Следствие 2 $\forall \tilde{E}$, $\forall f \in \tilde{E}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \{\varphi_k\}$ – ОНС в $\tilde{E}$:

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \quad (7)$$

– тождество Бесселя

Теор. 4. Для $\forall \tilde{E}$, $\forall f \in \tilde{E}$, $\forall$ ОНС $\{\varphi_k\} \subset \tilde{E}$ верно

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2 \quad (8)$$

– нер-во Бесселя

□ $\{\sum_{k=1}^{n} f_k^2\}$ – огранич. (из (7))

$f_k^2 \geq 0 \Rightarrow$ теор. 2 гл. 1 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ – сход.

$\overset{n \to \infty}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$ ■

Утв. Для того, чтобы посл. $\{c_k\}$, $c_k \in \mathbb{R}$ могла быть посл-ю коэф. Фурье для эл-та $f \in \tilde{E}$ необх., чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

Напр. $c_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ не может быть посл-ю коэф. Фурье

Следствие $\forall f \in \tilde{E}$, $\forall$ ОНС $\{\varphi_k\}$, $\forall \tilde{E}$ $f_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Прим. $L[-\pi, \pi]$, $\tilde{C}_0[-\pi, \pi]$

ОНС: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

$\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$ – триг. ряд Фурье (ТРФ)

$\forall f(x)$ став. в соотв. ряд

$$\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k'}{\sqrt{\pi}} \cos kx + \frac{f_k''}{\sqrt{\pi}} \sin kx\right)$$

обозн.:

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$f_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx$$

$$f_k'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

нер-во Бесселя:

$$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k'^2 + f_k''^2\right) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

замечание по-другому:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ – ТРФ}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

нер-во Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Следствие Для $\forall f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $a_k, b_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

§2. Полные и замкнутые ОНС

Опр. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов норм. пр-ва L наз. замкнутой в этом пр-ве, если для $\forall \varepsilon > 0$ и для $\forall f \in L$ $\exists n_0$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n_0$:

$$\|f - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k\|_L < \varepsilon. \quad (9)$$