ОГЛАВЛЕНИЕ

§1 Понятие об общем ряде Фурье в бесконечномерном псевдоевклидовом пространстве

Определение 1. *Линейное пространство называется* е в к л и д о в ы м , *если 1) известно правило, посредством которого любым двум элементам f и g этого пространства ставится в соответствие число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (f,g) , 2) это правило подчинено четырем аксиомам*

$1^0.(f,g)=(g,f)$ *для любых элементов f и g.*

$2^0.(f+h,g)=(f,g)+(h,g)$ *для любых элементов f, g и h.*

$3^0.(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$ *для любого числа λ и любых элементов f и g.*

$4^0.(f,f)\geq 0,$ $\boxed{\text{причем } (f,f)=0 \text{ только если } f - \text{нулевой элемент.}}$

Определение 2. *Линейное пространство называется* п с е в д о е в к л и д о в ы м , *если выполнены все утверждения определения 1 за исключением утверждения, взятого в рамочку.*

Конечно, всякое евклидово пространство (ЕП) является псевдоевклидовым пространством (ПЕП) , и всякое утверждение, справедливое в ПЕП, будет справедливо и в ЕП.

Классический пример ПЕП - множество $L[a,b]$ всех функций $f(x)$, интегрируемых на сегменте $[a,b]$ по Риману, со скалярным произведением , определяемым равенством

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{1}$$

(произведение двух интегрируемых по Риману функций является интегрируемой по Риману функцией). Выполнение аксиомы 1^0 очевидно, Справедливость аксиом 2^0 и 3^0 вытекает из линейных свойств интеграла. Справедливость аксиомы 4^0 (без утверждения в рамочке) вытекает из известной оценки интеграла (из того, что из $f^2(x)\geq 0$ вытекает, что $\int_a^b f^2(x)\,dx\geq 0$).

Легко убедиться в том, что утверждение в рамочке не выполнено, и пространство $L[a,b]$ является только ПЕП и не является ЕП.

Классическим примером ЕП является множество $\widehat{C}[a,b]$ всех кусочно-непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций $f(x)$, каждая из которых в любой точке x_i сегмента $[a,b]$ (в том числе и в точке разрыва) удовлетворяет условию

$$f(x_i)=\frac{f(x_i+0)+f(x_i-0)}{2}. \tag{*}$$

Скалярное произведение определим равенством (1). Нужно проверить справедливость только утверждения в рамочке. Пусть $f(x)$ имеет разрывы первого рода в конечном числе точек $x_1,x_2,...,x_{n-1}$, лежащих внутри $[a,b]$. Положим $a=x_0$, $b=x_n$. Тогда в силу свойства аддитивности интеграла

$$(f,f)=\int_a^b f^2(x)\,dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx.$$

Поэтому из равенства $(f,f) = 0$ вытекает, что для каждого $i = 1,2,...,n$ $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx = 0$ и поскольку на $[x_{i-1}, x_i]$ функция $f^2(x)$ непрерывна (в граничных точках односторонне непрерывна), то из (*) и из известной теоремы первого курса $f(x) \equiv 0$ на $[x_{i-1}, x_i]$ (для любого $i = 1,2,...,n$) вытекает, что $f(x_i) = 0$ и в любой точке разрыва x_i, т.е. $f(x) \equiv 0$ на всем $[a,b]$.

Определение 3. *Линейное пространство называется* н о р м и р о в а н н ы м *если 1) известно правило, посредством которого любому элементу f ставится в соответствие число, называемое* н о р м о й *этого элемента и обозначаемое символом $\|f\|$, 2)это правило подчинено трем аксиомам*

$$1^0.\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \; (\textit{неравенство треугольника или Минковского}).$$

$$2^0.\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \; \textit{для любого числа } \lambda \textit{ и любого элемента } f.$$

$$3^0.\|f\| \geq 0, \; \boxed{\textit{причем } \|f\| = 0, \textit{ только, если } f - \textit{нулевой элемент.}}$$

Определение 4. *Линейное пространство называется* п с е в д о н о р м и р о в а н н ы м , *если выполнены все утверждения определения 3, за исключением взятого в рамочку.*

Теорема из линейной алгебры: во всяком ПЕП для любых двух элементов f и g справедливо неравенство Коши-Буняковского

$$|(f,g)| \leq \sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)}. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два возможных случая: 1) справедливы два равенства $(f,f) = 0$ и $(g,g) = 0$; 2) нарушается хотя бы одно из указанных двух равенств.

В случае 1) в силу аксиомы 4^0 (без утверждения в рамочке) $(f+g, f+g) \geq 0$ и $(f-g, f-g) \geq 0$. Из последних двух неравенств и из того, что в силу аксиом 1^0 и 2^0

$$(f+g, f+g) = (f,f) + 2(f,g) + (g,g), \quad (f-g, f-g) = (f,f) - 2(f,g) + (g,g),$$

получим, используя равенства $(f,f) = 0$ и $(g,g) = 0$, что с одной стороны $(f,g) \geq 0$, а с другой стороны $(f,g) \leq 0$. Отсюда следует, что $(f,g) = 0$, и потому неравенство (2) справедливо со знаком $=$.

В случае 2), предположив ради определенности, что $(f,f) \neq 0$, т.е. $(f,f) > 0$, мы получим, что условием неотрицательности квадратного трехчлена

$$(\lambda f - g, \lambda f - g) = \lambda^2(f,f) - 2\lambda(f,g) + (g,g)$$

является неположительность его дискриминанта, которая эквивалентна неравенству $(f,g)^2 \leq (f,f)\cdot(g,g)$, т.е. эквивалентна неравенству (2).

Теорема 1. *Всякое ПЕП (соотвественно ЕП) превращается в псевдонормированное (соотвественно нормированное), если в нем ввести норму по правилу*

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}. \qquad (3)$$

Действительно, справедливость аксиомы 3^0 для псевдонормированного пространства (включая рамочку) вытекает из справедливости аксиомы 4^0 ПЕП (включая рамочку).

Справедливость аксиомы 2^0 проверяется тривиально: $\|\lambda f\| = \sqrt{(\lambda f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda^2(f,f)} = |\lambda|\sqrt{(f,f)} = |\lambda|\|f\|$.

Справедливость аксиомы 1^0 докажем с помощью неравенства Коши-Буняковского (2):

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g, f+g)} = \sqrt{(f,f) + 2(f,g) + (g,g)} \leq$$

$$\sqrt{(f,f) + 2\sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)} + (g,g)} =$$

$$\sqrt{[\sqrt{(f,f)} + \sqrt{(g,g)}]^2} = \sqrt{(f,f)} + \sqrt{(g,g)} = \|f\| + \|g\|.$$

В частности, в пространствах $L[a,b]$ и $\widehat{C}[a,b]$ со скалярным произведением , определяемым равенством (1), неравенство треугольника 1^0 принимает вид

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2\,dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx} \qquad (4)$$

(*неравенство* (4) *называют неравенством Минковского*).

Определение 5. *Два элемента f и g любого ПЕП называются* о р т о г о н а л ь н ы м и , *если их скалярное произведение (f,g) равно нулю.*

В дальнейшем мы будем рассматривать произвольное б е с к о н е ч н о м е р н о е ПЕП. Напомним, что произвольное линейное пространство (и, в частности, ПЕП) называется б е с к о н е ч н о м е р н ы м , если в нем существует любое наперед взятое число линейно независимых элементов.

Заметим, что введенные выше ПЕП $L[a,b]$ и ЕП $\widehat{C}[a,b]$ являются бесконечномерными, ибо для любого номера n элементы $1, x, x^2, ..., x^n$ этих пространств являются линейно независимыми.

Определение 6. *Последовательность $\{\psi_n\}$ элементов любого бесконечномерного ПЕП называется* о р т о н о р м и р о в а н н о й с и с т е м о й , *если все входящие в $\{\psi_n\}$ элементы попарно ортогональны и если $\|\psi_n\| = 1$ для всех n.*

Классический пример ортонормированной системы в ПЕП $L[-\pi,\pi]$ - так называемая т р и г о н о м е т р и ч е с к а я с и с т е м а

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, ... \qquad (5)$$

Проверьте сами , что для любых двух различных элементов $f(x)$ и $g(x)$ системы (5) интеграл (1) при $a = -\pi$, $b = \pi$ равен нулю, и норма любого элемента (5) равна единице.

Другой пример ортонормированной системы в пространстве $L[-1,1]$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

где $P_n(x)$ - так называемый полином Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n].$$

Проверьте это сами.

Определение 7. *Рядом Фурье произвольного элемента f ПЕП по ортонормированной в этом ПЕП системе $\{\psi_k\}$ называется ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k \,, \tag{6}$$

в котором числа f_k, называемые коэффициентами Фурье элемента f, равны

$$f_k = (f, \psi_k). \tag{7}$$

Рассмотрим $n-$ую частичную сумму ряда Фурье (6)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \tag{8}$$

и выясним, чем эта сумма отличается от произвольной линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k \tag{9}$$

первых n элементов системы $\{\psi_k\}$ с произвольными числами $C_1, C_2, ..., C_n$.

Теорема 2. *Среди всех сумм вида (9) с какими-угодно коэффициентами $C_1, C_2, ..., C_n$ наименьшее отклонение от элемента f данного ПЕП по норме данного ПЕП имеет $n-$ая частичная сумма ряда Фурье (8).*

Доказательство. Для любого номера n и любых чисел $C_1, C_2, ..., C_n$, пользуясь аксиомами скалярного произведения в ПЕП, оценим квадрат нормы отклонения суммы (9) от элемента f

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k\|^2 = (f - \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k, f - \sum_{l=1}^{n} C_l \psi_l) =$$

(учитывая ортонормированность $\{\psi_k\}$ и (7))

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} C_k (f, \psi_k) + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} C_k f_k + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (f_k - C_k)^2.$$

Итак, справедливо тождество

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \underline{\sum_{k=1}^{n} (f_k - C_k)^2}. \tag{10}$$

Это справедливое для любых чисел C_k тождество говорит о том, что левая его часть принимает наименьшее значение, когда подчеркнутая неотрицательная сумма в правой части равна нулю ,т.е. при $C_k = f_k$. Теорема доказана.

Следствие 1. *При $C_k = f_k$ мы получаем из (10) так называемое тождество Бесселя*

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{11}$$

справедливое для любого элемента f данного ПЕП, для любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и для любого номера n .

Следствие 2. *Из (10) вытекает следующее неравенство*

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f - \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k\|^2, \tag{12}$$

справедливое для любого элемента f данного ПЕП , для любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$, для любого номера n и для любых чисел $C_1, C_2, ..., C_n$.

Теорема 3.(О неравенстве Бесселя) *В произвольном бесконечномерном ПЕП, для любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и для любого элемента f справедливо следующее неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2, \tag{13}$$

называемое неравенством Бесселя . В частности , можно утверждать сходимость ряда в левой части (13).

Доказательство. Из тождества (11) вытекает, что для любого номера n

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \ge 0$$

или, что то же самое ,

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2. \tag{14}$$

(14) означает, что последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами, стоящего в левой части (13) , ограничена. Но тогда этот ряд сходится , и переходя в (14) к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство (13).

Следствие 1. *В любом ПЕП, для любого элемента f и для любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ последовательность коэффициентов Фурье $\{f_k\}$ является бесконечно малой (необходимое условие сходимости ряда в левой части (13)).*

Следствие 2. *Для того чтобы в любом ПЕП и для любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k\psi_k$ являлся рядом Фурье некоторого элемента f данного ПЕП необходимо, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2. \tag{15}$$

В курсе функционального анализа с помощью интеграла Лебега в специальном важном подклассе ПЕП, называемом гильбертовым пространством ,будет доказано, что сходимость ряда (15) является и достаточным условием для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k\psi_k$ являлся рядом Фурье некоторого элемента f .

