$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_1(x)|dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$

$|f|\le M \Rightarrow |f_1|\le M$ для $\forall x\in[-\pi,\pi]$.

$\|f(x)-f_1(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))^2dx =$

$= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_1(x)|\,|f(x)-f_1(x)|dx \le$

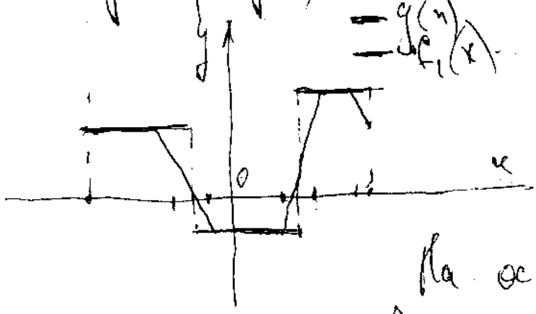
$\le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_1(x)|(|f(x)|+|f_1(x)|)dx \le$

$\le 2M\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_1(x)|dx < 2M\frac{\varepsilon^2}{18M} = \frac{\varepsilon^2}{9}$.

$\Rightarrow \|f-f_1\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (3)

② $f_1(x)$ построим $g(x)\in C[-\pi,\pi]$

$g(-\pi)=g(\pi)$: $\|f_1(x)-g(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}$ (4)



$g(x)=f_1(x)$ на $[-\pi,\pi]$, кроме мал. окр-тей т. x_k, $k=1,2,\dots,n$

На оставшихся интервалах полаг. $g(x)$ линейной так, чтобы $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$

$|f_1(x)|\le M$, $\forall x$ $\Rightarrow$ выбрав окр. т. x_k дост. малыми так, что

$|g(x)|\le M$, $\forall x$

$\|f_1-g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-g(x))^2dx} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow (4)$

$\sum\int_{\delta_k} \le 2M\sqrt{\delta n} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\sqrt{\delta} < \frac{\varepsilon}{6M\sqrt{n}}$ – длина окр-ти x_k

③ $g(x)\in C[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$ $\Rightarrow$ по т. 9

$\exists T(x) = \sigma_n(x,g)$:

$\|g(x)-T(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (5)

Из услов ①②③ $\Rightarrow$ $\|f(x)\underbrace{\;}_{\pm f_1(x)\;\pm g(x)}-T(x)\| \le$

$\le$ {нер-во тр-ка} $< \varepsilon$. $\Rightarrow$ (1)

■

Теор. 11 (т. Вейерштрасса о приближении непрерывной ф-ии тригонометрическими многочленами)

Любую непр. на $[-\pi,\pi]$ ф-ю, принимающ. одинак. зн-я в $-\pi$ и $+\pi$, можно равномерно на $[-\pi,\pi]$ приблизить тригоном. многочленами

($\forall f(x)\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists T(x)$: $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[-\pi,\pi]$)

□ По т. 9: полагаем $T(x)=\sigma_n(x,f)$ и выбираем $n=n(\varepsilon)$