02.03.22. [Лекция 4]

II) Вычисление инт-ла Дирихле

$K(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$

$\alpha > 0 : \alpha x = y \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$

$\alpha < 0 \quad \alpha x = -y$

$y > 0 \quad x > 0$

$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = -\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = -\frac{\pi}{2}.$

$K(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \alpha > 0 \\ 0, \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \alpha < 0 \end{cases}$ — разрывный множитель Дирихле.

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt$

$|x| = x \operatorname{sgn} x = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt$

$D(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx =$

$\alpha, \beta > 0$

$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x} dx =$

$\alpha + \beta > 0$

$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \alpha > \beta \\ 0 & \alpha = \beta \\ -\frac{\pi}{2} & \alpha < \beta \end{cases} = \begin{cases} 1, & \alpha > \beta \\ \frac{1}{2}, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha < \beta \end{cases}$

§4. Интегралы Эйлера

п.1. Гамма-ф-я Эйлера

$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad (1)$ — эйлеров инт-л 2-го рода (или Г-ф-я Эйлера) 1729

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad , n \in \mathbb{N}$. При $n \notin \mathbb{Z}$?

(1) $\mathcal{D}(\Gamma)$ — ?

$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^{1} e^{-x} x^{p-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = I_1 + I_2$

$I_1 : e^{-x} x^{p-1} \le x^{p-1} \quad , x \in (0,1)$

$\int_0^1 x^{p-1} dx$ сх при $p > 0$

$e^{-x} x^{p-1} > e^{-1} x^{p-1}$ при $p \le 0$ $\int_0^1 x^{p-1} dx$ расх.

$I_1 : p > 0$ — сх.; $p \le 0$ — расх.

$I_2 : \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$

Частный признак сх-ти НИ: если $\exists \lim_{x \to +\infty} |f(x)| x^{\tau} = c$ и $\tau > 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$ сх.-ся

$\exists \lim |f(x)| x^{\tau} = c > 0 \quad \tau \le 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$ — расх.

$(e^{-x} x^{p}) x^{\tau} \xrightarrow[x \to +\infty]{\tau > 1} 0 \Rightarrow I_2$ — сх. $\forall p \in \mathbb{R}$.

Значит (1) сх-ся при $p > 0$ и расх. при $p \le 0$.

$\Rightarrow \mathcal{D}(\Gamma(p)) = \{p : p > 0\}$

(2) Непрерывность т. 9, 9*

$f(x, p) = e^{-x} x^{p-1}$ — непр. на $p > 0, x > 0$.