тогда $\exists$ конечн. предельн. точка z_0 мн-ва E

(огран. $\mathbb{F} \Rightarrow$ огр. E и Б.-В.)

причём $z_0 \in \mathbb{F}$ (замкн. $\mathbb{F}$) $\Rightarrow z_0 \in G$

По т. единств. $f(z) = A$, $z \in G$.

Противоречие

$\blacksquare$

Прим ① $G = \mathbb{C}$, $f(z) = \sin z$, $z_k = k\pi$, $f(z) = 0$

② $G = \{0 < |z| < 1\}$, $f(z) = \sin\frac{1}{z}$, $z_k = \frac{1}{k\pi}$,

$z_k \to 0$, но $0 \notin G$, нет против-я.

Следствие 2 Пусть на $[a,b] \subset \mathbb{R}$ определена ф. $\varphi(x)$, $[a,b] \subset G$

Тогда $\exists$ не более одной ф-и $f(z) \in A(G)$, совпадающей с $\varphi(x)$ в точках из $[a,b]$.

Прим ① $\varphi(x) = \sin x$ $[0, 2\pi]$ $G = \mathbb{C}$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\exists z = x \in \mathbb{R}$.

$e^{iz} = \cos x + i\sin x$

$e^{-iz} = \cos x - i\sin x$

Тогда $\sin z = \sin x$ и другого продолж-я в компл. пл-ть нет.

Опр. $f(z)$ – аналитич. продолжение $\varphi(x)$ с вещ. оси на компл. пл-ть

② В точках вещ. оси

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

В компл. пл-ти $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$ $R = \infty$.

Т.к. в вещ. пл-ти прав. части совпад., то $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$ — единств. продолж-е e^z

③ (несуществование ф-й с заданными свойствами)

Прим $\exists$ ли ф-я $f(z) \in A(K_1)$, $K_1: |z| < 1$, такая, что $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$

$E = \left\{\frac{1}{n}\right\} \subset K_1$ $\exists z_0 = 0 \in K_1$

$g(z) = z$ $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ По т. ед. $f(z) = z$, $z \in K_1$

Но $f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n}$ Искомой ф-и $\nexists$.

④ (продолжение соотношений)

a) $F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ – целая

$F(z) = 0$ для $z \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$

по т. единств. $F(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

б) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ (*)

Фикс. $z_2 = x_2 \in \mathbb{R}$ и $\forall$ обе части (*) как ф-и от z_1.

$f(z_1) = \cos(z_1 + z_2)$ $g(z_1) = (\cos x_2)\cos z_1 - (\sin x_2)\sin z_1$

$f(z_1) \equiv g(z_1)$ для $\forall z_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ по т. единственности $f(z_1) = g(z_1)$ для $\forall z_1 \in \mathbb{C}$

Фикс. комп. z_1 и ~~к~~ обе части (*) как ф-ии от z_2:

$F(z_2) = \cos(z_1 + z_2)$, $G(z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + (\sin z_1) \sin z_2$.

$F(z_2) = g(z_2)$ для $\forall z_2 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ по т. единств. $F(z_2) = G(z_2)$, $\forall z_2 \in \mathbb{C}$,

(*) верно для $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Тема 6. Ряды Лорана и изолированные особые точки

$f(z) \in A(D)$

$D: 0 < |z - z_0| < \delta$

Т.к. $z - z_0 \neq 0$, то нельзя исп. т. Тейлора

z_0 – изолированная (т.е. других таких в окр. z_0 нет) особая точка.

Опр. Рядом Лорана наз-в. ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\mathrm{II}} \quad (*)$$

Опр. ряд (*) сходится $\Leftrightarrow$ сх. I и II.

$\exists R_1$ – радиус сх-ти I.

$R_1 = 0$ (*) – не сход. нигде

$R_1 > 0$ ($R_1 = \infty$) – ряд I сход. в $K_1: |z - z_0| < R_1$ абсолютно и нормально к $f_1(z) \in A(K_1)$

$\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$ II $\to \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n$ (III)

R_2^{-1} – радиус сх-ти ряда III

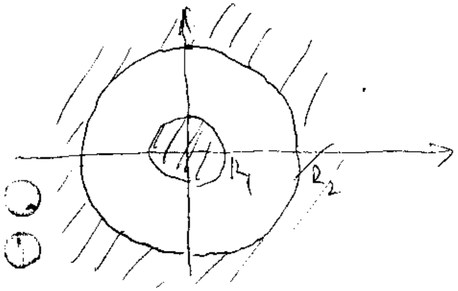
$R_2^{-1} = 0 \sim R_2 = \infty$ (*) не сход. нигде

$R_2^{-1} \neq 0 \sim R_2 \neq \infty$.

ряд III сход. в $K_1: |\zeta| < R_2^{-1}$

ряд II сход. в $K_2: |z - z_0| > R_2$

абс. и норм. к $f_2(z) \in A(K_2)$

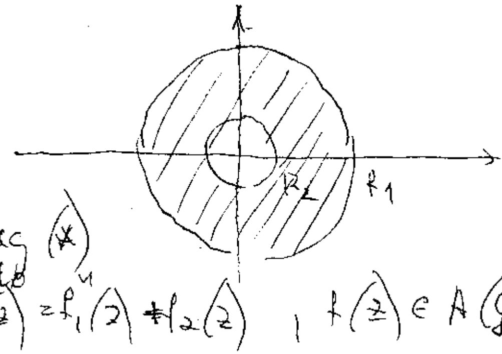


$R_1 < R_2$ ряд (*) не сх. нигде

$R_1 = R_2$ ряд (*) может сх. только в точках окр. $|z - z_0| = R_1 = R_2$

При $R_2 < R_1$

$D: R_2 < |z - z_0| < R_1$



В кольце D ряд (*) сх-ся абсолютно и нормально к $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, $f(z) \in A(D)$

$\gamma_\rho : |z - z_0| = \rho$

$R_2 < \rho < R_1$

$\times \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \quad \Big| \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \ z \in \gamma_\rho$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-k-1} \underset{\gamma_\rho}{\rightrightarrows}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1} dz}_{\begin{cases} = 0, & n-k-1 \neq -1 \\ = 2\pi i, & n-k-1 = -1 \end{cases}} \ominus$$

$\ominus \ c_k$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Вывод: коэф-ты ряда Лорана однозначно опр-ся каждой ф-цией $f(z)$

[Лекция]

В кольце $\mathcal{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1$ ряд Лорана определяет аналитическую ф-ю $f(z) \in A(\mathcal{D})$

Теорема Лорана.

Теор. (Лорана)

$\exists f(z) \in A(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}: R_2 < |z - z_0| < R_1$

Тогда $f(z)$ представима в $\mathcal{D}$ рядом Лорана по степеням $z - z_0$ и это представление единственно

$\square$ Фиксируем $\forall$ т. $z \in D$

Построим кольцо

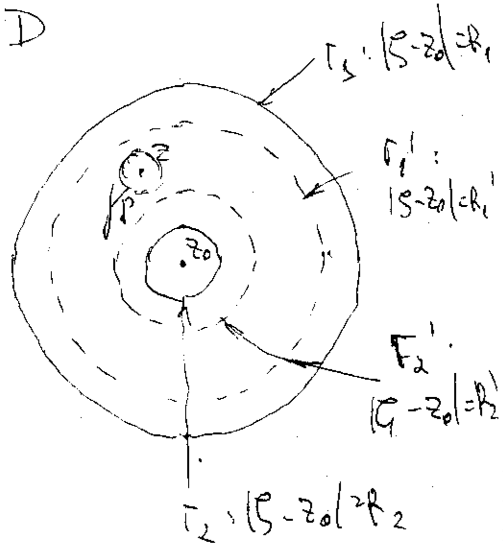
$D': R_2' < |z - z_0| < R_1'$

$: D' \subset D, \ z \in D'$

и окружность

$\gamma_\rho : |\zeta - z| = \rho$

так, чтобы $\gamma_\rho \subset D'$



$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$.

Применим к φ теор. о составном контуре (γ_ρ, Γ_2' - внутр. граница, Γ_1' - внешн)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{f(z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (*)$$

$\Big\{ \Gamma' = \Gamma_1' \cup \Gamma_2' \ \Big| \ \ominus \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \Big\}$

Получим ф-лу Коши для многосвязн. (2-связн.) области.

1) $\zeta \in \Gamma_1' \Rightarrow \dfrac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|} = \dfrac{|z-z_0|}{R_1'} = \theta < 1.$

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0+(z_0-z)} = \frac{1}{\zeta-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

р-ся равномерно

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \underset{\Gamma_1'}{\rightrightarrows} \Rightarrow$$ инт. почленно

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \text{ где}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n=0,1,2,\dots$$

2) $\zeta \in \Gamma_2' \Rightarrow \dfrac{|\zeta-z_0|}{|z-z_0|} = \dfrac{R_2'}{|z-z_0|} = u < 1$

$$-\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{z-z_0-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

с-ся мажор. р-но

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n} \underset{\Gamma_2'}{\rightrightarrows} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,d\zeta, \quad n=1,2,\dots$$

Подставляем оба разложения в соотношение (*):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

Т.к. z — $\forall$, то ряд Лорана получен.

Коэф-ты ряда Л. однозначно опр-ся его суммой $\Rightarrow$ ряд Л. един-й (!)

[redacted]

Замечание. Может возникнуть подозрение, что c_n зависят от z неявно (т.е. выбор контур-в Γ_1' и Γ_2').

Но по т. о сост. контуре:

если $\Gamma: |z-z_0| = R$, $R_2 < R < R_1$

$$\oint_{\Gamma_2'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,d\zeta = \oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,d\zeta.$$

Классификация изолированных особых точек.

$f(z) \in A(D)$; $D: 0<|z-z_0|<R$

D – окрестность т. z_0 (опускаем слово „проколотая")

Тогда z_0 – изолиров. особая точка.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{(*)\ \text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{главная часть}}$$

① случай

ряд (*) не содержит членов с отриц. степенями $z-z_0$.

