$\forall$ эл-т $f \in L$ можно с любой точностью приблизить конечной линейной комбинацией эл-в этой системы по норме данного пространства.

Нами уже д-но, что тригонометрич. сист. ф-й — замкн. в $L[-\pi,\pi]$, $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ — замкн. в $C[-1,1]$.

Теор. 6 Пусть о/н сист. $\{\psi_k\}$ дейст. замкн. в почти евкл. пр-ве $\hat{E}$. Тогда для $\forall f \in \hat{E}$ нер-во Бесселя $\to$ в точное равенство, называемое равенством Парсеваля (ур-е замкнутости Ляпунова)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \qquad (10)$$

□ Из (9) $\forall \varepsilon > 0$ $\varepsilon > \|f - \sum_{k=1}^{n_0} c_k \psi_k\|^2 \underset{(6)}{\geq}$
$\geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n_0} f_k^2 \underset{\forall n \geq n_0}{\geq} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\|^2 \geq$
$\Rightarrow \forall n > n_0$ $0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon^{(7)}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{n} f_k^2$ сход. к $\|f\|^2$ ■

В $\forall$-м пр-ве E, $\hat{E}$ $\exists$ замкн. системы!

Теор. 6 $\forall \hat{E}$, $\forall$ о/н замкн. $\{\psi_k\} \subset \hat{E}$, $\forall f \in \hat{E}$ ряд Фурье эл-та f по сист. $\{\psi_k\}$ сходится к f по норме пр-ва $\hat{E}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\| = 0.$$

□ $\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\|^2 \underset{(7),\text{сл}}{=} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \xrightarrow[(10)]{n\to\infty} 0$, что и тр. д-ть. ■

в $L[a,b]$ сх-ть по норме $\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k(x)\right)^2 dx \to 0$ при $n \to \infty$ — сходимость в среднем.

Опр. Сист. эл-в $\{\psi_k\}$ назыв. полной в этом пр-ве, если среди эл-в $\hat{E}$ не сущ. эл-та, отличн. от Θ, ортогон. сразу ко всем эл-м $\psi_k \in \{\psi_k\}$

$$(f, \psi_k) = 0,\ k = 1,2\ldots \Rightarrow f = \Theta.$$

Теор. 7 $\forall$ замкн. о/н система евкл. пр-ва $\hat{E}$ является полной системой.

□ Пусть $f \in \hat{E}$, $f \perp \psi_k$, $k = 1,2,\ldots$

$(f, \psi_k) = f_k = 0$, $k = 1,2,\ldots$ $\underset{(10)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0 =$
$= \|f\|^2 \underset{3^\circ \text{акс. скал. пр-я}}{\Rightarrow} f = \Theta.$ ■

Обратное неверно для $\forall E$. (функцион.) $\Rightarrow$ линейн. пр-ва: $\forall$ полн. о/н — замкн.

Теор. 8 (теор. о ! ряда Фурье для эл-та пр-ва) Пусть $\{\psi_k\}$ — полная о/н система в евкл. простр-ве E. Тогда различн. эл-ты f и g пр-ва E не могут иметь одинаков. рядов Фурье по системе $\{\psi_k\}$.

(одинак. ряды: $f_k = g_k$, $\forall k$).

□ $\exists f_k = g_k$ для $\forall k$.