Глава 7

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Эта глава посвящена изучению специального класса функций, представимых в виде собственного или несобственного интеграла по одной переменной x от функции, которая кроме указанной переменной x зависит еще от одной переменной y, называемой параметром. Функции, представимые такими интегралами, принято называть интегралами, зависящими от параметра.

Естественно возникают вопросы о непрерывности, интегрируемости, дифференцируемости таких функций по параметру.

§ 1. РАВНОМЕРНОЕ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ СТРЕМЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ К ПРЕДЕЛУ ПО ДРУГОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Связь равномерного по одной переменной стремления функции двух переменных к пределу по другой пременной с равномерной сходимостью функциональной последовательности. Пусть на множестве Z, принадлежащем пространству E^2 и состоящем из пар (x, y), где x принадлежит некоторому множеству числовой оси $\{x\}=X$, а y принадлежит некоторому множеству числовой оси $\{y\}=Y$, задана функция двух переменных $f(x, y)$. В простейшем случае под Z можно подразумевать прямоугольник $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$, где $\{x\}=X=[a, b]$, $\{y\}=Y=[c, d]$, а $f(x, y)$ — функция, заданная на прямоугольнике Π. Пусть далее y_0 — предельная точка множества $\{y\}$.

Если при каждом x, принадлежащем множеству $\{x\}$, существует конечный предел

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y)=g(x),$$

то будем говорить, что функция $f(x, y)$ поточечно стремится к функции $g(x)$ на множестве $\{x\}$ при y, стремящемся к y_0, и будем писать:

$$f(x, y)\to g(x) \text{ при } y\to y_0.$$

Понятие поточечного стремления $f(x, y)$ к $g(x)$ обобщает понятие сходимости в точке функциональной последовательности (см. § 1 гл. 2).

Действительно, в частном случае, когда множество $\{y\}=Y$ является последовательностью $\{y_n\}$ и $y_n\to y_0$, функцию $f(x, y)$ можно рассматривать как функциональную последовательность $f_n(x)=f(x, y_n)$, определенную на множестве $\{x\}=X$.

Определим теперь понятие равномерного по переменной x стремления функции $f(x, y)$ двух переменных к предельной функции $g(x)$ при $y\to y_0$.

Определение. *Функция $f(x, y)$ стремится равномерно относительно x на $\{x\}$ к функции $g(x)$ при y, стремящемся к y_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $y\neq y_0$ из множества $\{y\}$, для которых $|y-y_0|<\delta$, и сразу для всех x из множества $\{x\}$ выполняется неравенство*

$$|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon.$$

Докажем утверждение, устанавливающее связь между равномерным на множестве $\{x\}$ стремлением функции $f(x, y)$ к $g(x)$ при $y\to y_0$ и равномерной на множестве $\{x\}$ сходимостью функциональной последовательности $f_n(x)=f(x, y_n)$ при $y_n\to y_0$, где $y_n\neq y_0$ для всех n, y_0 — предельная точка множества $\{y\}$.

Утверждение 1. *Функция $f(x, y)$ стремится к функции $g(x)$ равномерно относительно x на множестве $\{x\}$ при $y\to y_0$ тогда и только тогда, когда функциональная последовательность $f_n(x)=f(x, y_n)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $g(x)$ для каждой последовательности $\{y_n\}$, $y_n\to y_0$, где y_n принадлежат $\{y\}$, $y_n\neq y_0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x, y)$ стремится к $g(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$ при $y\to y_0$. Возьмем произвольную последовательность $\{y_n\}$, где y_n принадлежат $\{y\}$, $y_n\neq y_0$ и $y_n\to y_0$. Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=f(x, y_n)$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходится к $g(x)$.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и по нему число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых y из множества $\{y\}$ таких, что $0<|y-y_0|<\delta$, и для всех x из $\{x\}$ выполняется неравенство $|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon$. Поскольку $y_n\to y_0$, то найдется такой номер $N=N(\delta)$, что при любых $n\geqslant N$ выполняется неравенство

$$|y_n-y_0|<\delta,$$

из которого следует, что

$$|f(x, y_n)-g(x)|<\varepsilon$$

при всех x, принадлежащих $\{x\}$, и при любом $n\geqslant N$. Это означает, что $f_n(x)$ стремится равномерно на множестве $\{x\}$ к $g(x)$.

Достаточность. Пусть для любой сходящейся к y_0 последовательности $\{y_n\}$, где y_n принадлежат $\{y\}$, $y_n\neq y_0$, соответствующая последовательность $f_n(x)=f(x, y_n)$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходится к функции $g(x)$. Докажем, что функция $f(x, y)$ равно-

мерно на множестве $\{x\}$ стремится к $g(x)$ при $y\to y_0$. Допустим противное, т. е. допустим, что существует такое число $\varepsilon_0>0$, что для любого $\delta>0$ найдутся $y_\delta\neq y_0$, $|y_\delta-y_0|<\delta$, и точка x_δ из $\{x\}$ такие, что

$$|f(x_\delta, y_\delta)-g(x_\delta)|\geqslant\varepsilon_0.$$

Пусть $\{\delta_n\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Тогда для соответствующих последовательностей $\{y_n\}$, $\{x_n\}$, где $y_n=y_{\delta_n}$, $x_n=x_{\delta_n}$, будем иметь $y_n\to y_0$, $|y_n-y_0|<\delta$, тогда как $|f(x_n, y_n)-g(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$. Следовательно, последовательность функций $f(x, y_n)=f_n(x)$ не сходится к $g(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Утверждение 1 полностью доказано.

2. Критерий Коши равномерного стремления функции к предельной.

Теорема 7.1. *Для того чтобы функция $f(x, y)$ стремилась равномерно на множестве $\{x\}$ к некоторой функции $g(x)$ при $y\to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовало бы число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых y', y'' из множества $\{y\}$, для которых $0<|y'-y_0|<\delta$, $0<|y''-y_0|<\delta$, и для всех x из множества $\{x\}$ выполнялось бы неравенство*

$$|f(x, y')-f(x, y'')|<\varepsilon.$$

Доказательство. Согласно утверждению 1 достаточно рассмотреть последовательность $\{f(x, y_n)\}$, соответствующую последовательности $\{y_n\}$, где $y_n\to y_0$, y_n из $\{y\}$, $y_n\neq y_0$, и воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (см. § 1 гл. 2).

3. Применения понятия равномерного стремления к предельной функции. Пусть множество $\{x\}=X$ совпадает с сегментом $[a, b]$, y_0 — предельная точка множества $\{y\}=Y$. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, где x из $[a, b]$, а y из множества Y. Сформулируем ряд утверждений, вытекающих из соответствующих утверждений для равномерно сходящихся функциональных последовательностей (см. гл. 2). Эти утверждения доказываются путем перехода к произвольной последовательности $\{y_n\}$, y_n из Y, $y_n\neq y_0$, $y_n\to y_0$ при $n\to\infty$.

Утверждение 2. *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема на $[a, b]$ при каждом фиксированном y из Y и $f(x, y)$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $g(x)$ при $y\to y_0$. Тогда $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и справедливы равенства*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b [\lim_{y\to y_0} f(x, y)]\,dx.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно применить теорему 2.8.

Утверждение 3. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по x на $[a, b]$ при каждом фиксированном y из множества Y и $f(x, y)$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $g(x)$ при $y\to y_0$, то $g(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.*

Для доказательства следует воспользоваться следствием 1 из теоремы 2.7.

Утверждение 4. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по x на $[a, b]$ при каждом фиксированном y и при стремлении y к y_0 в каждой фиксированной точке x сегмента $[a, b]$ эта функция, не возрастая (не убывая), сходится к непрерывной предельной функции $g(x)$. Тогда $f(x, y)$ стремится к $g(x)$ равномерно на $[a, b]$.*

Это утверждение является аналогом теоремы 2.4 гл. 2 (признак Дини).

При переходе к последовательности $\{y_n\}$ необходимо выбирать ее возрастающей и так, чтобы $y_n\to y_0$.

Утверждение 5. *Если при каждом фиксированном y из множества Y функции от x $f(x, y)$ и $f_x'(x, y)$ непрерывны на $[a, b]$ и при $y\to y_0$ функция $f(x, y)$ стремится к $g(x)$, а функция $f_x'(x, y)$ стремится к $h(x)$ равномерно на $[a, b]$, то функция $g(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, причем*

$$g'(x)=h(x),$$

или

$$\{\lim_{y\to y_0} f(x, y)\}_x'=\lim_{y\to y_0} f_x'(x, y).$$

Для доказательства этого утверждения необходимо воспользоваться теоремой 2.9.

Утверждение 6. *Пусть функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ и непрерывна на нем. Тогда при любом y_0 из сегмента $[c, d]$ при $y\to y_0$ функция $f(x, y)$ стремится равномерно по x на $[a, b]$ к функции $f(x, y_0)$.*

Доказательство. Поскольку непрерывная на прямоугольнике Π функция является и равномерно непрерывной на нем, то для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых точек (x', y'), (x'', y''), для которых $|x'-x''|<\delta$, $|y'-y''|<\delta$, справедливо неравенство

$$|f(x', y')-f(x'', y'')|<\varepsilon.$$

Пусть $x'=x''=x$, $y'=y$, $y''=y_0$. Тогда для любых y из $[c, d]$ таких, что $|y-y_0|<\delta$, и для любых x из $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x, y)-f(x, y_0)|<\varepsilon.$$

Но это и означает равномерное на $[a, b]$ стремление $f(x, y)$ к $f(x, y_0)$ при $y\to y_0$. Утверждение доказано.

§ 2. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Свойства интеграла, зависящего от параметра. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена для x, принадлежащих сегменту $[a, b]$, и для y, принадлежащих некоторому множеству $\{y\}=Y$. Допустим, что при каждом фиксированном y из Y функция $f(x, y)$ интегрируема по $[a, b]$. Тогда на множестве Y определена функция

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{7.1}$$

называемая интегралом, зависящим от параметра y.

Изучим свойства интеграла, зависящего от параметра. Заметим сначала, что согласно утверждению 2 из § 1, если функция $f(x, y)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к функции $g(x)$ при $y\to y_0$, то в интеграле (7.1) можно сделать предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 7.2 (о непрерывности интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$. Тогда интеграл $I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$ является непрерывной функцией параметра y на $[c, d]$.*

Доказательство. В силу утверждения 6 § 1 функция $f(x, y)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x, y_0)$ при $y\to y_0$. Следовательно, как было отмечено выше, можно сделать предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx=\int_a^b f(x, y_0)\,dx=I(y_0),$$

что и требовалось.

Теорема 7.3 (об интегрировании интеграла по параметру). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $\Pi=\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$, то функция $I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$ интегрируема на сегменте $[c, d]$. Кроме того, справедлива формула*

$$\int_c^d I(y)\,dy=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x, y)\,dx\Big]dy=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x, y)\,dy\Big]dx.$$

Иными словами, *в условиях теоремы интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком интеграла.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме 7.2 функция непрерывна на $[c, d]$. Поэтому она интегрируема на этом сегменте. Справедливость формулы следует из равенства повторных интегралов, поскольку оба они равны двойному интегралу $\iint_\Pi f(x, y)\,dx\,dy$ (см. гл. 3). Теорема доказана.

Теорема 7.4 (о дифференцируемости интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике Π и имеет на нем непрерывную производную $f_y'(x, y)$. Тогда определяемая равенством (7.1) функция $I(y)$ дифференцируема на $[c, d]$ и*

$$I'(y)=\int_a^b f_y'(x, y)\,dx. \tag{7.2}$$

Иными словами, *в условиях теоремы можно дифференцировать под знаком интеграла.*

Доказательство. Рассмотрим получаемое из формулы Лагранжа соотношение

$$\frac{f(x, y+h)-f(x, y)}{h}=f_y'(x, y+\theta h),$$

где $0<\theta<1$. Заметим, что $f_y'(x, y+\theta h)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к $f_y'(x, y)$ при $h\to 0$.

Следовательно, при $h\to 0$ допустим предельный переход под знаком интеграла в соотношении

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h}=\int_a^b f_y'(x, y+\theta h)\,dx.$$

Отсюда и получаем формулу (7.2). Теорема доказана.

2. Случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра. Пусть функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $\Pi=\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ c\leqslant y\leqslant d\}$, а заданные на $[c, d]$ функции $a(y)$ и $b(y)$ отображают $[c, d]$ в сегмент $[\alpha, \beta]$.

Если при любом фиксированном y из $[c, d]$ функция $f(x, y)$ интегрируема по x на сегменте $[a(y), b(y)]$, то, очевидно, на $[c, d]$ определена функция

$$I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx, \tag{7.1$'$}$$

представляющая собой интеграл, зависящий от параметра y, у которого пределы интегрирования также зависят от этого параметра.

Теорема 7.5 (о непрерывности интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике Π, а функ-*

ции $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны на сегменте $[c, d]$. Тогда функция $I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$ непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное y_0 из сегмента $[c, d]$. Тогда в силу свойства аддитивности интеграла

$$I(y)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)\,dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx-\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\,dx.$$

Первый интеграл в правой части представляет собой интеграл, зависящий от параметра y, с постоянными пределами интегрирования. Следовательно, он является непрерывной функцией от y и поэтому при $y\to y_0$ стремится к $I(y_0)$. Для двух других интегралов получаем оценки

$$\Big|\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx\Big|\leqslant M|b(y)-b(y_0)|,$$

$$\Big|\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\,dx\Big|\leqslant M|a(y)-a(y_0)|,$$

где $M=\sup\limits_\Pi|f(x, y)|$. Из непрерывности функций $a(y)$ и $b(y)$ следует, что при $y\to y_0$ оба эти интеграла стремятся к нулю. Таким образом, $I(y)\to I(y_0)$ при $y\to y_0$. Теорема доказана.

Докажем теперь теорему о дифференцируемости интеграла $I(y)$, определяемого равенством (7.1$'$).

Теорема 7.6 (о дифференцируемости интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с производной $f_y'(x, y)$ на прямоугольнике Π, а функции $a(y)$, $b(y)$ дифференцируемы на $[c, d]$. Тогда интеграл $I(y)$, определяемый равенством (7.1*), дифференцируем по y на $[c, d]$ и справедливо равенство*

$$I'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f_y'(x, y)\,dx+f[b(y), y]\,b'(y)-f[a(y), y]\,a'(y). \tag{7.3}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное y_0 и запишем соотношение

$$\frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h}=\frac{1}{h}\Big[\int_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx-\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)\,dx\Big] \tag{7.4}$$

(h выбрано так, что $y_0+h\in[c, d]$). Так как

$$\int_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx=\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx+$$

$$+\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx+\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx,$$

то

$$\frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h}=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}\frac{f(x, y_0+h)-f(x, y_0)}{h}\,dx+$$

$$+\frac{1}{h}\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx+\frac{1}{h}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx.$$

В первом слагаемом правой части этого равенства согласно теореме 7.4 можно перейти к пределу под знаком интеграла при $h\to 0$.

Воспользуемся первой формулой среднего значения для интегралов и представим второе и третье слагаемые в виде

$$\frac{1}{h}\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx=f(\xi, y_0+h)\frac{a(y_0)-a(y_0+h)}{h},$$

где ξ заключено между числами $a(y_0)$ и $a(y_0+h)$;

$$\frac{1}{h}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx=f(\xi', y_0+h)\frac{b(y_0+h)-b(y_0)}{h},$$

где ξ' заключено между числами $b(y_0)$ и $b(y_0+h)$.

Из этих равенств и из непрерывности функций $a(y)$ и $b(y)$ получаем, что при $h\to 0$

$$\frac{1}{h}\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)\,dx\to -f[a(y_0), y_0]\,a'(y_0);$$

$$\frac{1}{h}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)\,dx\to f[b(y_0), y_0]\,b'(y_0).$$

Таким образом, в равенстве (7.4) допустим предельный переход при $h\to 0$ и справедлива формула (7.3). Теорема доказана.

§ 3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

В этом параграфе мы будем изучать случай равномерного относительно $y\in\{y\}$ стремления функции двух переменных $F(x, y)$ к предельной функции $G(y)$ при $x\to+\infty$.

Пусть функция $F(x, y)$ определена на множестве Z, состоящем из пар (x, y), где x принадлежит множеству $\{x\}=X$, а y принадлежит множеству $\{y\}=Y$, X и Y — множества числовой оси. Предположим, что $+\infty$ является предельной точкой множества X (т. е. для любого числа a множества $(a, +\infty)$ содержит по крайней мере одну точку из X).

Определение 1. *Функция $F(x, y)$ стремится равномерно относительно y на множестве X к функции $G(y)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число x_0, что для любых x, принадлежащих X и удовлетворяющих условию $x>x_0$, и для любых y из Y выполняется неравенство*

$$|F(x, y)-G(y)|<\varepsilon.$$

1. Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра. Перейдем теперь к изучению несобственных интегралов. Пусть функция $f(x, y)$ определена при всех $x\geqslant a$, при всех y из некоторого множества $\{y\}=Y$ и при каждом фиксированном y из Y интегрируема на $[a, +\infty)$, т. е. для каждого y из Y сходится интеграл

$$I(y)=\int_a^\infty f(x, y)\,dx. \tag{7.5}$$

Определение 2. *Несобственный интеграл (7.5) называется сходящимся равномерно по параметру y на множестве Y, если функция*

$$F(t, y)=\int_a^t f(x, y)\,dx \tag{7.6}$$

равномерно на множестве Y стремится к предельной функции $I(y)$ при $t\to+\infty$.

Справедлив следующий критерий равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 7.7 (критерий Коши). *Для того чтобы несобственный интеграл (7.5) сходился равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое число $t_0\geqslant a$, что при всех t', t'', превосходящих t_0, и при всех y из Y было справедливо неравенство*

$$\Big|\int_{t'}^{t''} f(x, y)\,dx\Big|<\varepsilon.$$

Справедливость этого критерия вытекает из теоремы 7.1, примененной к функции

$$F(t, y)=\int_a^t f(x, y)\,dx.$$

Из критерия Коши, в частности, вытекает следующий признак сравнения.

Теорема 7.8 (признак Вейерштрасса). *Пусть при всех y из Y и всех x, принадлежащих полуоси $[a_1, \infty)$, где $a_1 > a$, для функции $f(x, y)$ выполнено неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — интегрируемая (в несобственном смысле) на $[a, \infty)$ функция. Тогда интеграл (7.5) сходится равномерно.

Доказательство. Поскольку интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ сходится, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $t_0 \geqslant a_1$, что при любых t', t'' таких, что $t_0 \leqslant t' \leqslant t''$, выполняется неравенство

$$\int_{t'}^{t''} \varphi(x)\,dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \int_{t'}^{t''} |f(x, y)|\,dx \leqslant \int_{t'}^{t''} \varphi(x)\,dx < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла вытекает, что интеграл (7.5) и его «остаток» (т. е. интеграл вида $\int_{a'}^\infty f(x, y)\,dx$, где $a' > a$) равномерно сходятся одновременно.

Замечание 2. Аналогично тому, как был доказан признак Дирихле—Абеля для несобственных интегралов (см. дополнение 1 к гл. 9 ч. 1), доказывается следующее утверждение (признак Дирихле—Абеля):

Если интеграл $F(t, y) = \int_a^t f(x, y)\,dx$ равномерно ограничен, т. е. при всех $t > a$ и y из Y выполнено условие $|F(t, y)| \leqslant M$, а $g(x)$ ограничена и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, то интеграл $\int_a^\infty f(x, y) g(x)\,dx$ сходится равномерно.

Перейдем теперь к изучению свойств зависящих от параметра несобственных интегралов.

Теорема 7.9. *Пусть для любого b, превосходящего a, функция $f(x, y)$ равномерно на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ стремится к функции $g(x)$ при $y \to y_0$, где y_0 — предельная точка множества Y, и интег-*

рал $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ сходится равномерно на множестве Y. Тогда

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_0^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty g(x)\,dx.$$

Доказательство. Докажем интегрируемость на $[a, \infty)$ функции $g(x)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем число $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых t', t'', превосходящих t_0, и для всех y из Y выполнено неравенство

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Зафиксировав произвольные t' и t'', превосходящие t_0, перейдем в этом неравенстве к пределу при $y \to y_0$, получим

$$\left|\int_{t'}^{t''} g(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Это и доказывает сходимость интеграла $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

Пусть $\{t_n\}$ — произвольная последовательность такая, что $t_n \to +\infty$. Введем в рассмотрение функциональную последовательность

$$I_n(y) = \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx,$$

которая равномерно на множестве Y сходится к функции $I(y)$, определяемой равенством (7.5). В силу утверждения 2 § 1 для каждой из функций $I_n(y)$ существует конечный предел при $y \to y_0$. Более того,

$$\lim_{y \to y_0} I_n(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx = \int_a^{t_n} [\lim_{y \to y_0} f(x, y)]\,dx = \int_a^{t_n} g(x)\,dx.$$

Но тогда существует и предел

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{t_n \to \infty} \int_a^{t_n} g(x)\,dx = \int_a^\infty g(x)\,dx,$$

поскольку согласно теореме 2.7 гл. 2 символ $\lim\limits_{t_n \to \infty}$ предела равномерно сходящейся последовательности $\{I_n(y)\}$ и символ $\lim\limits_{y \to y_0}$ пре-

дела функции $I_n(y)$ можно переставлять местами. Теорема доказана.

Допустим, в частности, что точка y_0 принадлежит множеству Y и функция $f(x, y)$ непрерывна в точке y_0, т. е. $f(x, y)$ при любом $b > a$ стремится равномерно на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ к $f(x, y_0)$ при $y \to y_0$. Тогда $\lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0)$, т. е. $I(y)$ непрерывна в точке y_0.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 7.9* (о непрерывности несобственного интеграла по параметру). *Пусть $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна при $x \geqslant a$ и y из $[c, d]$, а интеграл $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ равномерно на $[c, d]$ сходится. Тогда функция $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$.*

Доказательство. Можно утверждать, что для каждого прямоугольника $\Pi = \{a \leqslant x \leqslant t,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ функция $f(x, y)$ равномерно на сегменте $a \leqslant x \leqslant t$ стремится к $f(x, y_0) = g(x)$ при $y \to y_0$ (см. утверждение 6 § 1). Поэтому при $t = t_n$ для интегралов $I_n(y)$, введенных при доказательстве теоремы 7.9, выполнены условия предельного перехода под знаком интеграла. Отсюда и из равномерной на $[c, d]$ сходимости $I_n(y)$ к $I(y)$ получаем, что $\lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0)$, т. е. функция $I(y)$ непрерывна. Теорема доказана.