Тогда z_0 – устранимая особая точка (УОТ, или правильн. точка)

② случай

ряд (*) содержит конечн. число членов с отриц. степенями

Тогда z_0 – полюс ф-и f

③ случай

ряд (*) содержит бесконечн. много членов с отриц. степенями

Тогда z_0 – существенно особая точка ф-и f. (СОТ)

Теор. 6.1. z_0 – УОТ ф-и $f(z)$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ конечный предел $\lim_{z\to z_0} f(z)$ $\Leftrightarrow$ $f(z)$ ограничена в нек. окр-ти т. z_0.

□ (1) $\Rightarrow$ (2)

z_0 – УОТ $\Rightarrow$ (*): $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{z\to z_0} f(z) = c_0$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Элементарно.

(3) $\Rightarrow$ (1)

$f(z)$ – огр. в нек. окр. U точки z_0, т.е. $\exists M>0$: $|f(z)| \le M$ для $\forall z \in U$.

$\gamma_\rho: |z-z_0| = \rho$, $\gamma_\rho \subset U$. Тогда коэф-ты ряд-а (*) можно вычислить, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\xi\in\gamma_\rho}|f(\xi)|\frac{1}{\rho^{n+1}}\,2\pi\rho \le \frac{M}{\rho^n}$$

если $\rho \to 0$, то $c_n = 0$ при $n=-1,-2,\dots$

т.к. (*) превращается в степенной ряд

z_0 – устранимая особая точка. $\blacksquare$

Замечание ① $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = c_0$.

Если положить $f(z) = c_0$, то особ-ть будет устранена

б) Если z_0 - не УОТ, то $f(z)$ не может быть ограничена ни в какой окр-ти т. z_0.

— — —

z_0 - полюс

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots$$

$c_{-m} \neq 0$

m - порядок (кратность) полюса z_0.

Теор. 6.2 z_0 - полюс ф-и $f(z) \Leftrightarrow f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

□ ($\Rightarrow$)

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\underbrace{\left(c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + c_{-m+2}(z-z_0)^2 \ldots\right)}_{\substack{\varphi(z) \in A(D), \\ \varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0.}}$$

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$

при $z \to z_0$ $\varphi(z) \to c_{-m} \neq 0$, а $z - z_0 \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) \to \infty$

($\Leftarrow$) д-ва

Зам-е $\triangleleft$ $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$

$g(z)$ - аналитич. в нек. окр. т. z_0

$g(z) = (z-z_0)^m \frac{1}{\varphi(z)}$, $\frac{1}{\varphi(z)} \neq 0$.

z_0 - нуль пор. (m) для $g(z)$

($\Leftarrow$) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

$\triangleleft$ $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$

$g(z)$ - аналитич. в окр-ти т. z_0.

z_0 - есть нуль ($\exists$ порядка (m)) ф-и $g(z)$

$$g(z) = d_m (z-z_0)^m + d_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots =$$

$d_m \neq 0$

$$= (z-z_0)^m \left(d_m + d_{m+1}(z-z_0) + \ldots\right)$$

$$g(z) = (z-z_0)^m \psi(z)$$

$\psi(z_0) = d_m \neq 0$.

$z \neq z_0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$.

$\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$ аналит. в окр. т. z_0

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{\psi(z_0)} = \frac{1}{d_m}.$$

$\varphi(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$ $a_0 = \frac{1}{d_m}$

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots$$

z_0 - полюс пор. m для $f(z)$ ■

Теор 6.3 z_0 - полюс пор. (m) для $f(z)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ z_0 - нуль пор. m для

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \ne z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

(3) z_0 - СОТ ф-ции $f(z)$

$\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ (по т. 6.1 и 6.2)

ни конечн., ни бесконечн.

Теор (Сохоцкого)

Пусть z_0 - СОТ ф-ции $f(z)$. Тогда для $\forall$ числа A конечного или бесконечного найдется $\{z_n\}$ (A - посл-ть Сохоцкого), такая, что $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to A$

□ Пусть $A = \infty$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\exists z_n'$: $|z_n' - z_0| < \frac{1}{n}$,
$|f(z_n')| \geq n$

$\{z_n'\}$ - посл. Сохоцкого для сл-я ∞.

Пусть $|A| < \infty$.

От противн. Пусть для дан. A $\nexists$ посл-ти Сохоцкого. $\Rightarrow \exists$ окр-ть т. z_0 $U_\delta : 0 < |z - z_0| < \delta$ и $\alpha > 0$: $|f(z) - A| > \alpha$, $\forall z \in U_\delta$.

Пусть $\varphi(z) \overset{def}{=} \frac{1}{f(z) - A}$, $z \in U_\delta$.

$\varphi(z)$ - аналитическая, $|\varphi(z)| < \frac{1}{\alpha}$ в U_δ

Тогда z_0 - УОТ для $\varphi(z)$ по т. 6.1.

По т. 6.1 $\exists$ конечн. $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z)$

$$\varphi(z_n') = \frac{1}{f(z_n') - A} \to 0.$$

Т.к. $\exists$ предел, то из о.д. посл-ти по сл. совпад. для $\forall$ посл-ти:

$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{f(z) - A} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0$ - полюс $f(z)$.

Получили противоречие ■

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

При $z \ne 0$ заменим $z \to \frac{1}{z}$.

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots, \quad \forall z \ne 0.$$

Это ряд Лорана сх-ся в $0 < |z| < \infty$.

Зн., z_0 - СОТ (по опр.)

Найдем посл. Сохоцкого.

$A = \infty$ $z_n' = \frac{1}{n}$ $f(z_n') = e^n \to \infty$

$A = 0$ $z_n'' = -\frac{1}{n}$ $f(z_n'') = e^{-n} \to 0$.

[Лекция]

Прим. (продолжение)

$A: \ z_n \to z_0 \quad f(z_n) \to A$

$\exists \ f(z_n) = A \ \forall n$

$f(z) = A \sim e^{\frac{1}{z}} = A, \ \frac{1}{z} = \operatorname{Ln} A$

$\operatorname{Ln} A = \ln|A| + i \operatorname{Arg} A$

$\ln A = \ln|A| + \arg A$

$\operatorname{Ln} A = \ln A + i2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$z_n = \dfrac{1}{\ln A + i2\pi n}$

Теор. (Пикара) (Большая)

$\exists \ z_0$ - СОТ ф-и $f(z)$. Тогда для $\forall$ конечного числа A (с единственным возможным исключением) $\exists$ посл-ть A-точек ф-и f, сходящаяся к т. z_0

[redacted] Без д-ва

Задача. Проверить, что для $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ в $z_0 = 0$ исключений нет, и т. Пикара.

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

если z_0 - УОТ $\quad \exists$ кон. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

z_0 - полюс $\quad \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

z_0 - СОТ $\quad \nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

Особенности в бесконечно удаленной точке

$f(z) \in A(D)$, $D: |z| > R$.

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

Считаем т. $z_0 = \infty$ изол. особ. точкой ф-и f

$f(z) \qquad z = \frac{1}{\zeta}$

$\to g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ в окр. т. $\zeta_0 = 0$.

Опр. $z_0 = \infty$ - УОТ, полюс или СОТ для $f(z)$, если $\zeta_0 = 0$ явл. соответственно УОТ, полюсом или СОТ для $g(\zeta)$.

$z_0 = \infty, \ \zeta_0 = 0$	$g(\zeta)$
УОТ	$g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots$
полюс	$g(\zeta) = a_{-m}\zeta^{-m} + \ldots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots$
СОТ	$g(\zeta) = \ldots + a_{-m}\zeta^{-m} + \ldots + a_{-1}\zeta^{-1} + a_0 + a_1\zeta + \ldots$

	$f(z)$
УОТ	$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$
полюс	$f(z) = a_{-m}z^m + \ldots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$, где $a_{-m} \neq 0$
СОТ	$f(z) = \ldots + a_{-m}z^m + \ldots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}}_{\text{правильн. часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n}_{\text{главная часть}}$$

① $z_0 = \infty$ есть УОТ ф-и $f(z)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ конечн. $\lim_{z\to\infty} f(z)$ $\Leftrightarrow$ $f(z)$ огранич. в нек. окр-ти ∞.

② $z_0 = \infty$ есть полюс ф-и $f(z)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

③ $z_0 = \infty$ есть СОТ ф-и $f(z)$ $\Rightarrow$ $\nexists \lim_{z\to\infty} f(z)$

$\boxed{\text{Прим.}}$ ① $f(z) = \sin^2 \frac{1}{z}$

$\exists \lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \infty$ – УОТ

$$g(\zeta) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) & \zeta \neq 0 \\ 0, & \zeta = 0 \end{cases}$$

$\zeta_0 = 0$ нуль порядка 2. $\Rightarrow$

$\Rightarrow z_0 = \infty$ – нуль порядка 2

② $f(z) = P_n(z) = \underbrace{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}_{\text{главн. часть разл-я}}$, $n \geq 1$

$z_0 = \infty$ полюс пор. n.

③ $f(z) = e^z$; $z_0 = \infty$. СОТ

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$

Вычеты

$f(z)$ – аналитич. в области G за исключением, может быть, конечного количества только изолир. особых точек. (*)

В каждом компакте $K \subset G$ содержится лишь конечное число изол. особ. точек ф-и $f(z)$

В противном сл-е $\exists$ т. z_0 – предельная для мн-ва изолир. особ. точек.

$z_0 \in K \subset G$. неизолир. особ. точка, что противоречит усл-ю (*)

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz$$

Соглашение о контурах. Рассм. кусочно-гладкий контур, который не проходит через особые т. ф-и $f(z)$

Опр. $\exists$ z_0 – изол. особ. т. ф-и $f(z)$ и

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

– её лорановское разл-е отн. т. z_0

Вычетом $f(z)$ отн. т. z_0 (в т. z_0) называется коэфф-т лорановского разл-я c_{-1}

Обозн. $c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$

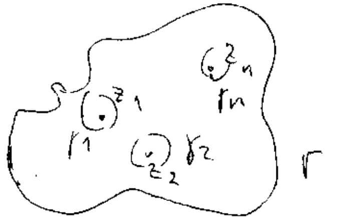
res – от фр. residue

$\Gamma_\rho: |z-z_0| = \rho \Rightarrow c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho^+} f(z)\, dz$

Теор. (о вычетах): Пусть $z_1 \ldots z_n$ – все особые точки ф-и $f(z)$ внутри Γ.

