Предел в лев. части] $\Rightarrow$

$\left|\int_{R'}^{R} f(x,y)\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ для $\forall y \in [c,d] \Rightarrow (2)$

■

п. 2. Признаки равномерной сходимости

Теор. 6 (Признак Вейерштрасса)

Рассм. ин-л (1). Пусть $f(x,y)$ определена на P_∞ и для $\forall y \in [c,d]$ ин-ма по x по к отрезку вида $[a,R]$.

$\exists g(x) \ge 0$, определена на $[a,\infty)$ и $\int_a^\infty g(x)\,dx$ сходится,

если $|f(x,y)| \le g(x)$ для $\forall (x,y) \in P_\infty$, то $(1) \rightrightarrows$ на $[c,d]$.

□ $\forall R', R'' > a$, $R' < R''$

$\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| \le \int_{R'}^{R''} |f(x,y)|\,dx \le \int_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon$,

для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall R', R'' \ge A$, $\forall y \in [c,d]$ верно

$\Rightarrow$ по п. 5 $(1) \rightrightarrows$ на $[c,d]$.

■

Параллельно д-но, что $\int |f|\,dx \rightrightarrows$.

Теор. 7 (признак Дирихле-Абеля)

Δ $\int_a^\infty f(x,y)\,g(x)\,dx$ (4)

$f(x,y)$ определена на P_∞ и для $\forall y \in [c,d]$ ин-ма по x на $\forall [a,R]$,

и $\exists M = const > 0$: $\left|\int_a^x f(t,y)\,dt\right| < M$ $\forall (x,y) \in P_\infty$.

$g(x)$ определена на $[a,\infty)$ и монотонно не возрастая $\to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда $(4) \rightrightarrows$ на $[c,d]$.

□ $\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,g(x)\,dx\right| < \varepsilon$ - д-ть

$\forall R', R'' > a$; $R' < R''$

$\forall \alpha, \beta \ge a$ $\left|\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^\beta f\,dx - \int_a^\alpha f\,dx\right| \le$

$\le \left|\int_a^\beta f\,dx\right| + \left|\int_a^\alpha f\,dx\right| \le 2M$ для $\forall y \in [c,d]$.

$\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,g(x)\,dx\right| \underset{\substack{\text{Бонне} \\ \exists \xi \in [R', R'']}}{\overset{\text{по ф-ле}}{=}} \Big| g(R') \int_{R'}^{\xi} f(x,y)\,dx +$

$+ g(R'') \int_{\xi}^{R''} f(x,y)\,dx \Big| \le \{g(x) \ge 0$, т.к. $g(x) \searrow 0\} \le$

$\le g(R') \left|\int_{R'}^{\xi} f\,dx\right| + g(R'') \left|\int_{\xi}^{R''} f\,dx\right| \le$

$\le 2M \left(g(R') + g(R'')\right) \le 4M g(R') < \varepsilon$ для

$\forall y \in [c,d]$.

$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall x \ge A$ $g(x) < \frac{\varepsilon}{4M}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall R', R'' \ge A$ верно