Теорема 7.10. *Пусть $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна при x, принадлежащем полупрямой $[a, \infty)$, и y, принадлежащем сегменту $[c, d]$. Пусть далее интеграл $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ непрерывен по y на $[c, d]$. Тогда этот интеграл сходится равномерно по y на $[c, d]$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $I_n(y) = \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$ непрерывных на $[c, d]$ функций, и пусть $t_n \to +\infty$ не убывая. Последовательность $\{I_n(y)\}$, монотонно не убывая, сходится к непрерывной функции $I(y)$. Следовательно, можно применить признак Дини (теорема 2.4 гл. 2). Теорема доказана.

Теорема 7.11. *Пусть $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна при x, принадлежащем полупрямой $[a, \infty)$, и y, принадлежащем сегменту $[c, d]$. Пусть при $y \to y_0$ функция $f(x, y)$, монотонно не убывая в каждой точке x по y, сходится к непрерывной функции $g(x)$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^\infty g(x)\,dx$ следует возможность предельного перехода при $y \to y_0$ под знаком интеграла (7.5).*

Доказательство. Действительно, интеграл (7.5) сходится равномерно на $[c, d]$ по признаку Вейерштрасса (теорема 7.8), поскольку $f(x, y) \leqslant g(x)$ и $g(x)$ — интегрируема на $[a, \infty)$. Поэтому в силу теоремы 7.9* можно переходить к пределу под знаком интеграла, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об интегрировании несобственного интеграла по параметру.

Теорема 7.12 (об интегрировании несобственного интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна при x, принадлежащем полупрямой $[a, \infty)$, и при y, принадлежащем сегменту $[c, d]$, и пусть интеграл $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ равномерно сходится. Тогда функция $I(y)$ интегрируема на $[c, d]$ и имеет место формула*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (*)$$

Доказательство. Согласно теореме 7.9* функция $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$, а следовательно, и интегрируема на $[c, d]$. Докажем формулу $(*)$. Рассмотрим последовательность функций $I_n(y) = \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$, где $t_n \to +\infty$. В силу теоремы 7.3 для каждой функции $I_n(y)$ получаем

$$\int_c^d I_n(y)\,dy = \int_a^{t_n} dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (7.7)$$

Поскольку на $[c, d]$ последовательность $I_n(y)$ равномерно сходится к $I(y)$, то под знаком интеграла, стоящего слева в формуле (7.7), можно сделать предельный переход при $n \to \infty$. Следовательно, при $n \to \infty$ существует предел последовательности интегралов, стоящих в правой части (7.7).

Таким образом,

$$\lim_{n \to \infty} \int_c^d I_n(y)\,dy = \int_c^d I(y)\,dy = \lim_{n \to \infty} \int_a^{t_n} dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем теорему об интегрировании несобственного интеграла (7.5) по бесконечному промежутку изменения параметра y.

Теорема 7.13. *Пусть $f(x, y)$ как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна в области $a \leqslant x < \infty$, $c \leqslant y < \infty$, ин-*

теграл $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ непрерывен на полупрямой $[c, \infty)$, а интеграл $K(x) = \int_c^\infty f(x, y)\,dy$ непрерывен на полупрямой $[a, \infty)$. Тогда из сходимости одного из двух интегралов $\int_c^\infty I(y)\,dy$ и $\int_a^\infty K(x)\,dx$ следует сходимость другого из этих интегралов и справедливость равенства

$$\int_c^\infty I(y)\,dy = \int_a^\infty K(x)\,dx,$$

или

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy.$$

Таким образом, в условиях этой теоремы несобственный интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком несобственного интеграла и в случае бесконечного промежутка изменения параметра.

Доказательство. В силу условий доказываемой теоремы и в силу теоремы 7.10 интегралы $I(y)$ и $K(x)$ сходятся равномерно: первый на сегменте $[c, d]$ при любом $d > c$, а второй на сегменте $[a, b]$ при любом $b > a$. Пусть, например, сходится повторный интеграл $\int_c^\infty I(y)dy$. Рассмотрим неубывающую последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$. Тогда $\int_a^{t_n} K(x)\,dx = \int_a^{t_n}\int_c^\infty f(x, y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$.

Последовательность

$$I(y, t_n) = \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$$

при любом d, превосходящем c, равномерно на сегменте $[c, d]$ сходится к $I(y)$. При этом последовательность $\{I(y, t_n)\}$ не убывает на $[c, d]$. Отсюда и из теоремы 7.11 вытекает, что интеграл $\int_c^\infty I(y, t)\,dy$ сходится равномерно. Но тогда под знаком этого интеграла согласно теореме 7.9 можно сделать предельный переход, т. е. имеет место формула

$$\int_a^\infty K(x)\,dx = \lim_{t_n \to +\infty} \int_a^{t_n} K(x)\,dx = \lim_{t_n \to +\infty} \int_c^\infty I(y, t_n)\,dy = \int_c^\infty I(y)\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании по параметру несобственного интеграла.

Теорема 7.14 (о дифференцируемости несобственного интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x, y)$ и ее производная $f_y'(x, y)$ непрерывны в области $a \leqslant x < \infty$, $c \leqslant y \leqslant d$. Пусть, далее, интеграл $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ сходится в каждой точке y сегмента $[c, d]$, а интеграл $\int_a^\infty f_y'(x, y)\,dx$ сходится равномерно на сегменте $[c, d]$. Тогда при любом y из $[c, d]$ функция $I(y)$ имеет производную*[1]*, причем*

$$I'(y) = \int_a^\infty f_y'(x, y)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $t_n \to +\infty$, а $I_n(y) = \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$. Последовательность непрерывных функций $I_n(y)$ сходится в каждой точке $[c, d]$ к функции $I(y)$, а последовательность производных $I_n'(y)$ сходится равномерно на сегменте $[c, d]$. Тогда согласно утверждению 5 § 1 для любой точки y сегмента $[c, d]$ существует

$$I'(y) = \lim_{n \to \infty} I_n'(y).$$

Но $I_n'(y) = \int_a^{t_n} f_y'(x, y)\,dx$. Следовательно,

$$I'(y) = \int_a^\infty f_y'(x, y)\,dx.$$

2. Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра. Пусть функция $f(x, y)$ определена при x, принадлежащем $[a, b]$, и y, принадлежащем Y. Пусть при каждом фиксированном y из Y функция $f(x, y)$ является неограниченной при $x \to a$, но такой, что сходится несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx. \qquad (7.8)$$

[1] При $y = c$ $I(y)$ имеет правую производную $I'(c+0)$, а при $y = d$ — левую производную $I'(d-0)$.

Определение 3. *Несобственный интеграл второго рода (7.8) называется равномерно сходящимся по параметру y на множестве Y, если для t, удовлетворяющего неравенствам $a < t < b$, функция*

$$F(t, y) = \int_t^b f(x, y)\,dx$$

при $t \to a+0$ стремится к функции $I(y)$ равномерно относительно $y \in Y$.

Отметим, что с помощью преобразования переменной x, указанного в дополнении 1 к гл. 9 ч. 1, несобственные интегралы второго рода сводятся к несобственным интегралам первого рода. Поэтому на интегралы (7.8) могут быть распространены основные теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла, об условиях его непрерывности по параметру, об интегрировании и дифференцировании по параметру под знаком интеграла.

В заключение параграфа заметим, что интеграл вида

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, y)\,dx + \int_b^\infty f(x, y)\,dx,$$

где первое слагаемое — интеграл от неограниченной функции, а второе — интеграл по неограниченному промежутку, называется равномерно сходящимся, если равномерно сходятся оба интеграла, стоящие в правой части.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Развитые в предыдущих параграфах методы позволяют вычислять различные несобственные интегралы.

1°. Вычислим интеграл

$$Q = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Сходимость этого интеграла была установлена ранее (см. дополнение 1 к гл. 9 ч. 1).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-yx}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Функция $f(x, y)$ и ее производная $f_y'(x, y) = -e^{-yx}\sin x$ непрерывны в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $f(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$. Пусть

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty f(x, y)\,dx.$$

Установим равномерную сходимость этого интеграла при $y \geqslant 0$. Для этого, очевидно, достаточно установить равномерную сходимость интеграла $\int_1^\infty (e^{-yx}\sin x)\frac{1}{x}\,dx$. К этому интегралу применим приведенный в § 3 признак Дирихле—Абеля. Действительно, интеграл

$$\int_1^t e^{-yx}\sin x\,dx = -\left.\frac{e^{-yx}(y\sin x + \cos x)}{1+y^2}\right|_1^t$$

является ограниченным, так как

$$\left|\int_1^t e^{-yx}\sin x\,dx\right| \leqslant \left|\frac{e^{-yt}(y\sin t + \cos t)}{1+y^2}\right| + \left|\frac{e^{-y}(y\sin 1 + \cos 1)}{1+y^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2(1+y)}{1+y^2} \leqslant 3.$$

Функция $\frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ монотонно стремится к нулю.

Из равномерной сходимости интеграла и непрерывности подынтегральной функции согласно теореме 7.9 § 3 вытекает непрерывность функции $I(y)$ на $[0, \infty)$, т. е. справедливость равенства

$$\lim_{y \to 0+0} I(y) = I(0) = I.$$

Найдем значение $I(y)$. Рассмотрим вспомогательный интеграл $\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx$. Согласно признаку Дирихле—Абеля, который, очевидно, применим к этому интегралу, заключаем, что этот интеграл равномерно сходится в области $y \geqslant y_0$, где $y_0 > 0$. Отсюда согласно теореме 7.14 § 3 следует возможность дифференцирования интеграла $I(y)$ по параметру y в любой точке $y > 0$. Таким образом, для любого $y > 0$

$$I'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx = \left.\frac{e^{-yx}(y\sin x + \cos x)}{1+y^2}\right|_0^\infty = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Интегрируя это соотношение по $[y, +\infty)$, получим

$$I(\infty) - I(y) = -\operatorname{arctg} t\,|_y^\infty = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} y.$$

Поскольку $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$, то для $y \geqslant y_0$ имеем при $y_0 \to \infty$

$$|I(y)| \leqslant \int_0^\infty e^{-y_0 x}\,dx = -\frac{1}{y_0}e^{-y_0 x}\,|_0^\infty = \frac{1}{y_0} \to 0.$$

Отсюда получаем, что $I(\infty) = 0$ и, следовательно, для любого $y > 0$

$$I(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $y \to 0+0$, получим

$$I(0) = I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2°. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx.$$

Найдем его значения при $y > 0$, $y < 0$ и $y = 0$. При $y > 0$ в интеграле $I(y)$ произведем замену переменной, полагая $yx = t$. Тогда

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

При $y < 0$ произведем замену переменной, полагая $yx = -t$ $(t > 0)$. Тогда

$$I(y) = -\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2}.$$

При $y = 0$ интеграл $I(y)$, очевидно, равен нулю. Следовательно,

$$I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Этот интеграл иногда называют **разрывным множителем Дирихле**. В частности, с помощью разрывного множителя Дирихле получаем представление для функции

$$\operatorname{sgn} y = \begin{cases} 1 \text{ при } y > 0, \\ 0 \text{ при } y = 0, \\ -1 \text{ при } y < 0 \end{cases}$$

в виде

$$\operatorname{sgn} y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx.$$

3°. Вычислим интеграл Пуассона[2] $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Положим $x = yt$, где $y > 0$; тогда

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-y^2t^2} y\, dt.$$

Умножим обе части этого соотношения на e^{-y^2} и проинтегрируем по $[0, \infty)$:

$$I \int_0^\infty e^{-y^2} dy = I^2 = \int_0^\infty e^{-y^2} y \left\{ \int_0^\infty e^{-y^2t^2} dt \right\} dy.$$

Рассмотрим функцию $f(y, t) = ye^{-(1+t^2)y^2}$. В области $y \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ эта функция ограничена, непрерывна и неотрицательна. Интегралы

$$\int_0^\infty f(y, t)\, dt = ye^{-y^2} \int_0^\infty e^{-y^2t^2} dt = e^{-y^2} I;$$

$$\int_0^\infty f(y, t)\, dy = \int_0^\infty ye^{-(1+t^2)y^2} dy = -\frac{1}{2(1+t^2)} e^{-(1+t^2)y^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2(1+t^2)}$$

являются непрерывными функциями в областях изменения пара-

[2] См. также § 6 гл. 3.

метра, т. е. соответственно в области $y \geqslant 0$ и в области $t \geqslant 0$. Кроме того,

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty f(y, t)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 7.13 из § 3. Поэтому

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-y^2} y \left\{ \int_0^\infty e^{-y^2t^2} dt \right\} dy = \int_0^\infty dt \int_0^\infty f(y, t)\, dy = \frac{\pi}{4},$$

т. е.

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

§ 5. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА

В этом параграфе мы изучим некоторые свойства важных неэлементарных функций, называемых **интегралами Эйлера**[3].

Эйлеровым интегралом **первого рода** или «**бета-функцией**» (B-функцией) называют интеграл

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

В этом интеграле α и β являются параметрами. Если эти параметры удовлетворяют условиям $\alpha < 1$, $\beta < 1$, то интеграл $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ будет несобственным, зависящим от этих параметров, причем особенности у подынтегральной функции будут в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Эйлеровым интегралом **второго рода** или «**гамма-функцией**» (Г-функцией) называют интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Заметим, что в интеграле $\Gamma(\alpha)$ интегрирование происходит по полупрямой $0 \leqslant x < \infty$ и при $\alpha < 1$ точка $x = 0$ является особой точкой подынтегральной функции.

[3] Более подробно с интегралами Эйлера можно познакомиться в книге Э. Г. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона «Курс современного анализа. Т. 2» (М.: Физматгиз, 1963).

1. Г-функция. Интеграл

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

сходится при каждом $\alpha > 0$, поскольку $0 \leqslant x^{\alpha-1} e^{-x} < x^{\alpha-1}$, и интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$ при $\alpha > 0$ сходится.

В области $\alpha \geqslant \alpha_0$, где α_0 — произвольное положительное число, этот интеграл сходится равномерно, так как $0 \leqslant x^{\alpha-1} e^{-x} \leqslant x^{\alpha_0-1}$ и можно применить признак Вейерштрасса (теорема 7.8 § 3). Сходящимся при всех значениях $\alpha > 0$ является и весь интеграл $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, так как второе слагаемое правой части является интегралом, заведомо сходящимся при любом $\alpha > 0$. Легко видеть, что этот интеграл сходится равномерно по α в области $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant A_0 < \infty$, где число A_0 произвольно. Действительно, для всех указанных значений α и для всех $x > 0$ $\quad x^{\alpha-1} e^{-x} \leqslant e^{-x}[x^{\alpha_0-1} + x^{A_0-1}]$, и так как $\int_0^\infty e^{-x}[x_0^{\alpha-1} + x^{A_0-1}]\, dx$ сходится, то выполнены условия применимости признака Вейерштрасса. Таким образом, в области $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant A_0 < \infty$ интеграл $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно.

Отсюда вытекает непрерывность функции $\Gamma(\alpha)$ в области $\alpha > 0$. Докажем теперь дифференцируемость этой функции при $\alpha > 0$. Заметим, что функция $f'_\alpha(x, \alpha) = \ln x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x}$ непрерывна при $\alpha > 0$ и $x > 0$, и покажем, что интеграл

$$\int_0^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \int_0^\infty \ln x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

сходится равномерно по α на каждом сегменте $[\alpha_0, A_0]$, $0 < \alpha_0 < A_0 < \infty$. Выберем число ε_0 так, чтобы $0 < \varepsilon_0 < \alpha_0$; тогда $x^{\varepsilon_0} \ln x \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому существует число δ такое, что $0 < \delta < 1$ и $|x^{\varepsilon_0} \ln x| \leqslant 1$ на $(0, \delta]$. Но тогда на $(0, \delta]$ справедливо неравенство

$$|\ln x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x}| \leqslant x^{\alpha_0 - \varepsilon_0 - 1},$$

и так как интеграл $\int_0^\delta \frac{dx}{x^{1-(\alpha_0-\varepsilon_0)}}$ сходится, то интеграл

$\int_0^\delta \ln x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно относительно α на $[\alpha_0, \infty)$.

Аналогично для $\alpha \leqslant A_0$ существует такое число $\delta_1 > 1$, что для всех $x \geqslant \delta_1$ выполняется неравенство $\left| \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x^{\delta_1}+2}{e^x} \right| \leqslant 1$. При таких x и всех $\alpha \leqslant A_0$ получим $|\ln x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x}| \leqslant 1/x^2$, откуда в силу признака сравнения следует, что интеграл $\int_{\delta_1}^\infty \ln x\, x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно относительно α на $[\alpha_0, A_0]$. Наконец, интеграл

$$\int_\delta^{\delta_1} \ln x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

в котором подынтегральная функция непрерывна в области $\delta \leqslant x \leqslant \delta^1$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant A_0$, очевидно, сходится равномерно относительно α на $[\alpha_0, A_0]$. Таким образом, на $[\alpha_0, A_0]$ интеграл

$$\int_0^\infty \ln x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

сходится равномерно (по α), а следовательно, функция $\Gamma(\alpha)$ дифференцируема при любом $\alpha > 0$ и справедливо равенство

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^\infty \ln x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Относительно интеграла $\Gamma'(\alpha)$ можно повторить те же рассуждения и заключить, что

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^\infty \ln^2 x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

По индукции показывается, что Г-функция бесконечно дифференцируема при $\alpha > 0$ и для ее n-й производной справедливо равенство

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty \ln^n x \cdot x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Установим теперь некоторое соотношение для Г-функции, называемое **формулой приведения**. Для этого выражение для $\Gamma(\alpha+1)$ проинтегрируем по частям:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Следовательно,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Это соотношение и называется **формулой приведения** для Г-функции. Если $\alpha > 1$, то, применив формулу приведения к $\Gamma(\alpha)$, получим

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

Если $n-1 < \alpha < n$, то в результате последовательного применения формулы приведения получим

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1).$$

Это равенство показывает, что достаточно знать $\Gamma(\alpha)$ на $(0, 1]$, чтобы вычислить ее значение при любом $\alpha > 0$. Например, при $\alpha = n$ получаем

$$\Gamma(n-1) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1).$$

Поскольку $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, то

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Из этой формулы, например, получаем

$$\Gamma(1) = 1 = 0!,$$

что соответствует соглашению $0! = 1$.

Изучим теперь поведение Г-функции и построим эскиз ее графика.

Из выражения для второй производной Г-функции видно, что $\Gamma''(\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$. Следовательно, $\Gamma'(\alpha)$ возрастает. Поскольку $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = \Gamma(1)$, то по теореме Ролля на сегменте $[1, 2]$ производная $\Gamma'(\alpha)$ имеет единственный нуль в некоторой точке α^1. Следовательно, $\Gamma'(\alpha) < 0$ при $\alpha < \alpha^1$ и $\Gamma'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha^1$, т. е. $\Gamma(\alpha)$ монотонно убывает на $(0, \alpha^1)$ и монотонно возрастает на (α^1, ∞). Далее, поскольку $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)/\alpha$, то $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to 0+0$. При $\alpha > 2$ из формулы $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) > (\alpha-1)\Gamma(1) = \alpha - 1$ следует, что $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to +\infty$.

Равенство $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)/\alpha$, справедливое при $\alpha > 0$, можно использовать при распространении Г-функции на отрицательные значения α.

Положим для $-1 < \alpha < 0$, что $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)/\alpha$. Правая часть этого равенства определена для α из $(-1, 0)$. Получаем, что так продолженная функция $\Gamma(\alpha)$ принимает на $(-1, 0)$ отрицательные значения и при $\alpha \to -1+0$, а также при $\alpha \to 0-0$ функция $\Gamma(\alpha) \to -\infty$.

Определив таким образом $\Gamma(\alpha)$ на $(-1, 0)$, мы можем по той же формуле продолжить ее на интервал $(-2, -1)$. На этом

интервале продолжением $\Gamma(\alpha)$ окажется функция, принимающая положительные значения и такая, что $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to -1-0$ и $\alpha \to -2+0$. Продолжая этот процесс, определим функцию $\Gamma(\alpha)$, имеющую разрывы второго рода в целочисленных точках $\alpha = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (см. рис. 7.1).

Отметим еще раз, что интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

определяет Г-функцию **только при положительных значениях** α, продолжение на отрицательные значения α осуществлено нами формально с помощью формулы приведения $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

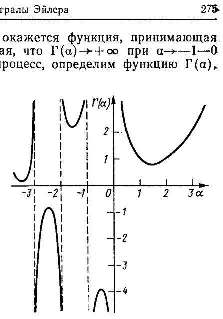

Рис. 7.1

2. B-функция. Рассмотрим интеграл, определяющий B-функцию:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Интеграл $\int_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$ сходится при $\alpha > 0$ и любом β, так как при $0 < x \leqslant 1/2$ справедливо неравенство $0 < x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leqslant cx^{\alpha-1}$ при некотором $c > 0$ и интеграл $\int_0^{1/2} x^{\alpha-1} dx$ при $\alpha > 0$ сходится.

Этот интеграл сходится равномерно относительно α и β в области $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$, $\beta \geqslant 0$, поскольку

$$0 \leqslant x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \leqslant cx^{\alpha_0-1}$$

при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $\beta \geqslant 0$ и для всех $x \in (0, 1/2]$.

Аналогично проверяется сходимость интеграла

$$\int_{1/2}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

при любых $\alpha \geqslant 0$ и $\beta > 0$, а также его равномерная сходимость в области $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant \beta_0 > 0$, где $\beta_0 > 0$ — произвольное число.

Таким образом, интеграл

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

сходится при всех $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и сходится равномерно по α и β на множестве $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$, $\beta \geqslant \beta_0 > 0$, где α_0 и β_0 — произвольные положительные числа.

Точно так же, как и для Г-функции, можно показать, что B-функция является бесконечно дифференцируемой при $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta < \infty$. Однако это мы установим ниже, используя выражение B-функции через Г-функцию. Поэтому показывать непосредственно дифференцируемость B-функции мы не будем.