Тогда $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$

□



Построим $\gamma_k : |z - z_k| = \rho_k$

$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \subset \operatorname{Int}\Gamma$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$

по т. о составном контуре

$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz =$

$= 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), z_k)$

∎

1) z_0 – простой полюс ф-и $f(z)$

$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1 (z - z_0) + \ldots$

$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + c_0 (z - z_0) + \ldots$

$c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (f(z)(z - z_0))$

2) $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, z_0 - прост. полюс

φ, ψ аналитичны в окр. т. z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$.

$c_{-1} = \lim \frac{\varphi(z)(z - z_0)}{\psi'(z_0)(z - z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots} =$

$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

$\operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

3) z_0 - полюс кратн. m $(m > 1)$ для $f(z)$

$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} +$

$+ c_0 + c_1 (z - z_0) + \ldots$

$f(z)(z - z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots$

$+ c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0 (z - z_0)^m + \ldots$

$\frac{d^{m-1} f(z)(z - z_0)^m}{dz^{m-1}} = c_{-1}(m-1)! + c_0 (m)(m-1)\ldots 2(z - z_0)$

$+ \ldots$

$c_{-1} = \operatorname{res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}(f(z)(z - z_0)^m)}{dz^{m-1}}$

При $m = 1$ $0! = 1$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$

4) Пусть теперь $z_0 = \infty$

<u>Вычет относительно бесконечно удалённой точки.</u>

$f(z) \in A(D)$, $D : |z| > R$

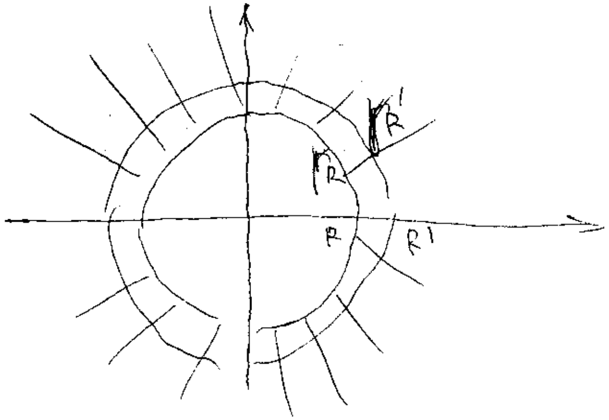
$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ $z \in D$.

Опр Вычетом ф-и $f(z)$ отн. $z_0 = \infty$ назыв. коэф-т $(-c_{-1})$

① $\operatorname{res}(f(z),\infty)$ может быть $\neq 0$ даже если $z_0=\infty$ - УОТ для $f(z)$

$f(z)=\frac{1}{z}$

$C_{-1}=1$, $\operatorname{res}(f(z,\infty))=-1$.



$$\oint_{\Gamma_{R'}} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_{\Gamma_{R'}} z^n = 0$$

$$=2\pi i\, c_{-1}$$

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{R'}} f(z)dz \to \operatorname{res}(f(z),\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+_{R'}} f(z)dz =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-_{R}} f(z)dz.$$

Теор. (о полной сумме вычетов)

Пусть $f(z)$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ только изолир. особые точки: $z_1,\dots,z_n$ (конечное) и $z_0=\infty$.

Тогда $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{res}(f(z),z_k)=0$.

□ Пусть $R'>0$: $|z_k|<R'$, $k=1,\dots,n$. Обозн. $\Gamma_{R'}$: $|z|=R'$. Тогда по т. о вычетах

$$\oint_{\Gamma^+_{R'}} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(f(z),z_k) \quad (1)$$

$$\oint_{\Gamma^-_{R'}} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f(z),z_0) \quad (2)$$

Склад. (1) и (2) ■

Замеч. Т. о полн. сумме вычетов применима к вычисл. интеграл. ф-й $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$

Лекция 7 — 10.05.06

Пример ① Вычислить $J=\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$$

Ос. точки: $z_1,\dots,z_5$ - корни 5-й ст. из 1 } простые полюса; $z_6=3$; $z_7=\infty$.

$$J=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\operatorname{res}[f(z),z_k].$$

$f=\frac{\varphi}{\psi}$, $\varphi(z)=\frac{1}{z-3}$, $\psi(z)=\frac{1}{z^5-1}$

$\psi'(z)=5z^4$.

$$J=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{5z^4(z-3)}\Big|_{z=z_k}=\frac{2\pi i}{5}\sum_{k=1}^{5}\frac{z}{z-3}\Big|_{z=z_k}$$

Др. способ: $\frac{J}{2\pi i}=\sum_{k=1}^{5}\operatorname{res}[f(z),z_k]=$

$=-\operatorname{res}[f(z),z_6]-\operatorname{res}[f(z),z_7]$

z_6) $f = \frac{\varphi}{\psi}$, $\varphi = \frac{1}{z^5-1}$; $\psi = z-3$; $\psi' = 1$.

$\operatorname{res}[f(z), z_6] = \frac{1}{242}$.

z_7) ∞ – устранимая ос. т. для f, что не означает само по себе, что вычет $=0$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z^6\left(1-\frac{3}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^5}\right)} =$$

$$= \frac{1}{z^6}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^{10}}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^6}+\dots$$

Вычет – коэф-т при $\frac{1}{z}$, а он $=0 \Rightarrow$

$\operatorname{res}[f(z), \infty] = 0$.

Вообще, если на бескон. $f(z) \sim \frac{1}{z^m}$, $m>1$, $\operatorname{res}[f(z), \infty] = 0$.

$$J = -\frac{\pi i}{121}.$$

Вычисление интегралов от действ. переменной с помощью вычетов

Интегралы вида $J = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$

$R(x,y)$ – рациональная ф-я от x, y.

Пусть $z = e^{i\varphi}$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$dz = e^{i\varphi} i\,d\varphi$; $d\varphi = \frac{1}{iz}dz$

$$J = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \tilde{R}(z)\,dz$$

Пример 2) Вычислить инт-л $J = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}$

$z = e^{i\varphi}$

$$J = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(5+3\,\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+10z+3}$$

$$\tilde{R}(z) = \frac{\overset{=\varphi}{1}}{3z^2+10z+3} = \psi$$

Особые точки $z_1 = -\frac{1}{3}$, $z_2 = -3$

$$J = \frac{2}{i}\,2\pi i \operatorname{res}[f(z), z_1] = 4\pi\,\frac{1}{6z_1+10} =$$

$$= \frac{2\pi}{-1+5} = \frac{\pi}{2}.$$

Инт-лы вида $J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Обозн. $P^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$. $\bar{P}_+ = \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Теор. 7.1 Пусть $f(z)$ удовл. усл-м:

1) $f(z)$ – аналитич. в P_+ за исключением особых точек $z_1, \dots, z_n$

2) $f(z)$ – непрерывна в точках действ. оси.

3) $\exists R_0 > 0$: $|f(z)| \le \frac{M(z)}{|z|}$ для $z : |z| \ge R_0$, $z \in \overline{P}_+$,

и $M(z) \rightrightarrows 0$ при $z \to \infty$, $z \in \overline{P}_+$.

Тогда инт-л J $\exists$ хотя бы в смысле главного значения и

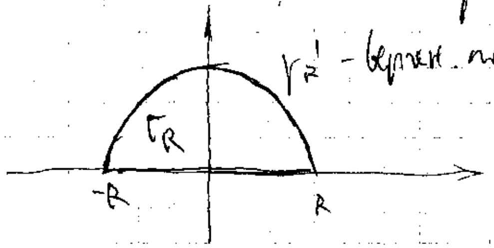
$$J = (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right].$$

$\square$ $|z_k| \le R_0$ (т.к. в особых точках нер-во в (3) не может выполняться)

Для $\forall R > R_0$ построим контур Γ_R и применим осн. теорему о вычетах.

γ_R' - верхн. полукруг



$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R'} f(z)\,dz =$$

$= \{$т. о выч.$\} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right].$

$R \to \infty$ $\left|\int_{\gamma_R'} f(z)\,dz\right| \le \max_{z \in \gamma_R'} |f(z)| \cdot \pi R \le \frac{\max M(z)}{R} \cdot \pi R \to$

$\to 0$ при $R \to \infty$. (из (3))

$\exists \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$

$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right]$

Замеч. Можно д-ть, что по непрерывности ... формула будет та же, но с произвол. значением.

Прим. (3) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ - удовл. усл-м т. 7.1

$z_2 = -i$, $z_1 = i$ - полюс кратн. 3.

$$J = 2\pi i \operatorname{res}\left[f(z), z_1\right] =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2} \lim_{z \to z_1} \Big(\underbrace{f(z)(z-i)^3}_{g(z)}\Big)'' = \pi i \frac{12}{(2i)^5} = \pi \frac{12}{32} = \frac{3\pi}{8}$$

$g(z) = \frac{1}{(z+i)^3}$; $g''(z) = \frac{12}{(z+i)^5}$

Интегралы вида $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx$

Лемма Жордана. Пусть $f(z)$ непрерывна в области $\{|z| \ge R_0 > 0$ и $z \in \overline{P}_+\}$ и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \overline{P}_+$.

