Замечание: Показать, что обе сист-ы и $\{f\}$ $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ явл. всюду плотными (полными) в пространстве непрерывных функций, f тригоном. многочлены на $[-\pi,\pi]$.

Теор. 12 (теор. Вейерштрасса о равномерн. приближ-и непр. ф-й алгебраич. многочленами) 1885 г.

Любую непр. на $[a,b]$ ф-ю можно равномерно на этом отрезке приблизить алгебраическими многочленами. (т.е. для $\forall f(x) \in C[a,b]$, $\forall \varepsilon>0$ $\exists Q_m(x)$ - алг. многочлен: $|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon$ для $\forall x \in [a,b]$)

$\square$ 1 шаг) $[a,b]$ $\xrightarrow[\text{перех.}]{\text{замена}}$ $[0,\pi]$.

$t = \frac{x-a}{b-a}\pi \in [0,\pi]$.

$x = \frac{t(b-a)}{\pi} + a$

$f(x) = f\left(\frac{t(b-a)}{\pi} + a\right) = \varphi(t)$

$\varphi(t) \in C[0,\pi]$ продолжим четн. образом на $[-\pi,0]$ $\Rightarrow$ $\varphi(t) \in C[-\pi,\pi]$,

$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ $\Rightarrow$ {по т-е (п.11)} $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists T(t)$: $|\varphi(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall t \in [-\pi,\pi]$

$T(t)$ - конеч. сумма $\sin kx$, $\cos kx$, каждая разл. в ряд Тейлора, $R=\infty$, кот. $\rightrightarrows$ на $\forall [a,b] \in \mathbb{R}$.

$\exists P_n(x)$ - част. сумма ряда Тейлора ф-и $T(t)$: $|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall t \in [0,\pi]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi(t) - P_n(t)| \le |\varphi - T| + |T - P_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

для $\forall t \in [0,\pi]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi(t) - P_n(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in [0,\pi]$

$t \to x$: $|\underset{\Downarrow}{f(x)} - \underset{\Downarrow}{Q_m(x)}| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

$\blacksquare$

п. 5. Следствия из замкнутости тригоном. системы ф-й

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ - тригоном. сист. ф-й

- О/н система в $L[-\pi,\pi]$ - полна в евкл. пр-ве и в $C_0[-\pi,\pi]$ - евкл. пр-во

Следствие 1 (из п. 10) $\forall f(x) \in L[-\pi,\pi]$ справедливо рав-во Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$