Определение 1: Система открытых множеств {O}, множество O – открытое, образует открытое покрытие множества E, если $\forall z \in E\, \exists O_z \in \{O\}: z \in O_z$

Лемма Гейне-Бореля: Из любого бесконечного открытого покрытия {O} компакта E можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 2: Функция f(z) называется дифференцируемой, если приращение $\Delta f = A\Delta z + \overline{o}(1)\Delta z$; из дифференцируемости следует непрерывность.

Условия Коши-Римана: $u'_x = v'_y; u'_y = -v'_x$

Th Для того, чтобы функция f(z)=u(x,y)+iv(x,y) была дифференцируема в точке z0=x0+iy0, необходимо и достаточно, чтобы функции u(x,y), v(x,y) были дифференцируемы в точке (x0,y0) и чтобы выполнялись условия Коши-Римана.

Определение 3: Отображение f(z) называется конформным в точке z0, если при этом отображении сохраняются углы между гладкими кривыми.

Определение 4: Функция f(z) называется аналитической в области D, если она в области D имеет производную $f'(z) \in C(D)$

Классы интегрируемых функций:

1. Класс непрерывных функций
2. Класс ограниченных по модулю функций, имеющих на кривой конечное число точек разрыва
3. Класс функций, обладающих I-свойством, т е для любого e>0 найдётся конечное число спрямляемых дуг, принадлежащих данной кривой AB, и таких что сумма длин этих дуг меньше e.

Th Жордана: Замкнутая жорданова кривая Г разбивает комплексную область $\overline{C}$ на 2 области. Одна область $D_\Gamma = \operatorname{int} \Gamma$ (внутренние точки Г) – ограниченная область и её границей является Г, вторая область $\overline{C} \setminus \overline{D_\Gamma}$ - неограниченная, содержит ∞ и её границей также является Г.

Определение 5: Область $D \subset C$ - односвязная область, если её граница dD – замкнутое, связное множество. Область D называется конечно-связной или n-связной, n>1, если её граница состоит из конечного (из n) числа замкнутых связных компонент. В любом другом случае область D – бесконечно связная.

Интегральная теорема Коши: Пусть D – односвязная область и $f(z) \in \mathrm{A}(D)$. Тогда для любого контура $\Gamma \subset D$

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Обобщение Th Коши для конечно-связной области: Если D – ограниченная, конечно-связная область, граница которой состоит из (n+1) компонент: $\partial D = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$, где $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ не пересекаются и внутри Г содержатся $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Тогда если $f(z) \in A(\overline{D})$, то

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0; \int_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

Лемма Жордана: Пусть $\overline{D} = \{z : \operatorname{Im} z \ge a\}, f(z) \in C(\overline{D} \cap \{|z| \ge R_0\}), \lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ z\in D}} f(z) = 0.$ Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z)dz = 0, где\, m > 0, C_R = \overline{D} \cap \{z : |z| = R\}$$

Интегральная формула Коши: Пусть D – область, функция $f(z) \in \mathrm{A}(D)$, контур $\Gamma \subset D$, причём $\operatorname{int} \Gamma(D_\Gamma)$ также принадлежит D. Тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0}$$

Th Интеграл типа Коши – F(z) – есть аналитическая функция, при этом она имеет производную любого порядка, равную $F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{(n+1)}}$

Оператор Лапласа: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Определение 6: Функция u(x,y) дважды непрерывно дифференцируемая в области D и удовлетворяющая условию $\Delta u=0$ называется гармонической.

Принцип максимума модуля аналитической функции: Пусть $a(я)\in \mathrm{A}(D), M=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|, f(z)\neq const$, тогда для любой точки $z\in D$ слкдует |f(z)|<M

Следствие: Пусть D – ограниченная область и $f(z)\in \mathrm{A}(D)\cap C(\overline{D})$. Тогда |f(z)| достигает максимума на границе области.

Принцип максимума гармонической функции:Пусть функция u(x,y) гармонична в области D, $u(x,y)\neq const, M=\sup\limits_{D}u(x,y), m=\inf\limits_{D}u(x,y)$. Тогда для любой точки $(x,y)\in D$ справедливы неравенства m<u(x,y)<M

Следствие: Пусть D – ограниченная область и $u(x,y)\in C(\overline{D})$ и гармонична в D. Тогда максимум и минимум функции u(x,y) достигается на границе области D.

Th Лиувилля: Пусть $f(z)\in \mathrm{A}(C)$ и существуют $\alpha>0, M>0:\forall z\in C\to|f(z)|\leq M|z|^{\alpha}$. Тогда f(z) – многочлен, степень которого не превышает целой части α - [α]

Определение 7: Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно внутри области D, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на любом компакте $K\subset D$.