Тогда для $\forall a > 0$ $\int_{\gamma_R'} e^{iaz} f(z)\,dz \to 0$ при $R \to \infty$, где $\gamma_R' : |z| = R$, $z \in \overline{P}_+$

$\square$ $M_R = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)| \to 0$ усл. $M_R \to 0$ при $R \to \infty$.

$$|J| = \left|\int_{\gamma_R'} e^{iaz} f(z)\,dz\right| \le \int_{\gamma_R'} |e^{iaz}|\,|f(z)|\,|dz| \le$$

γ_R': $z = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$

$\le \mu_R \int_0^\pi |e^{iaz}|\, R\,d\varphi = \mu_R R \int_0^\pi |e^{iaz}|\,d\varphi =$

$iaz = iaR(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -aR\sin\varphi + iaR\cos\varphi$

$|e^{iaz}| = e^{-aR\sin\varphi}$

$= \mu_R R \int_0^\pi e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi = 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi \le$

$\le 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR\varphi}{\pi}} = 2\mu_R R \frac{\pi}{2aR} e^{-\frac{2aR\varphi}{\pi}} =$

$= \frac{\pi\mu_R}{a}\left(1 - e^{-aR}\right)$

$R \to \infty$ $J \to 0$.

■

<u>Теор. 7.2</u> Пусть $f(z)$ удовл. усл-м 1) и 2) теор. 7.1

Пусть $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Тогда для $\forall a > 0$ интеграл J сходится в смысле главного значения и

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right]$$

□ Пусть $R > 0$: $|z_k| < R$; $k = 1, 2, \dots, n$

Построим такой же контур Γ_R, как и в д-ве т. 7.1

Тогда $\oint_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R'} e^{iaz} f(z)\,dz =$

$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right]$

В пределе при $R \to \infty$ $\int_{\gamma_R'} e^{iaz} f(z)\,dz \to 0$

(по л. Жордана)

$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx = (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$

$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right]$.

Пример (4). $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2}\,dx$ — ин-л Лапласа

Считаем $\alpha > 0$, $a > 0$.

$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + a^2}\,dx$; $J = \operatorname{Re} J_1$.

$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ $\Rightarrow z = \pm ai$ — ос. т.

$J_1 = 2\pi i \operatorname{res}\left[e^{i\alpha z} \frac{1}{z^2 + a^2}, ai\right] =$

$\varphi(z) = e^{i\alpha z}$, $\psi(z) = z^2 + a^2$

$= 2\pi i \left.\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\right|_{z = ai} = 2\pi i \frac{e^{-\alpha a}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$

$J = \operatorname{Re} J_1 = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$

<u>Логарифмические вычеты и принцип аргумента</u>

В начале раздела $f(z)$ — аналитич. ф-я за искл. конеч. кол-ва из. ос. точек.

Потребуем, чтобы эти точки — только полюсы $f(z)$ и $f(z) \ne const$ в рассмотрении обл-ти в контуре; кусочно-гл. контур Γ не должен проходить через нули $f(z)$

Внутри всякого контура Γ - лишь конечное число полюсов $z_1, \ldots, z_p$ кратн. $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ и конечн. число нулей $z_1, \ldots, z_n$ с кратн. $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

11.05.06. [Лекция]

$N_f(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$ - полное число нулей $f(z)$ внутри Γ

$P_f(\Gamma) = \sum_{l=1}^{p} \alpha_l$ - полн. число полюсов $f(z)$ внутри Γ

Теор. (о логарифмич. вычете)

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

$\square$ $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$

Особые точки ф-и $\varphi(z)$ - полюса и нули ф-и $f(z)$.

Докажем, что в каждой из этих точек $\varphi(z)$ имеет простой полюс.

Вблизи т. ζ_k $f(z)$ можно записать как

(1) $f(z) = (z-\zeta_k)^{\beta_k} g(z)$

$g(z)$ - аналит. в окр. т. ζ_k, $g(\zeta_k) \neq 0$

(2) $f'(z) = \beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k - 1} g(z) + (z-\zeta_k)^{\beta_k} g'(z)$

Поделим (2) на (1)

Сначала (2) перепишем в виде $f'(z) = \beta_k (z-\zeta_k)^{\beta_k - 1} h(z)$, где

$h(z) = g(z) + \dfrac{1}{\beta_k}(z-\zeta_k) g'(z)$,

$h(\zeta_k) = g(\zeta_k)$

(*) $\varphi(z) = \dfrac{\beta_k}{z-\zeta_k} + \psi(z)$, $\psi(z)$ - аналитич. в окр. т. ζ_k.

$$\varphi(z) = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} \cdot \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{\beta_k}{z-\zeta_k} + \underbrace{\beta_k\left(c_1 + c_2(z-\zeta_k) + \ldots\right)}_{\psi(z)}$$

$$\frac{h(z)}{g(z)} = c_0 + c_1(z-\zeta_k) + c_2(z-\zeta_k)^2 + \ldots, \quad c_0 = 1.$$

(*) Считаем, что ζ_k - простой полюс для $\varphi(z)$ и $\operatorname{res}[\varphi(z), \zeta_k] = \beta_k$.

В окр-ти т. z_m $f(z)$ можно записать как (3) $f(z) = \dfrac{r(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}}$, $r(z)$ - аналитич. в окр-ти z_m и $r(z_m) \neq 0$.

(4) $$f'(z) = -\alpha_m \frac{r(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}} + \frac{r'(z)}{(z-z_m)^{\alpha_m}} = -\frac{\alpha_m}{(z-z_m)^{\alpha_m+1}}\, \delta(z),$$

где $\delta(z) = r(z) - \dfrac{1}{\alpha_m}(z-z_m) r'(z)$;

$\delta(z_m) = r(z_m)$

Делим (4) на (3).

(**) $\varphi(z) = \dfrac{-\alpha_m}{z-z_m} + \xi(z)$, $\xi(z)$ - аналитич. в окр. т. z_m

Рав-во (**) показ., что z_m - простой полюс ф-и $\varphi(z)$ и $\operatorname{res}[\varphi(z), z_m] = -\alpha_m$.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\varphi(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[\varphi(z),\xi_k] + \sum_{l=1}^{p}\operatorname{res}[\varphi(z),z_l] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\beta_k - \sum_{l=1}^{p}\alpha_l = N_f - P_f.$$

Опр. Ф-я $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ называется логарифмической произв-й ф-ии f.

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z,\ z \neq 0.$

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$

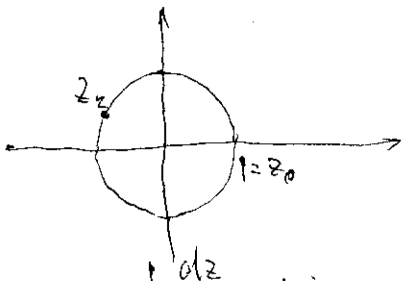
$(\ln f(z))' = \frac{1}{f(z)} f'(z).$

Определение. $\operatorname{Ln}_k z = \ln|z| + i\arg_k z$ – однозначная ветвь логарифмич. ф-ии, $\arg_k z$ – единственное зн-е $\operatorname{Arg} z$, попадающее в интервал $[2k\pi, (2k+1)\pi)$

В этих обозн-ях $\ln z = \operatorname{Ln}_0 z.$

$(\operatorname{Ln}_k z)' = (\ln z)' = \frac{1}{z}$

$z \neq 0$



Будем вычислять ин-лы

$$\int_{z_0}^{z_k}\frac{dz}{z}\Big|_{z=e^{i\varphi_k}} = i(\varphi_k - \underset{0}{\varphi_0}) = i\varphi_k.$$

$$\int_{z_0}^{z_k}\frac{dz}{z} = i(\underbrace{\arg z_k}_{\varphi_k} - \underset{0}{\arg z_0})^2 = i\varphi_k$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} = 2\pi i$$

но по ф-ле Ньютона-Лейбница, казалось бы: $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} = 0.$

Но ф-лу Н-Л здесь применять нельзя.

Из-за требования непр-ти первообразной будем выбирать её зн-е не по одной и той же ф-ле, а по след. ветви.

$\operatorname{Ln}_1 z = \ln|z| + i\arg z + i\cdot 2\pi$

$$\int_{z_0}^{z_k} = \operatorname{Ln}_1 z_e - \operatorname{Ln}_0 z_e.$$

Формула Ньютона-Лейбница для многозначной первообразной.

$\exists\ f(z) \in A(G_{\Gamma}),\ \Gamma \in G$ и известна многозначная первообразная $F(z)$ для $f(z)$

Фиксир. произв. т. z_0 на Γ и некоторое значение $F_{нач.}(z_0)$ первообразной.

Будем обходить Γ, следя за непрерывным изм-ем $F(z)$

$\exists\ F_k(z_0)$ – то зн-е первообразной, с которым мы возвращаемся в т. z_0.

Тогда $\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz = F_k(z_0) - F_{нач}(z_0)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\varphi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\ln|f(z)| + i\Phi_k - \ln|f(z_0)| - i\Phi_{нач}\right) =$$

$\big|\ F(z) = \operatorname{Ln} f(z) = \ln|f(z)| + i\operatorname{Arg} f(z).$

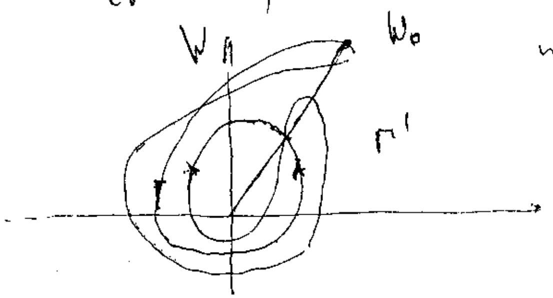
$\operatorname{Arg} f(z_0) \to \Phi_{нач}$; $\operatorname{Arg} f(z_0) \to \Phi_k$ $\big|$

$= \frac{\Phi_k - \Phi_н}{2\pi}$

$\Phi_к - \Phi_н = \mathrm{Var}_\Gamma \arg f(z)$ — приращение аргумента $f(z)$ вдоль кривой Γ.