Установим некоторые свойства B-функции.

1°. **Симметричность B-функции:** *при всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$ имеет место равенство*

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \mathrm{B}(\beta, \alpha),$$

т. е. B-функция симметрична относительно своих аргументов.

В интеграле, определяющем B-функцию, сделаем замену переменной, положив $t = 1 - x$. Получим

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = -\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt =$$

$$= \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1} dt = \mathrm{B}(\beta, \alpha).$$

2°. **Формула приведения для B-функции:** *для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ имеет место следующая формула приведения:*

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \mathrm{B}(\alpha, \beta).$$

Действительно,

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta) = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1} dx = -\frac{1}{\beta} x^\alpha (1-x)^\beta \Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^\beta dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)(1-x)^{\beta-1} dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \left[\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx - \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1} dx \right] =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \mathrm{B}(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta} \mathrm{B}(\alpha+1, \beta).$$

Таким образом,

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} \mathrm{B}(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta} \mathrm{B}(\alpha+1, \beta),$$

откуда

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \mathrm{B}(\alpha, \beta).$$

Из свойства симметрии для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ получается также формула

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \mathrm{B}(\alpha, \beta).$$

Последовательное применение этих формул дает возможность выразить любые значения $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ через значения этой функции в прямоугольнике $\Pi = \{0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 < \beta \leqslant 1\}$.

3. Связь между эйлеровыми интегралами. В интеграле, определяющем $\Gamma(\alpha)$, сделаем замену, полагая $x = ut$, где $u > 0$, а в интеграле, определяющем $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$, сделаем замену $x = \frac{t}{1+t}$:

$$\Gamma(\alpha) = u^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-ut} dt, \quad \mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\, dt.$$

Заменив в первом интеграле u через $1 + v$, а α через $\alpha + \beta$, получим

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}} = \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t} dt.$$

Умножим обе части последнего равенства на $v^{\alpha-1}$:

$$\Gamma(\alpha+\beta) \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} = \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t} v^{\alpha-1} dt.$$

Предположим, что $\alpha > 1$, $\beta > 1$, и рассмотрим в области $t \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ функцию

$$f(t, v) = t^{\alpha+\beta-1} v^{\alpha-1} e^{-(1+v)t}.$$

Очевидно, что в этой области $f(t, v) \geqslant 0$. Далее, интеграл

$$I(v) = \int_0^\infty f(t, v)\, dt = \Gamma(\alpha+\beta) \frac{v^{(\alpha-1)}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}$$

является непрерывной функцией от v на полупрямой $v \geqslant 0$. Интег-

рал по другому аргументу от этой функции также непрерывен по t на полупрямой $t \geqslant 0$, поскольку

$$K(t) = \int_0^\infty f(t, v)\, dv = t^{\alpha+\beta-1} e^{-t} \int_0^\infty e^{-tv} v^{\alpha-1} dv = \Gamma(\alpha) t^{\beta-1} e^{-t}.$$

Наконец, существует повторный интеграл

$$\int_0^\infty K(t)\, dt = \int_0^\infty dt \int_0^\infty f(t, v)\, dv = \int_0^\infty \Gamma(\alpha) t^{\beta-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Следовательно, в силу теоремы 7.13 § 3 имеет место равенство

$$\int_0^\infty I(v)\, dv = \int_0^\infty K(t)\, dt,$$

или

$$\int_0^\infty I(v)\, dv = \int_0^\infty \Gamma(\alpha+\beta) \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\, dv = \Gamma(\alpha+\beta) \int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\, dv =$$

$$= \int_0^\infty K(t)\, dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Таким образом,

$$\Gamma(\alpha+\beta) \int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\, dv = \Gamma(\alpha+\beta)\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta),$$

где мы воспользовались установленным выше равенством:

$$\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\, dv = \mathrm{B}(\alpha, \beta).$$

В результате получим, что для всех $\alpha > 1$, $\beta > 1$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Распространим эту формулу на значения $\alpha > 0$, $\beta > 0$. По доказанному справедлива формула

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Воспользовавшись формулами приведения, получим

$$B(\alpha+1,\ \beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}B(\alpha,\ \beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\ \beta);$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha);\ \Gamma(\beta+1)=\beta\Gamma(\beta);$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2)=(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

Подставляя эти выражения в формулу для $B(\alpha+1,\ \beta+1)$, получим формулу

$$B(\alpha,\ \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

для всей области $\alpha>0$, $\beta>0$.

4. Примеры. Приведем примеры вычисления некоторых интегралов путем сведения их к эйлеровым интегралам.

1°. Вычислим интеграл

$$I=\int_0^\infty x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx.$$

Очевидно, что

$$I=B\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

2°. Найдем значение интеграла

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}t\cos^{\beta-1}t\,dt.$$

Полагая $x=\sin^2 t$, получим

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

3°. Вычислим интеграл

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}t\,dt.$$

Используя пример 2° (при $\beta=1$), получим

$$I_{\alpha-1}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

Далее,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^\infty e^{-(\sqrt{t})^2}d(\sqrt{t}).$$

Заменяя $\sqrt{t}$ на x и вспоминая, что интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (см. пример 3° § 4), получим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Поэтому

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

§ 6. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Мы уже знаем, что

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx.$$

Найдем представление величины $n!$ при больших значениях n (так называемое асимптотическое представление). Мы докажем формулу

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

где величина ω заключена между -1 и $+1$. Это и есть формула Стирлинга.

Перейдем к ее доказательству. Заметим, что функция $x^n e^{-x}$ возрастает на $[0,\ n]$ от 0 до $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ и убывает на $[n,\ +\infty)$ от $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ до 0. Заметим, что

$$x^n e^{-x}=\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x},$$

а поэтому

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}dx.$$

Функция $\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}$ на $[0,\ n]$ возрастает от 0 до 1, а на $[n,\ +\infty)$ убывает от 1 до 0. Поэтому можно сделать замену переменной

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}=e^{-t^2}. \qquad (*)$$

При этом сегменту $[0,\ n]$ изменения x будет отвечать полуось $(-\infty,\ 0]$ изменения t, а полуоси $[n,\ \infty)$ изменения x — полуось $[0,\ \infty)$ изменения t.

Для проведения замены переменной $(*)$ необходимо найти производную $\frac{dx}{dt}$. Для любого $x\neq n$, дифференцируя левую и правую части $(*)$ по t, получим равенство

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{x-n}.$$

С другой стороны, логарифмируя равенство $(*)$, получим

$$t^2=x-n-n\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right).$$

Записывая для функции $f(y)=\ln(1+y)$ формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, мы получим, что найдется число θ из интервала $0<\theta<1$ такое, что $\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta y)^2}$, так что при $y=\frac{x-n}{n}$

$$\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right)=\frac{x-n}{n}-\frac{1}{2}\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2},$$

и потому

$$t^2=\frac{n}{2}\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2}.$$

Отсюда

$$t=\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{x-n}{n+\theta(x-n)}=\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{1}{\theta+\frac{n}{x-n}}.$$

Поэтому $\frac{n}{x-n}=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta$, а, следовательно,

$$\frac{dx}{dt}=2t\frac{x}{x-n}=2t\left[1+\frac{n}{x-n}\right]=2t\left[\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}+1-\theta\right]=$$

$$=2\sqrt{\frac{n}{2}}+2t(1-\theta).$$

Теперь в интеграле $\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}dx$ произведем замену переменной $(*)$:

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)e^{n-x}dx=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\left[2\sqrt{\frac{n}{2}}+2t(1-\theta)\right]dt=$$

$$=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt+\frac{2}{\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt\right].$$

Оценим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt$. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt\leqslant 2\int_0^\infty te^{-t^2}dt=-e^{-t^2}|_0^\infty=1.$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ и $\sqrt{\pi}>2$, окончательно получим

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

где $|\omega|\leqslant 1$. Формула Стирлинга обоснована.

Заметим, что более детальный анализ показывает, что справедливо, например, следующее разложение[4]):

$$n!=\Gamma(n+1)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}\cdot\frac{139}{51840n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right],$$

в котором остаток не превосходит последнего удерживаемого слагаемого.

§ 7. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметров. Пусть $x=(x_1,\ x_2,\dots,x_n)$ — точка ограниченной области Ω_n n-мерного евклидова пространства E^n, а $y=(y_1,\ y_2,\dots,y_n)$ — точка ограниченной области D_m пространства E^m. Обозначим через $\Omega_n\times\times D_m$ прямое произведение области Ω_n на область D_m, являющееся подмножеством $(n+m)$-мерного евклидова пространства E^{n+m}, состоящим из точек $z=(z_1,\ z_2,\dots,z_{n+m})$ таких, что точка $(z_1,\ z_2,\dots,z_n)$ принадлежит Ω_n, а точка $(z_{n+1},\ z_{n+2},\dots,z_{n+m})$ принадлежит D_m (часто пишут так: $z=(x,\ y)$).

Тот факт, что точка z принадлежит $\Omega_n\times D_m$, обычно записывают следующим образом: $z=(x,\ y)\in\Omega_n\times D_m$.

[4]) См., например, § 5 гл. 9 книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа. Ч. 2» (см. сноску на с. 299).

Замыкание области Ω_n будем обозначать символом $\overline{\Omega}_n$, а замыкание D_m — символом $\overline{D}_m$. Легко видеть, что замыкание $\Omega_n\times D_m$ совпадает с $\overline{\Omega}_n\times\overline{D}_m$.

Пусть функция $f(x,\ y)$ определена в $\Omega_n\times D_m$, причем для любого $y_0\in D_m$ функция $f(x,\ y)$ интегрируема по x в области Ω_n. Тогда функцию

$$I(y)=\int_{\Omega_n}f(x,\ y)\,dx, \qquad (7.9)$$

определенную в D_m, называют интегралом, зависящим от параметра $y=(y_1,\ y_2,\dots,y_m)$, т. е. фактически от m числовых параметров.

Точно так же, как и в § 2, доказываются следующие теоремы.

Теорема 7.15 (о непрерывности интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x,\ y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{\Omega}_n\times\overline{D}_m$, тогда интеграл* (7.9) *является непрерывной функцией параметра y в области D_m.*

Теорема 7.16 (об интегрировании интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x,\ y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{\Omega}_n\times\overline{D}_m$. Тогда функцию* (7.9) *можно интегрировать по параметру под знаком интеграла, т. е. справедливо равенство*

$$\int_{D_m}I(y)\,dy=\int_{\Omega_n}dx\int_{D_m}f(x,\ y)\,dy.$$

Теорема 7.17 (о дифференцируемости интеграла по параметру). *Пусть функция $f(x,\ y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ непрерывны в $\overline{\Omega}_n\times\overline{D}_m$. Тогда интеграл* (7.9) *имеет в области D_m непрерывную частную производную*

$$\frac{\partial I(y)}{\partial y_k},\ \textit{причем}\ \frac{\partial I(y)}{\partial y_k}=\int_{\Omega_n}\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y_k}dx.$$

2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметра. Рассмотрим для простоты случай, когда $\Omega_n=D_m=D$. Пусть функция $f(x,\ y)$ также имеет специальный вид: $f(x,\ y)=F(x,\ y)g(x)$, где $F(x,\ y)$ непрерывна при $x\neq y$ в $\overline{D}\times\overline{D}$, а функция $g(x)$ ограничена в D, $|g(x)|\leqslant M$. Таким образом, рассмотрим интеграл

$$V(y)=\int_D F(x,\ y)g(x)\,dx, \qquad (7.10)$$

где подынтегральная функция может иметь особенность лишь при $x=y$. Таким образом, особенность подынтегральной функции зависит от параметра.

Введем определение равномерной сходимости интеграла (7.10) в точке. Обозначим через $B(y_0,\ \delta)$ m-мерный шар радиуса δ с центром в точке y_0.

Определение. *Интеграл* (7.10) *назовем сходящимся равномерно по параметру y в точке $y_0\in D$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что $B(y_0,\ \delta)\subset D$, и для любой кубируемой области $G\subset B(y_0,\ \delta)$ и всех $y\in B(y_0,\ \delta)$ выполняется неравенство*

$$\left|\int_G F(x,\ y)g(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема 7.18. *Если интеграл* (7.10) *сходится равномерно по y в точке $y_0\in D$, то он непрерывен в точке y_0.*

Доказательство. Требуется доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $|y-y_0|=\rho(y,\ y_0)<\delta$ выполнено неравенство $|V(y)-V(y_0)|<\varepsilon$. Из равномерной сходимости интеграла в точке следует, что существует $\delta_1>0$ такое, что $B(y_0,\ \delta_1)\subset D$ и при $y\in B(y_0,\ \delta_1)$

$$\left|\int_{B(y_0,\delta_1)}F(x,\ y)g(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть

$$V_1(y)=\int_{B(y_0,\delta_1)}F(x,\ y)g(x)\,dx;$$

$$V_2(y)=\int_{B'(y_0,\delta_1)}F(x,\ y)g(x)\,dx,$$

где $B'(y_0,\ \delta_1)=D\setminus B(y_0,\ \delta_1)$ — дополнение шара $B(y_0,\ \delta_1)$ до области D.

Заметим, что при $x\in B'(y_0,\ \delta_1)$, $y\in B(y_0,\ \delta_1/2)$ функция $F(x,\ y)$ будет равномерно непрерывной по совокупности аргументов. Поэтому найдется положительное число $\delta<\delta_1/2$ такое, что при $\rho(y,\ y_0)<\delta$ будет выполнено неравенство

$$|F(x,\ y_0)-F(x,\ y)|<\frac{\varepsilon}{3M|D|},$$

где M — константа, ограничивающая функцию $g(x)$ *в* D, $|D|$ — объем области D. При $\rho(y,\ y_0)<\delta$

$$|V_2(y)-V_2(y_0)|\leqslant M\int_{B'(y_0,\delta_1)}|F(x,\ y_0)-F(x,\ y)|\,dx<\frac{1}{3}\varepsilon.$$

Поэтому

$$|V(y)-V(y_0)|\leqslant|V_1(y)|+|V_1(y_0)|+|V_2(y)-V_2(y_0)|<\varepsilon,$$

так как $|V_1(y)|<\varepsilon/3$, $|V_1(y_0)|<\varepsilon/3$. Теорема доказана.

Укажем достаточное условие равномерной по параметру сходимости интеграла (7.10) в каждой точке $y_0\in D\subset E^m$.

Теорема 7.19. *Пусть функция $F(x,\ y)$ непрерывна в $\overline{D}\times\overline{D}$ при $x\neq y$, а $g(x)$ равномерно ограничена в D. Предположим, что существуют постоянные λ, $0<\lambda<m$, и $c>0$ такие, что для всех $x\in D$, $y\in D$ справедливо неравенство*

$$|F(x,\ y)|\leqslant C|x-y|^{-\lambda}.$$

Тогда интеграл (7.10) *сходится равномерно по y в каждой точке $y_0\in D$.*

Доказательство. Покажем, что для любой точки y_0 области D и любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любой кубируемой области $G\subset B(y_0,\ \delta)$ и всех $y\in B(y_0,\ \delta)$ выполнено неравенство

$$\left|\int_G F(x,\ y)g(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Учитывая оценку для $F(x,\ y)$ и ограниченность $g(x)$, получим

$$\left|\int_G F(x,\ y)g(x)\,dx\right|\leqslant M_1\int_G|x-y|^{-\lambda}dx.$$

Фиксируем точку $y\in B(y_0,\ \delta)$. Из условия $G\subset B(y_0,\ \delta)$ вытекает условие $G\subset B(y,\ 2\delta)$. Поэтому

$$\left|\int_G F(x,\ y)g(x)\,dx\right|\leqslant M_1\int_{B(y,2\delta)}|x-y|^{-\lambda}dx.$$

Интеграл в правой части можно вычислить в m-мерных сферических координатах; тогда

$$\left|\int_G F(x,\ y)g(x)\,dx\right|\leqslant M_2\int_0^{2\delta}r^{m-1-\lambda}dr=\frac{M_2\cdot 2^{m-\lambda}}{m-\lambda}\delta^{m-\lambda}=M_3\delta^{m-\lambda}.$$

Ясно, что при достаточно малом δ величина $\left|\int_G F(x,\ y)g(x)\,dx\right|$ может быть сделана меньше ε. Теорема доказана.

Пример. Применим полученные результаты к теории так называемого ньютонова потенциала. Пусть в некоторую точку $A_0(x,\ y,\ z)$ помещена масса m_0. На массу m, помещенную в точку $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, по закону всемирного тяготения действует сила

$$\mathbf{F}=-\gamma\frac{mm_0}{R^2}\mathbf{r},$$

где $R=\rho(A_0,\ A_1)$, γ — гравитационная постоянная, $\mathbf{r}=\frac{\mathbf{R}}{R}$ —

единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{A_0A_1}$. Пусть $\gamma=1$, $m=1$; тогда

$$\mathbf{F}=-\frac{m_0}{R}\mathbf{r},$$

или покомпонентно

$$X=-\frac{m_0}{R^3}(x_1-x),\quad Y=-\frac{m_0}{R^3}(y_1-y),\quad Z=-\frac{m_0}{R^3}(z_1-z).$$

Очевидно, что потенциал силы тяготения, определяемый как скалярная функция u такая, что $\mathbf{F}=\operatorname{grad}u$, равен

$$u=\frac{m_0}{R}.$$

Если же масса сосредоточена не в точке $A_0(x,\ y,\ z)$, а распределена по области D с плотностью $\mu(x,\ y,\ z)$, то для потенциала и для компонент силы получим

$$U(x_1,\ y_1,\ z_1)=\iiint_D\frac{\mu(x,\ y,\ z)}{R}dx\,dy\,dz;$$

$$X=-\iiint_D\frac{\mu(x,\ y,\ z)}{R^3}(x_1-x)\,dx\,dy\,dz,$$

$$Y=-\iiint_D\frac{\mu(x,\ y,\ z)}{R^3}(y_1-y)\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z=-\iiint_D\frac{\mu(x,\ y,\ z)}{R^3}(z_1-z)\,dx\,dy\,dz.$$

Интегралы для X, Y, Z представляют собой частные производные потенциала u. Подынтегральные выражения во всех интегралах можно оценить через $CR^{-\lambda}$, где $\lambda=1$ для интеграла, представляющего потенциал u, и $\lambda=2$ для интегралов, представляющих компоненты силы. Так как $\lambda<3$, то в силу теоремы 7.19 все интегралы сходятся равномерно по параметрам в любой точке $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Следовательно, по теореме 7.18 они представляют собой непрерывные функции точки $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$.

Глава 8

РЯДЫ ФУРЬЕ

Изучаемая в настоящей главе проблема разложения функции в ряд Фурье является обобщением и развитием идеи разложения вектора по базису.

Из линейной алгебры известно, что если в линейном пространстве *конечной* размерности выбрать некоторый базис, то любой вектор этого пространства может быть разложен по базису, т. е. представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Гораздо более сложными являются вопросы о выборе базиса и о разложении по базису для случая *бесконечномерного* пространства. В настоящей главе эти вопросы изучаются для случая *евклидовых* бесконечномерных пространств и для базисов специального типа (*ортонормированных* базисов).

Особенно подробно изучается базис, образованный в пространстве всех кусочно непрерывных на некотором сегменте функций так называемой тригонометрической системой.

§ 1. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЩИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Ортонормированные системы. Будем рассматривать произвольное евклидово пространство бесконечной размерности. Напомним, что линейное пространство $\mathbf{R}$ называется евклидовым, если выполнены два условия:

1) известно правило, посредством которого любым двум элементам f и g пространства $\mathbf{R}$ ставится в соответствие число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом $(f,\ g)$;

2) указанное правило удовлетворяет следующим четырем аксиомам:

1°. $(f,\ g)=(g,\ f)$ (переместительное свойство);
2°. $(f+g,\ h)=(f,\ h)+(g,\ h)$ (распределительное свойство);
3°. $(\lambda f,\ g)=\lambda(f,\ g)$ для любого вещественного λ;
4°. $(f,\ f)>0$, если f — ненулевой элемент;
$(f,\ f)=0$, если f — нулевой элемент.

Напомним, далее, что линейное (и, в частности, евклидово) пространство называется бесконечномерным, если в этом пространстве найдется любое наперед взятое число линейно независимых элементов.

Приведем классический пример евклидова пространства бесконечной размерности.

Напомним, что функция $f(x)$ называется *кусочно непрерывной* на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна всюду на этом сегменте, за исключением конечного числа точек, в каждой из которых она имеет разрыв первого рода [1].

Для линейного пространства всех кусочно непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций естественно ввести скалярное произведение любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$, определив его равенством

$$(f, g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{8.1}$$

Легко проверяется, что при таком определении справедливы первые три аксиомы скалярного произведения. Однако для того, чтобы оказалась справедливой и четвертая аксиома, приходится принять дополнительную договоренность о том, чтобы значение кусочно непрерывной функции $f(x)$ в каждой ее точке разрыва x_i равнялось полусумме правого и левого ее пределов в этой точке:

$$f(x_i)=\frac{f(x_i+0)+f(x_i-0)}{2}. \tag{8.2}$$

В самом деле, во-первых, всегда $(f, f)=\int_a^b f^2(x)\,dx\geqslant 0$. Далее, заметим, что так как $f(x)$ кусочно непрерывна на $[a, b]$, то весь сегмент $[a, b]$ распадается на конечное число сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна при условии, что в качестве значений $f(x)$ на концах соответствующего сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ берутся $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$. Из равенства $\int_a^b f^2(x)\,dx=0$ вытекает, что для каждого сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ справедливо равенство $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx=0$.

Из этого равенства и из непрерывности $f(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ вытекает, что на этом сегменте $f(x)\equiv 0$. В частности, $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$ равны нулю. Так как эти рассуждения справедливы для любого сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, т. е. для всех $i=1, 2, \ldots, n$, то правый и левый пределы в любой точке x_i равны нулю, а отсюда в силу соотношения (8.2) и само значение $f(x_i)$ в любой точке x_i равно. Итак, функция $f(x)$ равна нулю во всех точках сегмента $[a, b]$, т. е. является нулевым элементом линейного пространства всех кусочно непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций.

[1] Т. е. в каждой точке разрыва x_0 у функции $f(x)$ существует конечный левый и конечный правый пределы.

