Теор 1. Пусть $f(x)\in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat f(y)$ определено для $\forall y\in\mathbb{R}$, явл. непр. ф-ей y на $\mathbb{R}$,
$\lim\limits_{|y|\to\infty}|\hat f(y)| = 0$.

$\square$ $|f(x)e^{ixy}| = |f(x)|\,|e^{ixy}| = |f(x)|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Т.к. (1) сход. $\Rightarrow$ (2) равном. сх. на $\mathbb{R}$ (по признаку Вейерштрасса) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat f(y)$ опред. $\forall y\in\mathbb{R}$.

$f(x)$ не явл. непр. в общем случае $\Rightarrow$ теор. о непр-ти НКЗП неприменима.

Р. ФП $I_n(y) = \int\limits_{-n}^{n} f(x)e^{ixy}dx$

(2) — сх. равном. $\Rightarrow I_n(y) \rightrightarrows \hat f(y)$, $n\to\infty$ на $\mathbb{R}$

Д-м, что $I_n(y)$ непр. для $\forall n$ в $\forall y\in\mathbb{R}$.

Фикс. $\forall n$, $\forall y\in\mathbb{R}$, Δy — прир.

$|I_n(y+\Delta y) - J_n(y)| = \left|\int\limits_{-n}^{n} f(x)\left(e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}\right)dx\right| <$

$<$ { e^{ixy} на $P = [-n,n]\times[c,d]$

фикс. $\forall y\in\mathbb{R}$, $\forall [c,d]\ni y$

e^{ixy} равном. непр.

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $|\Delta y|<\delta$ $\left|e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}\right| < \frac{\varepsilon}{M}$ }

$\forall (x,y)\in P$

для н-ва (3)

$< \frac{\varepsilon}{M}\int\limits_{-n}^{n}|f(x)|dx \le \frac{\varepsilon}{M}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$

$\Rightarrow J_n(y)$ непр. на $[c,d]$ и в т. y.

$\Rightarrow$ по т. о непр-ти пред. ф-и ФП $\hat f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} J_n(y)$ явл. непр. ф-ей $\forall y\in\mathbb{R}$.

Д-м, что $\hat f(y)\to 0$ $|y|\to\infty$.

Фикс. $\forall\varepsilon>0$ (1) — сход $\Rightarrow \exists A>0$:

$\int\limits_{|x|\ge A}|f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\hat f(y)| < \left|\int\limits_{-A}^{A} f(x)e^{ixy}dx\right| + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ д-м $\left|\int\limits_{-A}^{A} f(x)e^{ixy}dx\right| < \frac{2}{3}\varepsilon$ $|y|\to\infty$.

Разобьем $[-A,A]$ точками $x_0 = -A < x_1 < \dots < x_n = A$: $S - \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}$

$S = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$, $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$f_1(x) = \begin{cases} M_k, & x_{k-1} < x \le x_k,\ k=2,\dots,n \\ M_1 & x_0 \le x_1 \end{cases}$

$\int\limits_{-A}^{A} f_1(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} M_k dx = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k = S$

$\Rightarrow \int\limits_{-A}^{A}\left(f_1(x) - f(x)\right)dx < \frac{\varepsilon}{3}$

$f_1 \ge f$ (кроме отдельн. точек)

$\int\limits_{-A}^{A}|f_1(x) - f(x)|dx = \int\limits_{-A}^{A}\left(f_1(x) - f(x)\right)dx < \frac{\varepsilon}{3}$.