Принцип аргумента: $N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Var}_\Gamma \mathrm{Arg}\, f(z)$

(это вторая форм-ка теор. о логар. вычете)

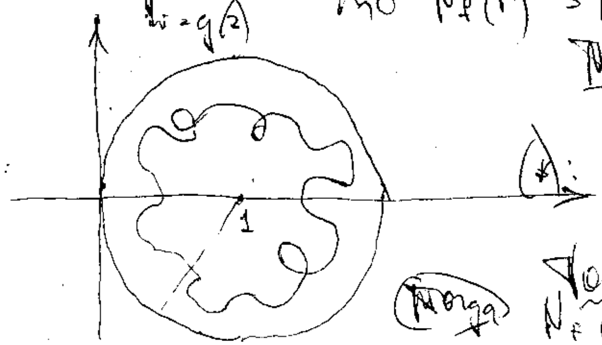


$\mathrm{Var}_\Gamma \mathrm{Arg}\, f(z) = 2\pi\nu$, ν — число полных оборотов радиус-в-ра m, $w = f(z)$ вокруг $w_0 = 0$

Третья форм-ка теор. о лог. вычете

$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \nu$

Следствие: если ф-я $f(z) \in A(G)$ и $\Gamma \subset G$, то $N_f(\Gamma) = \nu$



Теор. Руше $\exists f(z), \varphi(z) \in A(G), \Gamma \subset G$.

(*): и $|f(z)| > |\varphi(z)|$ $\forall z \in \Gamma$

Тогда $N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$, положим $F(z) = f(z) + \varphi(z)$

☐ Из (*) $\Rightarrow$ $f(z) \neq 0$ для $\forall z \in \Gamma$.

$F(z) = f(z)\underbrace{\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)}_{g(z)} = f(z) g(z)$

$\mathrm{Arg}\, F(z) = \mathrm{Arg}\, f(z) + \mathrm{Arg}\, g(z)$

$\mathrm{Var}_\Gamma \mathrm{Arg}\, F(z) = \mathrm{Var}_\Gamma \mathrm{Arg}\, f(z) + \underbrace{\mathrm{Var}_\Gamma \mathrm{Arg}\, g(z)}_{0}$

$g(z) = 1 + \alpha(z)$, $|\alpha(z)| < 1$

$N_F(\Gamma) = N_f(\Gamma)$

■

Прим. Найти число корней ур-я $z^8 - 4z^5 + z^2 = 1$ внутри единичн. круга.

$\Gamma : |z| = 1$, $f(z) = -4z^5$, $\varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$

$F(z) = f(z) + \varphi(z)$; $F(z) = 0$

$|f(z)| = |-4z^5| = 4$, $z \in \Gamma$

$|\varphi(z)| \leq |z^8| + |z^2| + 1 \leq 3$.

Усл-я т. Руше выполнены

$N_f(\Gamma) = 5 \Rightarrow \boxed{N_F(\Gamma) = 5}$ (с учетом кратностей)

Основная т. алгебры (еще одно д-во)

Мн-н $P_n(z)$ им. в $\mathbb{C}$ n корней с учетом кратности $(n \geq 1)$

□ $P_n(z) = \underbrace{a_0 z^n}_{f(z)} + \underbrace{a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}_{\varphi(z)}$

$\exists R>0$: $|f(z)| > |\varphi(z)|$ для $\forall z \in \Gamma_R$: $|z|=R$

$\Rightarrow$ по т. Руше $N_{P_n}(\Gamma_R) = N_f(\Gamma_R)$

$f(z)=0 \Leftrightarrow a_0 z^n = 0 \Rightarrow 0$ - нуль кратн. n.

значит, $N_{P_n}(\Gamma_R) = n$.

■

Тема 8

Общие свойства и основные принципы ~~[illegible] отображений~~.

Теор. 8.1 (т. об образе области)

Пусть $f(z) \in A(G)$ и $f(z) \neq const$ в G.

Тогда $D = f(G)$ — также область.

□ Связность

Пусть $w_1, w_2 \in D$ и z_1, z_2 — произвольные их прообразы.

$w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$

Пусть $z = \lambda(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ — непрер. кривая, соединяющая z_1 и z_2 и принадлежащая обл. G.

Тогда $w = f[\lambda(t)] = \mu(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ — непр. кривая, прин. D и соед. w_1 и w_2

[Лекция] 16.05.06.

Теор. 8.1. $f(z) \in A(G)$ и $f \neq const$ $\Rightarrow D = f(G)$ - обл.

□ Открытость

Пусть w_0 - произв. т. из D. Покажем, что D содерж. нек. круг $K_\mu(w_0)$: $|w - w_0| < \mu$.

Пусть z_0: $w_0 = f(z_0)$ — произв. прообраз т. w_0, т.е.

Построим круг $\bar{C}_\rho$: $|z - z_0| \le \rho$ так, что
γ_ρ - его граница

1) $\bar{C}_\rho \subset G$

2) z_0 — единств. w_0-точка в $\bar{C}_\rho$.

Существование такого круга вытекает из теоремы единственности.

Иначе нашлась бы посл-ть $\{z_k\}$: $f(z_k) = w_0$, $z_k \to z_0 \in G \Rightarrow$ {т. ед.} $\Rightarrow f(z) \equiv w_0$ в G, что противоречит усл-ю)

Положим $\mu = \min\limits_{z \in \gamma_\rho} |f(z) - w_0| > 0$

Утверждается, что круг $K_\mu \subset D$

Пусть w' - произв. т. из K_μ. ∢ ур-я

$f(z) - w_0 = 0$

$f(z) - w' = 0$ $\quad z \in \bar{C}_\rho$

В круге $\bar{C}_\rho$ оба ур-я имеют одинак. число решений по т. Руше

$f(z) - w' = (f(z) - w_0) - (w' - w_0) = 0$.

$|w' - w_0| < \mu \le |f(z) - w_0| \quad \forall z \in \gamma_\rho$

По т. Руше $\quad N_{f(z)-w_0}(\gamma_\rho) = N_{f(z)-w'}(\gamma_\rho)$

≥ 1 т.к. $f(z_0) = w_0$

$\Rightarrow N_{f(z)-w'}(\gamma_\rho) \ge 1$, т.е. $\exists z' \in C_\rho$:

$f(z') = w'$.

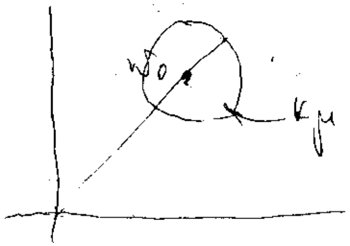
Значит, $K_\mu \subset D \Rightarrow D$ – открыто

■

Принцип максимума модуля (аналитической функции)

Теор. Пусть $f(z) \in A(G)$ и $f(z) \ne const$ в G. Тогда ни в одной точке G $|f(z)|$ не может достигать максимальн. зн-я

□ Пусть z_0 – произв. т. $\in G$, $w_0 = f(z_0)$. Тогда $\exists K_\mu$: $|w - w_0| < \mu \subset f(G)$



для $w = \rho e^{i\varphi_0}$, $\rho_0 < \rho < \rho_0 + \mu$

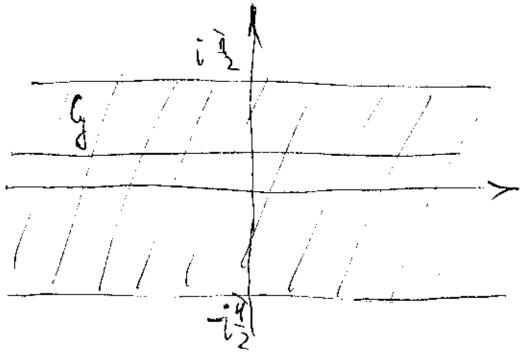
$|w| = |f(z)| > |w_0| = |f(z_0)|$

$z \in G$.

■

Прим.) $f(z) = e^{e^z}$

Покажем прим., какие значения $f(z)$ приним. на границ. G.



$z = x \pm i\frac{\pi}{2}$.

$e^z = e^x e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i e^x$

$|e^{e^z}| = 1$.

$|f(z)| = 1$ на обеих границах.

Легко видеть, что $|f(z)|$ в таких вещ. оси не ограничены.

Следствие Пусть G – ограниченная область, $f(z) \in A(G)$ ~~$\cap C(\bar{G})$~~. Тогда $\max_{z \in \bar{G}} |f(z)|$ достигается на границе обл. G.

Принцип минимума модуля

Теор. Пусть $f(z) \in A(G)$, $f(z) \ne const$ в G и $f(z) \ne 0$ для $\forall z \in G$

Тогда ни в одной точке из G $|f(z)|$ не может достигать минимального значения

□ Определим ф-ю $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in A(G)$ и $g(z) \ne const$ в G

Тогда принцип минимума модуля для $f(z)$ ~~следует~~ принципу max модуля для g.

■

Следствие Пусть $f(z) \in A(G)$, $f(z) \neq 0$ в G. Тогда $\min_{z \in \bar{G}} |f(z)|$ достигается на ∂G

2-я т. Вейерштрасса. Пусть G – огранич. область $u_n(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$, $n = 1, 2, \ldots$

если $\sum u_n(z) \underset{\partial G}{\rightrightarrows}$, то $\sum u_n(z) \underset{\bar{G}}{\rightrightarrows}$

□ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall z \in \partial G$

$\underbrace{\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(z) \right|}_{\varphi_{np}(z)} < \varepsilon$

$\varphi_{np}(z) \in A(G) \cap C(\bar{G})$

$\max_{z \in \bar{G}} |\varphi_{n,p}(z)| = \max_{z \in \partial G} |\varphi_{n,p}(z)|$

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N} \ \forall z \in \bar{G} \ \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(z) \right| < \varepsilon$

Т.е. для $\sum u_k(z)$ выполнен в $\bar{G}$ равномерный критерий Коши.

■

Конформность, однолистность и нули производной.

(локальная) конформность $\Rightarrow$ однолистность (I)

$f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow w = f(z)$ (лок.) конформно в т. z_0.

$f(z) \neq 0 \ \forall z \in G \not\Rightarrow G \xrightarrow{f} f(G) = D$ конформно.

Прим. $f(z) = e^z$, $G = \mathbb{C}$.

Теор. 82 (необходимое усл-е однолистности)

Если $f(z)$ – однолистна в G, то $f'(z) \neq 0$ для $\forall z \in G$.