Тем самым мы доказали, что *пространство всех кусочно непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций с условием (8.2) в каждой точке разрыва и со скалярным произведением, определяемым соотношением (8.1), является евклидовым пространством.*

Это евклидово пространство мы в дальнейшем будем обозначать символом $\mathbf{R}_0$.

Напомним теперь два общих свойства любого евклидова пространства, которыми, естественно, будет обладать и пространство $\mathbf{R}_0$:

1) *во всяком евклидовом пространстве для любых двух элементов f и g справедливо неравенство*

$$(f, g)^2\leqslant(f, f)(g, g), \tag{8.3}$$

называемое неравенством Коши—Буняковского [2];

2) *во всяком евклидовом пространстве для любого элемента f этого пространства можно ввести понятие нормы этого элемента, определив ее как число, обозначаемое символом $\|f\|$ и определяемое равенством*

$$\|f\|=\sqrt{(f, f)}, \tag{8.4}$$

так что будут справедливы следующие три свойства:

1°. $\|f\|\geqslant 0$, *причем* $\|f\|=0$ *лишь тогда, когда f — нулевой элемент;*

2°. $\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$ *для любого элемента f и любого вещественного λ;*

3°. $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$ (8.5)

для любых двух элементов f и g (это неравенство называется неравенством треугольника).

В самом деле, справедливость свойства 1° сразу же вытекает из (8.4) и из аксиомы 4° скалярного произведения.

Для обоснования свойства 2° заметим, что в силу (8.4) и аксиом скалярного произведения

$$\|\lambda f\|=\sqrt{(\lambda f, \lambda f)}=\sqrt{\lambda(f, \lambda f)}=\sqrt{\lambda(\lambda f, f)}=\sqrt{\lambda^2(f, f)}=|\lambda|\cdot\|f\|.$$

Наконец, справедливость свойства 3° вытекает из (8.4), из аксиом скалярного произведения и из неравенства Коши—Буняковского (8.3). Действительно,

[2] Для доказательства неравенства (8.3) заметим, что для любого вещественного λ в силу аксиомы 4° скалярного произведения справедливо неравенство $(\lambda f-g, \lambda f-g)\geqslant 0$, которое в силу аксиом 1°—4° эквивалентно неравенству $\lambda^2(f, f)-2\lambda(f, g)+(g, g)\geqslant 0$. Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена, стоящего в левой части последнего неравенства, является неположительность его дискриминанта, т. е. неравенство $(f, g)^2-(f, f)(g, g)\leqslant 0$, которое эквивалентно неравенству (8.3).

$$\|f+g\|=\sqrt{(f+g, f+g)}=\sqrt{(f, f)+2(f, g)+(g, g)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(f, f)+2\sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)}+(g, g)}=\sqrt{\left[\sqrt{(f, f)}+\sqrt{(g, g)}\right]^2}=$$
$$=\sqrt{(f, f)}+\sqrt{(g, g)}=\|f\|+\|g\|.$$

В частности, во введенном выше евклидовом пространстве $\mathbf{R}_0$ всех кусочно непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций норма (8.4) любого элемента f определяется равенством

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{8.6}$$

а неравенства Коши—Буняковского (8.3) и треугольника (8.5) принимают вид

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx; \tag{8.7}$$

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx}\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{8.8}$$

Введем теперь в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}$ понятия ортогональных элементов и ортонормированной системы элементов.

Определение 1. *Два элемента f и g евклидова пространства называются ортогональными, если скалярное произведение (f, g) этих элементов равно нулю.*

Рассмотрим в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}$ некоторую последовательность элементов.

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots. \tag{8.9}$$

Определение 2. *Последовательность (8.9) называется ортонормированной системой, если входящие в эту последовательность элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице.*

Классическим примером ортонормированной системы в пространстве $\mathbf{R}_0$ всех кусочно непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций является так называемая *тригонометрическая система*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{8.10}$$

Читатель легко проверит, что все функции (8.10) попарно ортогональны (в смысле скалярного произведения (8.1), взятого

при $a=-\pi$, $b=\pi$) и что норма каждой из этих функций (определяемая равенством (8.6) при $a=-\pi$, $b=\pi$) равна единице.

В математике и ее приложениях часто встречаются различные ортонормированные (на соответствующих множествах) системы функций. Приведем некоторые примеры таких систем.

Примеры. 1°. Многочлены, определяемые равенством

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}\quad(n=0, 1, 2, \ldots), \tag{8.11}$$

принято называть *полиномами Лежандра*.

Нетрудно убедиться, что образованные с помощью многочленов (8.11) функции

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)\quad(n=0, 1, 2, \ldots)$$

образуют ортонормированную (на сегменте $[-1, +1]$) систему функций.

2°. Многочлены, определяемые равенствами $T_0(x)=1$, $T_n(x)=2^{1-n}\cos[n(\arccos x)]$ при $n=1, 2, \ldots$, называются *полиномами Чебышева*. Среди всех многочленов n-й степени с коэффициентом при x^n, равным единице, полином Чебышева $T_n(x)$ имеет наименьший на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$ максимум модуля. Можно доказать, что полученные с помощью полиномов Чебышева функции

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}},\quad \psi_n(x)=\frac{2^{n-0,5}T_n(x)}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}}\quad(n=1, 2, \ldots)$$

образуют ортонормированную на сегменте $[-1, +1]$ систему.

3°. В теории вероятностей часто применяется *система Радемахера* [3]

$$\psi_n(x)=\varphi(2^n x)\quad(n=0, 1, 2, \ldots),$$

где $\varphi(t)=\operatorname{sgn}(\sin 2\pi t)$.

Легко проверяется, что эта система ортонормирована на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$.

4°. В ряде исследований по теории функций находит применение *система Хаара* [4], являющаяся ортонормированной на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$. Элементы этой системы определяются для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ и для всех k, принимающих значения $1, 2, 4, \ldots, 2^n$. Они имеют вид

[3] Радемахер — немецкий математик (род. в 1892 г.).

[4] Хаар — немецкий математик (1885—1933).

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n} & \text{при } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}\leqslant x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}},\\ -\sqrt{2^n} & \text{при } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<x\leqslant\dfrac{2k}{2^{n+1}},\\ 0 & \text{в остальных точках } [0, 1].\end{cases}$$

Каждая функция Хаара представляет собой ступеньку такого же вида, как функция $\sqrt{2^n}\operatorname{sgn}x$ на сегменте $\left[-2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)}\right]$. Для каждого фиксированного номера n при увеличении значения k эта ступенька сдвигается вправо. Всюду вне соответствующей ступеньки каждая функция Хаара тождественно равна нулю.

2. Понятие об общем ряде Фурье. Пусть в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}$ задана произвольная ортонормированная система элементов $\{\psi_k\}$. Рассмотрим какой угодно элемент f пространства $\mathbf{R}$.

Определение 1. *Назовем рядом Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$ ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\psi_k, \tag{8.12}$$

в котором через f_k обозначены постоянные числа, называемые коэффициентами Фурье элемента f и определяемые равенствами

$$f_k=(f, \psi_k)\qquad k=1, 2, \ldots$$

Естественно назвать конечную сумму

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k \tag{8.13}$$

n-й частичной суммой ряда Фурье (8.12).

Рассмотрим наряду с n-й частичной суммой (8.13) произвольную линейную комбинацию первых n элементов ортонормированной системы $\{\psi_k\}$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k \tag{8.14}$$

с какими угодно постоянными числами $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Выясним, что отличает n-ю частичную сумму ряда Фурье (8.13) от всех других сумм (8.14).

Договоримся называть величину $\|f-g\|$ *отклонением* f от g (по норме данного евклидова пространства).

Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 8.1. *Среди всех сумм вида (8.14) наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма (8.13) ряда Фурье элемента f.*

Доказательство. Учитывая ортонормированность системы $\{\psi_k\}$ и пользуясь аксиомами скалярного произведения, можем записать:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k-f\right\|=\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k-f, \sum_{l=1}^{n} C_l\psi_l-f\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} C_k^2(\psi_k, \psi_k)-2\sum_{k=1}^{n} C_k(f, \psi_k)+(f, f)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} C_k^2-2\sum_{k=1}^{n} C_k f_k+\|f\|^2=\sum_{k=1}^{n}(C_k-f_k)^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2+\|f\|^2.$$

Итак,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k-f\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}(C_k-f_k)^2+\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{8.15}$$

В левой части (8.15) стоит квадрат отклонения суммы (8.14) от элемента f (по норме данного евклидова пространства). Из вида правой части (8.15), следует, что указанный квадрат отклонения является наименьшим при $C_k=f_k$ (так как при этом в правой части (8.15) первая сумма обращается в нуль, а остальные слагаемые от C_k не зависят). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для произвольного элемента f данного евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ при произвольном выборе постоянных C_k для любого номера n справедливо неравенство*

$$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2\leqslant\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k-f\right\|^2. \tag{8.16}$$

Неравенство (8.16) является непосредственным следствием тождества (8.15).

Следствие 2. *Для произвольного элемента f данного евклидова пространства, любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и любого номера n справедливо равенство*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k-f\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{8.17}$$

часто называемое тождеством Бесселя [5].

[5] Фридрих Вильгельм Бессель — немецкий астроном и математик (1784—1846).

Для доказательства равенства (8.17) достаточно положить в (8.15) $C_k=f_k$.

Теорема 8.2. *Для любого элемента f данного евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ справедливо следующее неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\leqslant\|f\|^2, \tag{8.18}$$

называемое неравенством Бесселя.

Доказательство. Из неотрицательности левой части (8.17) следует, что для любого номера n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2\leqslant\|f\|^2. \tag{8.19}$$

Но это означает, что ряд из неотрицательных членов, стоящий в левой части (8.18), обладает ограниченной последовательностью частичных сумм и поэтому сходится. Переходя в неравенстве (8.19) к пределу при $n\to\infty$ (см. теорему 3.13 ч. 1), получим неравенство (8.18). Теорема доказана.

В качестве примера обратимся к пространству $\mathbf{R}_0$ всех кусочно непрерывных на сегменте $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ функций и в этом пространстве к ряду Фурье по тригонометрической системе (8.10) (этот ряд принято называть *тригонометрическим рядом Фурье*). Для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ указанный ряд Фурье имеет вид

$$\bar{f}_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar{f}_k\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+\bar{\bar{f}}_k\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right), \tag{8.20}$$

где коэффициенты Фурье $\bar{f}_k$ и $\bar{\bar{f}}_k$ определяются формулами

$$\bar{f}_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx;$$

$$\bar{f}_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx;\quad \bar{\bar{f}}_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\quad(k=1, 2, \ldots).$$

Неравенство Бесселя, справедливое для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, имеет вид

$$\bar{f}_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{f}_k^2+\bar{\bar{f}}_k^2)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8.21}$$

Отклонение $f(x)$ от $g(x)$ по норме в этом случае равно так называемому *среднему квадратичному отклонению*

$$\|f-g\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,dx}. \tag{8.22}$$

Отметим, что в теории тригонометрических рядов Фурье принята несколько иная форма записи как самого ряда Фурье (8.20), так и неравенства Бесселя (8.21), а именно: тригонометрический ряд Фурье (8.20) обычно записывают в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{8.20'}$$

где

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx;\\ a_k=\dfrac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx;\\ b_k=\dfrac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\\ (k=1, 2, \ldots).\end{cases} \tag{8.23}$$

При такой форме записи неравенство Бесселя (8.21) принимает вид

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8.21'}$$

Замечание. Из неравенства Бесселя (8.21′) вытекает, что для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ величины a_k и b_k (называемые *тригонометрическими коэффициентами Фурье* функции $f(x)$) стремятся к нулю при $n\to\infty$ (в силу необходимого условия сходимости ряда в левой части (8.21′)).

§ 2. ЗАМКНУТЫЕ И ПОЛНЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать произвольную ортонормированную систему $\{\psi_k\}$ в каком угодно бесконечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}$.

Определение 1. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если для любого элемента f данного евклидова пространства $\mathbf{R}$ и для любого положительного числа ε найдется такая линейная комбинация (8.14) конечного числа элементов $\{\psi_k\}$, отклонение которой от f (по норме пространства $\mathbf{R}$) меньше ε.*

Иными словами, система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если любой элемент f данного евклидова пространства $\mathbf{R}$ можно приблизить по норме этого пространства с любой степенью точности линейными комбинациями конечного числа элементов $\{\psi_k\}$.

Замечание 1. Мы опускаем вопрос о том, во всяком ли евклидовом пространстве существуют замкнутые ортонормированные системы. Отметим, что в части 3 будет изучен важный подкласс евклидовых пространств — так называемые *гильбертовы пространства* — и будет установлено существование в каждом таком пространстве замкнутых ортонормированных систем.

Теорема 8.3. *Если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, то для любого элемента f рассматриваемого евклидова пространства неравенство Бесселя (8.18) переходит в точное равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2=\|f\|^2, \tag{8.24}$$

называемое равенством Парсеваля [6].

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент f рассматриваемого евклидова пространства и произвольное положительное число ε. Так как система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, то найдется такой номер n и такие числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что квадрат нормы, стоящий в правой части (8.16), будет меньше ε. В силу (8.16) это означает, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер n, для которого

$$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2<\varepsilon. \tag{8.25}$$

Для всех номеров, превосходящих указанный номер n, неравенство (8.25) будет тем более справедливо, так как при возрастании n сумма, стоящая в левой части (8.25), может только возрасти.

Итак, мы доказали, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер n, начиная с которого справедливо неравенство (8.25).

В соединении с неравенством (8.19) это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ сходится к сумме $\|f\|^2$. Теорема доказана.

[6] М. А. Парсеваль — французский математик (1755—1836).

Теорема 8.4. *Если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, то, каков бы ни был элемент f, ряд Фурье этого элемента сходится к нему по норме рассматриваемого евклидова пространства, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k-f\right\|=0. \tag{8.26}$$

Доказательство. Утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из равенства (8.17) и из предыдущей теоремы.

Замечание 2. В пространстве всех кусочно непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций сходимость по норме (8.26) переходит в сходимость на этом сегменте в среднем (см. п. 3 § 4 гл. 2). Таким образом, если будет доказана замкнутость тригонометрической системы (8.10), то теорема 8.4 будет утверждать, что для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к ней на указанном сегменте в среднем.

Определение 2. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется* ***полной****, если, кроме нулевого элемента, не существует никакого другого элемента f данного евклидова пространства, который был бы ортогонален ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$.*

Иными словами, система $\{\psi_k\}$ называется полной, если всякий элемент f, ортогональный ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$, является нулевым элементом.

Теорема 8.5. *Всякая замкнутая ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является полной.*

Доказательство. Пусть система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, и пусть f — любой элемент данного евклидова пространства, ортогональный ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$. Тогда все коэффициенты Фурье f_k элемента f по системе $\{\psi_k\}$ равны нулю, и, стало быть, в силу равенства Парсеваля (8.24) и $\|f\|=0$. Последнее равенство (в силу свойства 1° нормы) означает, что f — нулевой элемент. Теорема доказана.

Замечание 3. Мы доказали, что в произвольном евклидовом пространстве из замкнутости ортонормированной системы вытекает ее полнота. Отметим без доказательства, что в произвольном евклидовом пространстве из полноты ортонормированной системы, вообще говоря, не вытекает замкнутость этой системы. В ч. 3 будет доказано, что для гильбертовых пространств полнота ортонормированной системы эквивалентна ее замкнутости.

Теорема 8.6. *Для всякой полной (и тем более для всякой замкнутой) ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ два различных элемента f и g рассматриваемого евклидова пространства не могут иметь одинаковые ряды Фурье.*

Доказательство. Если бы все коэффициенты Фурье элементов f и g совпадали, то все коэффициенты Фурье разности $(f-g)$ были бы равны нулю, т. е. разность $(f-g)$ была бы ортогональна ко всем элементам ψ_k полной системы $\{\psi_k\}$. Но это означало бы, что разность $(f-g)$ является нулевым элементом, т. е. означало бы совпадение элементов f и g. Теорема доказана.

На этом мы заканчиваем рассмотрение общего ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе в любом евклидовом пространстве $\mathbf{R}$.

Наша очередная цель — детальное изучение ряда Фурье по тригонометрической системе (8.10).

§ 3. ЗАМКНУТОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

1. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами. В этом параграфе будет установлена замкнутость (а следовательно, и полнота) тригонометрической системы (8.10) в пространстве всех кусочно непрерывных на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций. Но прежде чем приступить к доказательству замкнутости тригонометрической системы, установим важную теорему о равномерном приближении непрерывной функции так называемыми тригонометрическими многочленами.

Будем называть тригонометрическим многочленом произвольную линейную комбинацию любого конечного числа элементов тригонометрической системы (8.10), т. е. выражение вида

$$T(x)=\overline{C}_0+\sum_{k=1}^{n}(\overline{C}_k\cos kx+\overline{\overline{C}}_k\sin kx),$$

где n — любой номер, а $\overline{C}_0$, $\overline{C}_k$ и $\overline{\overline{C}}_k$ $(k=1, 2, \dots, n)$ — произвольные постоянные вещественные числа.

Отметим два совершенно элементарных утверждения:

1°. *Если $P(x)$ — какой угодно алгебраический многочлен произвольной степени n, то $P(\cos x)$ и $P(\sin x)$ — тригонометрические многочлены.*

2°. *Если $T(x)$ — тригонометрический многочлен, то каждое из выражений $[T(x)\sin x]$ и $[T(x)\sin^2 x]$ также представляет собой тригонометрический многочлен.*

Оба утверждения вытекают из того, что произведение двух (а поэтому и любого конечного числа) тригонометрических функций [7] от аргумента x приводится к линейной комбинации конечного числа тригонометрических функций от аргументов типа kx (убедитесь в этом сами).

[7] Под тригонометрическими функциями в данном случае понимаются косинус или синус.

В теории тригонометрических рядов Фурье важную роль играет понятие периодической функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется периодической функцией с периодом T, если:* 1) *$f(x)$ определена для всех вещественных x;* 2) *для любого вещественного x справедливо равенство*

$$f(x+T)=f(x).$$

Это равенство обычно называют условием периодичности. К рассмотрению периодических функций приводит изучение различных колебательных процессов.

Заметим, что все элементы тригонометрической системы (8.10) являются периодическими функциями с периодом 2π.

Теорема 8.7 (теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, то эту функцию можно равномерно на указанном сегменте приблизить тригонометрическими многочленами, т. е. для этой функции $f(x)$ и для любого положительного числа ε найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что сразу для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ справедливо неравенство*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon. \tag{8.27}$$

Доказательство. Для удобства разобьем доказательство на два этапа.

1) Сначала дополнительно предположим, что функция $f(x)$ является четной, т. е. для любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условию $f(-x)=f(x)$.

В силу теоремы о непрерывности сложной функции $y=f(x)$, где $x=\arccos t$ (см. § 1 гл. 4 ч. 1) функция $F(t)=f(\arccos t)$ является непрерывной функцией аргумента t на сегменте $-1\leqslant t\leqslant +1$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса для алгебраических многочленов (см. теорему 2.18) для любого $\varepsilon>0$ найдется алгебраический многочлен $P(t)$ такой, что $|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon$ сразу для всех t из сегмента $-1\leqslant t\leqslant 1$.

Положив $t=\cos x$, мы получим

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon \tag{8.28}$$

сразу для всех x из сегмента $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Так как обе функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ являются четными, то неравенство (8.28) справедливо и для всех x из сегмента $-\pi\leqslant x\leqslant 0$. Таким образом, неравенство (8.28) справедливо для всех x из сегмента $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, и поскольку (в силу указанного выше утверждения 1°) $P(\cos x)$ является тригонометрическим многочленом, то для четной функции $f(x)$ теорема доказана.

Заметим теперь, что функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям доказываемой теоремы, можно периодически с периодом 2π продолжить на всю бесконечную прямую $-\infty<x<+\infty$, так что

продолженная функция будет непрерывна в каждой точке x бесконечной прямой. Кроме того, если функция $f(x)$ продолжена таким образом, то (поскольку $P(\cos x)$ также является периодической функцией периода 2π) *для четной функции $f(x)$ неравенство* (8.28) *справедливо всюду на прямой $-\infty<x<+\infty$.*

2) Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям доказываемой теоремы. Эту функцию мы периодически с периодом 2π продолжим на всю прямую и составим с помощью этой функции следующие четные функции:

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}; \tag{8.29}$$

$$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x. \tag{8.30}$$

По доказанному в 1) для любого $\varepsilon>0$ найдутся тригонометрические многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$ такие, что всюду на числовой прямой

$$|f_1(x)-T_1(x)|<\varepsilon/4;\quad |f_2(x)-T_2(x)|<\varepsilon/4,$$

и поэтому

$$|f_1(x)\sin^2 x-T_1(x)\sin^2(x)|<\varepsilon/4;$$

$$|f_2(x)\sin x-T_2(x)\sin x|<\varepsilon/4.$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что модуль суммы двух величин не превосходит сумму их модулей, а также принимая во внимание равенства (8.29) и (8.30), получим, что всюду на числовой прямой справедливо неравенство

$$|f(x)\sin^2 x-T_3(x)|<\varepsilon/2, \tag{8.31}$$

в котором через $T_3(x)$ обозначен тригонометрический многочлен, равный $T_3(x)=T_1(x)\sin^2 x+T_2(x)\sin x$.

В проведенных нами рассуждениях вместо функции $f(x)$ можно взять функцию $f(x+\pi/2)$ [8]. В полной аналогии с (8.31) получим, что для функции $f(x+\pi/2)$ найдется тригонометрический многочлен $T_4(x)$ такой, что всюду на числовой прямой

$$|f(x+\pi/2)\sin^2 x-T_4(x)|<\varepsilon/2. \tag{8.32}$$

Заменяя в (8.32) x на $x-\pi/2$ и обозначая через $T_5(x)$ тригонометрический многочлен вида $T_5(x)=T_4(x-\pi/2)$, получим, что всюду на числовой прямой справедливо неравенство

$$|f(x)\cos^2 x-T_5(x)|<\varepsilon/2. \tag{8.33}$$

Наконец, складывая неравенства (8.31) и (8.33) и обозначая через $T(x)$ тригонометрический многочлен вида $T(x)=T_4(x)+T_5(x)$,

[8] Так как эта функция удовлетворяет тем же условиям, что и полученная после продолжения функция $f(x)$.

