т.к. f непр. на $P = [a,b]\times[c,d]$ и любые $R > a$, то по т. 1 $\int_a^R dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^R f(x,y)dx$;

По усл. (1) сх-ся равномерно на $[c,d]$ ⇒ для $\forall \varepsilon>0\ \exists A>a : \forall R\ge A$ $\quad \left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$ (6)

$$\left|\int_c^d I(y)dy - \int_a^R dx \int_c^d f(x,y)dy\right| =$$
$$= \left|\int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx - \int_c^d dy \int_a^R f(x,y)dx\right| =$$
$$= \left|\int_c^d dy \left(\int_a^\infty f dx - \int_a^R f dx\right)\right| = \left|\int_c^d dy \int_R^\infty f(x,y)dx\right| \le$$
$$\le \int_c^d \left|\int_R^\infty f(x,y)dx\right| dy \underset{(6)}{\overset{R\ge A}{<}} \frac{\varepsilon}{d-c}\int_c^d 1\,dy = \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) =$$
$= \varepsilon$, ч.т.д.

■

Следствие. При усл-х т. Дини справедлива ф-ла (5)
($f \ge 0$, f-непр., $I(y)$-непр.)

Теор. 10. ∃ $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определены и непр. на P_∞, $\int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ - сх. равн. на $[c,d]$ ⇒ инт. (1) сх. равн. на $[c,d]$, ф-я $I(y)$ - дифф. и $I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ (7)

□ $I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)dx$
$\{I_n(y)\}$ п. фун. на $[c,d]$.

f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. на $P = [a,a+n]\times[c,d]$ при фикс. n
⇒ {по т. 2} ⇒ $I_n(y)$ диффер. и $I_n'(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$
⇒ {в силу усл. выше} ⇒ $I_n'(y) \rightrightarrows \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dx$
⇒ {по т. о диффер-и ФП} ⇒
⇒ $I_n(y) \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d]$ ⇔ (1) $\rightrightarrows$ на $[c,d]$
Ф-я $I(y)$ дифференц-ма и $I'(y) = \lim_{n\to\infty} I_n'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$, ч.т.д.

■

[Лекция 3] 1.03.06

Теор. 11 (т. о несобств. интегр-и НИ)
$f(x,y) \ge 0$ и непр. на $x\ge a$, $y \ge c$. Пусть функции $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ и $K(x) = \int_c^\infty f(x,y)dy$ непрерывны при $y\ge c$, $x \ge a$.
И пусть хотя бы один из НИ $\int_c^\infty I(y)dy$ или $\int_a^\infty K(x)dx$ сходится ⇒ сходится и 2-й и значения интегралов и они равны между собой:
$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)dy$$

Замечание: усл. $f \ge 0$ можно опустить, однако ф-ия становится сложнее