Издательство ООО "МАКС Пресс".
Лицензия ИД № 00510 от 01.12.99 г.
Подписано к печати 26.02.2002 г.
Усл.печ.л. 0,5. Тираж 500 экз. Заказ 218.
Тел. 939-3890, 939-3891, 928-1042. Тел./Факс 939-3891.
119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2 КУРС, 4 СЕМЕСТР

Составители: А. В. Домрина, Т. А. Леонтьева.

2002

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) изучается на факультете ВМК в 4 семестре 2 курса. Программа курса ТФКП рассчитана на одну лекцию в неделю и одно семинарское занятие в неделю. Тем самым получается около 15–16 занятий, включая контрольную работу.

Основными темами курса являются:

I. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость функций комплексного переменного.

II. Интегральная формула Коши, интеграл типа Коши, свойства аналитических функций.

III. Степенные ряды. Ряды из аналитических функций.

IV. Ряды Тейлора. Ряды Лорана. Изолированные особые точки.

V. Вычеты. Вычисление собственных и несобственных интегралов с помощью вычетов.

VI. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями.

VII. Преобразование Лапласа. Решение дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными) с помощью преобразования Лапласа.

Номера задач для семинарских и домашних занятий даны по задачнику Т. А. Леонтьевой, В. С. Панферова и В. С. Серова [5], а номера дополнительных задач — по задачникам [6], [7]. В конце разработки даны типичные варианты контрольной работы и ряд задач, предлагаемых на зачетной комиссии. Также приведен список задач, рекомендованных при подготовке к экзамену.

Список рекомендованной литературы

[1] А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. Теория функций комплексного переменного. М., Наука, 1979.

[2] А. В. Бицадзе. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., Наука, 1984.

[3] А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Тома I, II. М., Наука, 1967.

[4] И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Наука, 1984.

[5] Т. А. Леонтьева, В. С. Панферов, В. С. Серов. Задачи по теории функций комплексного переменного. М., Изд-во МГУ, 1992.

[6] Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1960.

[7] Сборник задач по теории аналитических функций. Под редакцией М. А. Евграфова. М., Наука, 1974.

Программа занятий по теории функций комплексного переменного

Занятие 1. Комплексные числа и их свойства

1.2 1), 3), 8), 10); 1.4 1), 3), 5), 7); 1.11 1), 2); 1.13 1), 2), 3), 6); 1.14; 1.25 1)–5).

Дома: 1.2 4), 5), 6), 9); 1.4 2), 4), 6), 8); 1.11 3), 4); 1.13 4), 5), 7), 8); 1.15; 1.25 6)–11).

Дополн.: [6] 4; 9; 15; 16; 60. [7] 1.09; 1.14; 1.27; 1.28; 1.31; 1.59; 1.64; 1.65.

Занятие 2. Последовательности, ряды и бесконечные произведения комплексных чисел.

2.3; 2.5; 2.8; 2.18; 2.20; 2.23 1), 2); 2.27; 2.29 4), 6); 2.52; 2.53; 2.56 1), 2); 2.73 1), 3) 5).

Дома : 2.4; 2.7; 2.12; 2.26; 2.28; 2.51; 2.55; 2.56 3), 4); 2.57 2), 4), 6).

Дополн.: [6] 438; 443; 444. [7] 2.10; 2.12; 2.15; 2.21; 2.27; 2.33.

Занятие 3. Функции комплексного переменного. Непрерывность и равномерная непрерывность.

3.25; 3.26; 3.27 4), 10); 3.33 1), 3) 8); 3.34; 3.37.

Дома : 3.23; 3.27 5), 6), 11); 3.28; 3.33 2), 6) 9); 3.36 1)–8); 3.46.

Дополн.: [6] 71; 74; 100; 102; 104. [7] 3.08; 3.10.

Занятие 4. Дифференцируемость функций комплексного переменного.

5.1 1), 4) 9); 5.3; 5.4; 5.8 а); 5.9.

Дома : 5.1 2), 3), 5), 13), 14); 5.7; 5.8 б); 5.11; 5.12; 5.14.

Дополн.: [6] 105; 110; 111; 128–131. [7] 8.08; 8.15; 8.16; 8.39; 8.40; 8.56; 9.09; 9.10.