В ПЕП $L[-\pi,\pi]$ ряд Фурье любой функции $f(x)$ по тригонометрической системе (5) имеет вид

$$\frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\overline{f}_k\frac{coskx}{\sqrt{\pi}} + \overline{\overline{f}}_k\frac{sinkx}{\sqrt{\pi}}\right),$$

где $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $\overline{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,dx$, $\overline{\overline{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,dx$.

Однако в теории рядов Фурье принята другая форма записи ряда Фурье по тригонометрической системе (5)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx)),$$

где $a_0 = \frac{2f_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_k = \frac{\overline{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,dx$, $b_k = \frac{\overline{\overline{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,dx$.

При такой форме записи неравенство Бесселя

$$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\overline{f}_k^2 + \overline{\overline{f}}_k^2) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

переходит в

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{16}$$

§2. Замкнутые и полные системы в ПЕП.

Определение 1. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ в бесконечномерном ПЕП называется з а м к н у т о й , если для любого элемента f данного ПЕП и для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n и такие числа $C_1, C_2, ..., C_n$, что справедливо неравенство*

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k\| < \epsilon. \tag{1}$$

Иными словами ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой в ПЕП, если любой элемент ПЕП можно приблизить по норме данного ПЕП с любой степенью точности конечными линейными комбинациями элементов $\{\psi_k\}$.

Определение 2. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ в произвольном ПЕП называется п о л н о й , если любой элемент f данного ПЕП , ортогональный ко всем элементам $\{\psi_k\}$, обязательно является нулевым элементом данного ПЕП.*

Иными словами ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется полной в данном ПЕП, если в данном ПЕП кроме нулевого не существует никакого другого элемента, который был бы ортогонален ко всем элементам ψ_k.

З а м е ч а н и е . Понятие замкнутости и полноты можно вводить для любой системы линейных независимых элементов (а не обязательно для ортонормированной системы).

Теорема 4. (О равенстве Парсеваля) *Если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ в произвольном ПЕП является замкнутой , то для любого элемента f данного ПЕП неравенство Бесселя (13) (см. §1) переходит в точное равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \tag{2}$$

называемое р а в е н с т в о м П а р с е в а л я .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и рассмотрим произвольный элемент f данного ПЕП. Так как ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является замкнутой , то существует такой номер n и такие числа $C_1, C_2, ..., C_n$, что справедливо неравенство

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k\| < \sqrt{\epsilon},$$

из которого следует,что

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k\|^2 < \epsilon. \tag{3}$$

Сопоставляя неравенство (3) с неравенством (12) из следствия 2 §1, получим, что для найденного нами номера n

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \epsilon. \tag{4}$$

Если теперь взять любой номер $m \geq n$, то в силу (4) тем более будет справедливо неравенство

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2 < \epsilon. \qquad (5)$$

Кроме того, в силу неравенства Бесселя левая часть (5) неотрицательна, т.е. для любого $\epsilon > 0$ и для всех номеров m, удовлетворяющих условию $m \geq n$, справедливы неравенства

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2 < \epsilon.$$

Но это и означает, что ряд, стоящий в левой части (2), сходится к сумме $\|f\|^2$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ в произвольном ПЕП является замкнутой, то ряд Фурье произвольного элемента f данного ПЕП сходится к этому элементу f по норме данного ПЕП, т.е. существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k\| = 0. \qquad (6)$$

Доказательство. Существование равного нулю предела (6) сразу же вытекает из тождества Бесселя (11) (см. следствие 1 из §1) и из теоремы 4 о справедливости равенства Парсеваля (2).

Замечание. Для любой замкнутой системы в ПЕП $L[-\pi, \pi]$ (или тем более в $\widehat{C}[-\pi, \pi]$) сходимость в смысле (6) совпадает *со сходимостью в среднем на сегменте* $[-\pi, \pi]$.

Докажем еще две теоремы, которые справедливы только в евклидовом пространстве ЕП (а не в любом ПЕП).

Теорема 6. *Всякая замкнутая в ЕП система является полной* .

Доказательство. Пусть ортонормированная система $\{\psi_k\}$ замкнута в ЕП и f - произвольный элемент ЕП, ортогональный ко всем ψ_k. Тогда все коэффициенты Фурье f_k этого элемента равны нулю и поэтому в силу равенства Парсеваля (2) $\|f\| = 0$.Но в ЕП отсюда следует, что f - нулевой элемент. Теорема доказана.

Замечание. В любом ПЕП эта теорема не верна.

Теорема 7. *Для полной (и тем более для замкнутой) ортонормированной системы в ЕП два различных элемента не могут иметь совпадающих для всех номеров коэффициентов Фурье.*

Доказательство. Если бы все коэффициенты Фурье f_k и g_k двух элементов f и g совпадали, то элемент $(f - g)$ был бы ортогонален ко все элементам ортонормированной системы и в силу полноты ортонормированной системы был бы нулевым элементом ЕП. Но это означало бы, что f и g совпадают.

§3. Теоремы Вейерштрасса и замкнутость тригонометрической системы

1^0 Лемма об интегралах от периодической функции по отрезку длиной в период.

Лемма 1. *Если $F(x)$ - периодическая функция периода 2π , интегрируемая по любому конечному отрезку, то все интегралы от этой функции по любому отрезку длины, равной периоду 2π, равны между собой, т.е.*

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} F(y)\,dy \qquad (1)$$

для любого x.

Доказательство. В силу свойства аддитивности интеграла левую часть (1) можно переписать в виде

$$\underline{\int_{-\pi-x}^{-\pi} F(y)\,dy} + \int_{-\pi}^{\pi} F(y)\,dy + \underline{\int_{\pi}^{\pi-x} F(y)\,dy}. \qquad (2)$$

Достаточно доказать, что подчеркнутые интегралы равны по модулю и противоположны по знаку.

Используя условие периодичности $F(y) = F(y + 2\pi)$ и сделав замену $t = y + 2\pi$, получим

$$\int_{-\pi-x}^{-\pi} F(y)\,dy = \int_{-\pi-x}^{-\pi} F(y + 2\pi)\,dy = \int_{\pi-x}^{\pi} F(t)\,dt = -\int_{\pi}^{\pi-x} F(t)\,dt.$$

Лемма доказана.

2^0. Выражение для n-й частичной суммы тригонометрического ряда Фурье.

Пусть $f(x)$ - любая периодическая с периодом 2π функция , интегрируемая по любому конечному отрезку. Докажем, что для n-й частичной суммы ее тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k cos(kx) + b_k sin(kx)] \qquad (3)$$

справедлива следующая формула

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \boxed{\frac{sin[(n+1/2)t]}{2 sin(t/2)}}\,dt \qquad (\star)$$

Подставляя в (3) значения коэффициентов Фурье

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) cos(ky)\,dy, & k = 0, 1, \ldots, \\ b_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) sin(ky)\,dy, & k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

получим,что

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}[cos(kx)cos(ky) + sin(kx)sin(ky)]\right\} dy =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos[k(x-y)]\right\} dy.$$

Сделав замену $y = x + t$, получим

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(kt)\right\} dt.$$

Используя лемму 1, полученный интеграл запишем в следующем виде

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\underline{\underline{\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(kt)\right\}}} dt.$$

Подсчитаем подчеркнутую фигурную скобку. Так как для любого номера k

$$2sin\frac{t}{2}cos(kt) = sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right] - sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right],$$

то

$$2sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n} cos(kt) = sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] - sin\frac{t}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cosk(t) = \frac{sin[(n+1/2)t]}{2sin(t/2)}$$

Формула $(\star)$ доказана.

3^0. Выражение для средних Чезаро частичных сумм тригонометрического ряда Фурье.

Пусть снова $f(x)$ - любая периодическая с периодом 2π функция, интегрируемая по любому конечному отрезку , а $\sigma_n(x,f)$ - среднее арифметическое ее частичных сумм $S_0(x,f), S_1(x,f), ..., S_{n-1}(x,f)$,т.е.

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n}[S_0(x,f) + S_1(x,f) + ... + S_{n-1}(x,f)]$$

Тогда справедливо равенство

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\boxed{\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}dt. \qquad (\star\star)$$

Действительно, в силу $(\star)$

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\sum_{k=0}^{n-1} sin[(k+1/2)t]\right]\frac{dt}{2sin(t/2)}. \qquad (4)$$

Подсчитаем в (4) квадратную скобку. Так как для любого номера k

$$2sin\frac{t}{2}sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right] = cos(kt) - cos[(k+1)t],$$

то

$$2sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1} sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right] = 1 - cos(nt) = 2sin^2\left(\frac{nt}{2}\right).$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n-1} sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right] = \frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

и в силу (4) формула $(\star\star)$ доказана.

З а м е ч а н и е 1. Обведенные рамочками выражения в $(\star)$ и $(\star\star)$ называются соответственно я д р о м Д и р и х л е и я д р о м Ф е й е р а. Подчеркнем, что я д р о Ф е й е р а в с ю д у н е о т р и ц а т е л ь н о.

З а м е ч а н и е 2. Беря в формулах $(\star)$ и $(\star\star)$ $f(x) \equiv 1$ и учитывая, что для этой функции $S_n(x,f) \equiv 1$ для всех $n = 0, 1, 2, ...$, получим два тождества

$$1 \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{sin[(n+1/2)t]}{2sin(t/2)}dt, \qquad (\widehat{\star})$$

$$1 \equiv \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt. \qquad (\widehat{\star\star})$$

4^0.Теорема Фейера о равномерной сходимости чезаровских средних тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то чезаровские средние $\sigma_n(x,f)$ тригонометрического ряда Фурье этой функции сходятся к $f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формул $(\star\star)$ и $(\widehat{\star\star})$

$$\sigma_n(x,f) - f(x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt. \qquad (5)$$

Будем считать функцию $f(x)$ периодически с периодом 2π продолженной на всю прямую и заметим, что в силу условия $f(-\pi) = f(\pi)$ при таком продолжении функция $f(x)$ будет являться равномерно непрерывной на всей прямой.

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ на всей прямой существует $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in [-\pi,\pi]$ и для всех t, удовлетворяющих условию $|t| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \qquad (6)$$

В силу свойства аддитивности интеграла перепишем равенство (5) в виде

$$\sigma_n(x,f) - f(x) = I_1 + I_2, \qquad (7)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi n}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt, \qquad (8)$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi n}\int_{\delta\le|t|\le\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt. \qquad (9)$$

В силу неотрицательности ядра Фейера , неравенства (6) и равенства $(\widehat{\star\star})$

$$|I_1| \le \frac{\epsilon}{2}\left\{\frac{1}{\pi n}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt\right\} \le \frac{\epsilon}{2}\left\{\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt\right\} = \frac{\epsilon}{2} \qquad (10)$$

(для всех x из сегмента $[-\pi,\pi]$ и всех номеров n).

Для оценки интеграла I_2 заметим, что непрерывная на сегменте $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$ (в силу теоремы Вейерштрасса) ограничена на этом сегменте, а в силу периодичности и на всей прямой, т.е. существует $M > 0$ такое, что для всех x из бесконечной прямой

$$|f(x)| \le M. \qquad (11)$$

Из (11) следует, что для всех x и всех t

$$|f(x+t) - f(x)| \le |f(x+t)| + |f(x)| \le 2M. \qquad (12)$$

С помощью (12) , неравенства $sin^2\left(\frac{nt}{2}\right) \le 1$ и того, что

$$\frac{1}{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \le \frac{1}{sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\;(для\ всех\ \delta \le |t| \le \pi),$$

мы получим для I_2 следующую оценку

$$|I_2| \le \frac{M}{\pi n}\frac{1}{sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\int_{\delta\le|t|\le\pi}dt \le \frac{2M}{n}sin^{-2}\left(\frac{\delta}{2}\right). \qquad (13)$$

Из (13) вытекает, что для фиксированного нами произвольного $\epsilon > 0$ и выбранного по нему $\delta > 0$ можно фиксировать номер n_0 настолько большим, что для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \ge n_0$, и всех x из сегмента $[-\pi,\pi]$ будет справедливо неравенство

$$|I_2| < \frac{\epsilon}{2}. \qquad (14)$$

Из равенства (7) и из неравенств (10) и (14) мы получим, что для всех $n \ge n_0$ и всех x из $[-\pi,\pi]$

$$|\sigma_n(x,f) - f(x)| < \epsilon.$$

Теорема Фейера доказана.