Др. словами, 1-листность $\Rightarrow f'(z) \neq 0 \ \forall z \in G$ (II)

□ Пусть $f'(z_0) = 0$ для нек. т. $z_0 \in G$

Положим $w_0 = f(z_0)$. Тогда $f'(z_0) = 0 \sim z_0$ – кратная w_0 – точка ф-и $f(z)$

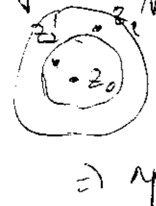
Построим $\bar{C}_\rho : |z - z_0| \leq \rho$ такой, что

1) $\bar{C}_\rho \in G$

2) z_0 – единств. w_0 – точка в C_ρ

3) $f'(z) \neq 0$, если $z \in \bar{C}_\rho$ и $z \neq z_0$

Сущ-е круга $\bar{C}_\rho$ вытек. из т. единственности:



$f'(z_1') = 0$, $f'(z_2') = 0 \Rightarrow \{z_k'\}$, $z_k' \to z_0$, $f'(z_k') = 0$

по т. ед. $f'(z) = 0$ в G $\sim f(z) \equiv \mathrm{const}$ в G

$\Rightarrow$ против. с 1-листн.

$\gamma_\rho : |z - z_0| = \rho$

$\mu = \min_{z \in \gamma_\rho} |f(z) - w|$

$K_\mu : |w - w_0| < \mu$.

Пусть w' — произв. т. из K_μ. Тогда, как и в т. 8.1,

$2 \le N_{f(z)-w_0}(\gamma_\rho) = N_{f(z)-w'}(\gamma_\rho) \Rightarrow$

$\Rightarrow N_{f(z)-w'}(\gamma_\rho) \ge 2 \Rightarrow \exists$ т. $z_1, z_2 \in C_\rho$:

$f(z_1) = f(z_2) = w'$

$z_1, z_2 \ne z_0$, $f'(z_1) \ne 0$ $f'(z_2) \ne 0$.

$\Rightarrow z_1 \ne z_2$.

У w' имеется в C_ρ 2 различн. прообраза, что противоречит однолистности ф-ии f!

Теор. 8.3. (Локальный критерий однолистности)

Пусть $f(z) \in A(G)$ и $f'(z_0) \ne 0$ для нек. точки $z_0 \in G$.

Тогда $\exists \overline{C_0} : |z - z_0| \le \rho_0$, в кот. $f(z)$ однолистна.

$f'(z) \ne 0 \Rightarrow f(z)$ однол. в нек. окр. т. z_0 (III)

□ В окр. т. z_0 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$

Для $\forall \rho < r$ сх-ся $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| \rho^{n-1}$ и поэтому

$S(\rho) = \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \rho^{n-1} = \rho \cdot \varphi(\rho) \to 2|a_2|$ при $\rho \to 0$.

Выберем $\rho_0 > 0$: $S(\rho_0) < |a_1|$.

В круге $\overline{C_0}$ — однолистна.

Пусть $z_1, z_2 \in \overline{C_0}$ и $z_1 \ne z_2$

$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left((z_1 - z_0)^n - (z_2 - z_0)^n \right) \right| =$

$= \Big| a_1 (z_1 - z_2) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \big((z_1 - z_0)^{n-1} + (z_1 - z_0)^{n-2}(z_2 - z_0) +$

$+ \ldots + (z_2 - z_0)^{n-1} \big)(z_1 - z_2) \Big| \ge$

$\ge |z_1 - z_2| \Big| |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \big(|z_1 - z_0|^{n-1} +$

$+ |z_1 - z_0|^{n-1} |z_2 - z_0| + \ldots + |z_2 - z_0|^{n-1} \big) \Big| \ge$

$\ge |z_1 - z_2| \Big| |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \rho_0^{n-1} \Big| =$

$= |z_1 - z_2| \, \big| |a_1| - S(\rho_0) \big| > 0$.

$f(z_1) \ne f(z_2)$ для $z_1, z_2 \in \overline{C_0}$, $z_1 \ne z_2$

Теор. 8.4. Пусть $f(z)$ однолистна в G. Тогда это отображение $G \to D = f(G)$ конформно.

1-листность $\Rightarrow$ конформность

□ 1-1 соотв-е между точками из G и D — однол. $f(z)$

По т. 8.2 для 1-л-й ф-и $f(z)$ $f'(z) \ne 0$ $\forall z \in G$, т.к. в $\forall$ т. $z \in G$ выполн. усл. дост. конф. $G \to D$ мож. конф. ⟹ ■

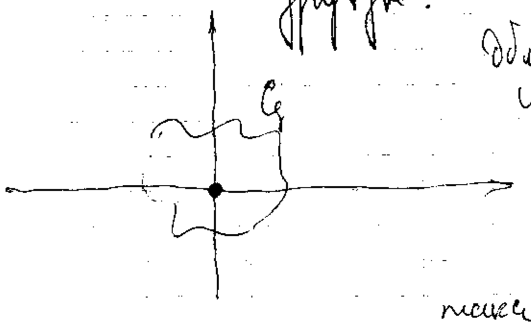
Основные принципы конф. отображений

[Лекция] 17.05.06.

Теор. (Римана)

Всякую односвязную область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ граница которой сост. более чем из одной точки можно конформно отобразить на открытый круг (напр. единичный) и причем бесконечно множеством различными способами.

Следствие. $\forall$ 2 односвязные области G_1 и G_2 расшир. комплексной пл-ти $\overline{\mathbb{C}}$ с границами Γ_1 и Γ_2 содержащими более чем по одной точке могут быть конформно отображены одна на другую.



Область $\mathbb{C}$ без одной точки им. границу из одной точки.

Здесь существенно, что расшир. пл-ть, тогда $\mathbb{C}$ — односвязна, пусть G обл. Почему $\mathbb{C}$ не бывает обл-и!

$\xi = \frac{1}{(\xi)^2}$; $G \xrightarrow{\xi} \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ $|w| < 1$, f-целая, огран. $\Rightarrow$ const

III (Принцип соответствия границ.)

] $w = f(z)$ конформно отображает обл. G_1 на пл-ти z, огранич. контуром Γ_1, на обл. G_2 на пл-ти w, огранич. контуром Γ_2.

Тогда $f(z)$ можно притом (!) способом так доопределить в точках контура Γ_1, что f становится непрерывной в $\overline{G}$ и устанавливает гомеоморфное соответствие между Γ_1 и Γ_2.

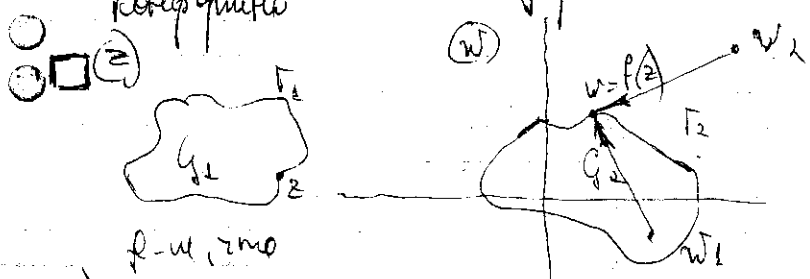
(Гомеоморфн. отобр-е — взаимно однозн. соот-е непрерывн. в обе стороны)

Теор. (обращение принципа соответствия границ)

Пусть ф-я $w = f(z) \in A(G_1) \cap C(\overline{G_1})$

(G_1 — огранич. контуром Γ_1) устанавливает гомеоморфное соответствие между Γ_1 и контуром Γ_2 на пл-ти w.

Тогда $f(z)$ однолистна в G_1 и отображает G_1 на внутренность $\operatorname{int}\Gamma_2$ конформно.



Д-м, что

1) $\forall w_2 \in \operatorname{ext}\Gamma_2$

Ур-е $f(z) = w_2$ не им. реш-й в G_1

2) $\forall w_1 \in \operatorname{int}\Gamma_2$

Ур-е $0 = f(z) - w_1$ им. в G_1 ровно (!) реш-е

∃ $F_2(z) = f(z) - w_2$; $F_1(z) = f(z) - w_1$

По принципу аргумента $N_{F_2(z)}(\Gamma_1) = \dfrac{\operatorname{var}\arg F_2(z)}{2\pi}$

Из рисунка очевидно, что в-р $(w_2, f(z))$ не совершит ни одного оборота $\Rightarrow \operatorname{var}\arg F_2(z) = 0 \Rightarrow N_{F_2}(\Gamma_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ д-но (1)

Далее, $N_{F_1}(\Gamma_1) = \dfrac{\operatorname{var}\arg F_1(z)}{2\pi}$

Т.к. соотв-е между контурами взаимно однозначное, то при обходе Γ_1 точка $f(z)$ обойдёт Γ_2 ровно 1 раз (причём в полож. напр-и, иначе $N_{F_1}(\Gamma_1) = -1$)

Значит, $N_{F_1}(\Gamma_1) = 1 \Rightarrow$ д-но (2).

■

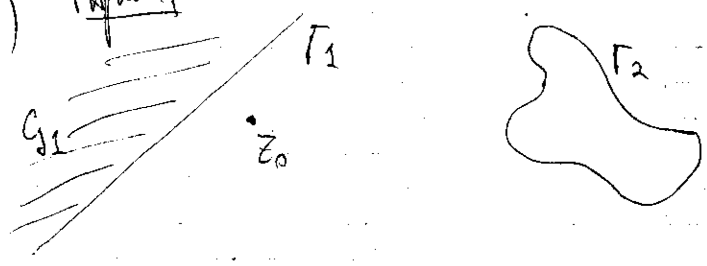
Замеч-е: сохр-ся напр-е обхода контуров (это верно также и для принципа соотв. границ.)