получим, что всюду на числовой прямой справедливо неравенство (8.27). Теорема доказана.

Замечание. Каждое из условий 1) непрерывности $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ и 2) равенства значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ является *необходимым* условием для равномерного на сегменте $[-\pi, \pi]$ приближения функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами.

Иными словами, теорему Вейерштрасса можно переформулировать следующим образом:

Теорема 8.7*. *Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ приблизить тригонометрическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $f(-\pi)=f(\pi)$.*

Достаточность составляет содержание теоремы 8.7.

Остановимся на доказательстве *необходимости*. Пусть существует последовательность тригонометрических многочленов $\{T_n(x)\}$, равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходящаяся к функции $f(x)$. Так как каждая функция $T_n(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, то по следствию 2 из теоремы 2.7 и функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется многочлен $T_n(x)$ такой, что $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon/2$ для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$. Следовательно,

$$|f(-\pi)-T_n(-\pi)|<\varepsilon/2,\quad |f(\pi)-T_n(\pi)|<\varepsilon/2.$$

Из последних двух неравенств и из вытекающего из условия периодичности (с периодом 2π) равенства $T_n(-\pi)=T_n(\pi)$ заключаем, что $|f(-\pi)-f(\pi)|<\varepsilon$, откуда $f(-\pi)=f(\pi)$ (в силу произвольности $\varepsilon>0$).

2. Доказательство замкнутости тригонометрической системы. Опираясь на теорему Вейерштрасса, докажем следующую основную теорему.

Теорема 8.8. *Тригонометрическая система* (8.10) *является замкнутой* [9], *т. е. для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и любого положительного числа ε найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что*

$$\|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx}<\varepsilon. \tag{8.34}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется непрерывная на этом сегменте функция

[9] А следовательно (в силу теоремы 8.5), и полной.

$F(x)$, удовлетворяющая условию $F(-\pi)=F(\pi)$ и такая, что

$$\|f(x)-F(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2\,dx}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.35}$$

В самом деле, достаточно взять функцию $F(x)$ совпадающей с $f(x)$ всюду, кроме достаточно малых окрестностей точек разрыва функции $f(x)$ и точки $x=\pi$, а в указанных окрестностях взять $F(x)$ линейной функцией так, чтобы $F(x)$ являлась непрерывной на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $F(-\pi)=F(\pi)$.

Так как кусочно непрерывная функция и срезающая ее линейная функция являются ограниченными, то, выбирая указанные окрестности точек разрыва $f(x)$ и точки $x=\pi$ достаточно малыми, мы обеспечим выполнение неравенства (8.35).

По теореме Вейерштрасса 8.7 для функции $F(x)$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|F(x)-T(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}. \tag{8.36}$$

Из (8.36) заключаем, что

$$\|F(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[F(x)-T(x)]^2dx}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.37}$$

Из (8.35) и (8.37) и из неравенства треугольника для норм вытекает неравенство (8.34). Теорема доказана.

Замечание 1. Из теорем 8.8 и 8.5 сразу же вытекает, что *тригонометрическая система* (8.10) *является полной.* Отсюда в свою очередь вытекает, что *система* $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$ $(n=1, 2, \dots)$ *является полной на множестве всех функций, кусочно непрерывных на сегменте* $[0, \pi]$ *(или соответственно на сегменте* $[-\pi, 0]$). В самом деле, всякая кусочно непрерывная на сегменте $[0, \pi]$ функция $f(x)$, ортогональная на этом сегменте всем элементам системы $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$, после нечетного продолжения на сегмент $[-\pi, 0]$ оказывается ортогональной на сегменте $[-\pi, \pi]$ всем элементам тригонометрической системы (8.10). В силу полноты системы (8.10) эта функция равна нулю на $[-\pi, \pi]$, а следовательно, и на $[0, \pi]$. Совершенно аналогично доказывается, что система $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ $(n=1, 2, \dots)$ является полной на множестве всех функций, кусочно непрерывных на сегменте $[0, \pi]$ (или соответственно на сегменте $[-\pi, 0]$).

Замечание 2. Можно показать, что среди ортонормированных систем, указанных в § 1, системы, образованные с помощью полиномов Лежандра, полиномов Чебышева и функций Хаара, являются замкнутыми, а система Радемахера замкнутой не является.

3. Следствия замкнутости тригонометрической системы.

Следствие 1. *Для любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, +\pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx \tag{8.38}$$

(вытекает из теоремы 8.3).

Следствие 2. *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции на указанном сегменте в среднем* (вытекает из теоремы 8.4 и замечания 2 к ней).

Следствие 3. *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно почленно интегрировать на этом сегменте* (вытекает из предыдущего следствия и из теоремы 2.11).

Следствие 4. *Если две кусочно непрерывные на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые тригонометрические ряды Фурье, то эти функции совпадают всюду на этом сегменте* (вытекает из теоремы 8.6).

Следствие 5. *Если тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится равномерно на некотором содержащемся в $[-\pi, \pi]$ сегменте $[a, b]$, то он сходится на сегменте $[a, b]$ именно к функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $g(x)$ — та функция, к которой сходится равномерно на $[a, b]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$. Докажем, что $g(x)\equiv f(x)$ всюду на сегменте $[a, b]$. Так как из равномерной сходимости на сегменте $[a, b]$ вытекает сходимость в среднем на этом сегменте (см. п. 3 § 4 гл. 2), то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к функции $g(x)$ на сегменте $[a, b]$ в среднем. Это означает, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер n_1, начиная с которого n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье $S_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|g(x)-S_n(x)\|=\sqrt{\int_a^b[g(x)-S_n(x)]^2dx}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.39}$$

С другой стороны, в силу следствия 2 последовательность $S_n(x)$ сходится к $f(x)$ в среднем на всем сегменте $[-\pi, \pi]$, а следова-

тельно, и на сегменте $[a, b]$, т. е. для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер n_2, начиная с которого

$$\|S_n(x)-f(x)\|=\sqrt{\int_a^b[S_n(x)-f(x)]^2\,dx}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.40}$$

Из (8.39) и (8.40) и из неравенства треугольника

$$\|g(x)-f(x)\|\leqslant\|g(x)-S_n(x)\|+\|S_n(x)-f(x)\|$$

вытекает, что $\|g(x)-f(x)\|<\varepsilon$. Из этого неравенства и из произвольности $\varepsilon>0$ следует, что $\|g(x)-f(x)\|=0$, а отсюда на основании первого свойства нормы заключаем, что $g(x)-f(x)$ — нулевой элемент пространства кусочно непрерывных на $[a, b]$ функций, т. е. функция, тождественно равная нулю на сегменте $[a, b]$. Следствие 5 доказано.

Замечание 1. Конечно, в следствии 5 сегмент $[a, b]$ может совпадать со всем сегментом $[-\pi, \pi]$, т. е. из равномерной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ следует, что этот ряд сходится на указанном сегменте именно к функции $f(x)$.

Замечание 2. Совершенно аналогичные следствия будут справедливы и для ряда Фурье по любой другой замкнутой ортонормированной системе в пространстве кусочно непрерывных на произвольном сегменте $[a, b]$ функций со скалярным произведением (8.1) и нормой (8.6). Примерами таких систем могут служить указанные в § 1 ортонормированные системы, связанные с полиномами Лежандра и Чебышева, а также система Хаара.

§ 4. ПРОСТЕЙШИЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ И ПОЧЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ФУРЬЕ

1. Вводные замечания. В математической физике и в ряде других разделов математики существенную роль играет вопрос об условиях, при выполнении которых тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) в данной точке x сегмента $[-\pi, \pi]$.

Еще в конце прошлого века было известно, что существуют непрерывные на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции, удовлетворяющие условию $f(-\pi)=f(\pi)$, тригонометрические ряды Фурье которых расходятся в наперед заданной точке сегмента $[-\pi, \pi]$ (или даже расходятся на бесконечном множестве точек сегмента $[-\pi, \pi]$, всюду плотном на этом сегменте) [10].

[10] Первый пример такой функции был построен французским математиком Дю Буа Раймоном в 1876 г.

Таким образом, одна непрерывность функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ без дополнительных условий не обеспечивает не только равномерную сходимость тригонометрического ряда Фурье этой функции, но даже сходимость этого ряда в наперед заданной точке указанного сегмента.

В этом и в следующем параграфах мы выясним, какие требования следует добавить к непрерывности функции $f(x)$ (или ввести взамен непрерывности $f(x)$) для обеспечения сходимости тригонометрического ряда Фурье этой функции в заданной точке, а также для обеспечения равномерной сходимости этого ряда на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ или на какой-либо его части.

При изучении сходимости тригонометрического ряда Фурье возникает и другой вопрос: должен ли тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной (или даже строго непрерывной) на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходиться хотя бы в одной точке этого сегмента?

Положительный ответ на этот вопрос был получен только в 1966 г.

Этот ответ является следствием фундаментальной теоремы, доказанной в 1966 г. Л. Карлесоном [11] и решившей знаменитую проблему Н. Н. Лузина [12], поставленную еще в 1914 г.: *тригонометрический ряд Фурье любой функции $f(x)$, для которой существует понимаемый в смысле Лебега интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$, сходится к этой функции почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$* [13].

Из теоремы Карлесона вытекает, что ряд Фурье не только любой кусочно непрерывной, но и любой интегрируемой на сегменте $[-\pi, \pi]$ в собственном смысле Римана функции $f(x)$ сходится к этой функции почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ (так как для такой функции существует интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$ в смысле Римана, а следовательно, и в смысле Лебега).

Заметим, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-\pi, \pi]$ не в смысле Римана, а только в смысле Лебега, то тригонометрический ряд Фурье этой функции может не схо-

[11] Л. Карлесон — современный шведский математик. Полное доказательство теоремы Карлесона можно найти в сборнике переводных статей серии «Математика» (т. 11, № 4, 1967, с. 113—132).

[12] Николай Николаевич Лузин — советский математик, основатель современной московской математической школы по теории функций (1883—1950). Постановку проблемы Лузина, решенной Карлесоном, и других его проблем можно найти в книге Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» (М.; Л.: Гостехиздат, 1951).

[13] Определение интеграла в смысле Лебега и сходимости почти всюду на данном сегменте будет дано в ч. 3.

диться ни в одной точке сегмента $[-\pi, \pi]$. Первый пример интегрируемой на сегменте $[-\pi, \pi]$ в смысле Лебега функции $f(x)$ со всюду расходящимся тригонометрическим рядом Фурье был построен в 1923 г. советским математиком А. Н. Колмогоровым [14].

2. Простейшие условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ кусочно непрерывную производную, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения* [15].

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$, кусочно непрерывную производную порядка $n \geqslant 1$, если функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную в смысле определения* 1.

Теорема 8.9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Более того, ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$:

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{|a_k \cos kx|+|b_k \sin kx|\}, \tag{8.41}$$

сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$, так как отсюда будет вытекать как равномерная на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимость самого тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, так и сходимость этого ряда (в силу следствия 5 из п. 3 § 3) именно к функции $f(x)$.

В силу признака Вейерштрасса (см. теорему 2.3) для доказательства равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости ряда (8.41) достаточно доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

[14] Построение примера А. Н. Колмогорова можно найти на с. 412—421 книги Н. К. Бари «Тригонометрические ряды» (М.: Физматгиз, 1961).

[15] При этом функция $f'(x)$ может оказаться не определенной в конечном числе точек сегмента $[a, b]$. В этих точках мы доопределим ее произвольным образом (например, положим равной полусумме правого и левого предельных значений).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{|a_k|+|b_k|\}. \tag{8.42}$$

Обозначим через α_k и β_k тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, доопределив эту функцию произвольным образом в конечном числе точек, в которых не существует производная функции $f(x)$ [16].

Производя интегрирование по частям и учитывая, что функция $f(x)$ непрерывна на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет соотношениям $f(-\pi)=f(\pi)$, получим следующие соотношения:

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx dx=k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx=kb_k;$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx dx=-k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx=-ka_k,$$

которые связывают между собой тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ [17].

Таким образом,

$$|a_k|+|b_k|=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k},$$

и для доказательства сходимости ряда (8.42) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k_,}\right\}. \tag{8.43}$$

Сходимость ряда (8.43) вытекает из элементарных неравенств [18]

$$\left\{\begin{aligned} \frac{|\alpha_k|}{k} &\leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2+\frac{1}{k^2}\right); \\ \frac{|\beta_k|}{k} &\leqslant \frac{1}{2}\left(\beta_k^2+\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned}\right. \tag{8.44}$$

[16] Например, можно положить функцию $f'(x)$ в указанных точках равной полусумме правого и левого предельных значений.

[17] При интегрировании по частям следует разбить сегмент $[-\pi, \pi]$ на конечное число не имеющих общих внутренних точек частичных сегментов, на каждом из которых производная $f'(x)$ непрерывна, и, беря формулу интегрирования по частям для каждого из этих частичных сегментов, учесть, что при суммировании интегралов по всем частичным сегментам все подстановки обратятся в нуль (вследствие непрерывности $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ и условий $f(-\pi)=f(\pi)$).

[18] Мы исходим из элементарного неравенства $|a|\cdot|b|\leqslant(a^2+b^2)/2$, вытекающего из неотрицательности величины $(|a|-|b|)^2$.

и из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \tag{8.45}$$

первый из которых сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно непрерывной функции $f'(x)$, а второй — в силу интегрального признака Коши—Маклорена (см. п. 4 § 2 гл. 1). Теорема доказана.

Замечание. Если функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 8.9, периодически (с периодом 2π) продолжить на всю бесконечную прямую, то теорема 8.9 будет утверждать сходимость тригонометрического ряда Фурье к так продолженной функции, *равномерную на всей бесконечной прямой.*

3. Простейшие условия почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье. Прежде всего докажем следующую лемму о порядке тригонометрических коэффициентов Фурье.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ и все ее производные до некоторого порядка m (m — целое неотрицательное число) непрерывны на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяют условиям*

$$\left\{\begin{aligned} &f(-\pi)=f(\pi); \\ &f'(-\pi)=f'(\pi); \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi). \end{aligned}\right. \tag{8.46}$$

Пусть, кроме того, функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi, \pi]$ кусочно непрерывную производную порядка $m+1$. Тогда сходится следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k|+|b_k|), \tag{8.47}$$

в котором a_k и b_k — тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Обозначим через α_k и β_k тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$, доопределив эту функцию произвольным образом в конечном числе точек, в которых не существует производной порядка $m+1$ функции $f(x)$. Интегрируя выражения для α_k и β_k $m+1$ раз по частям и учитывая непрерывность на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ самой функции $f(x)$ и всех ее производных до порядка m, а также используя соотношения (8.46), установим следующую связь между тригонометрическими коэффициентами Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$ и самой функции $f(x)$ [19]:

[19] При интегрировании по частям сегмент $[-\pi, \pi]$ следует разбить на конечное число не имеющих общих внутренних точек частичных сегментов, на

$$|\alpha_k|+|\beta_k|=k^{m+1}(|a_k|+|b_k|).$$

Таким образом,

$$k^{n}(|a_k|+|b_k|)=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k},$$

и сходимость ряда (8.47) вытекает из элементарных неравенств (8.44) и из сходимости рядов (8.45), первый из которых сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$, а второй — в силу признака Коши—Маклорена. Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы 1 является следующая

Теорема 8.10. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 1, причем $m \geqslant 1$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Пусть s — любое из чисел $1, 2, \dots, m$. В результате s-кратного почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ получается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s\left\{a_k\cos\left(kx-\frac{\pi s}{2}\right)+b_k\sin\left(kx-\frac{\pi s}{2}\right)\right\}. \tag{8.48}$$

Заметим, что для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ как исходный тригонометрический ряд Фурье, так и ряд (8.48) (с любым $s=1, 2, \dots, m$) мажорируются сходящимся числовым рядом (8.47). По признаку Вейерштрасса (см. теорему 2.3) как исходный тригонометрический ряд Фурье, так и каждый из рядов (8.48) (при $s=1, 2, \dots, m$) сходятся равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$, а это (в силу теоремы 2.9) обеспечивает возможность m-кратного почленного дифференцирования исходного ряда Фурье. Теорема доказана.

§ 5. БОЛЕЕ ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ И УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ В ДАННОЙ ТОЧКЕ

1. Модуль непрерывности функции. Классы Гёльдера. Введем понятия, характеризующие гладкость изучаемых функций, и определим классы функций, в терминах которых будут сформулированы условия сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$.

каждом из которых $f^{(m+1)}(x)$ непрерывна, и учесть, что при суммировании интегралов по всем частичным сегментам все подстановки дают нуль.

Определение 1. *Для каждого $\delta>0$ назовем модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ точную верхнюю грань модуля разности $|f(x')-f(x'')|$ на множестве всех x' и x'', принадлежащих сегменту $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$.*

Будем обозначать модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ символом $\omega(\delta, f)$. Итак, по определению

$$\omega(\delta, f)=\sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x', x''\in[a,b]}}|f(x')-f(x'')|.$$

Непосредственно из теоремы Кантора (см. теорему 4.16 ч. 1) вытекает, что *модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ любой непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ стремится к нулю при $\delta\to 0$* [20].

Однако для произвольной только непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ нельзя, вообще говоря, ничего сказать о *порядке* ее модуля непрерывности $\omega(\delta, f)$ относительно малого δ. Рассмотрим дифференцируемые на сегменте функции.

Утверждение. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и ее производная $f'(x)$ ограничена на этом сегменте, то модуль непрерывности функции $f(x)$ на указанном сегменте $\omega(\delta, f)$ имеет порядок $\omega(\delta, f)=O(\delta)$* [21].

В самом деле, из теоремы Лагранжа [22] вытекает, что для любых точек x' и x'' сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ, заключенная между x' и x'' и такая, что

$$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)|\cdot|x'-x''|. \tag{8.49}$$

Так как производная $f'(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, то найдется постоянная $M>0$ такая, что для всех x из этого сегмента $|f'(x)|\leqslant M$ и, следовательно, $|f'(\xi)|\leqslant M$. Из последнего неравенства и из (8.49) заключаем, что $|f(x')-f(x'')|\leqslant M\delta$ для всех x' и x'' из $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$. Но это и означает, что $\omega(\delta, f)\leqslant M\delta$, т. е. $\omega(\delta, f)=O(\delta)$.

Пусть α — любое вещественное число из полусегмента $0<\alpha\leqslant 1$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гёльдера C^α с показателем α $(0<\alpha\leqslant 1)$, если модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет порядок $\omega(\delta, f)=O(\delta^\alpha)$.*

Для обозначения того, что функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гёльдера C^α, обычно употребляют символику: $f(x)\in C^\alpha[a, b]$.

[20] Ибо (в силу теоремы Кантора) для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ для всех x' и x'' из сегмента $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$.

[21] Напомним, что символ $\alpha=O(\delta)$ был введен в ч. 1 и обозначает существование постоянной M такой, что $|\alpha|\leqslant M\delta$.

[22] См. теорему 6.5 ч. 1.

Сразу же отметим, что если на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ дифференцируема и ее производная ограничена, то эта функция заведомо принадлежит на этом сегменте классу Гёльдера C^1 (это утверждение непосредственно вытекает из доказанного выше соотношения $\omega(\delta, f)=O(\delta)$) [23].

Замечание. Пусть $f(x)\in C^\alpha[a, b]$. Точную верхнюю грань дроби $\frac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^\alpha}$ на множестве всех x' и x'', принадлежащих сегменту $[a, b]$ и не равных друг другу, называют константой Гёльдера (или коэффициентом Гёльдера) функции $f(x)$ (на сегменте $[a, b]$). Сумму константы Гёльдера функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и точной верхней грани $|f(x)|$ на этом сегменте называют гёльдеровой нормой функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначают символом $\|f\|_{C^\alpha[a,b]}$.

Пример. Функция $f(x)=\sqrt{x}$ принадлежит на сегменте $[0, 1]$ классу $C^{1/2}$, так как для любых x' и x'' из $[0, 1]$, связанных условием $x'>x''$, справедливо равенство

$$|f(x')-f(x'')|=\sqrt{x'-x''}\,\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$$

(при этом константа Гёльдера, являющаяся точной верхней гранью на $[0, 1]$ дроби $\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$, равна единице, а гёльдерова норма равна двум).

2. Выражение для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная и кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Мы будем называть периодическим продолжением этой функции на всю прямую такую определенную на всей прямой функцию $f(x)$ [24], которая удовлетворяет трем требованиям:

1) совпадает с первоначально заданной функцией на интервале $-\pi<x<\pi$,

2) имеет на концах сегмента $[-\pi, \pi]$ значения

$$f(\pi)=f(-\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)],$$

3) удовлетворяет условию периодичности с периодом 2π, т. е. удовлетворяет для любого x соотношению $f(x+2\pi)=f(x)$.

Лемма. *Если функция $F(x)$ является периодическим продолжением на всю числовую прямую функции $F(x)$, первоначально определенной и кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$, то*

[23] Класс Гёльдера C^1, отвечающий значению $\alpha=1$, часто называют классом Липшица.

[24] Оставляем для этой функции обозначение исходной функции $f(x)$.

все интегралы от этой функции по любому отрезку длины 2π равны друг другу, т. е. для любого x справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt=\int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(t)\,dt. \tag{8.50}$$

Доказательство. В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(t)\,dt=\int_{-\pi+x}^{-\pi} F(t)\,dt+\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt+\int_{\pi}^{\pi+x} F(t)\,dt. \tag{8.51}$$

Используя условие периодичности $F(y-2\pi)=F(y)$, с помощью замены $y=t+2\pi$ получим

$$\int_{-\pi+x}^{-\pi} F(t)\,dt=\int_{\pi+x}^{\pi} F(y-2\pi)\,dy=\int_{\pi+x}^{\pi} F(y)\,dy=-\int_{\pi}^{\pi+x} F(y)\,dy. \tag{8.52}$$

Из (8.51) и (8.52) вытекает соотношение (8.50). Лемма доказана.

