$= \ln(1+y^2) - 2 + 2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\Big|_0^1 =$

$= \ln(1+y^2) - 2 + 2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}$

$J(y) \underset{y\neq 0}{=} \ln(1+y^2) + 2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y} - 2$

$J(y) \underset{y\to 0\pm 0}{\longrightarrow} 0 - 2 + 2\cdot 0 \cdot \left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = -2.$

зн. ф-я $J(y)$ непр. в т. $y=0$.

Теор 2. Пусть ф-я $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ — непр. на пр-ке $P$ ⇒ ф-я $J(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и справедлива след. ф-ла

$$J'(y) = \frac{dJ(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \quad (4) \text{ для } \forall y\in[c,d]$$

— правило Лейбница

□ $\varphi(x)$ — непр. ⇒ $\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$ — дифф. ф-я.

$\left\{ \left(\Phi(x) - \Phi(x_0)\right)' = \Phi'(x) = \varphi(x) \right\}$

$g(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ Выразим $g(y)$ через $J(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. ⇒ {т. 1} ⇒ $g(y)$ — непр. ф-я и справедл. (3)

Фикс $\forall y\in[c,d]$. Интегр. $g$ по отр. $[c,y]$

$$\int_c^y g(t)\,dt = \int_c^y dt \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx = \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dt =$$

$$= \int_a^b f(x,t)\Big|_{t=c}^{y} dx = \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,c)\,dx = J(y) - J(c)$$

$$\Rightarrow J(y) = \int_c^y g(t)\,dt + J(c)$$

$g$ — непр. на $[c,d]$ ⇒ $J(y)$ дифференц-ма на $[c,d]$

и $J'(y) = g(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$, что и тр. д-ть.

$(J'(y)$ — непр.$)$

■

Пример $J(y) = \int_0^1 \ln(x^2+y^2)\,dx$

$\forall [c,d] \quad 0\notin[c,d] \quad P = [0,1]\times[c,d]$

$f$ — непр. на $P$.

$\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$ — непр. на $P$

⇒ {т. 2} $J(y)$ дифферец-ма и $J'(y) = 2y\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} =$

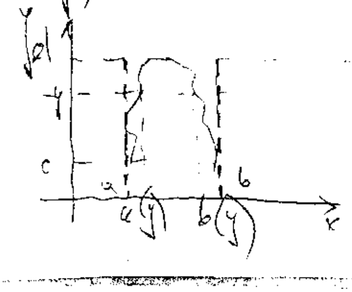
$= \frac{2y}{y}\int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{1}$

$J'(y) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y} \quad \forall\, y\neq 0.$

$J'(0)$ не определена

п. 2 Случай переменных пределов инт-я

$f(x,y)$ на $D = \{(x,y):\ x\in[a(y),b(y)],\ y\in[c,d]\}$



∃ для $\forall y\in[c,d]$ ∃ $\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \quad (2) \text{ — ИЗП}$$