$S_n(\pi, f) \to \frac{\pi - 1}{2}$; $(-\pi)$ — то же

§7 Комплексная форма записи ТРФ

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$$

$$= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + i b_k \frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{2} =$$

$$= c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}$$

$$c_k = \frac{a_k - i b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - i \sin kt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt$$

$$S_n(x,f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}; \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

При $n \to +\infty$. $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ — компл. форма записи ТРФ.

Если $a_k \cos kx + b_k \sin kx = \hat{c}_{-k} e^{ikx} + \hat{c}_k e^{-ikx} \Rightarrow$

$$S_n(x,f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k e^{-ikx}.$$

[Лекция] 20.04.06

Глава 10.

Интеграл Фурье

$[-\pi, \pi]$ $[-l, l], l > 0$

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int f(x) \cos \frac{\pi k x}{l}\, dx$$

$[a,b]$ $l = \frac{b-a}{2}$, $2l$ на $\mathbb{R}$, $[-l, l]$

$f(x)$ опр. на $\mathbb{R}$, не имеет никакого периода $\Rightarrow$ в ТРФ не расклад. $\Rightarrow$ ин-л Фурье

§1 Свойства преобразования Фурье

Опр Ф-я $f(x) \in L_1$ на $\mathbb{R}$, если $f(x)$ инт. (по Риману) на $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$ и сход. несоб. ин-л

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \quad (\equiv M) \qquad (1)$$

Прим. e^{-x^2}, $e^{-|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| \geq 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

Опр $\forall f(x) \in L_1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx \qquad (2)$$

назыв. образом Фурье $f(x)$ (или преобр. Фурье $f(x)$)

Обозн. $\hat{f}(y) \equiv F[f](y)$