5^0. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическими многочленами.

Тригонометрическим многочленом называется произвольная конечная линейная комбинация элементов тригонометрической системы, т.е. выражение вида:

$$T(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{n}[\overline{C}_k cos(kx) + \overline{\overline{C}}_k sin(kx)], \qquad (15)$$

где $C_0, \overline{C}_k$ и $\overline{\overline{C}}_k$ - какие угодно постоянные числа.

Теорема 9 (Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то эту функцию можно равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ приблизить тригонометрическим многочленом $T(x)$ с любой степенью точности*, т.е. для этой функции $f(x)$ и для произвольного $\epsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon \qquad (16)$$

для всех x из сегмента $[-\pi,\pi]$.

Эта теорема сразу вытекает из теоремы Фейера 8. Действительно, в силу теоремы 8 для этой функции $f(x)$ и для любого $\epsilon > 0$ чезаровское среднее $\sigma_n(x,f)$ с достаточно большим номером n для всех x из сегмента $[-\pi,\pi]$ удовлетворяет условию $|\sigma_n(x,f)-f(x)|<\epsilon$. Остается заметить, что $\sigma_n(x,f)$ представляют собой некоторый тригонометрический полином $T(x)$, и мы получим неравенство (16). Теорема доказана.

6^0. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами.

Теорема 10. *Если функция $f(t)$ непрерывна на сегменте $a \le t \le b$, то эту функцию можно равномерно на этом сегменте приблизить алгебраическими многочленами с любой степенью точности*, т.е. для этой функции $f(t)$ и для произвольного $\epsilon>0$ найдется алгебраический многочлен $P(t)$ такой, что $|f(t)-P(t)|<\epsilon$ сразу для всех t из сегмента $[a,b]$.

Доказательство проведем в три шага.

1-ый шаг. Докажем сначала, что если $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, то для произвольного $\epsilon>0$ существует алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что

$$|f(x)-P(x)|<\epsilon \tag{17}$$

(для всех x из сегмента $[-\pi,\pi]$).

Фиксируем произвольное $\epsilon>0$. В силу теоремы 9 существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\epsilon}{2} \tag{18}$$

(для всех x из сегмента $[-\pi,\pi]$).

Но $T(x)$ представлят собой сумму (15) конечного числа слагаемых, каждое из которых разложимо в степенной ряд, имеющий радиус сходимости, равный ∞. Следовательно, и вся сумма $T(x)$ разложима в степенной ряд, имеющий радиус сходимости, равный ∞. Отсюда в силу следствия из теоремы Коши-Адамара вытекает, что указанный степенной ряд сходится к $T(x)$ равномерно на любом сегменте, лежащим внутри промежутка сходимости, и в частности, равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$.

Но тогда для фиксированного выше произвольного $\epsilon>0$ найдется частичная сумма этого степенного ряда, представляющая собой алгебраический многочлен $P(x)$, которая удовлетворяет условию

$$|T(x)-P(x)|<\frac{\epsilon}{2} \tag{19}$$

(для всех x из сегмента $[-\pi,\pi]$).

Из (18) и (19) получим, что равномерно по x на $[-\pi,\pi]$ справедливо неравенство (17). Доказательство 1-го шага завершено.

2-ой шаг Докажем теперь, что утверждение 1-го шага справедливо для любой функции $f(x)$ только непрерывной на $[-\pi,\pi]$ (без выполнения условия $f(-\pi)=f(\pi)$!).

Пусть $f(x)$ - такая функция. Положим $f(x)=g(x)+(Ax+B)$, где $A=\dfrac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi}$, $B=\dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$. Тогда $g(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$ (как разность непрерывной и линейной функции) и, кроме того, легко проверить, что $g(-\pi)=g(\pi)=0$.

В силу 1-го шага для произвольного $\epsilon>0$ найдется алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что для всех x из $[-\pi,\pi]$

$$|g(x)-P(x)|<\epsilon, \tag{20}$$

Если мы теперь положим $P_0(x)=P(x)+Ax+B$ и заметим, что $P_0(x)$ также алгебраический многочлен, то из (20) получим, что равномерно по x на $[-\pi,\pi]$

$$|f(x)-P_0(x)|=|[g(x)+Ax+B]-[P(x)+Ax+B]|=|g(x)-P(x)|<\epsilon.$$

Доказательство 2-го шага завершено .

3-й шаг. Вместо сегмента $[-\pi,\pi]$ можно взять любой сегмент $[a,b]$. Действительно, любой сегмент $a\le t\le b$ преобразуется в сегмент $-\pi\le x\le\pi$ линейной заменой $t=\alpha x+\beta$ при $\alpha=\dfrac{b-a}{2\pi}$, $\beta=\dfrac{b+a}{2}$. При этой замене функция $f(t)$, непрерывная на сегменте $a\le t\le b$ переходит в функцию $f(\alpha x+\beta)$, непрерывную на сегменте $-\pi\le x\le\pi$. Для этой функции $f(\alpha x+\beta)$ и для произвольного $\epsilon>0$ в силу 2-го шага найдется алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что $\underline{|f(\alpha x+\beta)-P(x)|<\epsilon}$ для всех $x\in[-\pi,\pi]$. Но подчеркнутое неравенство эквивалентно справедливому для всех $t\in[a,b]$ неравенству $|f(t)-P_0(t)|<\epsilon$, в котором $P_0(t)$ обозначает многочлен $P\left(\dfrac{t-\beta}{\alpha}\right)$ по степеням t. Теорема 10 доказана.

7^0. Замкнутость тригонометрической системы в ПЕП всех интегрируемых по Риману функций.

Теорема 11. *Тригонометрическая система замкнута в ПЕП всех интегрируемых по Риману на сегменте $[-\pi,\pi]$ функций* (и тем более замкнута в ЕП всех кусочно непрерывных на сегменте $[-\pi,\pi]$ функций).

Доказательство. Требуется доказать , что для произвольного $\epsilon>0$ и произвольной интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ по Риману функции $f(x)$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$\|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx}<\epsilon. \tag{21}$$

Доказательство проведем в три шага.

1-й шаг. Докажем, что для произвольного $\epsilon>0$ и произвольной интегрируемой по Риману на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ существует кусочно непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция $f_1(x)$ такая, что

$$\|f-f_1\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx}<\frac{\epsilon}{3}. \tag{22}$$

2-й шаг. Докажем, что для произвольного $\epsilon > 0$ и кусочно непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции $f_1(x)$ существует непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция $g(x)$, удовлетворяющая условию $g(-\pi) = g(\pi)$ и такая, что

$$\|f_1 - g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f_1(x) - g(x)]^2\, dx} < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (23)$$

3-й шаг Докажем, что для произвольного $\epsilon > 0$ и непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции $g(x)$, удовлетворяющей условию $g(-\pi) = g(\pi)$, существует тригонометрический многчлен $T(x)$ такой, что

$$\|g - T\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [g(x) - T(x)]^2\, dx} < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (34)$$

Тогда из (22), (23) и (24) и из неравенства треугольника получим искомое неравенство (21).

1-й шаг. Так как $f(x)$ интегрируема на $[-\pi,\pi]$, то она ограничена на $[-\pi,\pi]$, т.е. существует $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ для всех $x \in [-\pi,\pi]$. Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и по нему и по данной интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ найдем такое разбиение сегмента $[-\pi,\pi]$ точками $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \pi$, для нижней суммы s которого выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx - s < \frac{\epsilon^2}{18M}. \qquad (25)$$

(Это можно сделать в силу теории Дарбу).

Напомним, что нижняя сумма s определяется равенством

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \qquad (26)$$

где $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

Обозначим теперь через $f_1(x)$ кусочно непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию вида

$$f_1(x) = \begin{cases} m_k \ \text{при}\ x_{k-1} < x < x_k,\ k = 1,2,\ldots,n; \\ 0 \ \ \text{при}\ \ x = x_k,\ \ k = 0,1,\ldots,n. \end{cases}$$

Из условия $|f(x)| \le M$ вытекает. что и $|f_1(x)| \le M$. Кроме того, в силу (26)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_1(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = s.$$

Поэтому (25) можно переписать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_1(x)]\, dx < \frac{\epsilon^2}{18M}, \qquad (27)$$

и поскольку всюду на $[-\pi,\pi]$, кроме конечного числа точек, $f(x) \ge f_1(x)$, то (27) можно переписать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_1(x)|\, dx < \frac{\epsilon^2}{18M}. \qquad (28)$$

Из (28) и из того, что $|f(x)| \le M$ и $|f_1(x)| \le M$ всюду на $[-\pi,\pi]$, вытекает, что

$$\|f - f_1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_1(x)]^2\, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_1(x)|[|f(x)| + |f_1(x)|]\, dx \le$$

$$2M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_1(x)|\, dx < \frac{\epsilon^2}{9}.$$

Тем самым, (22) доказано, и первый шаг завершен.

2-й шаг. Докажем, что для произвольного $\epsilon > 0$ и построенной кусочно непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции $f_1(x)$ существует строго непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция $g(x)$, удовлетворяющая условию $g(-\pi) = g(\pi)$ и такая, что справедливо неравенство (23).

Возьмем $g(x)$ совпадающей с $f_1(x)$ всюду кроме достаточно малых окрестностей точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, а в указанных окрестностях возьмем в качестве $g(x)$ линейную функцию такую, чтобы $g(x)$ являлась непрерывной всюду на $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяла условию $g(-\pi) = g(\pi)$.

Так как $f_1(x)$ и сглаживающая ее линейная функция обе ограничены по модулю той же константой M, что и в первом шаге, то указанные окрестности точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ можно выбрать столь малыми, чтобы интеграл

$$\int [f_1(x) - g(x)]^2\, dx \qquad (29)$$

по всем этим окрестностям был меньше $\epsilon^2/9$. Так как интеграл (29) по дополнениям указанных окрестностей до $[-\pi,\pi]$ равен нулю, то будет выполнено неравенство (23), и второй шаг завершен.

3-й шаг. Так как $g(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию $g(-\pi) = g(\pi)$, то по теореме Вейерштрасса 9 для фиксированного произвольного $\epsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для всех $x \in [-\pi,\pi]$

$$|g(x) - T(x)| < \frac{\epsilon}{3\sqrt{2\pi}}. \qquad (30)$$

Из (30) и из известных оценок теории интеграла получим

$$\|g-T\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-T(x)|^2\,dx} \le \sqrt{\frac{\epsilon^2}{9(2\pi)}\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{9}} = \frac{\epsilon}{9},$$

что и завершает доказательство 3-го шага и всей теоремы 11.

8^0. Следствия замкнутости тригонометрической системы в ПЕП $L[-\pi,\pi]$.

Следствие 1. *Для произвольной интегрируемой по Риману на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ неравенство Бесселя переходит в равенство Парсеваля* (в силу теорем 4 и 11):

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx.$$

Следствие 2. *Тригонометрический ряд Фурье произвольной только интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в среднем на $[-\pi,\pi]$.*

(Это следствие вытекает из теоремы 11 , теоремы 5 и замечания к ней.)