Замечание: Обращение принципа соотв. границ верно и в следующих (более общих) ситуациях:

а) $G_1 = \operatorname{ext} \Gamma_1$

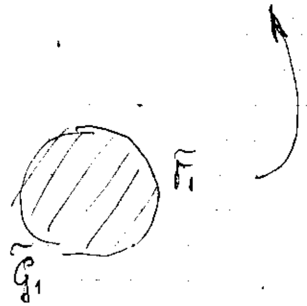
б) кривая Γ_1 — не ограничена и G_1 есть одна из областей, для которых Γ_1 — граница.

б) Прим



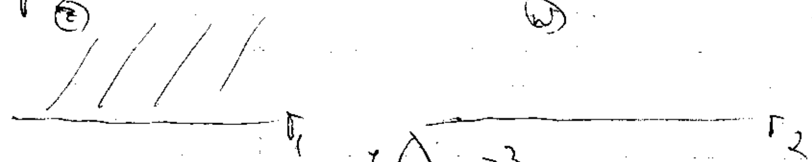
а)

∃ $\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$ а) → б) →



Прим для $\Gamma_2 \to \Gamma_1$ это неверно

(z) (w)



$w = f(z) = z^3$

Тема 9

Аналитическое продолжение.

$w = f(z) \in A(G)$

Ищем D: $G \subset D$ и $f(z) \in A(D)$

Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (1), $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ (2)

Оба ряда по т. Коши-Адамара сх. на $|z| < 1$.

Ряд сх-ся на границе, т.к. мажорир-ся $\sum_{n=0} \frac{1}{2^{n}}$, а (1) - не сх-ся.

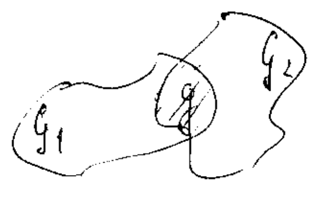
Но $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ на $|z|<1$, а ф-ла $\frac{1}{1-z}$ ан. всюду в $\mathbb{C}$ (кроме $|z|=1$)

$g(z)$ - аналит. продолж-е ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Далее будет д-но, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ невозможно аналитически, т.е. сх-ть никуда, кроме $|z| \le 1$,

Типичные ситуации аналитического продолжения.

(1) $\exists\, G_1 \cap G_2 = g \neq \varnothing$



$\exists\, f_1(z) \in A(G_1), f_2(z) \in A(G_2)$

$f_1(z) = f_2(z)$ $\forall z \in g$

Тогда $F(z)$ $f_1(z), \begin{cases} z \in G_1 \\ z \in G_2 \end{cases} \in A(G), G = G_1 \cup G_2$

Опр. Говорят, что $F(z)$ - аналитич. продолж-е $f_1(z)$ ($f_2(z)$) на G

$f_2(z)$ - непосредственно аналит. продолж-е $f_1(z)$ на G_2.

$f_1(z)$ — // — $f_2(z)$ на G_1.

$f_1(z) \in A(G_1)$, $z_0 \in G_1$

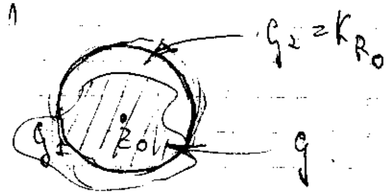
По т. Тейлора $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$\exists\, K_{R_0}$ - круг сх-ти этого ряда.

$\exists\, \rho_0 = \rho(z_0, \partial G_1)$ ($\Rightarrow R_0 \geq \rho_0$)

1) $R_0 = \rho_0$ $K_{R_0} \subset G_1$

2) $R_0 > \rho_0$



Этот пример (1) иллюстрирует продолжение с пом-ю степенного ряда.

(2) Продолжение через границу

$G_1 \cap G_2 = \varnothing$, но G_1 и G_2 имеют общ. участок границы Γ_{12}.

$f_1(z) \in A(G_1) \cap C(G_1 \cup \Gamma_{12})$

$f_2(z) \in A(G_2) \cap C(G_2 \cup \Gamma_{12})$

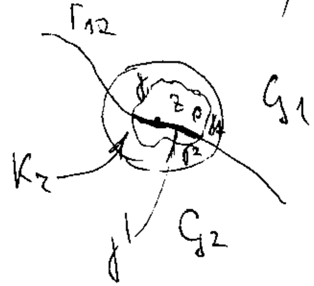
$f_1(z) = f_2(z)$ для $\forall z \in \Gamma_{12}$

(Γ_{12} - открытая (т.е. концы не включ.) непрер. кривая)

Пусть $G = G_1 \cup G_2 \cup \Gamma_{12}$.

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \cup \Gamma_{12} \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$$

Утв. $F(z) \in A(G)$



$K_r : \{|z - z_0| < r\} \subset G$.

Покажем, что $F(z)$ обл. в K_r С-св-м (интеграл по замкн. конт. $\equiv 0$)

γ' — отрезок кривой Γ_{12} внутри

$$\gamma^+ = \gamma_1 \cup \gamma' \cup -\gamma' \cup \gamma_2$$

$$\oint_{\gamma^+} F(z)\,dz = \int_{\gamma_1 \cup \gamma'} F(z)\,dz + \int_{-\gamma' \cup \gamma_2} F(z)\,dz =$$

$$= \underbrace{\int_{\gamma_1 \cup \gamma'} f_1(z)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{-\gamma' \cup \gamma_2} f_2(z)\,dz}_{=0}$$

(по обобщ. т. Коши)

$\Rightarrow$ С-св-во д-но.

Далее, по т. Морера $F(z) \in A(K_r)$

③ **Принцип симметрии Римана-Шварца**

Пусть граница области G содержит прямолинейный интервал δ.

$\exists f(z) \in A(G) \cap C(G \cup \delta)$, $f(\delta)$ есть прямолинейный интервал Δ на пл-ти w.

G лежит по одну сторону от l:

Пусть l — прямая на пл-ти, содержащая δ, $\Rightarrow$ L — пр. на w, содерж. Δ.

Построим обл. G^*, симметричн. с G относ. прямой l.

(z^* — точка, симметричн. с $z \in G$)

Определим на $G^* \cup \delta$ ф-ю
$$f^*(z^*) = \begin{cases} f(z^*), & \text{если } z^* \in \delta \\ (f(z))^*_{w^*}, & \text{если } z^* \in G^* \end{cases}$$

w^* — точка, симм. w отн. L.

Теор. 9.1 (принцип симметрии Римана-Шварца)

Ф-я f^* есть непосредственное аналитич. продолжение $f(z)$ на G^*.

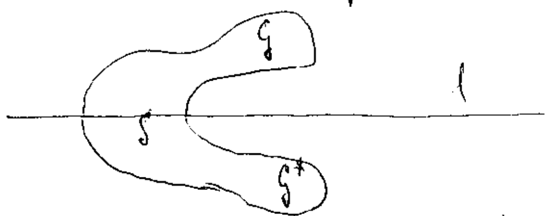
□ Выполним линейные преобразования в пл-х z и w.

$$z' = az + b, \quad w' = \alpha w + \beta,$$

кот. переводят прямые l и L в вещ. оси.

$$w = f(z) \Rightarrow w' = \alpha w + \beta = \alpha f(z) + \beta =$$
$$= \alpha f\left(\frac{z' - b}{a}\right) + \beta = f'(z')$$

Чтобы не усложнять обозначений предполагаем, что уже исходные пл-ти $\forall z, w$ соответствуют пл-ти этих преобразований. (т.е. предполаг., что l, д-в ось)



Покажем, что $f^*(z^*) \in A(G^*) \cap C(G^* \cup S)$

Пусть z_0^* — произв. т. из G^*. Найдем $z_0 = \overline{z_0^*}$. В окр. т. $z_0 \in G$ $f(z)$ представима степенным рядом $f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots$

Тогда $f^*(z^*) = (f(z))^* = \overline{f(z)} =$
$= \bar{c}_0 + \bar{c}_1(\bar{z}-\bar{z}_0) + \ldots + \bar{c}_n(\bar{z}-\bar{z}_0)^n + \ldots =$
$= \bar{c}_0 + \bar{c}_1(z^* - z_0^*) + \ldots + \bar{c}_n(z^* - z_0^*)^n + \ldots$

Этот ряд сх-ся в нек. окр-ти т. $z_0^* \Rightarrow$
$f^*(z^*)$ — аналитич. в этой окр-ти $\Rightarrow$
$\Rightarrow f^*$ аналитична во всей G^*

Пусть $z_0^* \in S$ и $z_n^* \in G^*$, $z_n^* \to z_0^*$

Для самих послед. $z_n = \overline{z_n^*}$ имеем $z_n \to \overline{z_0^*} =$
$=$ {вещ. ось} $= z_0$ и $f(z_n) \to f(z_0) \Rightarrow$
$\overline{f(z_n)} \to \overline{f(z_0)}$ $f^*(z_n^*) \to f(z_0) = f^*(z_0) = f^*(z_0^*)$
f^* непр. в $\forall$ т. $z_0^* \in S$

В обл. $D = G \cup G^* \cup S$ определена аналитическая ф-я $F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup S \\ f^*(z), & z \in G^* \end{cases}$

Тогда $F(z)$ — аналит. продолж-е ф-и $f(z)$ на D.

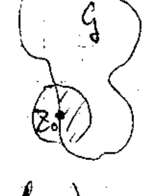
$f^*(z)$ — непосредственное аналитич. продолж-е $f(z)$ на G^*.

■

Особые точки на границе сходимости степенного ряда

Опр. $\exists f(z) \in A(G)$. Точка $z_0 \in \partial G$ называется правильной точкой ф-и $f(z)$, если $\exists$ сходящийся степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, который в общей части G и своего круга сх-ти имеет ф-ей $f(z)$.

Граничная точка, не являющаяся правильной, называется особой.



Если z_0 — изолир. ос. точка ф-и $f(z)$, то z_0 является правильной точкой $\Leftrightarrow$ когда z_0 — УСТ.

1) Если ∂G есть непрерывная кривая, то множество правильных точек открыто

по отношению к ∂G

2) Мн-во особых точек границы замкнуто.

