$$\sigma_n f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \Phi_n(t)\, dt.$$

3) $\forall \delta \in (0, \pi)$, $\eta_n(\delta) = \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\, dt \overset{\text{четн}}{=} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt \to 0$ при $n \to \infty$.

□ 1) очевидно.

2) В (5) положим $f(x) = 1$.

$$\sigma_n(x, 1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i(x,1)}{n} = \frac{n \cdot 1}{n} = 1$$

В (6) положим $f \equiv 1$.

$$\sigma_n(x, 1) = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt \Rightarrow 2), \forall n = 1, 2, \ldots$$

3) $\Phi_n(t)$ на $t \in (\delta, \pi)$, $0 < \delta < \pi$, $\frac{t}{2} \in \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin \frac{t}{2} \nearrow$, $\sin \frac{t}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2}$, $t \in (\delta, \pi)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi_n(t) \leq \frac{1}{2\pi n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}}_{= const} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

■

Теорема 9 (теор. Фейера) 1904 год.

Для $\forall f(x) \in C[-\pi, \pi]$; $f(-\pi) = f(\pi)$

$\sigma_n(x, f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ при $n \to \infty$.

(если f н.п. на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\sigma_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$)

□ $f(x)$ 2π на $\mathbb{R}$.

$f(-\pi) = f(\pi)$ $\Rightarrow$ продолженная ф-я также непр. на $\mathbb{R}$, имеет период 2π

$\Rightarrow f(x)$ равномерно непр. на $\mathbb{R}$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|t| < \delta$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$0 < \delta < \pi$

$$\sigma_n(x, f) - f(x) \underset{\text{сб.}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)\, \Phi_n(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} = J_- + J_0 + J_+$$

$f(x)$ - огр. на $\mathbb{R}$
$\exists M > 0$: $|f(x)| \leq M$, $\forall x$

$$|J_+| = \left| \int_{\delta}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)\, \Phi_n(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{\delta}^{\pi} \big(|f(x+t)| + |f(x)|\big)\, \Phi_n(t)\, dt \leq 2M \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = 2M\eta_n(\delta)$$

$\to 0$ при $n \to \infty$ для $\forall \delta$.

$\exists N$: $\forall n \geq N$ $|J_+| < \frac{\varepsilon}{4}$; аналогично $|J_-| < \frac{\varepsilon}{4}$,

$$|J_0| = \left| \int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x+t) - f(x)\big)\, \Phi_n(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{|t| \leq \delta} \Phi_n(t)\, dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)\, dt \underset{\text{сб.}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |\sigma_n(x, f) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \forall n > N,$$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

Зн., $\sigma_n(x, f) \rightrightarrows f(x)$ на $[-\pi, \pi]$. (на $\mathbb{R}$)

■