Следствие 3. *Тригонометрический ряд Фурье произвольной только интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ можно интегрировать почленно как по всему сегменту $[-\pi,\pi]$, так и по любой его части.*

(Это следствие вытекает из следствия 2 и из теоремы прошлого семестра о том, что ряд, сходящийся в среднем, можно интегрировать почленно).

Следствие 4. *Тригонометрическая система является полной в ЕП $\widehat{C}[-\pi,\pi]$ всех кусочно непрерывных на $[-\pi,\pi]$ функций,* но, конечно не является полной в ПЕП $L[-\pi,\pi]$ всех интегрируемых по Риману на сегменте $[-\pi,\pi]$ функций (существует интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ по Риману функция $f(x)$, отличная от нуля даже на счетном множестве точек $[-\pi,\pi]$ и не являющаяся нулевым элементом $L[-\pi,\pi]$, но ортогональная ко всем функциям тригонометрической системы).

Следствие 5. *Все коэффициенты Фурье двух различных кусочно непрерывных на $[-\pi,\pi]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ не могут совпадать* (вытекает из теорем 7 и 11 и следствия 4).

9^0. Локальная теорема Фейера.

Теорема 12. *Пусть $f(x)$ периодична с периодом 2π и интегрируема по любому конечному сегменту . Пусть, кроме того, $f(x)$ имеет в фиксированной точке x_0 сегмента $[-\pi,\pi]$ конечный правый и левый пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Тогда средние Чезаро $\sigma_n(x,f)$ частичных сумм тригонометрического ряда Фурье этой функции сходятся в этой точке x_0 к значению $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу четности ядра Фейера

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt\right] = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Из (31) и формулы (**) из пункта 3^0 вытекает, что

$$\sigma_n(x_0,f) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt +$$

$$\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt. \quad (32)$$

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и по нему в силу существования пределов $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ выбираем число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех $0 < t < \delta$

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (33)$$

а для всех $-\delta < t < 0$

$$|f(x_0+t)-f(x_0-0)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (34)$$

Теперь, считая, что $\delta < \pi$, мы можем переписать правую часть (32) в виде суммы 6 слагаемых:

$$\sigma_n(x_0,f) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6, \quad (35)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\delta}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi n}\int_{-\delta}^{0}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi n}\int_{\delta}^{\pi}f(x_0+t)\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt,$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{-\delta}f(x_0+t)\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt,$$

$$I_5 = \frac{-f(x_0+0)}{\pi n} \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt,$$

$$I_6 = \frac{-f(x_0-0)}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{-\delta} \frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt.$$

Достаточно доказать, что $|I_1| < \frac{\epsilon}{6}$ и $|I_2| < \frac{\epsilon}{6}$ (для всех номеров n) и что существует номер $n_0 = n_0(\epsilon)$ такой, что при $n \geq n_0$ для каждого $l = 3,4,5$ и 6 справедливо неравенство $|I_l| < \frac{\epsilon}{6}$.

Из (33) и (31) получим,что

$$|I_1| \leq \frac{\epsilon}{3}\left[\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\delta}\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt\right] \leq \frac{\epsilon}{3}\underline{\left[\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\frac{sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt\right]} = \frac{\epsilon}{6},$$

так как подчеркнутое выражение в квадратных скобках равно 1/2.

Аналогично из (34) и (31) получим, что $|I_2| < \frac{\epsilon}{6}$.

Для доказательства того, что существует номер $n_0(\epsilon)$ такой ,что при $n \geq n_0(\epsilon)$ каждая из величин $|I_l|$ (при $l = 3,4,5,6$) удовлетворяет неравенству $|I_l| < \epsilon/6$, достаточно убедиться в том, что каждая величина $|I_l|$ равна произведению $1/n$ на ограниченную величину.

Для этого достаточно воспользоваться справедливым для всех значений t неравенством $\sin^2(nt/2) \leq 1$, справедливым для $\delta \leq |t| \leq \pi$ неравенством

$$\frac{1}{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{1}{sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}, \tag{36}$$

а также тем, что интегрируемая $2\pi-$периодическая функция ограничена т.е. существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех t

$$|f(x_0+t)| \leq M, \quad |f(x_0+0)| \leq M, \quad |f(x_0-0)| \leq M.$$

Теорема 12 доказана.

10^0. К чему может сходиться тригонометрический ряд Фурье функции , которая в данной точке x_0 или непрерывна, или имеет разрыв первого рода.

Теорема 13. *Если $f(x)$ периодична с периодом 2π и интегрируема по любому конечному сегменту и если известно, что тригонометрический ряд Фурье $f(x)$*

сходится в точке x_0, в которой $f(x)$ непрерывна [имеет разрыв первого рода], то тригонометрический ряд Фурье сходится в этой точке x_0 к значению $f(x_0)$ $\left[\text{к значению } \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right]$.

Доказательство. Обозначим через α то значение, к которому сходится в точке x_0 тригонометрический ряд Фурье. В силу регулярности метода Чезаро и чезаровские средние частичных сумм $\sigma_n(x,f)$ сходятся в точке x_0 к значению α. Но по теореме 12 $\sigma_n(x,f)$ сходятся в x_0 к значению $f(x_0)$ $\left[\text{к значению } \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right]$. Следовательно, α равно этому значению.

§4. Простейшие условия равномерной сходимости и почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье

1^0. Вводные замечания

Центральный вопрос теории - об условиях, обеспечивающих сходимость в точке или равномерную сходимость на сегменте $[-\pi,\pi]$ или его части самого тригонометрического ряда Фурье.

Еще в 1876 году Дю Буа Раймон показал, что существует непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(-\pi) = f(\pi)$, тригонометрический ряд Фурье которой расходится в бесконечном числе точек, всюду плотном на сегменте $[-\pi,\pi]$ (сравните с теоремой Фейера!!)

Наша цель - выяснить, какие условия нужно добавить к непрерывности $f(x)$ (или ввести взамен непрерывности $f(x)$), чтобы обеспечить сходимость тригонометрического ряда Фурье в данной точке или равномерную сходимость тригонометрического ряда Фурье на всем $[-\pi,\pi]$ или его части. При этом естественно возникает вопрос: обязан ли тригонометрический ряд Фурье произвольной интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ по Риману (или даже непрерывной на $[-\pi,\pi]$) функции сходиться хотя бы в одной точке сегмента $[-\pi,\pi]$?

Положительный ответ на этот вопрос был получен только в 1966 году и явился следствием знаменитой теоремы, доказанной в 1966 году шведским математиком Карлесоном и решившей проблему, поставленную еще в 1914 году Н.Н.Лузиным.

Будем говорить, что некоторое свойство справедливо почти всюду на $[-\pi,\pi]$, если для произвольного $\epsilon > 0$ множество E всех точек сегмента $[-\pi,\pi]$, где это свойство не справедливо, можно покрыть не более чем счетным числом интервалов таких, что сумма ряда из длин указанных интервалов меньше ϵ.

Далее, на 3-м и 4-м курсах будет введено понятие интеграла Лебега, обобщающее известное Вам понятие интеграла Римана.

Теорема Карлесона. *Если функция $f(x)$ допускает понимаемый в смысле Лебега интеграл*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{1}$$

то тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к ней почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$, Эта теорема послужила основанием для присуждения ее автору премии Филдса.

Из теоремы Карлесона вытекает, что *тригонометрический ряд Фурье любой интегрируемой на* $[-\pi,\pi]$ *по Риману функции* $f(x)$ *сходится к ней почти всюду на* $[-\pi,\pi]$.

Действительно, если $f(x)$ допускает понимаемый в смысле Римана интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{2}$$

то она допускает и понимаемый в смысле Римана интеграл (1). Но тогда существует и понимаемый в смысле Лебега интеграл (1), и справедливо утверждение теоремы Карлесона.

В 1967 году американский математик Хант обобщил теорему Карлесона и доказал, что *для сходимости тригонометрического ряда Фурье почти всюду на* $[-\pi,\pi]$ *достаточно, чтобы существовал понимаемый в смысле Лебега интеграл*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx \tag{3}$$

для произвольного фиксированного $p>1$.

В этой связи приобретает еще большее значение построенный в 1923 году 19-летним российским математиком А.Н.Колмогоровым пример, показывающий, что существует функция $f(x)$, допускающая понимаемый в смысле Лебега интеграл (2) (или интеграл (3) при $p=1$), тригонометрический ряд Фурье которой расходится почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$.

2^0. Простейшие условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi,\pi]$ кусочно непрерывную производную, если производная $f'(x)$ существует во всех внутренних точках $[-\pi,\pi]$ за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых $f'(x)$ имеет конечный правый и левый пределы, и кроме того существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\pi+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to\pi-0} f'(x)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi,\pi]$ кусочно непрерывную производную порядка $n>1$, если функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную в смысле определения 1.

Теорема 14. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$, имеет на этом сегменте кусочно непрерывную производную и удовлетворяет условию*

$$f(-\pi)=f(\pi), \tag{4}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$. Более того, даже ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{|a_k||cos(kx)|+|b_k||sin(kx)|\} \tag{5}$$

сходится равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Достаточно доказать только равномерную на $[-\pi,\pi]$ сходимость ряда (5), ибо из нее в силу критерия Коши будет вытекать равномерная на $[-\pi,\pi]$ сходимость самого тригонометрического ряда Фурье, а тот факт, что этот тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ сразу следует из непрерывности $f(x)$ в каждой точке $[-\pi,\pi]$ и из пункта 10^0 §3.

Для доказательства равномерной на $[-\pi,\pi]$ сходимости ряда (5) в силу признака Вейерштрасса достаточно доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|). \tag{6}$$

Обозначим через α_k и β_k - тригонометрические коэффициенты Фурье $f'(x)$, доопредив ее произвольным образом в точках разрыва. Тогда, интегрируя по частям и используя равенство (4), получим

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)cos(kx)\,dx=k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,dx=kb_k.$$

Совершенно аналогично получим $\beta_k=-ka_k$. Таким образом, ряд (6) тождественно совпадает с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha_k|+|\beta_k|}{k}, \tag{6*}$$

и нам остается доказать сходимость ряда (6*). Эта сходимость вытекает из тривиальный неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{|\alpha_k|}{k}\le\dfrac{1}{2}\left(|\alpha_k|^2+\dfrac{1}{k^2}\right), \\ \dfrac{|\beta_k|}{k}\le\dfrac{1}{2}\left(|\beta_k|^2+\dfrac{1}{k^2}\right) \end{cases} \tag{7}$$

и из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}. \tag{8}$$

первый из которых сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно непрерывной функции $f'(x)$, а второй - в силу признака Коши-Маклорена. Теорема 14 доказана.

3^0. **Простейшие условия почленного дифференцирования тригонометрических рядов Фурье.**

Пусть при целом $m \geq 1$ выполняются следующие у с л о в и я А:
1) функция $f(x)$ и ее производные до порядка m включительно непрерывны на $[-\pi, \pi]$,
2) $f(x)$ имеет на $[-\pi, \pi]$ кусочно непрерывную производную порядка $(m+1)$,
3) справедливы равенства

$$\begin{cases} f(-\pi) = f(\pi), \\ f'(-\pi) = f'(\pi), \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi). \end{cases} \qquad (9)$$

Теорема 15. *При выполнении условий А тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно почленно дифференцировать на сегменте $[-\pi, \pi]$ m раз, причем ряд, полученный m-кратным почленным дифференцированием тригонометрического ряда Фурье, сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к $f^{(m)}(x)$.*

Сначала докажем лемму.

