$\Rightarrow h(x) \in C^\infty(-1,1)$ (по св-ам степ. ряда)

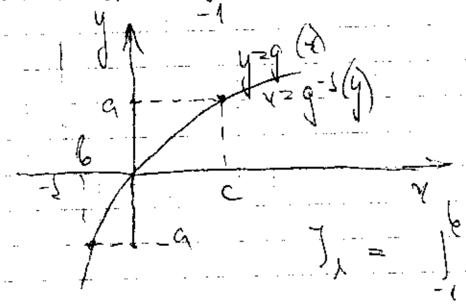
$h(0) = \frac{1}{2}$, $h(x) > 0$ $\forall x \in (-1,1)$

$g^2(x) > 0$, $x \neq 0$

$g(x) = x\sqrt{h(x)} \Rightarrow g(x) \in C^\infty(-1,1)$, т.к. h - беск. дифф. и $h \neq 0$.

$J_\lambda = \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}dx$

фикс. $\forall a$, $y = a$.



$c = g^{-1}(a)$, $b = g^{-1}(-a)$

$g(b) = -a$; $g(c) = a$.

$J_\lambda = \int_{-1}^{b} + \int_{b}^{c} + \int_{c}^{+\infty} = J_1 + J_2 + J_3$

$J_1 = \int_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)}dx$

$-1 \leq x \leq b$ $\quad -\infty < g(x) \leq -a$, $g^2(x) \geq a^2$

$e^{-\lambda g^2(x)} \leq e^{-\lambda a^2}$ $\quad J_1 \leq e^{-\lambda a^2}\int_{-1}^{b}dx = e^{-\lambda a^2}(b+1) =$

$= e^{-\lambda a^2}(1-|b|) \Rightarrow$

$\Rightarrow J_1 = \underline{O}(e^{-\lambda a^2})$ $\forall \lambda > 0$

21.03.06. [Лекция 6]

$J_3 = \int_{c}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}dx$

$x \geq c$ $\quad g(x) \geq a \Rightarrow g^2(x) \geq a^2$,

$e^{-\lambda g^2(x)} = e^{-\lambda g^2(x) + g^2(x) - g^2(x)} =$

$= e^{-(\lambda-1)g^2(x)}e^{-g^2(x)} \underset{\exists\lambda>1}{\leq} e^{-(\lambda-1)a^2}e^{-g^2(x)}$

$J_3 \underset{\lambda>1}{\leq} e^{-(\lambda-1)a^2}\int_{c}^{\infty} e^{-g^2(x)}dx = e^{-\lambda a^2}\underbrace{\left(e^{a^2}\int_{c}^{\infty} e^{-g^2(x)}dx\right)}_{=C_1 = const} =$

$= C_1 e^{-\lambda a^2} \Rightarrow J_3 = \underline{O}(e^{-\lambda a^2})$

$J_1 + J_3 = \underline{O}(e^{-\lambda a^2})$ $\quad \forall \lambda > 1$

$J_2 = \int_{b}^{c} e^{-\lambda g^2(x)}dx = \int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2}\varphi'(t)dt \overset{(3)}{=}$

$t = g(x)$, $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$

$\varphi(t)$ - бесконечно дифференц-ма. фикс. $k, n \in \mathbb{N}$

$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}t^k + \underline{O}(t^{2n})$, $t \in [-a,a]$

$\overset{(3)}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2l+1)}(0)}{(2l)!} \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\lambda^{l+\frac{1}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}\right)$

Получим: $\exists \Lambda_1$: $\forall \lambda > \max(\Lambda, \Lambda_1)$ $e^{-\lambda a^2} \leq \frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}$

$\Gamma(\lambda+1) = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\sqrt{\lambda}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2l+1)}(0)}{(2l)!} \cdot \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\lambda^l} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)\right)$

асимптотич. ф-ла для Γ-ф-ции при $\lambda \to +\infty$. По ф-ле Пуассона можно вычислить:

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \ldots$

Положим $n = 1$. Получим

$\Gamma(\lambda+1) = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\sqrt{\lambda}\left(\varphi'(0)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$

$\varphi'(0)$ - ?

$(g^2(x))' = 2gg'(x) = \frac{x}{1+x} \Rightarrow g'(x) \underset{x \neq 0}{=} \frac{x}{2g(x)(1+x)} =$

$= \frac{g(x)}{2h(x)(1+g(x))}$