$0 = f_k - g_k = (f, \varphi_k) - (g, \varphi_k) = (f-g, \varphi_k) = (f-g)_k$

$\forall k$ $\quad (f-g)_k = 0 \underset{\text{(по лем 1.7)}}{\Rightarrow} f - g = \Theta \Leftrightarrow f = g.$

■

Теор. 3 тем более справедлива для ортонормированной ортогональной системы (т.к. $\forall$ замкнутая-

## §3. Замкнутость тригонометрич. системы функции.

Д-м, что о/н сист. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ — замкн. в $L[-\pi, \pi]$.

п.1° Ядро Дирихле

$f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $\exists f(-\pi+0), f(\pi-0)$.

Опр. Ф-я $F(x)$ наз. периодическим (с периодом $2\pi$) продолжением ф-и $f(x)$ на всю $\mathbb{R}$, если

$$\begin{cases} F(x) = f(x) \text{ на } (-\pi, \pi) \\ F(-\pi) = F(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} \\ F(x+2\pi) = F(x) \text{ для } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$f(x) \in L[-\pi, \pi]$ — пер. продолжим на $\mathbb{R}$

Обознач. $2\pi \sim \mathbb{R}$.

Лемма 1. $\exists f(x) \in L[-\pi, \pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx$ не зависит от $\alpha \in \mathbb{R}$.

□ $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx$ (здесь $f(x)$ — продолжение $2\pi \sim \mathbb{R}$)

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int_{\alpha}^{-\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)dx =$$

$$= \left\{ t = x + 2\pi \right\} \int_{\alpha}^{-\pi} f(x)dx = \int_{\alpha+2\pi}^{\pi} f(t-2\pi)dt =$$

$$= \int_{\alpha+2\pi}^{\pi} f(t)dt = -\int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(t)dt \Big\} = \int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(t)dt$$

$$= -\int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f dx + \int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f dx = \int_{-\pi}^{\pi} f dx$$

■

Верно также $\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(т.к. $x + \alpha = t$ $\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f dt$)