Лемма. *При выполнении условий А сходится числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{(|a_k| + |b_k|)k^m\}. \qquad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через α_k и β_k тригонометрические коэффициенты Фурье кусочно непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$. Производя интегрирование по частям $(m+1)$ раз и учитывая аннулирование подстановок вследствие равенств (9), получим

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}(|a_k| + |b_k|).$$

Т.е. сходимость ряда (10) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}. \qquad (11)$$

Но сходимость ряда (11) (точно так же, как и сходимость ряда (6*)) доказывается с помощью неравенств (7) и сходимости рядов (8). Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 15. Пусть s - любое целое число, равное $1, 2, ..., m$. При $s-$кратном почленном дифференцировании тригонометрического ряда Фурье получается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k k^s cos\left(kx + \frac{\pi}{2}s\right) + b_k k^s sin\left(kx + \frac{\pi}{2}s\right) \right\}.$$

Так как при произвольном $s = 1, 2, ..., m$ этот ряд мажорируется числовым рядом (10), то он сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. Так как при выполнении условий теоремы 15 и сам тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$, то в силу теоремы из прошлого семестра допустимо s-кратное почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье. Теорема 15 доказана.

§5. Более точные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье и принцип локализации для тригонометрического ряда Фурье.

1^0. **Обычный и интегральный модули непрерывности функции и их свойства.**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ (соответственно интегрируема на любом конечном сегменте и периодична с периодом 2π). Назовем величину

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{x', x'' \in [-\pi,\pi] \\ |x'-x''| \leq \delta}} |f(x') - f(x'')| = \sup_{\substack{x, x+h \in [-\pi,\pi] \\ |h| \leq \delta}} |f(x+h) - f(x)| \qquad (\star)$$

(соответственно величину

$$\widehat{\omega}(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx \qquad (\star\star)$$

м о д у л е м н е п р е р ы в н о с т и (соотвественно и н т е г р а л ь н ы м м о д у л е м н е п р е р ы в н о с т и) функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Если $f(x)$ только непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, то в силу теоремы Кантора её модуль непрерывности на этом сегменте стремится к нулю при $\delta \to \infty$. Однако без дополнительных предположений нельзя ничего сказать о скорости стремления $\omega(\delta, f)$ к нулю.

Конечно, в определении $\omega(\delta, f)$ и $\widehat{\omega}(\delta, f)$ вместо сегмента $[-\pi, \pi]$ можно взять произвольный другой сегмент. Обе функции $\omega(\delta, f)$ и $\widehat{\omega}(\delta, f)$ не убывают по δ.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ только интегрируема на любом конечном сегменте и периодична с периодом 2π, то её интегральный модуль непрерывности $\widehat{\omega}(\delta, f)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ стремится к нулю при $\delta \to 0+0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$. В силу первых двух шагов доказательства теоремы 11 (о замкнутости тригонометрической системы) для рассматриваемой функции $f(x)$ существует функция $g(x)$, непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющая условию $g(-\pi) = g(\pi)$ и такая, что

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx} < \frac{\epsilon}{3\sqrt{2\pi}}. \qquad (1)$$

Из (1) и из неравенства Коши-Буняковского получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|\,dx \le \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (2)$$

Далее заметим, что функция $g(x)$, непрерывная на $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяющая условию $g(-\pi)=g(\pi)$, после периодического продолжения будет непрерывна на любом сегменте числовой оси, а поэтому её модуль непрерывности $\omega(\delta,g)$ на любом сегменте (например, на сегменте $[-2\pi,2\pi]$) стремится к нулю при $\delta\to 0+0$. Поэтому для фиксированного нами произвольного $\epsilon>0$ можно фиксировать $\delta=\delta(\epsilon)>0$ такое, что модуль непрерывности $\omega(\delta,g)$ на сегменте $[-2\pi,2\pi]$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta,g) < \frac{\epsilon}{6\pi}. \qquad (3)$$

Из (3) вытекает, что для любого $|h|\le\delta$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+h)-g(x)|\,dx \le \omega(\delta,g)\int_{-\pi}^{\pi} dx < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (4)$$

Из (2) и из того, что все интегралы от периодической функции по отрезку длиной в период равны друг другу, вытекает, что для произвольного h

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-g(x+h)|\,dx = \int_{-\pi+h}^{\pi+h} |f(y)-g(y)|\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)-g(y)|\,dy < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (5)$$

Из равенства $|f(x+h)-f(x)| = |[f(x+h)-g(x+h)]+[g(x+h)-g(x)]+[g(x)-f(x)]|$, из того,что модуль суммы трех величин не превосходит сумму их модулей и из неравенств (2), (4) и (5) получим, что для всех h, удовлетворяющих условию $|h|<\delta$, справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-f(x)|\,dx < \epsilon,$$

т.е.

$$\widehat{\omega}(\delta,f) = \sup_{0\le|h|\le\delta}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-f(x)|\,dx < \epsilon.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть каждая из двух функций $f(t)$ и $g(t)$ интегрируема по любому конечному сегменту и периодична с периодом 2π и пусть для любого x*

$$F(t) = f(x+t)g(t). \qquad (6)$$

Тогда интегральный модуль непрерывности $\widehat{\omega}(\delta,F)$ функции $F(t)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ стремится к нулю при $\delta\to 0+0$ равномерно относительно x на $[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Во-первых заметим, что обе функции $f(t)$ и $g(t)$ как периодические с периодом 2π и интегрируемые по Риману на любом сегменте ограничены, т.е. существует $M>0$ такое, что для всех t

$$|f(t)|\le M,\ |g(t)|\le M. \qquad (7)$$

С помощью (7) для любого h получим неравенство

$$|F(t+h)-F(t)| = |f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t)| =$$

$$|[f(x+t+h)-f(x+t)]g(t+h) + f(x+t)[g(t+h)-g(t)]| \le$$

$$M|f(x+t+h)-f(x+t)| + M|g(t+h)-g(t)|. \qquad (8)$$

С помощью (8), учитывая периодичность функции f и вытекающее из нее равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)-f(x+t)|\,dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(y+h)-f(y)|\,dy = \int_{\pi}^{\pi} |f(t+h)-f(t)|\,dt,$$

получим для произвольного x

$$\widehat{\omega}(\delta,F) \le M\widehat{\omega}(\delta,f) + M\widehat{\omega}(\delta,g). \qquad (9)$$

Из неравенства (9) и из леммы 1, применённой к f и g, вытекает, что равномерно относительно $x\in[-\pi,\pi]$ $\lim\limits_{\delta\to 0+0}\widehat{\omega}(\delta,F)=0$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3 (Об оценке коэффициентов Фурье через интегральный модуль непрерывности). *Пусть $f(t)$ - произвольная только периодическая с периодом 2π и интегрируемая по любому конечному сегменту функция, a_n и b_n - её тригонометрические коэффициенты Фурье, $\widehat{\omega}(\delta,f)$ - её интегральный модуль непрерывности. Тогда для любого номера $n=1,2,\ldots$*

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2} \le \frac{1}{2\pi}\widehat{\omega}\left(\frac{\pi}{n},f\right). \qquad (10)$$

Заметим, что левая часть (10) больше или равна каждой из величин $|a_n|$ и $|b_n|$.

Доказательство. В силу формулы Эйлера

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt. \qquad (11)$$

Подставив в (11) $t+\frac{\pi}{n}$ вместо t и учитывая, что $e^{i\pi}=-1$, получим

$$a_n+ib_n=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-\pi/n}^{\pi-\pi/n} f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)e^{int}\,dt. \tag{12}$$

В силу периодичности с периодом 2π подынтегральной функции в (12) пределы интегрирования в (12) можно взять от $-\pi$ до π.

Полусумма (11) и (12) даёт

$$a_n+ib_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]e^{int}\,dt. \tag{13}$$

Из (13) и из того, что $|e^{int}|=1$, $|a_n+ib_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, получим

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-f(t)\right|dt\le\frac{1}{2\pi}\widehat{\omega}\left(\frac{\pi}{n},f\right).$$

Лемма доказана.

Следствие 1 (из лемм 2 и 3). *Если функция $f(t)$ $2\pi-$периодична и интегрируемая по любому конечному сегменту, функция $g(t)$ интегрируема по сегменту $[-\pi,\pi]$, функция $F(t)$ определяется равенством (6), то тригонометрические коэффициенты Фурье функции $F(t)$*

$$a_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\cos(nt)\,dt,\quad b_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin(nt)\,dt$$

стремятся к нулю при $n\to\infty$ равномерно по x на сегменте $[-\pi,\pi]$ (а, стало быть и равномерно на всей прямой).

Действительно, продолжим $g(t)$ с периодом 2π на всю прямую . В силу леммы 2 получим, что $\widehat{\omega}(\delta,F)\to 0$ при $\delta\to 0$ равномерно по x на сегменте $[-\pi,\pi]$, а в силу леммы 3 справедливо неравенство

$$\sqrt{a_n^2(x)+b_n^2(x)}\le\frac{1}{\pi}\widehat{\omega}(\pi/n,F).$$

Следствие 2(из лемм 2 и 3). *Если функция $f(t)$ $2\pi-$периодична и интегрируема по любому конечному сегменту, а функция $g(t)$ интегрируема по сегменту $[-\pi,\pi]$, то функциональная последовательность*

$$C_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,dt \tag{14}$$

сходится к тождественному нулю равномерно по x на сегменте $[-\pi,\pi]$ (а, стало быть, и равномерно на всей прямой).

Достаточно с помощью равенства $sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]=sin\frac{t}{2}cos(nt)+cos\frac{t}{2}sin(nt)$ разбить интеграл (14) на сумму двух интегралов и применить к этим интегралам следствие 1, взяв в первом из этих интегралов вместо $g(t)$ функцию $g(t)\sin\frac{t}{2}$, а во втором из этих интегралов вместо $g(t)$ функцию $g(t)\cos\frac{t}{2}$.

Лемма 4. *Если функция $f(t)$ только $2\pi-$периодична и интегрируема по любому конечному сегменту, а δ-любое фиксированное число из интервала $0<\delta<\pi$, то функциональная последовательность*

$$\widehat{C}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}f(x+t)\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{15}$$

сходится к тождественному нулю равномерно по x на сегменте $[-\pi,\pi]$ (а, стало быть, и на всей бесконечной прямой).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно в следствии 2 из лемм 2 и 3 положить функцию $g(t)$ равной

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2sin\frac{t}{2}} & при\ \delta\le|t|\le\pi,\\ 0 & при\ \ 0\le|t|<\delta\end{cases}$$

и учесть, что такая функция $g(t)$ интегрируема на сегменте $-\pi\le t\le\pi$. Лемма 4 доказана.

2^0. Принцип локализации Римана.

Теорема 16 (Римана) *Если функция $f(t)$ только $2\pi-$периодична и интегрируема по любому конечному сегменту, то сходимость тригонометрического ряда Фурье этой функции в произвольной фиксированной точке x зависит только от поведения этой функции в как угодно малой $\delta-$окрестности точки x.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы ($\star$) для $n-$й частичной суммы тригонометрического ряда Фурье (см. пункт 2^0 §3)

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}f(x+t)\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt+\widehat{C}_n(x), \tag{16}$$

где $\widehat{C}_n(x)-$функциональная последовательность (15), сходящаяся в силу леммы 4 к тождественному нулю равномерно на всей бесконечной прямой.

Таким образом, сходимость тригонометрического ряда Фурье в данной фиксированной точке x определяется сходимостью в этой точке x только первого члена в правой части (16), а этот первый член зависит только от значений функции f, отвечающих значениям аргумента, лежащим в $\delta-$ окрестности точки x. Теорема доказана.

