§5. Принцип локализации Римана

п.1. Свойства коэффициентов Фурье ф-ц двух переменных

$f(x)$, $g(x)$ $\quad F(x,t) = f(x+t)\,g(t)$

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\cos kt\,dt, \quad k=0,1,\dots$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\sin nt\,dt, \quad n=1,2,\dots$$

Лемма 6. Пусть $f(x)$, $g(x)$ инт. на $[-\pi,\pi]$, 2π-п. R. Тогда

1) ф-я $I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\,dt$ — непр. на $[-\pi,\pi]$ (и на $\mathbb{R}$)

2) $a_n(x), b_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[-\pi,\pi]$ (на $\mathbb{R}$)

3) $c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[-\pi,\pi]$ и на $\mathbb{R}$.

□ 1) Непр-ть $I(x)$ д-м по опр-ю:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |u|<\delta \quad \underbrace{|I(x+u) - I(x)|}_{\Delta I(x)} < \varepsilon$

для фикс. т. $x\in[-\pi,\pi]$.

$$\Delta I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+u+t) - f(x+t)\big)\,g(t)\,dt$$

$g(t) \in L[-\pi,\pi] \Rightarrow$ огр., $\exists M>0: |g(t)| \le M$ на $[-\pi,\pi]$

$$|\Delta I(x)| \le M\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u+t) - f(x+t)|\,dt = \{\text{лемма } 1\} = M\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt.$$

$\Rightarrow$ д-ть: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |u|<\delta$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (1)$$

Из п.10 (о замкн. тригон. сист. ф-й) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $f(t) \in L[-\pi,\pi]$ $\forall\varepsilon>0\ \exists T(x)$:

$$\|f(t) - T(t)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - T(t))^2\,dt} < \frac{\varepsilon}{3M\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\,dt = (|f-T|, 1) \underset{\text{н. Б}}{\le} \|f-T\|\,\|1\| =$$

$$= \|f-T\|\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dt} < \frac{\varepsilon}{3M\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \frac{\varepsilon}{3M}. \qquad (2)$$

По лемме 1 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3M}$, $\forall u\in\mathbb{R}$ (3)

т.к. $f(t)$, $T(t)$ — 2π-периодич.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\,dt \le \underset{(3)}{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\,dt} +$$

$u\in\mathbb{R}$, фикс. $\varepsilon>0$

$$+ \underset{(2)}{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\,dt} + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\,dt <$$

$$< \underbrace{\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}}_{\forall u} + \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{M}, \quad \text{т.е. (1) д-но.}$$