Лекция Ломова И.С. от 6.04.2005 (билет є 14)

ГЛАВА 9. РЯДЫ ФУРЬЕ

3 Замкнутость тригонометрической системы функций

п 4 ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ФЕЙЕРА

ТЕОРЕМА 13. Пусть $f(x)$ — интегрируема на $[-\pi,\pi]$, $2\pi \sim \mathbb{R}$. Фиксируем произвольную точку x_0 из $\mathbb{R}$, Пусть существует f(x_0+0) и $f(x_0-0)$. Тогда $\sigma_n(x_0,f)$ сходится при $n\to\infty$ к $(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2 = F(x_0)$ (обозначение).

Доказательство: $f(x)$ - интегрируема $\Rightarrow$ ограничена на R $\Rightarrow$ существует $M>0$: $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Существует $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, т.е. $\forall\varepsilon>0$ существует $d>0$:

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall t: 0\leqslant t<d; \tag{0.1}$$

$$|f(x_0+t)-f(x_0-0)| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall t:\ -d\leqslant t<0. \tag{0.2}$$

Рассмотрим

$$\sigma_n(x_0,f)-F(x_0)=$$

= {лемма о переставлении членов Чезаро, 2-ое свойство ядра Фейера (что его интеграл от $-\pi$ до $\pi=0$)} =

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\Phi_n(t)dt-\int_{-\pi}^{\pi}F(x0)\Phi_n(t)dt=\{\text{пусть } d<\pi\}=$$

$$=\int_{d\leqslant|t|<\pi}[f(x_0+t)-F(x_0)]\,\Phi_n(t)dt+\int_{-d}^{d}f(x_0+t)\Phi_n(t)dt-\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}\int_{-d}^{d}\Phi_n(t)dt=$$

$$=\left\{\text{свойство 1: } \Phi_n \text{ — четная} \Rightarrow \int_{-d}^{d}\Phi_n(t)dt=2\int_0^d\Phi_n(t)dt=2\int_{-d}^{0}\Phi_n(t)dt\right\}=$$

$$=\int_{d\leqslant|t|<\pi}[f(x_0+t)-F(x_0)]\Phi_n(t)dt+\int_0^d(f(x_0+t)-f(x_0+0))\Phi_n(t)dt+\int_{-d}^{0}(f(x_0+t)-f(x_0-0))\Phi_n(t)dt=I_1+I_2+I_3.$$

Имеем ограничение $|F(x_0)|<M$. Тогда оценим интегралы

$$I_1<2M\int_{d\leqslant|t|<\pi}\Phi_n(t)dt=2M\left(\int_{-\pi}^{-d}\Phi_n(t)dt+\int_d^{\pi}\Phi_n(t)dt\right)=\{\text{св-со 3}\}=$$

$$=2M(\eta_n(d)+\eta_n(d))=4M\eta_n(d)\to 0 \text{ при } n\to\infty\Rightarrow$$

$$\forall \text{ фиксированного } \varepsilon>0\ \exists N\colon \forall n>N\colon |I_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее

$$|I_2+I_3|\leqslant\int_0^d|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\,\Phi_n(t)dt+\int_{-d}^{0}|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\,\Phi_n(t)dt<\{\text{вспомним (1)}\}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}\int_0^d\Phi_n(t)dt+\frac{\varepsilon}{4}\int_{-d}^{0}\Phi_n(t)dt=\frac{\varepsilon}{4}\int_{-d}^{d}\Phi_n(t)dt<\{\Phi_n(t)\geqslant 0\}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\{\text{св-во 2}\}=\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\colon\forall n\geqslant N|I_2+I_3|<\frac{\varepsilon}{4}$$

Поэтому $|\sigma_n-F(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon \Rightarrow \sigma_n(x_0,f)\to F(x_0)$ при $n\to\infty$ ч.т.д.