Теорема 17 (Уточнённая лемма Римана). *Если функция $f(t)$ $2\pi-$периодична, интегрируема по любому конечному сегменту и, кроме того, обращается в нуль на некотором содержащемся в $[-\pi,\pi]$ сегменте $[a,b]$, то для любого достаточно малого $\delta>0$ тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к тождественному нулю равномерно на сегменте $[a+\delta,b-\delta]$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что первый член в правой части (16) равен нулю для всех номеров n и для всех x, принадлежащих сегменту $[a+\delta,b-\delta]$ (ибо для всех таких x в силу того, что $|t|<\delta$, значения $x+t$ лежат на сегменте $[a,b]$, на котором $f\equiv 0$).

Следствие 3. (из теоремы 17). *Если $[a,b]$ - содержащийся в $[-\pi,\pi]$ сегмент, а $\delta>0$ - фиксированное достаточно малое число, то для того чтобы тригонометрический ряд Фурье $2\pi-$периодической и интегрируемой по любому конечному сегменту функции $f(t)$ сходился к ней равномерно на сегменте $[a+\delta,b-\delta]$ достаточно, чтобы нашлась функция $g(t)$ $2\pi-$периодическая и интегрируемая по сегменту $[-\pi,\pi]$, совпадающая с $f(t)$ на сегменте $[a,b]$ и такая, что её тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно на сегменте $[a+\delta,b-\delta]$.*

Для доказательства этого следствия достаточно применить теорему 17 к разности $[f(t)-g(t)]$.

3^0. Условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.

Определение. Будем говорить, что функция $f(t)$ удовлетворяет в данной точке x справа (соответственно слева) условию Гёльдера порядка α, где $0<\alpha\le 1$, если 1) $f(t)$ имеет в точке x конечный правый предел $f(x+0)$ (соответственно конечный левый предел $f(x-0)$), 2) существуют положительные числа M и δ такие, что $|f(x+t)-f(x+0)|\le Mt^\alpha$ при $0<t<\delta$ (соответственно $|f(x+t)-f(x-0)|\le M|t|^\alpha$ при $-\delta<t<0$).

Теорема 18. *Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье $2\pi-$периодической и интегрируемой по любому конечному сегменту функции $f(x)$ сходился в данной точке x_0 бесконечной прямой к значению $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$ достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла в этой точке x_0 справа условию Гёльдера порядка $\alpha_1\in(0,1]$ и слева условию Гёльдера порядка $\alpha_2\in(0,1]$.*

Доказательству теоремы 18 предпошлём следующую лемму.

Лемма 5. *Если функция $f(t)$ $2\pi-$периодична, интегрируема по любому конечному сегменту и если существуют конечные правый и левый пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ функции $f(t)$ в этой точке x_0, то для любого фиксированного δ из интервала $0<\delta<\pi$ каждая из двух последовательностей*

$$d_n^+(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \tag{17}$$

$$d_n^-(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{18}$$

является бесконечно малой.

Доказательство. Сначала заметим, что каждая из двух последовательностей

$$C_n^+(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}f(x_0+t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \tag{19}$$

$$C_n^-(x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}f(x_0+t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{20}$$

является бесконечно малой (даже равномерно относительно x_0 на всей прямой) в силу следствия 2 из лемм 2 и 3: достаточно в этом следствии взять функцию $g(t)$ равной

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} & \textit{при } \delta\le t\le\pi,\\ 0 & \textit{для остальных точек } [-\pi,\pi]\end{cases}$$

(для случая последовательности (19)) и равной

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} & \textit{при } -\pi\le t\le-\delta,\\ 0 & \textit{для остальных точек } [-\pi,\pi]\end{cases}$$

(для случая последовательности (20)).

Далее, взяв в (19) и (20) $f\equiv 1$, мы получим, что *является бесконечно малой* каждая из двух последовательностей

$$\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right\}\ \textit{и}\ \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right\},$$

а потому (в силу конечности $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$) и каждая из последовательностей

$$\left\{\frac{f(x_0+0)}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right\}\ \textit{и}\ \left\{\frac{f(x_0-0)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right\}.$$

Из бесконечной малости двух последних последовательностей и последовательностей (19) и (20) вытекает бесконечная малость последовательностей (17) и (18).

Доказательство теоремы 18. По условию теоремы существуют положительные числа M_1, M_2, δ_1 и δ_2 такие, что

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)| \le M_1 t^{\alpha_1} \quad npu \quad 0 < t \le \delta_1,$$

$$|f(x_0+t)-f(x_0-0)| \le M_2 |t|^{\alpha_2} \quad npu \quad -\delta_2 < t \le 0.$$

Положим $M = max\{M_1, M_2\}$, $\delta_0 = min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\alpha = min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогда

$$|f(x_0+t)-f(x_0\pm 0)| \le M|t|^{\alpha} \quad npu \ 0 < |t| \le \delta_0, \tag{21}$$

причем в (21) знак + берётся при $t > 0$, а знак - при $t < 0$.

Далее в силу чётности ядра Дирихле

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt\right\} = \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Из (22) и из формулы ($\star$) для $S_n(x,f)$ (см.пункт 2^0 §3) получим

$$S_n(x_0,f) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{23}$$

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$, меньшее δ_0 и настолько малое, что

$$\frac{M}{\alpha}\delta^{\alpha} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{24}$$

После этого, пользуясь обозначениями (17) и (18), перепишем равенство (23) в виде

$$S_n(x_0,f) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] = I_1 + I_2 + d_n^+(x_0) + d_n^-(x_0), \tag{25}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]\frac{sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

С помощью неравенств (21) и (24) и следующего тривиального неравенства

$$\frac{1}{2\left|sin\frac{t}{2}\right|} \le \frac{\pi}{2|t|}, \tag{26}$$

справедливого для всех t, для которых $0 < |t| \le \pi$ (вывод неравенства (26) будет дан ниже), установим, что для всех номеров n справедливы оценки $|I_1| < \frac{\epsilon}{4}$, $|I_2| < \frac{\epsilon}{4}$.

Остановимся на выводе только первой из этих оценок, ибо вторая выводится аналогично.

На основании (21), (26), тривиального неравенства $\left|sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\right| \le 1$ и неравенства (24) получим, что

$$|I_1| \le \frac{M}{2}\int_0^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^{\alpha}}{2\alpha} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Аналогично доказывается, что $|I_2| < \frac{\epsilon}{4}$.

Теперь для завершения доказательства теоремы 18 остается доказать, что существует номер $n_0 = n_0(\epsilon)$ такой, что при всех $n \ge n_0(\epsilon)$ справедливы неравенства

$$|d_n^+(x_0)| < \frac{\epsilon}{4}, \quad |d_n^-(x_0)| < \frac{\epsilon}{4},$$

но это сразу вытекает из бесконечной малости последовательностей $\{d_n^+(x_0)\}$ и $\{d_n^-(x_0)\}$, установленной в лемме 5.

Итак, нам остаётся только обосновать применённое для доказательства теоремы 18 неравенство (26).

Заметим, что для всех $\tau \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в силу того, что $tg\,\tau \ge \tau$, $\cos\tau > 0$,

$$\left(\frac{sin\tau}{\tau}\right)' = \frac{\tau cos\tau - sin\tau}{\tau^2} = \frac{cos\tau(\tau - tg\tau)}{\tau^2} \le 0.$$

Отсюда вытекает,что функция $\frac{sin\tau}{\tau}$ не возрастает на полусегменте $0 < \tau \le \frac{\pi}{2}$. Поэтому для всех $\tau \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{sin\tau}{\tau} \ge \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

В силу чётности функции $\frac{sin\tau}{\tau}$ это же неравенство справедливо и для $\tau \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Положив $\tau = \frac{t}{2}$, мы получим, что для всех t таких, что $0 < |t| \le \pi$ справедливо неравенство $\frac{sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \ge \frac{2}{\pi}$, эквивалентное (26).

Теорема 18 полностью доказана.

4⁰. Условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Определение 1. Будем говорить, что непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ принадлежит на этом сегменте классу Дини-Липшица, если её обычный модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ на этом сегменте при всех достаточно малых δ имеет порядок

$$\omega(\delta, f) = \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{ln\frac{1}{\delta}}\right) \tag{27}$$

или, что то же самое, если

$$\lim_{\delta\to 0+0}\left[\omega(\delta, f) ln\frac{1}{\delta}\right] = 0. \tag{27*}$$

Определение 2. Будем говорить, что непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ принадлежит на этом сегменте классу Гёльдера порядка α, где $0 < \alpha \le 1$, и писать $f(x) \in C^\alpha[-\pi, \pi]$, если модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет порядок

$$\omega(\delta, f) = \underline{\underline{O}}(\delta^\alpha). \tag{28}$$

Конечно, класс Дини-Липшица является более широким, чем класс Гёльдера $C^\alpha[-\pi, \pi]$ с любым $\alpha \in (0, 1]$, т.е. функция $f(x)$. принадлежащая классу Гёльдера с любым $\alpha \in (0, 1]$, принадлежит и классу Дини-Липшица.

Теорема 19 (Дини-Липшица). *Если непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[-\pi, \pi]$ классу Дини-Липшица и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Продолжим функцию $f(x)$ периодически с периодом 2π на всю прямую. Условие $f(-\pi) = f(\pi)$ обеспечит непрерывность так продолженной функции и принадлежность ее классу Дини-Липшица на любом конечном сегменте и, в частности, на сегменте $[-2\pi, 2\pi]$. В выражении ($\star$) для $S_n(x, f)$ (см. пункт 2^0 §3) подставим на место $sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]$ сумму $sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] = sin(nt)cos\frac{t}{2} + cos(nt)sin\frac{t}{2}$. В результате получим

$$S_n(x, f) = S_n^\star(x, t) + S_n^{\star\star}(x, f), \tag{29}$$

где

$$S_n^\star(x, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{sin(nt)}{2tg\frac{t}{2}}\,dt, \tag{30}$$

$$S_n^{\star\star}(x, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{cos(nt)}{2}\,dt. \tag{31}$$

Для только периодической с периодом (2π) и интегрируемой по Риману на любом конечном сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(t)$ величина $S_n^{\star\star}(x, f)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in [-\pi, \pi]$ (см. пункт 1^0, следствие 1 из лемм 3 и 2 для случая $g(t) \equiv \frac{1}{2}$).

Поэтому достаточно доказать, что величина (30) стремится к $f(x)$ равномерно относительно $x \in [-\pi, \pi]$. Кстати $S_n^\star(x, f)$ называют модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда Фурье.

Взяв в (29), (30) и (31) $f(x) \equiv 1$ и учитывая, что $S_n^{\star\star}(x, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)\,dt = 0$, а $S_n(x, t) = 1$, мы получим, что

$$S_n^\star(x, 1) = \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(nt)}{2tg\frac{t}{2}}\,dt = 1} \tag{32}$$

Из (30) и (32), умноженного на $f(x)$, получим,что

$$S_n^\star(x, t) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]\frac{sin(nt)}{2tg\frac{t}{2}}\,dt. \tag{33}$$

Разбивая интеграл в правой части (33) на сумму $\int\limits_{-\pi}^{\pi} = \int\limits_{-\pi}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi}$, заменяя во втором из интегралов t на $-t$ и учитывая чётность функции $\frac{sin(nt)}{2tg\frac{t}{2}}$, мы получим равенство

$$S_n^\star(x,t) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \Delta_x^2 f(t)\frac{sin(nt)}{2tg\frac{t}{2}}\,dt, \tag{34}$$

в котором символ $\Delta_x^2 f(t)$ обозначает так называемую в т о р у ю р а з н о с т ь

$$\Delta_x^2 f(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x). \tag{35}$$

Для любого номера n заменим в интеграле (34) t на $t + \frac{\pi}{n}$ и учтём, что $sin\left[\left(t+\frac{\pi}{n}\right)t\right] = -sin(nt)$. В результате этой замены получим

$$S_n^\star(x,f) - f(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \frac{\Delta_x^2 f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{2tg\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\,sin(nt)\,dt. \tag{36}$$

Полусумма левых и правых частей (34) и (36) даёт

$$S_n^\star(x,f) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\Delta_x^2 f(t)}{2tg\frac{t}{2}}sin(nt)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \frac{\Delta_x^2 f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{2tg\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\,sin(nt)\,dt. \tag{37}$$

Правую часть (37) перепишем в виде суммы четырех слагаемых $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}\left[\frac{\Delta_x^2 f(t)}{2tg\frac{t}{2}} - \frac{\Delta_x^2 f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{2tg\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\right] sin(nt)\,dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\Delta_x^2 f(t)}{2tg\frac{t}{2}}sin(nt)\,dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\Delta_x^2 f(t)}{2tg\frac{t}{2}}sin(nt)\,dt,$$

$$I_4 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{\Delta_x^2 f(t+\frac{\pi}{n})}{2tg\frac{t+\pi/n}{2}}sin(nt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\frac{\pi}{n}}\frac{\Delta_x^2 f(t)}{2tg\frac{t}{2}}sin(nt)\,dt.$$

Оценим модуль каждого из этих четырёх интегралов и докажем, что каждый из этих четырёх интегралов стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x на $[-\pi,\pi]$. Так как $|sin(nt)| \le nt$ (для всех $t > 0$ и всех номеров n), $\frac{1}{2tg\frac{t}{2}} < \frac{1}{t}$ (для всех $0 < t < \pi$) и $|\Delta_x^2 f(x)| \le |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| \le 2\omega(2\pi/n, f)$ для всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $t \in [0, 2\pi/n]$, то для достаточно больших n

$$|I_3| + |I_4| \le \frac{2n}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} |\Delta_x^2 f(t)|\,dt \le \frac{n}{\pi}2\omega\left(\frac{2\pi}{n}, f\right)\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} dt = 4\omega\left(\frac{2\pi}{n}, f\right) \to 0.$$

(стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in [-\pi,\pi]$).

Для оценки $|I_2|$ заметим, что при $\pi - \frac{\pi}{n} \le t < \pi$ и при всех достаточно больших n

$$\left|\frac{sin(nt)}{2tg\frac{t}{2}}\right| \le C_1 = const. \tag{38}$$

Кроме того, непрерывная функция $f(t)$, а потому и величина (35) ограничена для всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех t, т.е. существует $C_2 > 0$ такое, что

$$|\Delta_x^2 f(t)| \le C_2. \tag{39}$$

Из (38) и (39) равномерно относительно $x \in [-\pi,\pi]$ получим

$$|I_2| \le C_1 C_2 \int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} dt = \frac{C_1 C_2 \pi}{n} \to 0 \quad (npu \ \ n \to \infty).$$

Остаётся оценить $|I_1|$.

Для оценки интеграла I_1 представим его в виде суммы двух интегралов

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \frac{\Delta_x^2 f(t) - \Delta_x^2 f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{2tg\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\, sin(nt)\, dt +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \Delta_x^2 f(t) \left[\frac{1}{2tg\frac{t}{2}} - \frac{1}{2tg\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\right] sin(nt)\, dt. \qquad (40)$$

Для оценки правой части (40) учтём, что выражение в квадратных скобках равно $\dfrac{sin\frac{\pi}{2n}}{sin\frac{t}{2}sin\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}$ и для всех $t \in \left[\frac{\pi}{n}, \pi - \frac{\pi}{n}\right]$ удовлетворяет неравенству

$$\left[\frac{1}{2tg\frac{t}{2}} - \frac{1}{2tg\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\right] \le A\frac{\pi}{n}\frac{1}{t^2}, \quad где \quad A = const. \qquad (41)$$

Учтём также, что

$$\left|\Delta_x^2 f(t) - \Delta_x^2 f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right| \le \left|f(x+t) - f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)\right| +$$

$$\left|f(x-t) - f\left(x-t-\frac{\pi}{n}\right)\right| \le 2\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \qquad (42)$$

$$|\Delta_x^2 f(t)| \le 2\omega(t,f) \qquad (43)$$

и что для всех $t \in \left[\frac{\pi}{n}, \pi - \frac{\pi}{n}\right]$

$$\frac{1}{2tg\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}} \le \frac{1}{2tg\frac{t}{2}} \le \frac{1}{t}. \qquad (44)$$

Из (40)-(44) с учётом того, что $|sin(nt)| \le 1$, получим, что

$$|I_1| \le \frac{2\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t} + \frac{2A}{2\pi}\frac{\pi}{n}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t,f)}{t^2}\, dt. \qquad (45)$$

Первый член в правой части (45) не превосходит $\frac{1}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)\left[ln\frac{n}{\pi} + ln\pi\right]$ и в силу условия Дини-Липшица (27*) равномерно относительно $x \in [-\pi,\pi]$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Докажем, что и второй член в правой части (45) стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x на $[-\pi,\pi]$.

Представим этот второй член в виде суммы

$$\frac{A}{n}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{\sqrt{n}}} \omega(t,f)\frac{dt}{t^2} + \frac{A}{n}\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}^{\pi} \omega(t,f)\frac{dt}{t^2}. \qquad (46)$$

Учитывая, что функция $\omega(t,f)$ не убывает, мы получим что сумма (46) не превосходит

$$\frac{A}{n}\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}, f\right)\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}\frac{dt}{t^2} + \frac{A}{n}\omega(\pi,f)\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}^{\pi}\frac{dt}{t^2} =$$

$$\frac{A}{n}\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}, f\right)\left[\frac{n-\sqrt{n}}{\pi}\right] + \frac{A}{n}\omega(\pi,f)\left[\frac{\sqrt{n}-1}{\pi}\right] \le A\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}, f\right) + \frac{A}{\sqrt{n}}\omega(\pi,f) \to 0$$

при $n \to \infty$ (в силу того, что $\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}, f\right) \to 0$ при $n \to \infty$, а величина $\omega(\pi,f)$ постоянная для любой только непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 19 является окончательным (в терминах модуля непрерывности функции) условием равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье, ибо существует непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(-\pi) = f(\pi)$ и такая, что её модуль непрерывности $\omega(\delta,f)$ вместо условия Дини-Липшица (27) удовлетворяет условию $\omega(\delta,f) = \underline{O}\left(\frac{1}{ln1/\delta}\right)$ и её тригонометрический ряд Фурье расходится на множестве точек всюду плотном на сегменте $[-\pi,\pi]$.

Следствие из теоремы 19. *Если непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$ принадлежит на этом сегменте классу Гёльдера $C^\alpha[-\pi,\pi]$ с любым α из полусегмента $0 < \alpha \le 1$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$.*

З а м е ч а н и е 2. *Если функция $f(x)$ только $2\pi-$периодична и интегрируема по любому конечному сегменту, а классу Дини-Липшица или классу Гёльдера порядка $0 < \alpha \le 1$ принадлежит только на содержащемся в $[-\pi,\pi]$ сегменте $[a,b]$ и не обязательно удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то можно утверждать,* что для любого достаточно малого $\delta > 0$ тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$.

Действительно, фиксируем произвольное достаточно малое $\delta > 0$ и построим функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на сегменте $\left[a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}\right]$, линейную (т.е. равную $Ax+B$) на сегменте $\left[b-\frac{\delta}{2}, a+\frac{\delta}{2}+2\pi\right]$ с постоянными A и B, определяемыми из соотношений $g\left(b-\frac{\delta}{2}\right) = \boxed{A\left(b-\frac{\delta}{2}\right)+B = f\left(b-\frac{\delta}{2}\right)}$, $g\left(a+\frac{\delta}{2}+2\pi\right) = \boxed{A\left(a+\frac{\delta}{2}+2\pi\right)+B = f\left(a+\frac{\delta}{2}\right)}$ и периодически с периодом 2π продолженную на всю прямую.

Для такой функции $g(x)$ будут выполнены все условия теоремы Дини-Липшица 19 или следствия из неё и потому тригонометрический ряд Фурье такой функции $g(x)$ сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$, а потому и равномерно на сегменте $[a,b]$ и $\left[a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}\right]$.

Так как на сегменте $\left[a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}\right]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, то в силу следствия 3 из теоремы 17 тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$.

З а м е ч а н и е 3. Назовём функцию $f(x)$ к у с о ч н о - г ё л ь д е р о в о й , если эта функция 2π−периодическая и если сегмент $[-\pi,\pi]$ разбивается на конечное число не имеющих общих внутренних точек сегментов I_k, на каждом из которых $f(x)$ принадлежит классу Гёльдера $C^{\alpha_k}(I_k)$ с некоторым α_k из полуинтервала $0 < \alpha_k \le 1$.

Указанные сегменты I_k называют у ч а с т к а м и г ё л ь д е р о в о с т и функции $f(x)$.

Можно утверждать, что тригонометрический ряд Фурье произвольной кусочно-гёльдеровой функции сходится в каждой точке бесконечной прямой, причём его сходимость является равномерной на каждом сегменте, лежащем внутри участка гёльдеровости (в силу замечания 2), а в точках стыка участков гёльдеровасти тригонометрический ряд Фурье сходится к полусумме правого и левого пределов функции f (в силу теоремы 18).

З а м е ч а н и е 4. Во всей изложенной теории вместо сегмента $[-\pi,\pi]$ можно взять сегмент $[-A,A]$ с произвольным $A > 0$. В этом случае тригонометрический ряд Фурье любой интегрируемой по Риману на сегменте $[-A,A]$ функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k cos\left(\frac{\pi}{A}kx\right) + b_k sin\left(\frac{\pi}{A}kx\right)\right],$$

где $a_k = \frac{1}{A}\int\limits_{-A}^{A} f(y)cos\left(\frac{\pi}{A}ky\right)\,dy,\ k = 0,1,2,\ldots,\quad b_k = \frac{1}{A}\int\limits_{-A}^{A} f(y)sin\left(\frac{\pi}{A}ky\right)\,dy,$

$$k = 1,2,\ldots.$$

§6. Интеграл Фурье.

1°. Основная лемма

Определение . Будем говорить, что функция $f(x)$ п р и н а д л е ж и т н а б е с к о н е ч н о й п р я м о й $-\infty < x < \infty$ к л а с с у L_1 и писать $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, если 1) $f(x)$ интегрируема в собственном смысле Римана по любому конечному сегменту, 2) сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

Основная лемма . *Если $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, то для любого y из прямой $-\infty < y < \infty$ сходится несобственный интеграл*

$$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\,dx, \tag{2}$$

называемый о б р а з о м *или* п р е о б р а з о в а н и е м Ф у р ь е *функции $f(x)$, причём образ Фурье $\widehat{f}(y)$ является непрерывной функцией y в любой точке прямой $-\infty < y < \infty$ и для него существует равный нулю предел*

$$\lim_{|y|\to\infty} |\widehat{f}(y)| = 0. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых x и y

$$|f(x)e^{ixy}| = |f(x)|$$

и потому из признака Вейерштрасса и из сходимости несобственного интеграла (1) вытекает, что несобственный интеграл (2) сходится равномерно по y на любом сегменте прямой $-\infty < y < \infty$ (и, в частности, сходится в любой точке y этой прямой).