Первая Th Вейерштрасса: Пусть $\forall n\in N\, f_n(z)\in A(D)\, и\, \forall\, компакта\, K\subset D$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно к f(z) на K. Тогда

1) $f(z)\in A(D)$

2) $f^{(k)}(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно внутри области D.

Вторая Th Вейерштрасса: Пусть D-ограниченная область, для любого $n\in N\, f_n(z)\in \mathrm{A}(D)\cap C(\overline{D})$., ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно на границе dD области D. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно в ($\overline{D}$) к некоторой функции $f(z)\in \mathrm{A}(D)\cap C(\overline{D})$.

Первая Th Абеля: Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1\neq z_0$, то он сходится в точке $z:|z-z_0|<|z_1-z_0|$, причём абсолютно.

Th Коши-Адамара: Если R=0 (т е $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ сходится только в точке z0. Если R=inf (т е $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$), то ряд сходится абсолютно во всей комплексной плоскости C и равномерно внутри C. Если 0<R<inf, то ряд сходится абсолютно внутри круга $|z - z_0| < R$, равномерно внутри круга; вне замкнутого круга расходится.

Th Тейлора: Пусть функция f(z)$\in$A(D) и точка z0$\in$D. Пусть $\rho = \rho(z_0, \partial D) > 0$ (ρ может равняться inf). Тогда функцию f(z) можно разложить в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in \{z : |z - z_0| < \rho\}$, ряд сходится равномерно внутри круга, при этом $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Из вида коэффициентов a_n следует, что разложение функции f(z) в степенной ряд единственно.

Определение 8: Точка z0 называется нулём кратности k аналитической функции f(z), если $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Th единственности: Пусть функции f(z), g(z)$\in$A(D), последовательность $\{z_n\} \in D, z_i \neq z_j, i \neq j$ и такая, что существует предельная точка z0$\in$D. Тогда, если $f(z_k) = g(z_k) \forall k \in N, то\, f(z) \equiv g(z), z \in D$

Th (принцип непрерывности): Пусть функции f1(z) и f2(z) таковы, что $f_1(z) \in A(D_1) \cap C(D_1 \cup \Gamma), f_2(z) \in A(D_2) \cap C(D_2 \cup \Gamma), f_1(z) = f_2(z), z \in \Gamma$

Тогда существует функция $f(z) \in A(D), D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$. Функция f(z) имеет вид

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), z \in D_1 \\ f_2(z), z \in D_2 \\ f_1 = f_2, z \in \Gamma \end{cases}$$

При этом говорят, что функция f1(z) аналитически продолжается в область D2 через границу Γ.

Определение 9: Точка $\varsigma \in \{|z - z_0| = R\}$ называется правильной точкой или регулярной для суммы ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, если существует функция $F(z) \in A(U_\delta(\varsigma)), \delta > 0$ и такая, что $f(z) = F(z), z \in U_\delta(\varsigma) \cap \{|z - z_0| < R\}$. В любом другом случае точка $\varsigma \in \{|z - z_0| = R\}$ называется особой точкой, лежащей на границе круга сходимости степенного ряда.

Th Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ограничен (0<R<inf), тогда на границе круга сходимости лежит, по крайней мере, одна особая точка.

Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, где {an} – последовательность комплексных чисел, называется *рядом Лорана*. Он сходится в точке z, если сходятся одновременно два ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (правильная часть) и $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ (главная часть)

Th Лорана: Пусть функция f(z)$\in$A(r<|z-z0|<R), тогда функцию f(z) можно разложить в ряд $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, r < |z - z_0| < R$, ряд сходится равномерно внутри кольца; разложение в ряд Лорана единственно, при этом

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, r < \rho < R$$

<классификация особых точек>

Th Сохоцкого-Вейерштрасса: Пусть точка z0-существенно особая точка функции f(z), тогда $\overline{\mathrm{E}_\delta} = \overline{C}$, где $\overline{\mathrm{E}_\delta}$ - множество значений функции f(z) в окрестности $0 < |z - z_0| < \delta < r$

Определение 10: Функция f(z) называется мероморфной в области D, если в области D функция f(z) имеет только изолированные особые точки, являющиеся полюсами.

Определение 11: Вычетом функции f(z) в точке z0 называется интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\xi)d\xi$ и обозначается $\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\xi)d\xi$

Th о вычетах: Пусть ограниченная область D с границей dD, являющейся контуром, такова, что точки z1,z2,…,zn$\in$D – изолированные особые точки функции f(z) и $f(z) \in \mathrm{A}(D \setminus \{z_1, z_2, ..., z_n\}) \cap C(\partial D)$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} f(z)$$