$\left|\int_{R'}^{R''} fg\,dx\right| < \varepsilon \ \forall y \Rightarrow$ по т. Коши $\Rightarrow$ (н) $\rightrightarrows$

■

Замечания

1) $g(x)$ монотонно $\to 0$ при $x \to \infty$ — теорема ? также верна.

2) $g = g(x, y)$ опред. на P_∞, $\forall y \in [c, d]$ $g(x, y) \rightrightarrows 0$ но y монот. (тогда $\xi = \xi(y)$)

Теор. 8 (признак Коши)

Рассм. ин-л (1) на $[c, d]$.

Пусть ин-л (1) сх-ся на $[c, d]$, $f(x, y) \geq 0$ и $f(x, y)$ непр. в P_∞ и $I(y)$ — непрерывна на $[c, d]$ $\Rightarrow$ инт. (1) сх. равном. на $[c, d]$

□ Рассм. Ф.П. $I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\,dx$.

$f(x, y)$ на $P = [a, a+n] \times [c, d]$ для $\forall$ фикс. (n).

f непр. на P. Ин-л — свойств. $\Rightarrow$ $I_n(y)$ непр. по y на $[c, d]$.

$f \geq 0 \Rightarrow \{I_n(y)\}$ монот. неубыв. для $\forall y$

$I_n(y) \to I(y)$ при $n \to \infty$ $\Rightarrow$ (пр-к Дини для ФП) $I_n(y) \rightrightarrows I(y)$ на $[c, d]$.

Значит для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, $\forall n \geq N$ $\underbrace{|I(y) - I_n(y)|}_{\int_{a+n}^{\infty} f(x,y)\,dx} < \varepsilon$ для $\forall y \in [c, d]$.

$A = a + N \Rightarrow \forall R \geq A$ $\left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$, $\forall y \in [c, d]$ $\Rightarrow$ равн.

$(1) \rightrightarrows$ на $[c, d]$

■

п.3. Функциональные свойства несобств. ин. в ЗП

Теор. 9 $\exists$ ин-л (1) сх-ся равномерно на $[c, d]$, $f(x, y)$ непрерывна в P_∞ $\Longrightarrow$

$I(y)$ непрерывна на $[c, d]$, её можно инт-ть на $[c, d]$ и справедлива ф-ла

$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dx$ (5)

□ $\angle$ ФП $I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\,dx \rightrightarrows I(y)$ на $[c, d]$, т.к. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: для $\forall R \geq A$ $\left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ для $\forall y \in [c, d]$.

$a + n \geq A$, $n \geq A - a$ $\exists N = [A - a] + 1 \Rightarrow \forall n \geq N$

$\underbrace{\left|\int_{a+n}^\infty f(x,y)\,dx\right|}_{|I(y) - I_n(y)|} < \varepsilon$ для $\forall y \in [c, d]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow I_n(y) \rightrightarrows I(y)$ на $[c, d]$

$I_n(y) \rightrightarrows I(y)$ на $[c, d]$. Же непр. $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n(y)$ непр. на $[c, d]$, т.к. $f(x, y)$ непр. на $P = [a, a+n] \times [c, d]$ при фикс. (n)

$\Longrightarrow$ (по теор. для ФП) $I(y)$ — непр. на $[c, d]$

Д-мо: $\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy$ — сх. и $= \int_c^d I(y)\,dy$, т.е.

для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$: $\forall R \geq A$ $\left|\int_c^d I(y)\,dy - \int_a^R dx \int_c^d f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon$