I. Интегралы, зависящие от параметра.

1. Собственные ИЗП

$I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ – ИЗП (1)

Непрерывность: Пусть функция f(x,y) непрерывна в прямоугольнике П={a≤x≤b,c≤y≤d}. Тогда интеграл (1) является непрерывной функцией параметра y на [c,d]

Интегрирование: Если функция f(x,y) непрерывна в прямоугольнике П={a≤x≤b,c≤y≤d}, то функция (1) интегрируема на сегменте [c,d]. Кроме того, справедлива формула

$$\int\limits_c^d I(y)dy=\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Дифференцируемость: Пусть функция f(x,y) непрерывна на прямоугольнике П и имеет на нём непрерывную производную $f'_y(x,y)$. Тогда определяемая равенством (1) функция I(y) дифференцируема на [c,d] и $I'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$

Случай переменных пределов интегрирования:

$I(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$ (2)

Непрерывность: Пусть функция f(x,y) непрерывна на прямоугольнике П, а функции a(y) и b(y) непрерывны на сегменте [c,d]. Тогда функция (2) непрерывна на [c,d].

Дифференцируемость: Пусть функция f(x,y) непрерывна вместе с производной $f'_y(x,y)$ на прямоугольнике П, а функции a(y), b(y) дифференцируемы на [c,d]. Тогда интеграл I(y), определяемый равенством (2), дифференцируем по y на [c,d] и справедливо равенство

$$I'(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx+f[b(y),y]b'(y)-f[a(y),y]a'(y)$$

2. Несобственные ИЗП

$I(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ (3)

Определение 1: Функция *F(x,y) стремится равномерно относительно y на множестве X к функции G(y)* при $x\to+\infty$, если для любого ε>0 найдётся такое число x0, что для любых x, принадлежащих X и удовлетворяющих условию x>x0, и для любых y из Y выполняется неравенство |F(x,y)-G(y)|<ε

Определение 2: Несобственный интеграл (3) называется *сходящимся равномерно по параметру y на множестве Y*, если функция $F(t,y)=\int\limits_a^t f(x,y)dx$ равномерно на множестве Y стремится к предельной функции I(y) при $t\to+\infty$

Критерий Коши: Для того, чтобы несобственный интеграл (3) сходился равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε>0 существовало такое число t0≥a, что при всех t', t'', превосходящих t0, и при всех y из Y было справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

Признак Вейерштрасса: Пусть при всех y из Y и всех x, принадлежащих полуоси $[a_1,\infty)$, где a1>a, для функции f(x,y) выполнено неравенство $\left|f(x,y)\le\varphi(x)\right|$, где $\varphi(x)$ -

интегрируемая (в несобственном смысле) на $[a,\infty)$ функция. Тогда интеграл (3) сходится равномерно.

Признак Дирихле-Абеля: Если интеграл $F(t,y)=\int_a^t f(x,y)dx$ равномерно ограничен, т. е. при всех t>a и y из Y выполнено условие |F(t,y)|≤M, а g(x) ограничена и монотонно стремится к 0 при $x\to+\infty$, то интеграл $\int_a^\infty f(x,y)g(x)dx$ сходится равномерно.

Непрерывность: Пусть f(x,y) как функция двух переменных непрерывна при x≥a и y из [c,d], а интеграл (3) равномерно на [c,d] сходится. Тогда функция I(y) непрерывна на [c,d].
Th: Пусть f(x,y) как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна при $x\in[a,\infty)$, и y, принадлежащем [c,d]. Пусть далее интеграл (3) непрерывен по y на [c,d]. Тогда этот интеграл сходится равномерно на [c,d].
Интегрирование: Пусть f(x,y) как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна при $x\in[a,\infty)$, и y, принадлежащем [c,d], и пусть интеграл (3) равномерно сходится. Тогда функция I(y) интегрируема на [c,d] и имеет место формула:

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d dy\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty dx\int_c^d f(x,y)dy$$

Th: Пусть f(x,y) как функция двух переменных непрерывна и неотрицательна в области a≤x<∞, c≤y<∞, интеграл $I(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ непрерывен на полупрямой [c, ∞), а интеграл $K(x)=\int_c^\infty f(x,y)dy$ непрерывен на полупрямой [a, ∞). Тогда из сходимости одного из двух интегралов $\int_c^\infty I(y)dy$ и $\int_a^\infty K(x)dx$ следует сходимость другого из этих интегралов и справедливость равенства $\int_c^\infty I(y)dy=\int_a^\infty K(x)dx$

Дифференцируемость: Пусть функция f(x,y) и её производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в области a≤x<∞, c≤y<d. Пусть, далее, интеграл (3) сходится в каждой точке y сегмента [c,d], а интеграл $\int_a^\infty f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно на сегменте [c,d]. Тогда при любом y из [c,d] функция I(y) имеет производную, причём $I'(y)=\int_a^\infty f'_y(x,y)dx$

Определение 3: Несобственный интеграл 2го рода $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ называется равномерно сходящимся по параметру y на множестве Y, если для t, удовлетворяющего a<t<b, функция $F(t,y)=\int_t^b f(x,y)dx$ при $t\to a+0$ стремится к функции I(y) равномерно относительно $y\in Y$

Применение теории ИЗП:

Интеграл Дирихле: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$; интеграл Пуассона: $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

3. Интегралы Эйлера

Интеграл первого рода (В-функция): $B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$

Интеграл второго рода (Г-функция): $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

1. Свойства Г-функции

Сходится при $\alpha>0$, сходится равномерно при $\alpha\ge\alpha_0>0$

Г(α) непрерывна при $\alpha>0$

Г(α) бесконечно дифференцируема при $\alpha>0$, $\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int\limits_0^\infty \ln^n x * x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

Формула приведения: $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha);\Gamma(n+1)=n!$

2. Свойства В-функции

Сходится при $\alpha>0$ и любом β

Сходится равномерно при $\alpha\ge\alpha_0>0$ >0 и $\beta\ge0$

Симметричность: $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\mathrm{B}(\beta,\alpha)$

Формула приведения: $\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$

3. Связь между эйлеровыми интегралами

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

4. Формула Стирлинга

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),\ \omega\in[-1,1]$$

II. Ряды Фурье.

<определения из линейной алгебры пропущены>

Определение 1: *Ряд Фурье* элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$ - ряд вида $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k\psi_k$ (1) , в котором через f_k обозначены постоянные числа, называемые *коэффициентами Фурье* элемента f и определяемые равенствами $f_k=(f,\psi_k), k=1,2,...$

Th Среди всех сумм вида $\sum\limits_{k=1}^n C_k\psi_k$ (2) наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма ряда Фурье (1) элемента f.

Неравенство Бесселя: $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k^2\le\|f\|^2$

Определение 2: Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется *замкнутой*, если для любого элемента f данного евклидова пространства и для любого положительного числа ε найдётся такая линейная комбинация (2) конечного числа элементов $\{\psi_k\}$, отклонение которой от f (по норме пространства) меньше ε.

Равенство Парсеваля: если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ замкнута, то $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k^2=\|f\|^2$

Th Если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ замкнута, то ряд Фурье любого элемента сходится к нему по норме рассматриваемого евклидова пространства: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\| = 0$

Определение 3: Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется *полной*, если, кроме нулевого элемента, не существует никакого другого элемента f данного евклидова пространства, который был бы ортогонален ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$.

Th Всякая замкнутая ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является полной.

Th Для всякой полной (и тем более замкнутой) ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ два различных элемента рассматриваемого евклидова пространства f и g не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

Тригонометрический многочлен: $T(x) = \overline{C}_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{C}_k \cos kx + \overline{\overline{C}}_k \sin kx$

Th Вейерштрасса: Если функция f(x) непрерывна на сегменте [-π, π] и удовлетворяет условию f(-π)=f(π), то эту функцию можно равномерно на указанном сегменте приблизить тригонометрическими многочленами, т. е. для этой f(x) и $\forall\varepsilon > 0 \exists \mathrm{T}(x)$ такой, что сразу для всех x из [-π, π] справедливо |f(x)-T(x)|< ε

Th Для того, чтобы функцию f(x) можно было равномерно на сегменте [-π, π] приблизить тригонометрическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы функция f(x) была непрерывной на сегменте [-π, π] и удовлетворяла условию f(-π)=f(π).

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, ...$ (3)

Th Тригонометрическая система (3) является замкнутой, т. е. для любой кусочно непрерывной на сегменте [-π, π] функции f(x) и любого положительного числа ε найдётся тригонометрический многочлен T(x) такой, что

$$\|f(x) - \mathrm{T}(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \mathrm{T}(x)]^2 dx} < \varepsilon$$

<следствия>

Определение 4: Функция f(x) имеет на сегменте [a,b] *кусочно непрерывную производную*, если производная f'(x) существует и непрерывна всюду на [a,b], за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых f(x) имеет конечные левое и правое предельные значения.

Определение 5: Функция f(x) имеет на сегменте [a,b] *кусочно непрерывную производную порядка n≥1*, если функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную в смысле определения 4.

Th Если функция f(x) непрерывна на [-π, π], имеет на нём кусочно непрерывную производную и удовлетворяет условию f(-π)=f(π), то тригонометрический ряд Фурье функции f(x) сходится к этой функции равномерно на [-π, π]. Более того, ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции f(x), сходится равномерно на [-π, π].

Th Пусть функция f(x) и все её производные до некоторого порядка m≥1 непрерывны на [-π, π] и удовлетворяют условиям $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi); i = 0,...,m$. Пусть, кроме того, функция f(x) имеет на [-π, π] кусочно непрерывную производную порядка m+1. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f(x) можно m раз почленно дифференцировать на [-π, π].

Более точные условия равномерной сходимости и сходимости в данной точке.
Определение 6: Для каждого $\delta > 0$ назовём *модулем непрерывности* функции f(x) на [a,b] точную верхнюю грань модуля разности |f(x')-f(x'')| на множестве всех x' и x'', принадлежащих [a,b] и удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$

Определение 7: Будем говорить, что функция f(x) принадлежит на [a,b] *классу Гёльдера* C^α с показателем α (0<$\alpha \leq$1), если модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ функции f(x) на [a,b] имеет порядок $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$

Лемма Римана: Если функция f(x) кусочно непрерывна на [-π,π] и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую и если эта функция обращается в 0 на некотором сегменте [a,b], то для любого положительного числа δ, меньшего (b-a)/2, тригонометрический ряд Фурье функции f(x) равномерно на [a+δ,b-δ] сходится к 0.
Th: Пусть функция f(x) кусочно непрерывна на [-π,π] и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, и пусть [a,b]-некоторый сегмент. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции f(x) при любом положительном δ, меньшем (b-a)/2, сходился равномерно на [a+δ,b-δ], достаточно, чтобы существовала кусочно непрерывная на сегменте [-π,π] и периодическая (с периодом 2π) функция g(x), обладающая равномерно сходящимся на [a,b] тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая на [a,b] с функцией f(x).
Th Пусть функция f(x) кусочно непрерывна на [-π,π] и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую, и пусть x0-некоторая точка прямой. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции f(x) сходился в точке x0, достаточно, чтобы существовала кусочно непрерывная на сегменте [-π,π] и периодическая (с периодом 2π) функция g(x), обладающая сходящимся в точке x0 тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая с f(x) в как угодно малой δ-окрестности x0.
Th Если функция f(x) принадлежит на [-π,π] классу Гёльдера C^α с каким угодно положительным α (0<$\alpha \leq$1) и если, кроме того, f(-π)=f(π), то тригонометрический ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на сегменте [-π,π].
Th Дини-Липшица: Для равномерной на [-π,π] сходимости тригонометрического ряда Фурье функции f(x) достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию f(-π)=f(π) и чтобы её модуль непрерывности на [-π,π] имел порядок

$$\omega(x, f) = o\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}\right)$$

Th Пусть функция f(x) кусочно непрерывна на [-π,π] и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую. Пусть далее на некотором [a,b], имеющем длину меньше 2π, эта функция принадлежит классу Гёльдера C^α с произвольным положительным α (0<$\alpha \leq$1). Тогда для любого δ из 0<δ<(b-a)/2 тригонометрический ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на [a+δ,b-δ].
Определение 8: Будем называть функцию f(x) *кусочно гёльдеровой на сегменте [a,b]*, если эта функция непрерывна на [a,b] и этот сегмент при помощи конечного числа точек a=x0<x1<…<xn=b разбивается на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ (k=1,…,n), на каждом из которых функция f(x) принадлежит классу Гёльдера C^α с некоторым положительным α_k (0<$\alpha_k \leq$1). При этом в определении класса Гёльдера на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ в качестве значений функции на концах сегмента следует брать предельные значения $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_k - 0)$

Определение 9: Будем называть функцию f(x) *кусочно гладкой на сегменте [a,b]*, если эта функция непрерывна на [a,b] и имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную.
Th Пусть кусочно гёльдеровая на [-π, π] функция f(x) периодически (с периодом 2π) продолжена на всю прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f(x) сходится в каждой точке x прямой к значению f(x)=[f(x+0)+f(x-0)]/2, причём сходимость этого ряда является равномерной на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости функции f(x).
Определение 10: Будем говорить, что функция *f(x) удовлетворяет в данной точке справа (слева) условию Гёльдера порядка a*, если функция имеет в точке x правое (левое) предельное значение и если существует такая постоянная M, что для всех достаточно малых положительных (отрицательных) t справедливо неравенство

$$\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t^{\alpha}} \le M \quad \left(\frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{|t|^{\alpha}} \le M \right)$$

Th: Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной и периодической (с периодом 2π) функции f(x) сходился в данной точке x числовой прямой, достаточно, чтобы функция f(x) удовлетворяла в точке x справа условию Гёльдера какого-либо положительного порядка α_1 и в точке x слева условию Гёльдера какого-либо положительного порядка α_2 (тем более достаточно, чтобы функция f(x) имела в точке x правую и левую производные).