Пусть теперь функция $f(x)$ является периодическим продолжением на всю прямую функции $f(x)$, первоначально определенной и кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Вычислим для этой функции в любой точке x частичную сумму ее тригонометрического ряда Фурье $S_n(x, f)$, имеющую вид

$$S_n(x, f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Используя выражения для коэффициентов Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\,dy,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ky\,dy$$

$$(k=1, 2, \dots)$$

и свойство линейности интеграла, выражение для $S_n(x, f)$ можно переписать в следующем виде:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ky\cos kx+\sin ky\sin kx)\right]dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right]dy.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $y=t+x$:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt.$$

Наконец, используя лемму 1 и замечая, что подынтегральная функция в последнем интеграле является периодической функцией аргумента t с периодом 2π, получим

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt. \tag{8.53}$$

Вычислим сумму, стоящую в (8.53) в квадратных скобках. Для этого заметим, что для любого номера k и любого значения t справедливо равенство

$$2\sin\frac{t}{2}\cos kt=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t.$$

Просуммируем это равенство по всем номерам k, равным $1, 2, \dots, n$:

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}.$$

Отсюда

$$2\sin\frac{t}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \tag{8.54}$$

Подставляя (8.54) в (8.53), окончательно получим следующее выражение для n-й частичной суммы тригонометрического ряда Фурье:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\mathrm{si}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \tag{8.55}$$

справедливое в любой точке x числовой прямой.

Замечание. Из формулы (8.55) и из того, что все частичные суммы $S_n(x, 1)$ функции $f(x)\equiv 1$ равны единице [25], вытекает следующее равенство:

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.56}$$

3. Вспомогательные предложения.

Лемма. *Пусть $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически с периодом 2π продолжена на всю бесконечную прямую. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при всех u, удовлетворяющих условию $|u|\leqslant\delta$, справедливо неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+t)-f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Согласно теореме 8.8 (о замкнутости тригонометрической системы) для функции $f(x)$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$\|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2\,dt}<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}},$$

и потому на основании неравенства Коши—Буняковского [26]

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|\,dt\leqslant\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2\,dt\cdot\int_{-\pi}^{\pi}dt}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.57}$$

Из неравенства (8.57), из леммы п. 2 и из того, что $f(t)$ и $T(t)$ являются периодическими функциями периода 2π, заключаем, что для любого числа u

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-T(t+u)|\,dt<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.58}$$

Поскольку модуль суммы трех величин не превосходит сумму модулей этих величин, то для любого числа u справедливо неравенство

[25] Так как величина (8.55) для функции $f(x)\equiv 1$ равна сумме $S_n(x, 1)$, в которой $a_0=2$, $a_k=b_k=0$ при $k=1, 2, \dots$

[26] См. неравенство (8.7) при $a=-\pi$, $b=\pi$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|\,dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-T(t+u)|\,dt + $$
$$+\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u)-T(t)|\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t)-f(t)|\,dt. \qquad (8.59)$$

Теперь остается заметить, что в силу непрерывности тригонометрического многочлена и теоремы Кантора (см. теорему 4.16 ч. 1) для фиксированного нами $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при $|u|\leqslant\delta$ и при всех t из $[-\pi, \pi]$

$$|T(t+u)-T(t)|<\varepsilon/(6\pi),$$

и потому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u)-T(t)|\,dt < \varepsilon/3. \qquad (8.60)$$

Сопоставляя неравенство (8.59) с неравенствами (8.57), (8.58) и (8.60), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|\,dt < \varepsilon \qquad (8.61)$$

для всех u, для которых $|u|\leqslant\delta$. Лемма доказана.

Извлечем теперь из этой леммы ряд важных для дальнейшего следствий.

Следствие 1. *Если функция $f(t)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, а x — любая фиксированная точка сегмента $[-\pi, \pi]$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt < \varepsilon \qquad (8.62)$$

при $|u|\leqslant\delta$.

Доказательство. Сделаем в интеграле, стоящем в левой части (8.62), замену переменной $\tau=x+t$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau.$$

В силу равенства (8.50)

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau.$$

Следовательно, неравенство (8.62) является следствием (8.61).

Следствие 2. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, то функция*

$$I(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,dt$$

является непрерывной функцией x на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Пусть x — любая точка сегмента $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$I(x+u)-I(x)=\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u)-f(x+t)]\,g(t)\,dt,$$

и поскольку кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ удовлетворяет на этом сегменте условию ограниченности $|g(t)|\leqslant M$, то

$$|I(x+u)-I(x)| \leqslant M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt,$$

и потому в силу (8.62) для любого $\varepsilon>0$

$$|I(x+u)-I(x)|<\varepsilon \text{ при } |u|\leqslant\delta(\varepsilon).$$

Непрерывность $I(x)$ в точке x доказана.

Следствие 3. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, то тригонометрические коэффициенты Фурье функции $F(x, t)=f(x+t)g(t)$ при разложении ее по переменной t*

$$a_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\cos nt\,dt, \qquad (8.63)$$

$$b_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin nt\,dt \qquad (8.64)$$

при $n\to\infty$ сходятся к нулю равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а следовательно, и на всей прямой).

Доказательство. Для любой фиксированной точки x сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $F(x, t)=f(x+t)g(t)$ является кусочно непрерывной функцией аргумента t на сегменте $[-\pi, \pi]$, поэтому для нее справедливо равенство Парсеваля [27]

[27] См. следствие 1 п. 3 § 3.

$$\frac{a_0^2(x)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k^2(x)+b_k^2(x)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\,g^2(t)\,dt. \qquad (8.65)$$

Из равенства (8.65) вытекает сходимость ряда, стоящего в левой его части, в каждой фиксированной точке x сегмента $[-\pi, \pi]$. Так как указанный ряд состоит из *неотрицательных* членов, то в силу теоремы Дини [28] для доказательства равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости указанного ряда достаточно доказать, что как функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$, так и сумма ряда (8.65) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\,g^2(t)\,dt$ — непрерывные функции x на сегменте $[-\pi, \pi]$, а это сразу вытекает из предыдущего следствия (достаточно учесть, что квадрат кусочно непрерывной функции является кусочно непрерывной функцией и что $\cos nt$ и $\sin nt$ при каждом фиксированном номере n являются непрерывными функциями).

Следствие 4. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически с периодом 2π продолжена на всю прямую, то последовательность*

$$c_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt \qquad (8.66)$$

сходится к нулю равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а следовательно, и на всей прямой).

Доказательство. Достаточно учесть, что

$$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]=\cos nt\sin\frac{t}{2}+\sin nt\cos\frac{t}{2}$$

и применить предыдущее следствие, беря в (8.63) вместо $g(t)$ функцию $g(t)\sin\frac{t}{2}$, а в (8.64) вместо $g(t)$ функцию $g(t)\cos\frac{t}{2}$.

4. Принцип локализации. В этом пункте мы докажем, что вопрос о том, сходится или расходится тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодической (с периодом 2π) функции $f(x)$ в данной точке x, решается лишь на основании поведения функции $f(x)$ в как угодно малой окрестности точки x. Это замечательное свойство тригонометрического ряда Фурье принято называть принципом локализации.

Начнем с доказательства важной леммы.

Лемма (лемма Римана). *Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) про-*

[28] См. теорему 2.4 (формулировку в терминах рядов).

должена на всю прямую и если эта функция обращается в нуль на некотором сегменте $[a, b]$ [29], то для любого положительного числа δ, меньшего $\frac{b-a}{2}$, тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ сходится к нулю.

Доказательство. Пусть δ — произвольное положительное число, меньшее $\frac{b-a}{2}$. Частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в произвольной точке x числовой прямой определяется равенством (8.55). Полагая

$$g(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{при } \delta<|t|\leqslant\pi; \\ \dfrac{1}{4\sin\frac{t}{2}} & \text{при } |t|=\delta; \\ 0 & \text{при } |t|<\delta \end{cases} \qquad (8.67)$$

и учитывая, что $f(x+t)$ равняется нулю при условии, что x принадлежит сегменту $[a+\delta, b-\delta]$, а t принадлежит сегменту $|t|\leqslant\delta$ [30], можно следующим образом переписать равенство (8.55) для каждой точки x сегмента $[a+b, b-\delta]$:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

Остается принять во внимание, что последовательность, стоящая в правой части последнего равенства, в силу следствия 4 п. 3 сходится к нулю равномерно относительно x на всей числовой прямой. Лемма доказана.

Непосредственными следствиями доказанной леммы являются следующие две теоремы.

Теорема 8.11. *Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, и пусть $[a, b]$ — некоторый сегмент. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ при любом положительном δ, меньшем $(b-a)/2$, сходился (к этой функции)*

[29] Сегмент $[a, b]$ является совершенно произвольным сегментом длины, меньшей 2π. В частности, этот сегмент может не содержаться целиком в $[-\pi, \pi]$.

[30] В силу того, что функция $f(x)$ равна нулю на всем сегменте $[a, b]$.

равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$, достаточно, чтобы существовала кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодическая (с периодом 2π) функция $g(x)$, обладающая равномерно сходящимся на сегменте $[a, b]$ тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая на сегменте $[a, b]$ с функцией $f(x)$.

Доказательство. Применяя лемму Римана к разности $[f(x)-g(x)]$, получим, что тригонометрический ряд Фурье разности $[f(x)-g(x)]$ при любом δ из интервала $0<\delta<(b-a)/2$ сходится к нулю равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$, а отсюда и из равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $g(x)$ вытекает равномерная на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Тот факт, что последний ряд сходится на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$ *именно к функции* $f(x)$, непосредственно вытекает из следствия 5 п. 3 § 3. Теорема доказана.

Теорема 8.12. *Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, и пусть x_0 — некоторая точка прямой. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходился в точке x_0, достаточно, чтобы существовала кусочно непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодическая (с периодом 2π) функция $g(x)$, обладающая сходящимся в точке x_0 тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая с $f(x)$ в как угодно малой δ-окрестности точки x_0.*

Доказательство. Достаточно применить лемму Римана к разности $[f(x)-g(x)]$ по сегменту $[x_0-\delta/2, x_0+\delta/2]$ и учесть что из сходимости в точке x_0 тригонометрических рядов функций $[f(x)-g(x)]$ и $g(x)$ вытекает сходимость в этой точке и тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 8.12 не устанавливает конкретного вида условий, обеспечивающих сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0. Она лишь доказывает, что эти условия определяются только поведением $f(x)$ в как угодно малой окрестности точки x_0 (т. е. имеют *локальный* характер).

5. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье для функции из класса Гёльдера. В этом и в следующем пункте мы уточним условия, обеспечивающие равномерную сходимость и сходимость в данной точке x_0 тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 8.13. *Если функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[-\pi, \pi]$ классу Гёльдера C^α с каким угодно положительным показателем α $(0<\alpha\leqslant1)$ и если, кроме того, $f(-\pi)=f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Как обычно, будем считать, что функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю числовую прямую. Условие $f(-\pi)=f(\pi)$ обеспечивает принадлеж-

ность так продолженной функции классу Гёльдера C^α на всей числовой прямой.

Пусть x — любая точка сегмента $[-\pi, \pi]$. Умножая обе части равенства (8.56) на $f(x)$ и вычитая полученное при этом равенство из (8.55), получим равенство

$$S_n(x, f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (8.68)$$

Из условия принадлежности $f(x)$ классу Гёльдера C^α вытекает существование постоянной M такой, что

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant M|t|^\alpha \qquad (8.69)$$

во всяком случае для всех x и всех t из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и по нему $\delta>0$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{M}{\alpha}\delta^\alpha<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (8.70)$$

Разбивая сегмент $[-\pi, \pi]$ на сумму отрезка $|t|\leqslant\delta$ и множества $\delta\leqslant|t|\leqslant\pi$, придадим равенству (8.68) следующий вид:

$$S_n(x, f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt-\frac{f(x)}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (8.71)$$

Для оценки первого интеграла в правой части (8.71) воспользуемся неравенством (8.69) и учтем, что

$$\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\leqslant\frac{\pi}{2|t|}$$

для всех t из сегмента $[-\pi, \pi]$ [31]. Таким образом, для любого

[31] Указанное неравенство сразу вытекает из того, что функция $(\sin x)/x$ при изменении x от 0 до $\pi/2$ убывает от 1 до $2/\pi$. Факт убывания функции $\frac{\sin x}{x}$ в свою очередь вытекает из того, что $\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg}x)<0$ всюду при $0<x<\pi/2$, так как $x<\operatorname{tg}x$ при $0<x<\pi/2$ (см. гл. 4 ч. 1).

номера n и любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$ получим

$$\left|\int_{|t|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{|t|\leqslant\delta}|f(x+t)-f(x)|\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M\pi}{2}\int_{|t|\leqslant\delta}|t|^{\alpha-1}\,dt=M\pi\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt=\frac{M\pi}{\alpha}\delta^\alpha.$$

Отсюда на основании (8.70) для любого номера n и любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$ будем иметь оценку

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (8.72)$$

Второй из интегралов в правой части (8.71) с помощью кусочно непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции (8.67) записывается в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

В силу следствия 4 п. 3 правая часть последнего равенства при $n\to\infty$ сходится к нулю равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому для фиксированного нами $\varepsilon>0$ найдется номер N_1 такой, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (8.73)$$

для всех $n\geqslant N_1$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Для оценки последнего интеграла в правой части (8.71) заметим, что с помощью кусочно непрерывной функции (8.67) этот интеграл записывается в виде

$$\frac{f(x)}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, при $n\to\infty$ сходится к нулю в силу все того же следствия 4 п. 3 (достаточно применить это следствие к функции $f(x)\equiv1$). Учитывая также, что функция $f(x)$ во всяком случае ограничена на сегменте $[-\pi, \pi]$, получим, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер N_2 такой, что

$$\left|\frac{f(x)}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (8.74)$$

для всех $n\geqslant N_2$ и всех точек x из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Обозначив через N наибольший из двух номеров N_1 и N_2, в силу (8.71)—(8.74) получим, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что

$$|S_n(x, f)-f(x)|<\varepsilon$$

для всех $n\geqslant N$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$. Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что в условиях теоремы 8.13 тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и на всей прямой (к функции, являющейся периодическим (с периодом 2π) продолжением функции $f(x)$ на всю прямую).

Замечание 2. Отметим, что при оценке интегралов (8.73) и (8.74) мы использовали лишь кусочную непрерывность (и вытекающую из нее ограниченность) функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ (принадлежность $f(x)$ классу Гёльдера C^α при оценке этих интегралов не использовалась).

Замечание 3. Естественно возникает вопрос о том, можно ли в теореме 8.13 ослабить требование гладкости на функцию $f(x)$, сохраняя утверждение этой теоремы о равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье этой функции.

Напомним, что принадлежность $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ классу Гёльдера C^α по определению означает, что модуль непрерывности $f(x)$ на этом сегменте имеет порядок

$$\omega(\delta, f)=O(\delta^\alpha).$$

Отметим без доказательства так называемую теорему Дини—Липшица:

Для равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию $f(-\pi)=f(\pi)$ и чтобы ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi, \pi]$ имел порядок

$$\omega(x, f)=o\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right),$$

т. е. являлся при $\delta\to0$ бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем $\frac{1}{\ln(1/\delta)}$.

Теорема Дини—Липшица содержит *окончательное* (в терминах модуля непрерывности функции) условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции, так как можно построить функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(-\pi)=f(\pi)$ с модулем непрерывности, имеющим на сегменте $[-\pi, \pi]$ порядок $O\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right)$ и с тригонометрическим рядом Фурье, расходящимся на множестве точек, всюду плотном на сегменте $[-\pi, \pi]$ [32].

В условиях теоремы 8.13 после периодического (с периодом 2π) продолжения функция $f(x)$ оказалась принадлежащей классу Гёльдера C^α *на всей числовой прямой*. Естественно возникает вопрос о поведении тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, принадлежащей классу Гёльдера C^α *только на некотором сегменте* $[a, b]$, а всюду вне этого сегмента удовлетворяющей лишь обычному требованию кусочной непрерывности. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 8.14. *Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю числовую прямую. Пусть далее на некотором сегменте $[a, b]$, имеющем длину, меньшую 2π, эта функция принадлежит классу Гёльдера C^α с произвольным положительным показателем α $(0<\alpha\leqslant1)$. Тогда для любого δ из интервала $0<\delta<(b-a)/2$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$.*

Доказательство. Построим функцию $g(x)$, которая на сегменте $[a, b]$ совпадает с $f(x)$, на сегменте $[b, a+2\pi]$ является линейной функцией вида $Ax+B$, обращающейся в $f(b)$ при $x=b$

[32] Доказательство теоремы Дини—Липшица и построение только что указанного примера можно найти, например, в книге А. Зигмунда «Тригонометрические ряды. Т. 1» (М.: Мир, 1965. С. 108 и 477).

и в $f(a)$ при $x=a+2\pi$[33], и которая периодически (с периодом 2π) продолжена с сегмента $[a, a+2\pi]$ на всю прямую (на рис. 8.1 жирная линия изображает график функции $f(x)$, а штриховая линия — график построенной по ней функции $g(x)$).

Очевидно, что построенная нами функция $g(x)$ удовлетворяет условию $g(-\pi)=g(\pi)$ и принадлежит классу Гёльдера C^α (с тем же положительным показателем α, что и $f(x)$) на всей пря-

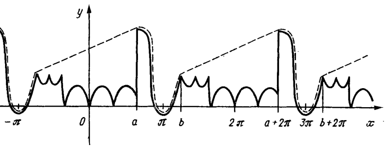

Рис. 8.1

мой[34]. В силу теоремы 8.13 и замечания 1 тригонометрический ряд Фурье функции $g(x)$ сходится равномерно на всей числовой прямой, а поэтому в силу теоремы 8.11 тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ при любом δ из интервала $0<\delta<(b-a)/2$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$. Теорема доказана.

Замечание 4. Утверждение теоремы 8.14 остается справедливым и для сегмента $[a, b]$, имеющего длину, *равную* 2π (т. е. для случая $b=a+2\pi$, но в этом случае при доказательстве теоремы следует, фиксировав произвольное δ из интервала $0<\delta<\pi$, взять функцию $g(x)$ совпадающей с $f(x)$ на сегменте $[a+\delta/2, a+2\pi-\delta/2]$, линейной на сегменте $[a+2\pi-\delta/2, a+2\pi+\delta/2]$ и периодически (с периодом 2π) продолженной с сегмента $[a+\delta/2, a+2\pi+\delta/2]$ на всю числовую прямую. Если же сегмент $[a, b]$ имеет длину, *превосходящую* 2π, то из принадлежности $f(x)$ классу Гёльдера C^α на этом сегменте и из условия периодичности $f(x)$ (с периодом 2π) вытекает, что $f(x)$ принадлежит

[33] Условие обращения функции $Ax+B$ в $f(b)$ при $x=b$ и в $f(a)$ при $x=a+2\pi$ однозначно определяет постоянные A и B:

$$A=\frac{f(a)-f(b)}{a+2\pi-b},\quad B=\frac{(a+2\pi)f(b)-bf(a)}{a+2\pi-b}.$$

[34] Достаточно учесть, что $g(x)$ всюду непрерывна и что линейиая функция имеет ограниченную производную и поэтому принадлежит классу Гёльдера C^α при любом $\alpha\leqslant 1$.

классу C^α на всей прямой, т. е. в этом случае мы приходим к теореме 8.13.

6. О сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно гёльдеровой функции.

Определение 1. *Будем называть функцию $f(x)$ кусочно гёльдеровой на сегменте $[a, b]$, если эта функция кусочно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и если этот сегмент при помощи конечного числа точек $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ разбивается на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, на каждом из которых функция $f(x)$ принадлежит классу Гёльдера C^{α_k} с некоторым положительным показателем α_k $(0<\alpha_k\leqslant 1)$. При этом при определении класса Гёльдера на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ в качестве значений функции на концах сегмента следует брать предельные значения*

$$f(x_{k-1}+0) \text{ и } f(x_k-0)\ ^{35)}.$$

Иными словами, область задания всякой кусочно гёльдеровой функции распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек сегментов, на каждом из которых эта функция принадлежит классу Гёльдера с некоторым положительным показателем.

Каждый из этих сегментов мы будем называть участком гладкости функции.

Определение 2. *Будем называть функцию $f(x)$ кусочно гладкой на сегменте $[a, b]$, если эта функция кусочно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную*[36]*, т. е. если функция $f(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом сегменте, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f'(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения.*

Ясно, что всякая кусочно гладкая на сегменте $[a, b]$ функция является на этом сегменте кусочно гёльдеровой.

Теорема 8.15. *Пусть кусочно гёльдеровая на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в каждой точке x прямой к значению $f(x)=[f(x+0)+f(x-0)]/2$, причем сходимость этого ряда является равномер-*

[35] Как у всякой кусочно непрерывной функции, у кусочно гёльдеровой функции значения в каждой точке x_k обязаны быть равны полусумме правого и левого предельных значений в этой точке, т. е. должно быть справедливо равенство

$$f(x_k)=\frac{1}{2}[f(x_k+0)+f(x_k-0)].$$

[36] См. определение 1 из п. 2 § 4.

ной на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости функции $f(x)$.

Доказательство. Утверждение теоремы о равномерной сходимости на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости, сразу вытекает из теоремы 8.14. Отсюда же вытекает и сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой *внутренней* точке участка гладкости функции $f(x)$[37]. Остается доказать сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой точке соединения двух участков гладкости.

Фиксируем одну из таких точек и обозначим ее через x. Тогда найдутся постоянные M_1 и M_2 такие, что при любом достаточно малом положительном t будет справедливо неравенство

$$|f(x+t)-f(x+0)|\leqslant M_1 t^{\alpha_1}\ (0<\alpha_1\leqslant 1), \tag{8.75}$$

а при любом достаточно малом отрицательном t — неравенство

$$|f(x+t)-f(x-0)|\leqslant M_2|t|^{\alpha_2}\ (0<\alpha_2\leqslant 1). \tag{8.76}$$

Обозначим через M наибольшее из чисел M_1 и M_2, а через α наименьшее из чисел α_1 и α_2. Тогда при $|t|\leqslant 1$ в правой части каждого из неравенств (8.75) и (8.76) можно писать $M|t|^\alpha$.

Фиксируем теперь произвольное $\varepsilon>0$ и по нему $\delta>0$, удовлетворяющее неравенству (8.70) и настолько малое, что при $|t|\leqslant\delta$ справедливы оба неравенства (8.75) и (8.76) и в правой части этих неравенств можно брать число $M|t|^\alpha$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 8.13, мы придем к равенству (8.71), и для доказательства теоремы нам остается убедиться, что в фиксированной нами точке x справедливы оценки (8.72), (8.73) и (8.74). В замечании 2 п. 5 мы отметили, что оценки (8.73) и (8.74) справедливы для любой *только кусочно непрерывной и периодической (с периодом 2π) функции.* Остается доказать справедливость для всех номеров n оценки (8.72).

