Прим. 2 $E_0[a,b]$ – пр-во всех кус.-непр. на $[a,b]$ ф-й

$f(x)$ – кус. непр. на $[a,b]$, если она непрер. во всех точках (a,b), за исключ. конечного числа точек, т.е.: $\exists f(x_k \pm 0)$, $f(x)$ непр. на (x_{k-1}, x_k), $k=\overline{1,n}$, $x_0=a$, $x_n=b$, $f(x_k) = \frac{f(x_k+0)+f(x_k-0)}{2}$, $k=\overline{1,n-1}$, $\exists f(a+0)$, $f(b-0)$

Очевидно, (2) справедл. для $\forall x \in (a,b)$

$1^\circ, 2^\circ$ – выполнено

3°. $(f,f) = \int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^2(x)dx \geq 0$

для $\forall f \in E_0$.

Если $(f,f)=0 \Rightarrow \forall k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^2(x)dx = 0$.

$\forall k$ $f^2(x)$ – непр. на $[x_{k-1}, x_k]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

Из (2) $f(x_k)=0$, $k=1,2,\dots,n \Rightarrow f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$

3° – выполн., пр-во – евклидово.

Пространства $L[a,b]$, $E_0[a,b]$ – бесконечномерные

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\{x^k\}_{k=1}^{n}$ $a_0x^n + \dots + a_nx + a_{n+1} = 0$

Теор. 1 Для $\forall \tilde{E}$ и для $\forall f,g \in \tilde{E}$ справедливо нер-во Коши-Буняковского

$$(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g) \qquad (3)$$

$$|(f,g)| \leq \sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)}$$

□ 1) $(f,f) \neq 0$ $(\lambda f+g)^2 \geq 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $D \leq 0$ (дискр-т)

2) $(g,g) \neq 0$ $(f,f)=0$ $(f+\lambda g)^2 \geq 0$ $D \leq 0$

3) $(f,f)=(g,g)=0$. $(f+g)^2 \geq 0 \Rightarrow (f,g) \geq 0$, $(f-g)^2 \geq 0 \Rightarrow (f,g) \leq 0$ $\Rightarrow (f,g)=0$

■

L, E_0 к-Б: $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$

Опр. 3 Линейное пространство L называется нормированным, если для $\forall f \in L$ сопоставлено число $\|f\|$ – его норма, удовлетворяющее следующ. аксиомам:

1°. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, $\forall f,g \in L$ (нер-во тр-ка, нер-во Минковского)

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$, $\forall f \in L$

3°. $\|f\| > 0$, $\forall f \neq 0$, $\|f\| = 0$, $f = 0$

Опр. 4 Пр-во L назыв. почти нормир., если $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ $\forall f \in L$: $\|f\| \geq 0$

Теор. 2 $\forall$ евклидово (почти евкл.) пр-во можно сделать нормированным (почти нормированным), если положить

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$$

□ Т-м 1° аксиому нормы.

$|(f,g)| \leq \|f\|\,\|g\|$

$\|f+g\| = \sqrt{(f+g,f+g)} = \sqrt{\|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2} \leq$

$\leq \{$К-Б$\} \leq \sqrt{\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2} = \|f\| + \|g\|$

■