III. Преобразование Фурье.

Пусть сходится несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \quad (1)$$

Определение 1: Будем говорить, что функция f(x) *принадлежит на прямой* $(-\infty,\infty)$ *классу* L_1, если функция f(x) интегрируема (в собственном смысле Римана) на любом сегменте и если сходится несобственный интеграл (1).
Лемма 1. Если $f \in L_1(-\infty,\infty)$, то для любой точки λ числовой прямой существует несобственный интеграл $g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx$, называемый *преобразованием Фурье* (или *образом Фурье*) функции f(x). Функция g(λ) непрерывна по λ в каждой точке числовой прямой.
Лемма 2 (лемма Римана). Пусть функция f(x) – локально интегрируема на $(-\infty,\infty)$ и [a,b] – произвольный фиксированный интервал числовой прямой, тогда

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

Лемма 3. Преобразование Фурье g(λ) функции $f \in L_1(-\infty,\infty)$ стремится к 0 при $|\lambda| \to \infty$
Определение 2. Для каждой функции f(x) из класса $L_1(-\infty,\infty)$ назовём предел

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-x)}f(t)dt\right]d\lambda$$

(при условии его существования) *разложением функции f(x) в интеграл Фурье.*

Th Если функция $f \in L_1(-\infty,\infty)$ и если f(x) удовлетворяет в данной точке x справа условию Гёльдера порядка α_1, где $0<\alpha_1 \le 1$, а слева условию Гёльдера порядка α_2, где $0<\alpha_2 \le 1$, то в данной точке выполнено равенство

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Таким образом, в каждой точке x, в которой значение f(x) равно полусумме $f(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, в частности, в каждой точке непрерывности f(x), справедливо равенство $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$, в котором несобственный интеграл понимается в смысле главного значения, т. е. при симметричном стремлении пределов интегрирования к бесконечности.

Определение 3. Будем говорить, что функция f(x), заданная в некоторой проколотой окрестности точки x, удовлетворяет в точке x *условиям Дини*, если

1) в точке x существуют оба односторонних предела

$f(x+0)=\lim\limits_{u\to 0+0} f(x+u), f(x-0)=\lim\limits_{u\to 0+0} f(x-u)$

2) для какого-нибудь положительного значения ε оба интеграла

$\int\limits_0^{\varepsilon}\dfrac{f(x+u)-f(x+0)}{u}du, \int\limits_0^{\varepsilon}\dfrac{f(x-u)-f(x-0)}{u}du$

сходятся абсолютно.

Свойства преобразования Фурье:

Утверждение 1: Пусть для целого неотрицательного k $(1+|x|)^k f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Тогда преобразование Фурье g(λ) функции f(x) дифференцируемо k раз, причём его производную по λ любого порядка m=1,…,k можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, т е $g^{(m)}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(ix)^m e^{i\lambda x}dx$.

Утверждение 2: Пусть функция f(x) имеет в каждой точке x все производные до порядка k≥1 включительно, причем f(x) и все $f^{(m)}(x)$, m=1,…,k, абсолютно интегрируемы на $(-\infty,\infty)$ и для любого m=0,…,k-1 $f^{(m)}(x)\underset{|ч|\to\infty}{\to} 0$. Тогда $|g(\lambda)|\underset{|\lambda|\to\infty}{=} o(|\lambda|^{-k})$, где g($\lambda$) - преобразование Фурье функции f(x).

Утверждение 3 (равенство Планшереля) : Пусть функция f(x) и её вторая производная абсолютно интегрируемы на $(-\infty,\infty)$, $f(x)\underset{|x|\to\infty}{\to} 0, f'(x)\underset{|x|\to\infty}{\to} 0$. Пусть функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty,\infty)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}d\lambda,$$

где g(λ)=F(f), $\psi(\lambda)=F(\varphi)$ - преобразования Фурье функций f и φ соответственно; черта означает комплексное сопряжение.