Для доказательства непрерывности $\widehat{f}(y)$ в любой точке y фиксируем произвольную точку y и произвольное $\epsilon > 0$. В силу сходимости несобственного интеграла (1) существует число $A > 0$ такое, что

$$\int\limits_{A}^{\infty} |f(x)|\,dx + \int\limits_{-\infty}^{-A} |f(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{3}. \tag{4}$$

Из (4) и из того, что *для любых чисел* x, y и Δy

$$|e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}| \leq |e^{ix(y+\Delta y)}| + |e^{ixy}| = 2$$

вытекает, что *для любых* y и Δy

$$\left|\int_A^\infty [e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}] f(x)\,dx\right| + \left|\int_{-\infty}^{-A} [e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}] f(x)\,dx\right| < \frac{2}{3}\epsilon. \qquad (5)$$

Так как

$$\widehat{f}(y+\Delta y) - \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}] f(x)\,dx,$$

то в силу (5) для доказательства непрерывности $\widehat{f}(y)$ в данной точке y достаточно для фиксированного нами произвольного $\epsilon > 0$ доказать существование такого $\delta(\epsilon) > 0$, которое при всех Δy, удовлетворяющих условию $|\Delta y| < \delta(\epsilon)$, обеспечивает справедливость неравенства

$$\left|\int_{-A}^{A} [e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}] f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (6)$$

В силу сходимости несобственного интеграла (1) существует число $M > 0$ такое, что при любом $A > 0$

$$\int_{-A}^{A} |f(x)|\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \leq M. \qquad (7)$$

Выбираем какой-нибудь сегмент $[c,d]$, для которого фиксированная точка y является внутренней.

Так как функция e^{ixy} двух переменных x и y непрерывна в прямоугольнике $[-A \leq x \leq A] \times [c \leq y \leq d]$, то для фиксированного выше $\epsilon > 0$ существует $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in [-A, A]$ и любых y и $y + \Delta y \in [c,d]$ и таких, что $|\Delta y| < \delta(\epsilon)$, справедливо неравенство

$$|e^{ix(y+\Delta y)} - e^{ixy}| < \frac{\epsilon}{3M}. \qquad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) сразу же вытекает неравенство (6). Тем самым доказательство непрерывности $\widehat{f}(y)$ в точке y завершено.

Докажем теперь существование предела (3). Снова фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и по нему число $A > 0$, обеспечивающее выполнение неравенства (4). Из (4) и из того, что $|e^{ixy}| = 1$, вытекает, что

$$\left|\int_A^\infty e^{ixy} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{-\infty}^{-A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (9)$$

Из (9) следует, что для доказательство существования равного нулю предела (3) достаточно доказать, что для фиксированного нами произвольного $\epsilon > 0$ существует число $B = B(\epsilon) > 0$ такое,что для всех y, удовлетворяющих условию $|y| \geq B$, справедливо неравенство

$$\left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| < \frac{2}{3}\epsilon. \qquad (10)$$

Так как $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-A, A]$, то в силу теории Дарбу найдётся такое разбиение T сегмента $[-A, A]$ точками $-A = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = A$, что для верхней суммы S_T этого разбиения справедливо неравенство

$$0 \leq S_T - \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (11)$$

Пусть $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n$. Введём в рассмотрение функцию

$$f_T(x) = \begin{cases} M_k & \text{при } x_{k-1} < x < x_k,\ k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 & \text{при } x = x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда (поскольку на величину интеграла не влияет изменении функции в конечном числе точек)

$$\int_{-A}^{A} f_T(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = S_T.$$

Поэтому (11) можно переписать в виде

$$\int_{-A}^{A} [f_T(x) - f(x)]\,dx = \int_{-A}^{A} |f_T(x) - f(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (12)$$

Используя (12) и тривиальные оценки

$$|e^{ixy}| = 1, \quad \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| = \left|\frac{e^{ixy}}{iy}\Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k}\right| \leq \frac{2}{|y|},$$

оценим модуль интеграла, стоящего в левой части (10). Получим

$$\left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy}\{[f(x) - f_T(x)] + f_T(x)\}\,dx\right| \leq$$

$$\int_{-A}^{A} |e^{ixy}||f_T(x) - f(x)|\,dx + \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f_T(x)\,dx\right| \leq$$

$$\frac{\epsilon}{3} + \left|\sum_{k=1}^{n} M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| \leq \frac{\epsilon}{3} + \boxed{\frac{2}{|y|}\sum_{k=1}^{n}|M_k|}.$$

Если положить $B = \frac{6}{\epsilon}\sum_{k=1}^{n}|M_k|$, то при $|y| \geq B$ величина, заключенная в рамочку, будет меньше $\frac{\epsilon}{3}$. Тем самым, неравенство (10) и основная лемма доказаны.

Следствие из основной леммы. *Если $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos(\lambda x)\,dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin(\lambda x)\,dx = 0.$$

Для доказательства достаточно заметить , что $e^{i\lambda x} = cos(\lambda x) + isin(\lambda x)$, и положить в основной лемме $|y| = \lambda$.

2^0. **Разложение функции в интеграл Фурье.**

Будем говорить, что функция $f(x)$ из класса $L_1(-\infty,\infty)$ разложима в данной точке x в интеграл Фурье, если в этой точке x существует предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy\right\} = \lim_{\lambda\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy}f(u)\,du\right]dy\right\}. \quad (13)$$

Предел (13) называется разложением $F(x)$ в интеграл Фурье и часто записывается в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy, \quad (13^*)$$

но интеграл (13^*) следует понимать в смысле главного значения, т.е. как предел при $\lambda \to \infty$ интеграла $\int_{-\lambda}^{\lambda}$ в симметричных пределах.

Теорема 20. *Если $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ и удовлетворяет в данной точке x справа условию Гёльдера порядка α_1 $(0 < \alpha_1 \leq 1)$ и слева условию Гёльдера порядка α_2 $(0 < \alpha_2 \leq 1)$, то $f(x)$ разложима в данной точке x в интеграл Фурье, который сходится к значению $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.*

Доказательство проведём в два шага.

1-ый шаг. Докажем вспомогательное равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt. \quad (14)$$

Выше уже было доказано, что несобственный интеграл, стоящий в (13) в квадратных скобках, сходится равномерно по y на любом конечном сегменте (и, в частности, на сегменте $-\lambda \leq y \leq \lambda$.) Поэтому для произвольного $\epsilon > 0$ существует число $A_0 > 0$ такое, что для всех $A \geq A_0$ и всех y из $[-\lambda,\lambda]$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy}f(u)\,du - \int_{-A}^{A} e^{iuy}f(u)\,du\right| < \frac{\epsilon\pi}{\lambda}. \quad (15)$$

Если мы теперь обозначим через $I(\lambda,x)$ величину, стоящую в (13) в фигурных скобках, то из (15) и из того, что $|e^{ixy}| = 1$, получим для всех $A \geq A_0$

$$\left|I(\lambda,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\left[\int_{-A}^{A} e^{iuy}f(u)\,du\right]dy\right| < \epsilon. \quad (16)$$

Так как существует двойной интеграл

$$\iint_R e^{i(u-x)y}f(u)\,dydu$$

по прямоугольнику $R = [-\lambda \leq y \leq \lambda]\times[-A \leq u \leq A]$ и кроме того, для любого $y \in [-\lambda,\lambda]$ существует интеграл $I(y) = \int_{-A}^{A} e^{i(u-x)y}f(u)\,du$ и для любого $u \in [-A,A]$ существует интеграл $K(y) = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(u-x)y}f(u)\,dy$, то справедливы обе формулы сведения этого двойного интеграла к повторному однократному, и (16) можно переписать в виде

$$\left|I(\lambda,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} f(u)\left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(u-x)y}\,dy\right]du\right| < \epsilon. \quad (17)$$

(при всех $A \geq A_0$).

Но (17) по определению сходимости несобственного интеграла означает, что

$$I(\lambda,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(u-x)y}\,dy\right]du. \quad (18)$$

С помощью формулы Эйлера $e^{i(u-x)y} = cos[(u-x)y] + isin[(u-x)y]$ с учётом чётности косинуса и нечётности синуса мы получим, что интеграл , стоящий в (18) в квадратных скобках, равен $2\dfrac{sin[(u-x)\lambda]}{u-x}$. Отсюда

$$I(\lambda, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{sin[(u-x)\lambda]}{u-x}\,du.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $u = x + t$, мы придём к равенству (14). Доказательство первого шага завершено.

2-й шаг. Докажем существование равного $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ предела (13).

Из соотношения

$$\int_{0}^{\infty}\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{0}\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

вытекает равенство

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{f(x+0)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt + \frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt. \qquad (19)$$

Из условия теоремы вытекает, что для данной точки x существуют числа $M > 0$, $\alpha > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что

$$|f(x+t) - f(x \pm t)| \le M|t|^{\alpha} \quad npu \quad 0 < |t| \le \delta_0 \qquad (20)$$

(знак + берётся для $t > 0$, знак - для $t < 0$).

Фиксируем произвольное $\epsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$, меньшее δ_0 и удовлетворяющее условию

$$\frac{M}{\pi}\frac{1}{\alpha}\delta^{\alpha} < \frac{\epsilon}{5}. \qquad (21)$$

Тогда почленно вычитая из равенства (14) равенство (19), мы получим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sum_{k=1}^{5} I_k,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+t) - f(x+0)]\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+t) - f(x-0)]\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta} f(x+t)\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt,$$

$$I_4 = -\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt, \quad I_5 = -\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt.$$

Достаточно доказать, что каждый из этих пяти интегралов меньше $\dfrac{\epsilon}{5}$ при всех достаточно больших λ.

Для интегралов I_3, I_4 и I_5 это вытекает из того, что каждый из этих интегралов стремится кулю при $\lambda \to \infty$. Стремление к нулю при $\lambda \to \infty$ интегралов I_4 и I_5 вытекает из того, что при $\lambda \to \infty$

$$\int_{\delta}^{\infty}\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{-\delta}\frac{sin(\lambda t)}{t}\,dt = \int_{\delta\lambda}^{\infty}\frac{sin\tau}{\tau}\,d\tau \to 0.$$

Стремление к нулю при $\lambda \to \infty$ интеграла I_3 вытекает из следствия из основной леммы, применённого к принадлежащей классу $L_1(-\infty, \infty)$ функции $g(t)$, равной $\dfrac{f(x+t)}{t}$ при $|t| \ge \delta$ и нулю при $|t| < \delta$.

Справедливые п р и в с е х λ неравенства $|I_1| < \dfrac{\epsilon}{5}$ и $|I_2| < \dfrac{\epsilon}{5}$ проверяются тривиально. Проверим первое из этих неравенств, используя оценки (20) и (21):

$$|I_1| \le \frac{M}{\pi}\int_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M}{\pi}\frac{1}{\alpha}\delta^{\alpha} < \frac{\epsilon}{5}.$$

Теорема 20 доказана.

3^0. Прямое и обратное преобразования Фурье.

Разложение функции $f(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy \qquad (\star)$$

(несобственный интеграл понимается в смысле главного значения) востанавливающее функцию по её образу Фурье называется о б р а т н ы м п р е о б р а з о в а н и е м Ф у р ь е.

При этом выражение для образа Фурье

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\,dx \qquad (\star\star)$$

называется прямым преобразованием Фурье. Для важного частного случая, когда функция $f(x)$ является чётной, формулы $(\star\star)$ и $(\star)$ принимают вид

$$\widehat{f}(y) = 2\int\limits_0^\infty cos(xy) f(x)\, dx \qquad (\overline{\star\star}),$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty cos(xy)\widehat{f}(y)\, dy \qquad (\overline{\star})$$

и называются прямым и обратным косинус преобразованием Фурье.

Аналогично для случая, когда функция $f(x)$ является нечётной, формулы $(\star\star)$ и $(\star)$ принимают вид

$$\widehat{f}(y) = 2\int\limits_0^\infty sin(xy) f(x)\, dx \qquad (\overline{\overline{\star\star}}),$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty sin(xy)\widehat{f}(y)\, dy \qquad (\overline{\overline{\star}})$$

и называются прямым и обратным синус преобразованием Фурье.

Издательство ООО “МАКС Пресс”
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
Подписано к печати 24.10.2000 г.
Усл.печ.л.3,25. Тираж 500 экз. Заказ 478.
Тел. 939-3890, 939-3891, 928-1042. Тел./Факс 939-3891.
119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ.