$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < \infty$, $p > 1$

ТРФ п.в. на $[-\pi, \pi]$ сход.

$f \in L[-\pi,\pi]$ (по Лебегу) $\Rightarrow f^2(x) \in L[-\pi,\pi]$

$f(x) \in L_2[-\pi,\pi]$ по Лебегу $S_n(x,f)$ – п.в. сход на $[-\pi,\pi]$.

п.1. Абсолютная и равномерная сх-ть ТРФ

Опр. $f(x)$ имеет кус.-непр. произв. на $[a,b]$, если $f'(x)$ $\exists$ и непр. во всех точ. $[a,b]$, за искл. конечного числа точек $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, в каждой из которых $\exists f'(x_i \pm 0)$, $i = \overline{1,n}$

(в x_i $\frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}$)

Опр. Ф-я $y = f(x)$ имеет кус.-непр. произв. n-го порядка на $[a,b]$, если ф-я $f^{(n-1)}(x)$ имеет кус.-непр. произв. на $[a,b]$

Теор. 14. Пусть ф-я $f(x)$ непр. на $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\exists f'(x)$ – кусочно-непр. на $[-\pi,\pi]$. Тогда ТРФ ф-и $f(x)$ сход. абсолют. к $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$, ряд сх-ся абсолютно на $[-\pi,\pi]$ и ряд из модулей членов сх-ся равномерно на $[-\pi,\pi]$

□ $f(x)$ сх. в смысл. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $x \in [-\pi,\pi]$.

Дост. д-ть:

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos kx + b_k \sin kx| \rightrightarrows$ на $[-\pi,\pi]$

Для этого дост. д-ть, что сх-ся числовой ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ (8)

(исп. признак Вейерштрасса равном. сх-ти функц. рядов)

$a_k, b_k \to 0$, $k \to \infty$, $\forall f \in L[-\pi,\pi]$

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$ (сл. 1 из п.10)

Обозн. $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx$, $k = 1, 2, \dots$

Определим a_k, b_k ч-з α_k, β_k.

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi k} f(x) \sin kx \Big|_{x=-\pi}^{\pi}$ ($=0$)

$- \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \beta_k$

неверные выкладки, т.к. интегр. по частям можно ф-и с непр. произв.

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \cos kx \, dx =$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} f \sin kx \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \sum_{k=1}^{n} \int f'(\sin kx) dx =$