Так как $f(x)=1/2[f(x+0)+f(x-0)]$ и[38]

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=2\int_{0}^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=2\int_{-\delta}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

[37] Так как каждую внутреннюю точку участка гладкости можно охватить сегментом, лежащим внутри этого участка.

[38] Функция

$$\varphi(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

является четной, поэтому легко убедиться, что для нее $\int_0^\delta\varphi(t)\,dt=\int_{-\delta}^0\varphi(t)\,dt$ (достаточно в одном из этих интегралов сделать замену $t=-\tau$). Следовательно,

$$\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(t)\,dt=2\int_0^\delta\varphi(t)\,dt=2\int_{-\delta}^0\varphi(t)\,dt.$$

то интеграл, стоящий в левой части (8.72), можно переписать так:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^0[f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.77}$$

Для оценки интегралов, стоящих в правой части (8.77), воспользуемся неравенствами (8.75) и (8.76), беря в правой части этих неравенств число $M|t|^\alpha$. Учитывая уже применявшуюся при доказательстве теоремы 8.13 оценку

$$\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\leqslant\frac{\pi}{2|t|}\ (\text{при } |t|\leqslant\pi)$$

и неравенство (8.70), будем иметь

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{2}\left[\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt+\int_{-\delta}^0|t|^{\alpha-1}\,dt\right]=\frac{M}{\alpha}\delta^\alpha<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценка (8.72), а с ней и теорема доказаны.

Следствие 1. *Утверждение теоремы 8.15 будет тем более справедливо, если в ее формулировке вместо кусочно гёльдеровой взять кусочно гладкую (на сегменте $[-\pi, \pi]$) функцию, периодически (с периодом 2π) продолженную на всю прямую.*

Для формулировки еще одного следствия введем новое понятие. Пусть $0<\alpha\leqslant 1$.

Определение 3. *Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в данной точке x справа (слева) условию Гёльдера порядка α, если функция $f(x)$ имеет в точке x правое (левое) предельное значение и если существует такая постоянная M, что для всех достаточно малых положительных (отрицательных) t справедливо неравенство*

$$\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t^\alpha}\leqslant M\ \left(\frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{|t|^\alpha}\leqslant M\right).$$

Очевидно, что если функция $f(x)$ имеет в данной точке x правую (левую) производную, понимаемую как предел

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\ \left(\lim_{t\to 0-0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right),$$

то функция $f(x)$ заведомо удовлетворяет в этой точке x справа (слева) условию Гёльдера любого порядка $\alpha\leqslant 1$.

Следствие 2 (условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в данной точке). *Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной и периодической (с периодом 2π) функции $f(x)$ сходился в данной точке x числовой прямой, достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла в точке x справа условию Гёльдера какого-либо положительного порядка α_1 и в точке x слева условию Гёльдера какого-либо положительного порядка α_2 (и тем более достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела в точке x правую и левую производные).*

Доказательство. Достаточно заметить, что из того, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x справа (слева) условию Гёльдера порядка α_1 (порядка α_2), вытекает существование постоянной M_1 (постоянной M_2) такой, что для всех достаточно малых положительных (отрицательных) t справедливо неравенство (8.75) (неравенство (8.76)). Так как доказательство теоремы 8.15 использует лишь неравенства (8.75) и (8.76) и кусочную непрерывность и периодичность $f(x)$, то утверждение следствия 2 верно.

Пример. Не вычисляя коэффициентов Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}\cos x \text{ при } -\pi\leqslant x<0;\\ 1/2 \text{ при } x=0;\\ \sqrt{x} \text{ при } 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

можно утверждать, что тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в точке $x=0$ к значению $\frac{1}{2}$, так как функция $f(x)$ имеет в этой точке левую производную и удовлетворяет в этой точке справа условию Гёльдера порядка $\alpha_2=\frac{1}{2}$.

7. Суммируемость тригонометрического ряда Фурье непрерывной функции методом средних арифметических. Мы уже отмечали, что тригонометрический ряд Фурье всюду непрерывной и периодической (с периодом 2π) функции может быть расходящимся (см. п. 1). Докажем, что этот ряд тем не менее всегда суммируем (равномерно на всей прямой) методом Чезаро (методом средних арифметических)[39].

Теорема 8.16 (теорема Фейера)[40]. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, то средние арифметические частичных сумм ее тригонометрического ряда Фурье*

$$\sigma_n(x, f)=\frac{S_0(x, f)+S_1(x, f)+\ldots+S_{n-1}(x, f)}{n}$$

сходятся (к этой функции) равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а в случае, если функция продолжена на всю прямую с периодом 2π, равномерно на всей прямой).

Доказательство. Из равенства (8.55) для $S_n(x, f)$ следует, что

$$\sigma_n(x, f)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right]dt. \tag{8.78}$$

Для вычисления суммы, стоящей в (8.78) в квадратных скобках, просуммируем тождество

$$2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\cos kt-\cos(k+1)t$$

по всем $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. В результате получим

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2}.$$

[39] См. п. 1 § 7 гл. 1.

[40] Л. Фейер — венгерский математик (1880—1959). Приведенная теорема доказана им в 1904 г.

С помощью этого равенства (8.78) приводится к виду

$$\sigma_n(x, f)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.79}$$

Из (8.79) в свою очередь немедленно следует, что

$$\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=1, \tag{8.80}$$

так как левая часть (8.80) равна среднему арифметическому частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)\equiv 1$, а все указанные частичные суммы тождественно равны единице (см. п. 2).

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Согласно теореме Вейерштрасса 8.7 найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$|f(x)-T(x)|\leqslant\varepsilon/2 \tag{8.81}$$

для всех x числовой прямой. В силу линейности средних арифметических $\sigma_n(x, f)=\sigma_n(x, f-T)+\sigma_n(x, T)$, так что

$$|\sigma_n(x, f)-T(x)|\leqslant|\sigma_n(x, f-T)|+|\sigma_n(x, T)-T(x)|. \tag{8.82}$$

Запишем равенство (8.79) для функции $[f(x)-T(x)]$. Учитывая неотрицательность называемой ядром Фейера функции $\dfrac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}$ и используя оценку (8.81) и равенство (8.80), получим

$$|\sigma_n(x, f-T)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-T(x+t)|\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.83}$$

Неравенство (8.83) справедливо для любого номера n.

Заметим, что тригонометрический ряд Фурье многочлена $T(x)$ совпадает с этим многочленом. Отсюда следует, что все частичные суммы $S_n(x, T)$, начиная с некоторого номера n_0, равны $T(x)$. Но это позволяет нам для фиксированного выше произвольного $\varepsilon>0$ отыскать номер N такой, что

$$|\sigma_n(x, T)-T(x)|<\varepsilon/2 \tag{8.84}$$

при всех $n\geqslant N$ и всех x.

Из неравенств (8.82)—(8.84) заключаем, что $|\sigma_n(x, f)-f(x)|<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$ и всех x. Теорема доказана.

8. Заключительные замечания. 1°. При решении ряда конкретных задач приходится раскладывать функцию в тригонометрический ряд Фурье не на сегменте $[-\pi, \pi]$, а на сегменте $[-l, l]$, где l — произвольное положительное число. Для перехода к такому случаю достаточно во всех проведенных выше рассуждениях заменить переменную x на $\frac{\pi}{l}x$. Конечно, при такой линейной замене переменной останутся справедливыми все установленные нами результаты, которые будут относиться к тригонометрическому ряду Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right) \tag{8.85}$$

со следующими выражениями для коэффициентов Фурье:

$$\begin{gathered}a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt;\\ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left(\frac{\pi}{l}kt\right)dt;\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\left(\frac{\pi}{l}kt\right)dt;\\ k=1, 2, \ldots\end{gathered} \tag{8.86}$$

Мы не будем заново формулировать все установленные теоремы, а лишь отметим, что во всех формулировках сегмент $[-\pi, \pi]$ следует заменить сегментом $[-l, l]$, а период 2π — периодом $2l$.

2°. Из вида (8.86) тригонометрических коэффициентов Фурье вытекает, что для четной функции $f(x)$ равны нулю все коэффициенты b_k $(k=1, 2, \ldots)$, а для нечетной функции $f(x)$ равны нулю все коэффициенты a_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Таким образом, *четная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам*:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi}{l}kx,$$

а нечетная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по синусам:

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{\pi}{l}kx.$$

3°. Приведем весьма часто употребляемую комплексную форму записи тригонометрического ряда Фурье (8.85). Используя соотношения (см. п. 3 § 7 гл. 2)

$$e^{-i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx-i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

$$e^{i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx+i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

легко убедиться в том, что тригонометрический ряд Фурье (8.85) с коэффициентами Фурье (8.86) приводится к виду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{-i\frac{\pi}{l}kx}, \tag{8.87}$$

в котором комплексные коэффициенты c_k имеют вид

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{i\frac{\pi}{l}kt}\,dt$$

и выражаются через коэффициенты (8.86) по формулам

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_{-k}=\frac{a_k-ib_k}{2},\ c_k=\frac{a_k+ib_k}{2}\ (k=1, 2, \ldots).$$

§ 6. КРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Понятия кратного тригонометрического ряда Фурье и его прямоугольных и сферических частичных сумм. Пусть функция N переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ определена и интегрируема в N-мерном кубе $-\pi\leqslant x_k\leqslant\pi$ $(k=1, 2, \ldots, N)$; обозначим этот куб символом Π. Кратный тригонометрический ряд такой функции удобно записывать сразу в комплексной форме, используя для сокращения записи понятие скалярного произведения двух N-мерных векторов.

Пусть $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — вектор с произвольными вещественными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а $\mathbf{n}=(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ — вектор с *целочисленными* координатами $n_1, n_2, \ldots, n_N$.

Кратным тригонометрическим рядом Фурье функции $f(\mathbf{x})=f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ называется ряд вида

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{\mathbf{n}} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{n})}, \tag{8.88}$$

в котором числа $\hat{f}_{\mathbf{n}}$ называемые коэффициентами Фурье, определяются равенствами

$$\hat{f}_{\mathbf{n}}=\hat{f}_{n_1 n_2 \ldots n_N}= \\ =(2\pi)^{-N} \int \underset{\Pi}{\ldots} \int f(y, y_2, \ldots, y_N)\, e^{i(y_1 n_1+\ldots+y_N n_N)}\, dy_1 \ldots dy_N, \tag{8.89}$$

а символ $(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{n}$, равное $x_1 n_1+x_2 n_2+\ldots+x_N n_N$.

Конечно, кратный тригонометрический ряд Фурье (8.88) можно рассматривать как ряд Фурье по ортонормированной (в N-мерном кубе Π) системе[41], образованной с помощью всевозможных произведений элементов одномерных тригонометрических систем, взятых от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ соответственно. Эту ортонормированную систему принято называть кратной тригонометрической системой.

Как и для всякой ортонормированной системы, для кратной тригонометрической системы справедливо неравенство Бесселя, которое имеет вид

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_{\mathbf{n}}|^2 \leqslant (2\pi)^{-N} \int \underset{\Pi}{\ldots} \int f^2(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N, \tag{8.90}$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — любая непрерывная в N-мерном кубе Π функция.

Рассмотрим вопрос о сходимости тригонометрического ряда Фурье. Если этот ряд *не сходится* в данной точке $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ *абсолютно*, то вопрос о его сходимости (в силу теоремы Римана 1.10) зависит от порядка следования его членов (или, что то же самое, от порядка суммирования по индексам $n_1, n_2, \ldots, n_N$).

Широко распространены два способа суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье — сферический и прямоугольный.

Сферическими частичными суммами кратного тригонометрического ряда Фурье (8.88) называются суммы вида

[41] При этом скалярное произведение двух любых функций определяется как интеграл от произведения этих функций по кубу Π.

$$S_\lambda(\mathbf{x}, f)=\sum_{|\mathbf{n}|\leqslant\lambda} \hat{f}_{\mathbf{n}} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{n})},$$

взятые по всем целочисленным значениям $n_1, n_2, \ldots, n_N$, удовлетворяющими условию $|\mathbf{n}|=\sqrt{n_1^2+n_2^2+\ldots+n_N^2}\leqslant\lambda$.

Говорят, что *кратный тригонометрический ряд Фурье* (8.88) *суммируем в данной точке* $\mathbf{x}$ *сферическим методом, если в этой точке существует предел* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(\mathbf{x}, f)$.

Прямоугольными частичными суммами кратного тригонометрического ряда Фурье (8.88) называются суммы вида

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(\mathbf{x}, f)=\sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \cdots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \hat{f}_{\mathbf{n}} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{n})}.$$

Говорят, что *кратный тригонометрический ряд Фурье* (8.88) *суммируем в данной точке* $\mathbf{x}$ *прямоугольным методом* (*или методом Принсгейма*[42]), *если в этой точке существует предел*

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ m_2\to\infty\\ \cdots\\ m_N\to\infty}} S_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(\mathbf{x}, f)$$

(*при независимом стремлении к бесконечности каждого индекса* $m_1, m_2, \ldots, m_N$).

Оба метода суммирования имеют свои преимущества и свои недостатки. При рассмотрении кратного тригонометрического ряда Фурье как ряда Фурье по ортонормированной системе естественно располагать его члены в порядке возрастания $|\mathbf{n}|$ и иметь дело со сферическими частичными суммами.

Прямоугольные частичные суммы применяются при исследовании поведения кратных степенных рядов около границы области сходимости. Следует отметить, что определение суммы ряда как предела прямоугольных сумм (в противоположность определению, опирающемуся на предел сферических сумм) не накладывает никаких ограничений на бесконечное множество частичных сумм этого ряда.

Прежде чем формулировать условия сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье, определим некоторые характеристики гладкости функции N переменных.

2. Модуль непрерывности и классы Гёльдера для функции N переменных. Пусть функция N переменных $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ определена и непрерывна в N-мерной области D.

[42] Альфред Принсгейм — немецкий математик (1850—1941).

Определение 1. *Для каждого $\delta>0$ назовем* ***модулем непрерывности*** *функции $f(x)$ в области D точную верхнюю грань модуля разности $|f(x')-f(x'')|$ на множестве всех точек x' и x'', которые принадлежат области D и расстояние $\rho(x', x'')$ между которыми меньше δ.*

Будем обозначать модуль непрерывности функции $f(x)$ в области D символом $\omega(\delta, f)$.

Определение 2. *Для любого $\varkappa$ из полусегмента $0<\varkappa\leqslant1$ будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит в области D классу Гёльдера $C^\varkappa$ с показателем $\varkappa$, и писать $f(x)\in C^\varkappa(D)$, если модуль непрерывности функции $f(x)$ в области D имеет порядок $\omega(x, f)=O(\delta^\varkappa)$.*

Пусть теперь α — *любое положительное* число, не обязательно целое. Это число мы всегда можем представить в виде $\alpha=r+\varkappa$, где r — целое, а $\varkappa$ принадлежит полусегменту $0<\varkappa\leqslant1$.

Определение 3. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит в области D классу Гёльдера C^α с показателем $\alpha>0$, и писать $f(x)\in C^\alpha(D)$, если все частные производные функции $f(x)$ порядка r непрерывны в области D и каждая частная производная порядка r принадлежит классу $C^\varkappa(D)$, введенному в определении 2.*

3. Условия абсолютной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье. Выясним условия абсолютной и равномерной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 8.17. *Если функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π по каждой из переменных) продолжена на все пространство E^N и обладает в E^N непрерывными производными порядка $s=[N/2]+1$, где $[N/2]$ — целая часть числа $N/2$, то кратный тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) абсолютно и равномерно во всем пространстве E^N.*

Доказательство. Договоримся обозначать символом $\left(\widehat{\dfrac{\partial^m f}{\partial x_k^m}}\right)_{\mathbf{n}}$ коэффициент Фурье производной $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ с номером $\mathbf{n}=(n_1, n_2, \ldots, n_N)$. Производя интегрирование по частям, получим $\left(\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}}=in_k\hat{f}_{\mathbf{n}}$ (для любого $k=1, 2, \ldots, N$), так что

$$\sum_{k=1}^{N}\left|\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}}\right|=|\hat{f}_{\mathbf{n}}|(|n_1|+|n_2|+\ldots+|n_N|)$$

и, следовательно,

$$|\hat{f}_{\mathbf{n}}|=(|n_1|+|n_2|+\ldots+|n_N|)^{-1}\sum_{k=1}^{N}\left|\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}}\right|. \tag{8.91}$$

Формула (8.91) справедлива не только для функции f, но и для каждой частной производной функции f до порядка $(s-1)$ включительно.

Отсюда сразу же вытекает соотношение

$$|\hat{f}_{\mathbf{n}}|\leqslant(|n_1|+|n_2|+\ldots+|n_N|)^{-s}\sum_{s_1+s_2+\ldots+s_N=s}\left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}}\right)_{\mathbf{n}}\right|, \tag{8.92}$$

сумма в правой части которого берется по всем целым неотрицательным $s_1, s_2, \ldots, s_N$, удовлетворяющим условию $s_1+s_2+\ldots+s_N=s$ (так что число слагаемых в этой сумме равно N^s). Из (8.92) в свою очередь следует[43], что

$$|\hat{f}_{\mathbf{n}}|\leqslant\frac{1}{2}(|n_1|+|n_2|+\ldots+|n_N|)^{-2s}+ \\ +\frac{N^s}{2}\sum_{s_1+\ldots+s_N=s}\left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}}\right)_{\mathbf{n}}\right|^2. \tag{8.93}$$

Учитывая, что $s=\dfrac{N}{2}+\varepsilon$, где $\varepsilon=1$ для четного N и $\varepsilon=1/2$ для нечетного N, и что

$$(|n_1|+|n_2|+\ldots+|n_N|)^{2s}=(|n_1|+|n_2|+\ldots+|n_N|)^{-N-2\varepsilon}\leqslant \\ \leqslant|n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}|n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\ldots|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}},$$

из (8.93) получим

$$|\hat{f}_n|\leqslant\frac{1}{2}|n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}|n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\ldots|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}+ \\ +\frac{N^s}{2}\sum_{s_1+s_2+\ldots+s_N=s}\left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}}\right)_n\right|^2. \tag{8.94}$$

Для абсолютной и равномерной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье (8.88) достаточно (в силу признака Вейерштрасса) доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_n|,$$

[43] Мы пользуемся неравенствами $|a|\cdot|b|\leqslant a^2/2+b^2/2$ и $(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_p|)^2\leqslant p(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_p^2)$.

но (в силу неравенства (8.94)) сходимость последнего ряда является прямым следствием сходимости для любого $k=1, 2, \ldots, N$ числового ряда $\sum\limits_{n_k=-\infty}^{\infty}|n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$ и сходимости для любых $s_1, s_2, \ldots, s_N$ ряда

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}}\right)_{\mathbf{n}}\right|^2,$$

вытекающей из неравенства Бесселя (8.90), записанного для непрерывной функции $\dfrac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}$.

Тот факт, что кратный тригонометрический ряд Фурье (8.88) сходится именно к функции $f(x)$, вытекает из полноты кратной тригонометрической системы[44]. В самом деле, если бы ряд (8.88) равномерно сходился к некоторой функции $g(x)$, то из возможности почленного интегрирования такого ряда вытекало бы, что все коэффициенты Фурье функции $g(x)$ совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Но тогда разность $[f(x)-g(x)]$ была бы ортогональна всем элементам кратной тригонометрической системы и (в силу полноты этой системы) равнялась бы нулю. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 8.17 может быть уточнена.

Теорема 8.18. *Если функция $f(x)$ периодична по каждой из переменных (с периодом 2π) и принадлежит в E^N классу Гёльдера C^α* при $\alpha>N/2$, *то кратный тригонометрический ряд Фурье $f(x)$ сходится (к этой функции) абсолютно и равномерно во всем пространстве E^N.*

Выяснение условий *неабсолютной* сходимости кратного тригонометрического ряда требует привлечения более тонкой техники.

[44] Полнота кратной тригонометрической системы сразу вытекает из полноты составляющих ее одномерных тригонометрических систем, произведением которых она является.

Глава 9

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Если функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой или на полупрямой и не является периодической ни с каким периодом, то эту функцию естественно раскладывать не в тригонометрический ряд Фурье, изученный в предыдущей главе, а в так называемый интеграл Фурье. Изучению такого разложения и посвящена настоящая глава.

Приведем сначала некоторые наводящие соображения. Пусть периодическая с периодом $2l$ и первоначально заданная на сегменте $[-l, l]$ функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right),$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,\quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt,\quad b_k= \\ =\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt.$$

Формально подставив выражения для a_k и b_k в разложение функции $f(x)$, получим

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kx\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt+\right. \\ \left.+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}kx\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt\right]=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+ \\ +\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{\pi}{l}kx\cos\frac{\pi}{l}kt+\sin\frac{\pi}{l}kx\sin\frac{\pi}{l}kt\right]dt,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}k(t-x)\,dt.$$

Предположим, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей прямой, т. е. сходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$, и перейдем чисто формально в равенстве для $f(x)$ к пределу при $l\to\infty$. При этом первое слагаемое правой части равенства стремится к нулю, а второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму для интеграла $\int\limits_0^\infty g(\lambda)\,d\lambda$ от функции

$$g(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

если положить $\lambda_k=\dfrac{\pi}{l}k$, $\Delta\lambda=\dfrac{\pi}{l}$.

Поэтому формальный предельный переход приводит к равенству

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Это равенство и называется формулой Фурье.

Если положить

$$a_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\quad b_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt,$$

то формулу Фурье можно записать в виде

$$f(x)=\int_0^\infty(a_\lambda\cos\lambda x+b_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda.$$

Перейдем теперь к строгому изложению теории преобразования Фурье.

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ

Всюду в дальнейшем подчиним функцию $f(x)$ требованию абсолютной интегрируемости на прямой $(-\infty, \infty)$, т. е. потребуем, чтобы сходился несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx. \tag{9.1}$$

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на прямой $(-\infty, \infty)$ классу L_1 и писать $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$, если функция $f(x)$ интегрируема (в собственном смысле Римана) на любом сегменте (говорят, что $f(x)$ — локально интегрируема) и если сходится несобственный интеграл* (9.1).

