$P:\ D \subseteq P = [a,b]_x \times [c,d]_y$

Теор 3. Пусть $f(x,y)$ непр на P и $a(y)$, $b(y)$ непр на $[c,d]$,

Тогда $\Phi(y)$ непр. на $D(P)$.

□ Фикс. т. $y_0 \in [c,d]$. $\Phi(y) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx + \int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x,y)\,dx =$

$= \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f\,dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f\,dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f\,dx = \tilde{I}(y) + B(y) - A(y)$

$\tilde{I}(y)$: f - непр. на $P \Rightarrow \{т.1\} \Rightarrow \tilde{I}(y)$ непр. на $[c,d]$ и

$\tilde{I}(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \tilde{I}(y_0) = \Phi(y_0)$

$|B(y)| \le M \left|\int_{b(y_0)}^{b(y)} 1\,dx\right| = M\,|b(y) - b(y_0)| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$,

$\left(M = \max_P |f(x,y)|\right)$ т.к. $b(y)$ непр. на $[c,d]$

$A(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$ — аналогично.

Т.к. $\Phi(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \Phi(y_0) \Rightarrow \Phi(y)$ непр. в т. $y_0 \Rightarrow$ непр. на всём отрезке ■

Теор 4. Пусть $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непр. в пр-ке $P:\ D \subseteq P$, $a(y)$, $b(y)$ - дифферен-мы на $[c,d]$ и верно $\Rightarrow \Phi(y)$ - дифференцируема на $[c,d]$

$$\Phi'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + b'(y)\,f(b(y),y) - a'(y)\,f(a(y),y) \quad (5)$$

□ $\Phi(y) = \tilde{I}(y) + B(y) - A(y)$ (см. теор. 3), т. $y_0 \in [c,d]$.

По т.2 $\tilde{I}(y)$ - дифференц. ф-я и $\tilde{I}(y)' = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$, для $\forall y \in [c,d]$.

Найдем $\frac{\Phi(y) - \Phi(y_0)}{y - y_0}$ при $y \to y_0$?

$\frac{B(y)}{y-y_0}$ и $\frac{A(y)}{y-y_0}$ $\quad (B(y_0) = A(y_0) = 0)$.

$\frac{B(y)}{y-y_0} = \frac{1}{y-y_0}\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \{т\text{-ма о среднем}\} =$

$= \frac{1}{y-y_0} f(\hat{x},y)\,(b(y) - b(y_0))$

f - непр. $\Rightarrow$ $\hat{x}$ между $b(y_0)$ и $b(y)$.

$f(\hat{x},y) \xrightarrow[y\to y_0]{} f(b(y_0),y_0)$

$b(y)$ дифф. $\Rightarrow \frac{B(y) - B(y_0)}{y-y_0} \to f(b(y_0),y_0)\,b'(y_0)$, $B(y_0) = 0$

Аналогично $A(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} f(a(y_0),y_0)\,a'(y_0)$

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(y_0)}{y-y_0} \xrightarrow[y\to y_0]{} \underbrace{\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}\,dx}_{\tilde{I}'(y_0)} + f(b(y_0),y_0)\,b'(y_0) - f(a(y_0),y_0)\,a'(y_0)$$