((1) и (2) д.-ть самим. ((1) $\Rightarrow$ (2) очевидно))

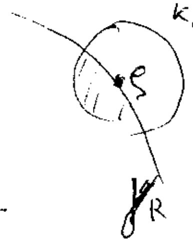
Теор. 9.2 Пусть ст. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ имеет конечный положит. радиус сх-ти $R>0$ и сх-ся к $f(z)$.

Тогда на границе γ_R круга сходимости имеется хотя бы одна особая точка ф-и $f(z)$.

□ Предположим, что, напротив, всякая точка $\zeta \in \gamma_R$ явл. правильной.

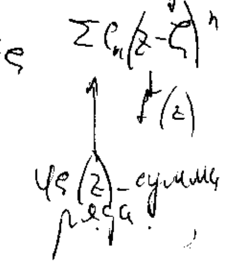
Построим круги K_ζ и найдем соответств. функции непосредств. аналитич. продолжения $\varphi_\zeta(z)$ для каждой т. $\zeta \in \gamma_R$.

$D = K_R \cup \left(\bigcup_{\zeta \in \gamma_R} K_\zeta\right)$



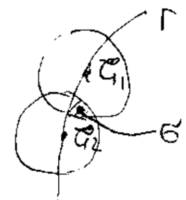
$\rho_0 = \rho(\gamma_R, \partial D) > 0.$

Всякая т. $\zeta \in \gamma_R$ явл. внутр. для D



~~Следовательно~~ Тогда круг $K_r : |z-z_0|<r$, где $r = R + \frac{\rho_0}{2}$ целиком содерж. в D

Пусть K_{ζ_1} и K_{ζ_2} перес. по „луночке" показ. на рисунке



Тогда $\exists$ часть луночки σ, общая для всех трех кругов: K_R, K_{ζ_1}, K_{ζ_2}.

На σ $\varphi_{\zeta_1}(z) = f(z) = \varphi_{\zeta_2}(z) \Rightarrow$ по т. единств.

ф-и $\varphi_{\zeta_1}(z) = \varphi_{\zeta_2}(z)$ для $\forall z$ из луночки.

В обл. D определена однозначная аналитич. ф-я $F(z)$, совпад. с $f(z)$ в круге K_R.

Тогда в K_r $F(z)$ может быть разложена в степенной ряд Тейлора

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

Значит исх. ряд сх-ся, в действит-ти в круге K_r и $r>R$.

Получили противоречие с т. Коши-Адамара, т.к. R - макс. радиус сх-ти.

Это противоречие показывает, что ~~[illegible]~~ на γ_R должны сущ-ть особ. точки ф-и $f(z)$. ■

Прим. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^{n^2}}$ (*)

Тсср. (Прингсхейма)

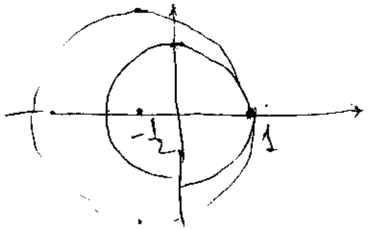
Если все коэф-ты ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ суть действит. неотр. числа, ~~[illegible]~~ и радиус сх-ти равен 1, то т. $z=1$ является особой для суммы этого ряда.

$z=1$ - особ. точка

Более того, $\sqrt[2^n]{1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ - тоже ос. точки (д-во - в книге Маркушевича)

Вся $|z|=1$ сост. из ос. точек ф-и $f(z)$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, сх. в $|z|<1$



1 – ос. точка.
Продолжим ф-ю с наш. др. точек, напр., $-\frac{1}{2}$.

$$f(z) = \frac{1}{\frac{3}{2} - \left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-2\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)}{3}} = \sum c_n\left(z+\frac{1}{2}\right)^n$$

– сх. в круге $\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$

⇒ мы можем распр-ть $f(z)$

[Лекция] 18.05.96.

ТЕМА 10

Гармонические функции.

Пусть $f(z)\in A(G)$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

Теор. 10.1 Ф-и u и v облад. в G дифференцируемыми частными производными всех порядков.

□ $f(z)=u+iv$

$f'(z)=u'_x+iv'_x=v'_y-iu'_y$.

$f'(z)\in A(G)$.

$f''(z)=u''_{xx}+iv''_{xx}=u''_{xy}-iv''_{xy}=v''_{yy}+iu''_{yy}=$
$=v''_{yx}-iu''_{yx}$ ■

Следствие. u и v имеют в G непрерывные частные производные 2-го порядка.

Усл-я К-Р: $u'_x=v'_y$ (1) | дифф. по x
$u'_y=-v'_x$ (2) | дифф. по y (+)

Получим $u''_{xx}+u''_{yy}=0$.

Теперь (1) – по y, (2) – по x ⇒

$v''_{xx}+v''_{yy}=0$.

Опр. Дифференциальное уравнение с частными производными (в частных производных)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

называется ур-ем Лапласа.

Обозн. $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ – лапласиан.

Ф-я $\varphi(x,y)$, обладающая в нек. обл. G непр. частн. пр-ми до 2-го порядка включительно и удовлетворяющая ур-ю Лапласа, наз-ся гармонической в области G.

Теор. 10.2 Пусть $f(z)\in A(G)$ и $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
Тогда u и v – ф-и, гармонические в области G.

□ уже д-но ■

Теор. 10.3 Пусть $u(x,y)$ – функция, гармоническая в односвязной области G.
Тогда $\exists\, f(z)\in A(G)$, такая, что $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$.

□ ∃ $f=u(x,y)+iv(x,y)$ искомая ф-я

Найдем недостающую мнимую часть v

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P(x,y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x,y) \quad (\text{усл. К-Р.})$$

Т.к. u - гармоническая P и Q непрерывны и имеют непрерывные частные производные 1-го порядка, тогда:

$$\psi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$ - не завис. от выбора пути инт-я

$\psi'_x = P$, $\psi'_y = Q$.

Возьмем в качестве $v(x,y) = \psi(x,y) + C =$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + C =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C$$

u, v - непрерывно дифференцируемы и удовл. усл-ям (CR)

$\Rightarrow f(z) \in A(G)$

$\boxed{\text{Прим.}}$ $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \ln r$.

$(r = \sqrt{x^2+y^2})$

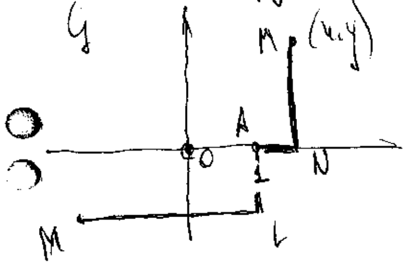
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x \cdot 2r\frac{x}{r}}{r^4} = \frac{y^2-x^2}{r^4}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{r^4}.$$

$u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$



Опр. О паре ф-й u, v составл. указанным образом, говорят, что они ф-ии сопряженные (иначе говоря, для них вып-ся усл-я (CR))

Найдем в данном примере $v(x,y)$:

$$v(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{ANM} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \underbrace{\int_{AN}\dots}_{=0} + \int_{NM}\dots =$$

$$= x\int_0^y \frac{dy}{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_0^y = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

$\exists \arg z \in [-\pi, \pi)$

$\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$; $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$\underline{\varphi = \arg z}$

$\Rightarrow v(x,y) = \arg z$.

$$v(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{ALM}\dots = \int_{AL}\dots + \int_{LM}\dots =$$

$$= \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} - \int_1^x \frac{y}{x^2+y^2}dx = \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} \ominus$$

$= \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, y<0 \end{cases} \Big\} =$

$= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} =$

$\{\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}\} =$

$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arg z.$

$u(x,y) = \ln|z|,\ v(x,y) = \arg z,$

$f(z) = \ln|z| + i\arg z = \operatorname{Ln} z.$

Ф-ла среднего зн-я для гармон. ф-й.

Пусть $u(x,y)$ – гармонич. в обл. G.

Фикс. т. $(x_0,y_0) \in G$ и постр. $K_R(z_0)$:

$\{|z-z_0|<R\} \subset G.$

По ф-и $u(x,y)$ строим аналитич. ф-ю $f(z) \in A(K_R)$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, для $(x,y) \in K_R$.

Для $\forall\ 0<\rho<R$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+\rho\cos\varphi,\ y_0+\rho\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\Gamma_\rho} u(x,y)\,d\sigma$$ – ф-ла ср. зн-я.

Принципы максимума и минимума для гармонич. функций.

Пусть $u(x,y)$ – гармон. в обл. G и $u(x,y) \neq \text{const}$ в G.

Тогда ни в одной точке $(x_0,y_0) \in G$ и не может достигать максимального и минимального значений.

$z_0 = x_0 + iy_0.$

Строим $K_R(z_0) \subset G$. В этом круге находим $f(z) \in A(G)$ так, чтобы $u(x,y) = \operatorname{Re} f$.

Наряду с f рассм. также аналитич. ф-и

$F_1(z) = e^{f(z)}$ $\quad F_2(z) = e^{-f(z)}$

$|F_1(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = e^{u(x,y)}$

$|F_2(z)| = e^{-u(x,y)}$

Согласно принципу максимума модуля, $|F_1(z)|$ и $|F_2(z)|$ не могут достигать максимума в т. z_0 $\Leftrightarrow$ (монотонность e^u) $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ не может достигать в (x_0,y_0) ни макс., ни миним. зн-я.

Следствие 1. Если $u(x,y)$ – ф-я гармон. в огранич. обл. G и непр. в $\overline{G}$, при этом макс. и мин. зн-я этой ф-и достиг-ся на ∂G. Если в частности u сохран. пост. зн-е на границе, то $u = \text{const}$ во всей G.

Следствие 2 (теорема единственности для гармонических ф-й)

Пусть G – ограниченная область, $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ – ф-и, гармон. в G, непрерывные в $\bar{G}$ и принимающие одинаковые зн-я на ∂G ($u_1 = u_2$ для $\forall (x,y) \in \partial G$),

то u_1 и u_2 совпадают всюду в G.

□ $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ ∎

Возможен доср. экзамен 25 мая.

к.709 – записаться заранее

Требуется наличие допуска.