1. Вспомогательные утверждения. Заметим, что в дальнейшем комплексная функция $g(\lambda)$ вещественного аргумента λ будет рассматриваться как пара вещественных функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$: $g(\lambda)=u(\lambda)+iv(\lambda)$. Непрерывность $g(\lambda)$ в данной точке λ понимается как непрерывность в этой точке каждой из функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$.

Лемма 1. *Если $f\in L_1(-\infty, \infty)$, то для любой точки λ числовой прямой $(-\infty<\lambda<\infty)$ существует несобственный интеграл*

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}f(x)\,dx, \tag{9.2}$$

называемый преобразованием Фурье (или образом Фурье) функции $f(x)$. Функция $g(\lambda)$ непрерывна по λ в каждой точке числовой прямой.

Доказательство. Из равенства $|f(x)e^{i\lambda x}|=|f(x)|$ и из сходимости интеграла (9.1) вытекает существование несобственного интеграла $g(\lambda)$:

$$|g(\lambda)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}f(x)\,dx\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty.$$

Из признака Вейерштрасса (см. теорему 7.8) вытекает равномерная по λ сходимость интеграла (9.2); отсюда в силу непрерывности $e^{i\lambda x}$ по λ легко следует непрерывность $g(\lambda)$ на каждом сегменте, т. е. в каждой точке числовой прямой.

Лемма 2 (лемма Римана). *Пусть функции $f(x)$ — локально интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и $[a, b]$ — произвольный фиксированный интервал числовой прямой; тогда*

$$\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\to0$$

при $\lambda\to\infty$ (λ — вещественное число).

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как функция $f(x)$ по условию теоремы локально интегрируема на числовой прямой, то $f(x)$ интегрируема на заданном сегменте $[a, b]$. Поэтому для выбранного числа $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение T сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ ($k=1, 2, \ldots, n$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$), что для нижней суммы Дарбу s_T справедливы неравенства

$$0\leqslant\int_a^b f(x)\,dx-s_T<\varepsilon.$$

Напомним, что

$$s_T=\sum_{j=1}^{m}m_j\Delta x_j,$$

где

$$m_j=\inf_{x\in[x_{j-1}, x_j]}f(x),\quad \Delta x_j=x_j-x_{j-1}.$$

Рассмотрим кусочно постоянную на сегменте $[a, b]$ функцию $p(x)=m_j$, при $x\in[x_{j-1}, x_j]$, $j=1, 2, \ldots, n$, $p(x_0)=m_1$. Очевидно, $p(x)\leqslant f(x)$ на $[a, b]$ и для всех вещественных чисел λ

$$0\leqslant\left|\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx-\int_a^b p(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)-p(x)|\cdot|e^{i\lambda x}|\,dx= \\ =\int_a^b[f(x)-p(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-s_T<\varepsilon.$$

Но для фиксированного нами разбиения T

$$\int_a^b p(x)\,e^{i\lambda x}\,dx=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}m_j e^{i\lambda x}\,dx=\frac{1}{i\lambda}\sum_{j=1}^{n}(m_j e^{i\lambda x})\Big|_{x_{j-1}}^{x_j}\to0$$

при $\lambda\to\infty$. Таким образом, при $\lambda\to\infty$ интеграл $\int\limits_a^b p(x)\,e^{i\lambda x}\,dx$ стремится к нулю. Лемма доказана.

Лемма 3. *Преобразование Фурье $g(\lambda)$ функции $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$ стремится к нулю при $|\lambda|\to\infty$, т. е.*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}|g(\lambda)|=0.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу сходимости интеграла (9.1) можно выбрать число $A>0$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,dx+\int_{A}^{\infty}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

При таком A справедливо неравенство

$$|g(\lambda)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx\right|\leqslant\left|\int_{-A}^{A}f(x)e^{i\lambda x}dx\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Последний интеграл при достаточно большом $|\lambda|$ может быть оценен сверху числом $\frac{\varepsilon}{2}$ (см. лемму 2). Так как ε произвольно, то $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}|g(\lambda)|=0$. Лемма доказана.

В качестве следствия из леммы 3 получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx=0,\quad\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx=0.$$

2. Основная теорема. Формула обращения.

Определение 1. *Для каждой функции $f(x)$ из класса $L_1(-\infty,\infty)$ назовем предел*

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(t-x)}f(t)\,dt\right]d\lambda \tag{9.3}$$

(при условии, что этот предел существует) разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье.

Возникает вопрос о существовании разложения функции $f(x)$ в интеграл Фурье (9.3). Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 9.1. *Если функция $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ и если $f(x)$ удовлетворяет в данной точке x справа условию Гёльдера порядка α_1, где $0<\alpha_1\leqslant1$, а слева условию Гёльдера порядка α_2, где $0<\alpha_2\leqslant1$, то в данной точке x выполнено равенство*

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Таким образом, в каждой точке x, в которой значение $f(x)$ равно полусумме $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, в частности, в каждой точке непрерывности $f(x)$, справедливо равенство

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda, \tag{9.4}$$

в котором несобственный интеграл понимается в смысле главного значения, т. е. при симметричном стремлении пределов интегрирования к бесконечности.

Доказательство. Поскольку $g(\lambda)$ — непрерывная функция, то при любом $A>0$ существует интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}e^{-ix\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}f(t)\,dt\right]d\lambda.$$

В силу того что интеграл, заключенный в квадратные скобки, равномерно по λ сходится на любом сегменте $[-A, A]$, можно поменять порядок интегрирования относительно t и λ. Воспользовавшись равенствами

$$e^{i\lambda(t-x)}=\cos\lambda(t-x)+i\sin\lambda(t-x);$$

$$\int_{-A}^{A}\cos\lambda(t-x)\,d\lambda=\frac{2\sin A(t-x)}{(t-x)};\quad\int_{-\lambda}^{\lambda}\sin\lambda(t-x)\,d\lambda=0,$$

а также заменой $t=x+u$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-A}^{A}e^{i\lambda(t-x)}\,d\lambda\right]f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du.$$

Следовательно, при любом $A>0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du. \tag{9.5}$$

Поскольку

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}du=\frac{\pi}{2},\quad\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin Au}{u}du=\frac{\pi}{2},$$

то

$$\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x+0)\frac{\sin Au}{u}du;$$

$$\frac{f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(x-0)\frac{\sin Au}{u}du.$$

Вычитая последние два равенства из (9.5), получим

$$\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin Au}{u}du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}du. \tag{9.6}$$

Так как функция $f(x)$ удовлетворяет справа условию Гёльдера порядка α_1, то существует постоянная M_1 такая, что для достаточно малых положительных u будет выполнено неравенство

$$|f(x+u)-f(x+0)|\leqslant M_1u^{\alpha_1},\quad 0<\alpha_1\leqslant1. \tag{$*$}$$

Аналогично из условия Гёльдера слева порядка α_2 получаем неравенство

$$|f(x+u)-f(x-0)|\leqslant M_2|u|^{\alpha_2},\quad 0<\alpha_2\leqslant1, \tag{$**$}$$

для всех достаточно малых по модулю отрицательных u. Пусть $M=\max\{M_1, M_2\}$, $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Тогда неравенства ($*$) и ($**$) можно записать в виде одного:

$$|f(x+u)-f(x\pm0)|\leqslant M|u|^{\alpha} \tag{9.7}$$

при $|u|<\delta$, где $\delta>0$ достаточно мало.

Перепишем соотношение (9.6) в следующем виде:

$$\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-$$

$$-f(x+0)]\frac{\sin Au}{u}du+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{|u|\geqslant\delta}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du-$$

$$-\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}du-\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}du. \tag{9.8}$$

Пусть фиксировано произвольное $\varepsilon>0$, а δ выбрано из условия $\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}<\frac{\varepsilon}{4}$ и так, чтобы при $|u|<\delta$ было справедливо (9.7). Оценим первые два интеграла в правой части (9.8). Пользуясь (9.7), получим

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin Au}{u}du\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}|f(x+u)-f(x+0)|\frac{du}{u}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{\pi}\int_{0}^{\delta}u^{\alpha-1}du=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\delta}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}du\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|f(x+u)-f(x-0)|\frac{du}{|u|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|u|^{\alpha-1}du=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Поэтому в силу выбора δ

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin Au}{u}du\right|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int_{-}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}du\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.9}$$

Для оценки третьего интеграла в правой части (9.8) рассмотрим функцию

$$q(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{f(x+u)}{u} & \text{при } |u|\geqslant\delta;\\ 0 & \text{при } |u|<\delta.\end{cases}$$

Функция $q(u)$ принадлежит классу $L_1(-\infty,\infty)$, а поэтому в силу леммы Римана

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}q(u)\sin Au\,du=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{|u|\geqslant\delta}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du=0.$$

Но это и означает, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ существует число N_1 такое, что при $A\geqslant N_1$

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{|u|\geqslant\delta}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{9.10}$$

Далее,

$$\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}du=\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}du=\int_{A\delta}^{\infty}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\to0$$

при $A\to\infty$. Отсюда следует, что для фиксированного нами произвольного $\varepsilon>0$ и рассматриваемой точки x найдется N_2 такое, что

$$\left|\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}du\right|+\left|\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}du\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{9.11}$$

при $A\geqslant N_2$. Пусть $N=\max\{N_1, N_2\}$. Тогда, подставляя (9.9)–(9.11) в (9.8), получаем, что при $A\geqslant N$

$$\left|\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание. Требования, налагаемые на функцию $f(x)$ в теореме 9.1, можно несколько ослабить.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$, заданная в некоторой проколотой окрестности точки x, удовлетворяет в точке x условиям Дини, если:*

а) *в точке x существуют оба односторонних предела*

$$f(x+0)=\lim_{u\to0+0}f(x+u),\quad f(x-0)=\lim_{u\to0+0}f(x-u);$$

б) *для какого-нибудь положительного значения ε оба интеграла*

$$\int_{0}^{\varepsilon}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}du,\quad\int_{0}^{\varepsilon}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}du$$

сходятся абсолютно.

Ясно, что если функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x справа и слева условию Гёльдера

$$|f(x+u)-f(x\pm0)|\leqslant M|u|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant1,$$

то, поскольку

$$\frac{|f(x+u)-f(x\pm0)|}{u}\leqslant\frac{M}{|u|^{\alpha-1}},$$

для функции $f(x)$ выполнено и условие Дини.

Обратное, конечно, неверно. Можно доказать, что условие Дини тем не менее обеспечивает разложение функции $f(x)$ в интеграл Фурье в данной точке.

Сделаем некоторые выводы из полученных результатов. При условии $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ у функции $f(x)$ существует преобразование Фурье

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}\,dx;$$

обозначим его так: $g(\lambda)=F(f)$, где F — оператор Фурье, применяемый к функции f.

При выполнении условий теоремы 9.1 и условия $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, как мы доказали, функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье, т. е. справедлива формула

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Эту формулу называют обратным преобразованием Фурье. Обозначим ее так: $f(x)=\frac{1}{2\pi}F^{-1}(g)$, где F^{-1} — обратный оператор Фурье, применяемый к функции $g(\lambda)$, т. е. к образу Фурье функции $f(x)$.

Отметим, что хотя формулы преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье внешне похожи (см. формулы (9.2) и (9.4)), по существу они различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле (поскольку $f\in L_1(-\infty,\infty)$), а во второй, вообще говоря, лишь в смысле главного значения. Кроме того, равенство (9.2) — это определение функции $g(\lambda)$, а в равенстве (9.4) содержится утверждение о том, что интеграл равен исходной функции $f(x)$.

3. Примеры. Рассмотрим прямое и обратное преобразования Фурье для случаев четной и нечетной функций.

1°. Случай четной функции $f(x)$. Очевидно, в случае, если $f(x)=f(-x)$, из формулы (9.2) получаем

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)\,dx=2\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx.$$

Отсюда следует, что $g(\lambda)$ тоже четная функция. Поэтому

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}g(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda.$$

Первую из этих формул называют прямым косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$, а вторую — обратным косинус-преобразованием Фурье.

2°. Случай нечетной функции $f(x)$. Пусть $f(x)=-f(-x)$. Тогда, очевидно, получим прямое синус-преобразование Фурье

$$g(\lambda)=2\int_{0}^{\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx$$

и обратное синус-преобразование Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}g(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda.$$

3°. Пусть $f(x)=e^{-\gamma|x|}$, $\gamma>0$. Тогда

$$F(f)=g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\gamma|x|}e^{i\lambda x}\,dx=2\int_{0}^{\infty}e^{-\gamma x}\cos\lambda x\,dx.$$

С помощью двукратного интегрирования по частям находим

$$F(f)=g(\lambda)=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.$$

4°. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } |x|\leqslant a;\\ 0 & \text{при } |x|>a.\end{cases}$$

Тогда

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}\,dx=\int_{-a}^{a}e^{i\lambda x}\,dx=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Заметим, что $g(\lambda)$ не принадлежит $L_1(-\infty,\infty)$.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Установим некоторую связь между скоростью убывания функции $f(x)$ и гладкостью (дифференцируемостью) ее преобразования Фурье, а также между гладкостью функции и скоростью убывания ее преобразования Фурье.

Утверждение 1. *Пусть для целого неотрицательного k $(1+|x|)^kf(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Тогда преобразование Фурье $g(\lambda)$ функции $f(x)$ дифференцируемо k раз, причем его производную по λ любого порядка $m=1, 2, \ldots, k$ можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла (9.2), т. е. по формуле*

$$g^{(m)}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(ix)^me^{i\lambda x}\,dx,\quad m=1, 2, \ldots, k. \tag{9.12}$$

Доказательство. Для любого $m=1, 2, \ldots, k$ справедливо неравенство

$$|(e^{ix\lambda}f(x))^{(m)}_{\lambda}|=|e^{ix\lambda}(ix)^mf(x)|\leqslant(1+|x|^k)|f(x)|.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^k)|f(x)|dx$$

сходится. Из сходимости этого интеграла и из признака Вейерштрасса (см. теорему 7.8) вытекает равномерная по λ на каждом сегменте сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}\,dx$. Из теоремы 7.14 вытекает возможность продифференцировать этот интеграл по λ до порядка $m=1, 2, \ldots, k$, а также справедливость формулы (9.12). Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет в каждой точке x все производные до порядка $k\geqslant1$ включительно, причем $f(x)$ и все $f^{(m)}(x)$, $m=1, 2, \ldots, k$, абсолютно интегрируемы на $(-\infty,\infty)$ и для любого $m=0, 1, \ldots, k-1$ $f^{(m)}(x)\to0$ при $|x|\to\infty$ $(f^{(0)}(x)\equiv f(x))$.*

Тогда $|g(\lambda)|=o(|\lambda|^{-k})$ при $|\lambda|\to\infty$, где $g(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $A>0$, тогда

$$\int_{-A}^{A}f^{(k)}(x)e^{i\lambda x}\,dx=[f^{(k-1)}(x)e^{i\lambda x}]_{-A}^{A}-[f^{(k-2)}(x)(i\lambda)e^{i\lambda x}]_{-A}^{A}+$$

$$+\ldots+(-i)^k\lambda^k\int_{-A}^{A}f(x)e^{i\lambda x}\,dx.$$

Устремляя A к бесконечности и учитывая стремление к нулю производных функции $f(x)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^{(k)}(x)e^{i\lambda x}\,dx=(-i\lambda)^k\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}\,dx=(-i\lambda)^kg(\lambda).$$

Согласно лемме 3 преобразование Фурье функции $f^{(k)}(x)$ стремится к нулю. Поэтому

$$|g(\lambda)|=o(|\lambda|^{-k}).$$

Утверждение доказано.

Утверждение 3 (равенство Планшереля[1]). *Пусть функция $f(x)$ и ее вторая производная абсолютно интегрируемы на $(-\infty,\infty)$, $f(x)\to0$, $f'(x)\to0$ при $|x|\to\infty$. Пусть функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty,\infty)$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\,d\lambda,$$

где $g(\lambda)=F(f)$, $\psi(\lambda)=F(\varphi)$ — преобразования Фурье функций f и φ соответственно; черта над $\psi(\lambda)$ означает комплексное сопряжение.

Доказательство. По формуле обращения $f(x)=\frac{1}{2\pi}F^{-1}(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda$, причем согласно утверждению 2

$$|g(\lambda)|\leqslant c(1+|\lambda|)^{-2}.$$

Поэтому интеграл для $f(x)$ сходится абсолютно и равномерно (относительно x) на $(-\infty,\infty)$. Умножая обе части формулы для $f(x)$ на $\varphi(x)$ и интегрируя по x от $-A$ до A, получим

$$\int_{-A}^{A}f(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\varphi(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda\right]dx.$$

В силу равномерной по x на $[-A, A]$ сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda$ можно поменять порядок интегрирования в этой формуле справа:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\left[\int_{-A}^{A}\varphi(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right]}g(\lambda)\,d\lambda, \tag{9.13}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Согласно оценке

$$\left|\int_{-A}^{A}\varphi(x)e^{-i\lambda x}dx\right|\cdot|g(\lambda)|\leqslant c(1+|\lambda|)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|dx$$

[1] М. Планшерель — швейцарский математик (1885—1967).

и признаку Вейерштрасса интеграл в правой части (9.13) сходится равномерно по A на всей прямой. Применяя теорему 7.9, в (9.13) можно перейти к пределу при $|A|\to\infty$ под знаком интеграла. Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,\overline{\psi}(\lambda)\,d\lambda,$$

что и требовалось доказать.

В заключение докажем теорему Котельникова[2], играющую важную роль в теории радиосвязи. Для этого сделаем несколько предварительных пояснений. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[-l, l]$ и периодически (с периодом $2l$) продолжена на всю прямую; пусть эта функция абсолютно интегрируема на периоде. Разложим $f(x)$ в ряд Фурье (который в случае, если $f(x)$ удовлетворяет дополнительным условиям, сходится к ней):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{\pi}{l}kx}.$$

Функцию $f(x)$ называют *сигналом*, числа $\{a_0, a_k, b_k\}$ или $\{c_k\}$ — *спектром сигнала*, а величину $k/2l$ — *частотой сигнала* f. Разложение периодической функции в ряд Фурье называют *гармоническим анализом* данной функции. В случае периодической функции $f(x)$ ее спектр дискретен, т. е. состоит из не более чем счетного множества значений.

Если функция не является периодической, то ряд Фурье, как мы знаем, может быть заменен интегралом Фурье функции $f(x)$ и

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Функцию $f(x)$ можно по-прежнему называть *сигналом*, а функцию $g(\lambda)$ — *спектром сигнала* (в данном случае спектр непрерывен) и λ — *частотой сигнала*.

На практике важной задачей является задача восстановления сигнала по спектру. Подчеркнем, что часто нет необходимости знать спектр $g(\lambda)$ для всех частот λ, да и приборы улавливают спектр только в некотором диапазоне частот $|\lambda|\leqslant a$. (Например, человеческое ухо улавливает сигнал в диапазоне от 20 герц до 20 килогерц.)

Поэтому будем считать, что сигнал $f(x)$ (x — время, $-\infty<x<<\infty$) имеет финитный спектр, отличный от нуля лишь для частот

[2] В. А. Котельников (род. в 1908 г.) — советский академик, специалист в теории радиосвязи.

λ при $|\lambda|\leqslant a$. Таким образом, при $|\lambda|>a$ имеем $g(\lambda)\equiv 0$. Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} g(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda. \tag{9.14}$$

Разложим на сегменте $[-a, a]$ функцию $g(\lambda)$ в ряд Фурье:

$$g(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{i\frac{\pi}{a}k\lambda}.$$

Учитывая (9.14), получим

$$d_k=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} g(\lambda)\,e^{i\frac{\pi}{a}\lambda k}\,d\lambda=\frac{\pi}{a}f\left(-\frac{\pi}{a}k\right). \tag{9.15}$$

Подставляя эти коэффициенты в ряд для $g(\lambda)$, а затем $g(\lambda)$ — в интеграл (9.14), будем иметь

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\pi}{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right)e^{-i\lambda x+i\frac{\pi}{a}\lambda k}\right)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\int_{-a}^{a} e^{i\lambda\left(\frac{\pi}{a}k-x\right)}\,d\lambda.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 9.2 (теорема Котельникова). *Для сигнала $f(x)$ с финитным спектром $g(\lambda)$ справедливо соотношение*

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\frac{\sin a\left(x-\frac{\pi}{a}k\right)}{a\left(x-\frac{\pi}{a}k\right)}.$$

Теорема 9.2 показывает, что сигнал, описываемый функцией $f(x)$ с финитным спектром $g(\lambda)$, сосредоточенным в полосе частот $|\lambda|\leqslant a$, восстанавливается лишь по отсчетным значениям $f\left(\frac{\pi}{a}k\right)$, передаваемым через равные промежутки времени π/a.

§ 3. КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Здесь мы дадим лишь самые начальные понятия о кратном интеграле Фурье. Пусть функция N переменных $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $N\geqslant 2$, такова, что существует несобственный интеграл

$$\int\limits_{E^N}\!\!\cdots\!\!\int f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N.$$

Назовем *преобразованием (образом) Фурье* такой функции $f(x)$ величину

$$g(\lambda)=g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)=\int\limits_{E^N}\!\!\cdots\!\!\int f(x_1, x_2\ldots x_N)\,e^{i(x,\lambda)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N,$$

где (x, λ) означает скалярное произведение векторов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, т. е.

$$(x, \lambda)=\sum_{i=1}^{N} x_i\lambda_i.$$

Точно так же, как в § 1, можно показать, что $g(\lambda)$ является непрерывной функцией λ в E^N и стремится к нулю при $|\lambda|=\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2\right)^{1/2}\to 0$. Предел

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{E^N}\!\!\cdots\!\!\int g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)\,e^{-i(x,\lambda)}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\ldots d\lambda_N$$

при условии, что он существует, называется *разложением* функции $f(x)$ в *N-кратный интеграл Фурье*. С помощью перехода к пределу получается (так же, как в случае одной переменной x) формула обращения

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{E^N}\!\!\cdots\!\!\int g(\lambda)\,e^{-i(x,\lambda)}\,d\lambda,$$

где

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_N),\ \lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N).$$

ОГЛАВЛЕНИЕ