$$\left|\int_{-A}^{A} f(x)\, e^{ixy}dx\right| \le \left|\int_{-A}^{A} f_1(x)\, e^{ixy}dx\right| +$$
$\pm f_1(x)$
$$+ \left|\int_{-A}^{A}\big(f_1(x)-f(x)\big)\, e^{ixy}dx\right| \le$$
$$\le \left|\sum_{k=1}^{n} M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}dx\right| + \int_{-A}^{A} |f_1(x)-f(x)|\,dx$$
$$\left\{ \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}dx\right| = \left|\frac{1}{iy}\left(e^{ix_k y}-e^{ix_{k-1}y}\right)\right| \le \frac{2}{|y|} \right\}$$
$$\hat f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}dx \quad (2)$$
$$|y| > \frac{6\sum_{k=1}^{n}|M_k|}{\varepsilon} = \hat\Delta$$
$\forall \varepsilon>0\ \exists \hat\Delta>0\ \ |y|>\hat\Delta\ \ |\hat f(y)|<\varepsilon$, 2)

$\Rightarrow |\hat f(y)| \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0$ теор. д-на.

■

Следствие $\forall f(x)\in L_1(\mathbb{R})$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$ — косинус-преоб-е Фурье ф-и $f(x)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$ — синус-преоб. Фурье ф-и $f(x)$.

§2. Представление ф-й т-з инт-л Фурье

Опр. Сход. предел (если он ∃) $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat f(y)\, e^{-ixy}dy =$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}dy\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{iy(u-x)}du \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(y)\, e^{-ixy}dy \quad (3)$$
наз. интегралом Фурье ф-и $f(x)$ (обратным преобр-ем Фурье от $f(x)$).

Обозн. $F^{-1}[f](x)$

Теор. 2 $\exists f(x)\in L_1(\mathbb{R})$ и в нек. т. $x_0\in\mathbb{R}$ удовлетв. справа усл-ю Гёльдера с показ. $\alpha_1\in(0,1]$ и слева — усл. Гёльдера с показ. $\alpha_2\in(0,1]$ ⇒ Предел (3) ∃ инт. Фурье сходится и его зн-е равно $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \overset{\text{обозн.}}{=} f_0$.

□ $J_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat f(y)\, e^{-ixy}dy$ — ∃ (т.к. непр. подынтегр. ф-я)
непр. по т.2.

Инт. по (4) в (3) ∃ ⇒ абсолют. сх-е.

по $D = [-\lambda,\lambda]\times[a,b]$ ∫-инт. $\overset{\text{теор.1}}{\Rightarrow}$ к нес. ∫ и т.9

$\int dy\int du = \int du\int dy$

$$J_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat f(y)\, e^{-ixy}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(u-x)}dy$$
$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(u-x)}dy = \frac{1}{i(u-x)}\left(e^{i\lambda(u-x)}-e^{-i\lambda(u-x)}\right) =$$
$$= 2\,\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}$$
$$J_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$
$u-x=t$