$p = n \in \mathbb{N}$

$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 1\,\Gamma(1)$ (2)

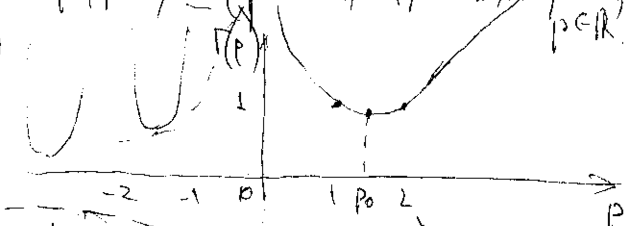
$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$

$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(3) - обобщение $n!$ на нецелые n.

$p! = \Gamma(p+1) = p(p-1)\ldots(p-n+1)\,\Gamma(p-n+1) \quad \forall p > n-1, \; p \in \mathbb{R}$

5) график $\Gamma(p)$



$\Gamma''(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \ln^2 x\,dx > 0 \quad \forall p > 0 \quad \Gamma'(p)$ - один нуль

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$p_0 \approx 1{,}46 \quad \Gamma(p_0) \approx 0{,}88$

Из (3) $\Rightarrow \Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to \infty$

$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^p (1 + \bar{o}(1))$ для $\forall p \gg 1$.

Из (2) $\quad \Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \underset{p \to 0}{\sim} \frac{1}{p}.$

$\frac{\Gamma(p)}{\frac{1}{p}} = \Gamma(p+1) \underset{p \to 0}{\to} 1 \quad \Gamma(p) \sim \frac{1}{p}, \; p \to 0.$

$\Gamma(p)$ опред. на $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$

п.2. B-ф-я Эйлера.

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ (1) - Эйлеров инт-л 1-го рода (B-ф-я Эйлера) 1772 г.

1) $\mathcal{X}(B)$

$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = I_1 + I_2.$

$I_1 = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

$(1-x)^{q-1}$ - непр. ф-я на $[0, \frac{1}{2}]$.

$\exists\, c_1, c_2 > 0 : c_1 < (1-x)^{q-1} < c_2 \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}].$

$\int_0^{1/2} x^{p-1}\,dx < \infty \quad \forall p > 0.$

$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \geq c_1 x^{p-1} \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2}] \Rightarrow$

$\Rightarrow p \leq 0 \quad I_1$ - расх. ; I_1 - сх $\quad \forall p > 0, \; \forall q \in \mathbb{R}$.

$I_2 = \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

x^{p-1} - непр. на $[\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow \exists\, c_1, c_2 > 0 :$

$0 < c_1 \leq x^{p-1} \leq c_2 \quad \forall x \in [\frac{1}{2}, 1].$

$c_1(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq c_2(1-x)^{q-1}$

$\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}\,dx$ - сх, $q > 0$ расх, $q \leq 0$.

I_2 - ~~расх~~ сх. $\forall q > 0, \forall p \in \mathbb{R}$

расх $\forall q \leq 0, \forall p \in \mathbb{R}$

$\mathcal{X}(B) = \{(p,q) \mid p > 0, q > 0\}$