Занятие 5. Интегрирование функций комплексного переменного. Интегральная теорема Коши, вычисление интегралов.

6.5; 6.7; 6.9; 6.12; 6.15 1); 6.24; 6.27; 6.49; 6.53; 6.60.

Дома : 6.6; 6.10; 6.11; 6.15 3); 6.28; 6.29; 6.50; 6.52; 6.62.

Дополн.: [6] 402; 403; 405; 412. [7] 10.07; 10.11; 10.13; 10.19.

Занятие 6. Интегральная формула Коши, интеграл типа Коши.

7.4; 7.6 1), 4), 6), 9); 7.8; 7.15; 7.20.

Дома : 7.5; 7.6 2), 3), 5); 7.10; 7.11; 7.12; 7.17.

Дополн.: [6] 427; 428; 429. [7] 10.24; 10.29; 10.35; 10.46; 10.47; 10.48.

Занятие 7. Степенные ряды. Ряды из аналитических функций.

8.2 1), 4), 9), 10); 8.3 1), 3), 4); 8.6 1), 2); 8.8; 8.9; 8.12.

Дома : 8.2 2), 3), 5), 6); 8.3 2), 5), 6); 8.6 3); 8.13*.

Дополн.: [6] 469; 491; 508. [7] 11.04; 11.05; 11.06; 11.11; 11.17.

Занятие 8. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Нули аналитических функций.

8.14 1), 3), 7); 8.15; 8.16 11), 12), 13); 8.18 1), 2); 8.19; 8.26 1); 8.47 1), 2), 3), 4).

Дома : 8.14 2), 4), 5), 6); 8.16 7), 8), 9), 10); 8.17, 2); 8.18 3), 4); 8.20; 8.26 2); 8.48.

Дополн.: [6] 467; 477; 478. [7] 6.08; 6.31; 6.32.

Занятие 9. Ряды Лорана.

9.16 1), 2), 3); 9.17 1), 3), 6); 9.21; 9.23 1), 2); 9.24; 9.25 1)–5); 9.26 1).

Дома : 9.16 4)–7); 9.17 2), 4), 5), 7); 9.18; 9.19; 9.23 3), 4); 9.25 6)–10); 9.26 3), 4).

Дополн.: [6] 576; 577; 579; 585. [7] 20.08; 20.09; 20.16 1)–5); 20.32.

Занятие 10. Изолированные особые точки.

9.27 1)–4); 9.28; 9.31 1), 2); 9.37; 9.40.

Дома : 9.27 5)–9); 9.29; 9.31 3), 4); 9.32; 9.36; 9.39.

Дополн.: [6] 606; 607; 612; 628; 629; 640. [7] 19.03; 19.08 7), 8); 19.15 1)–5).

Занятие 11. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

12.9 2), 3), 5), 9); 12.11 1), 4), 7), 9).

Дома : 12.9 4), 6), 12), 15); 12.11 2), 5), 6), 10); 12.12.

Дополн.: [6] 797; 799; 804; 805; 808; 824; 836. [7] 21.02; 21.03; 21.10; 21.12; 21.17.

Занятие 12. Вычисление интегралов с помощью вычетов (продолжение).

12.13 2), 5), 10); 12.16 1), 7); 12.18 1), 4), 7); 12.23 1), 2); 12.31* 1), 2).

Дома : 12.13 4), 6), 7); 12.16 2), 3), 5); 12.18 2), 5), 13); 12.23 5); 12.31* 3), 4).

Дополн.: [6] 874; 846; 849; 858 2); 865; 878. [7] 28.03; 28.05; 28.07; 28.09; 28.19.

Занятие 13. Конформные отображения: дробно-линейные и степенные функции.

13.41 1), 3); 13.46 1); 13.50 1); 13.39 1); 13.70; 13.74 1); 13.75 1).

Дома : 13.41 2), 4); 13.46 2); 13.50 2); 13.39 2); 13.69; 13.74 2), 5); 13.75 2).

Дополн.: [6] 160; 164; 180; 214; 244; 255. [7] 33.19; 35.05; 35.13; 35.14.

Занятие 14. Конформные отображения: e^z, функция Жуковского, тригонометрические функции и обратные к ним.

13.79 1)–4); 13.80 1)–3); 13.81; 13.82; 13.84 1); 13.85; 13.88 1); 13.89 1) 13.93 2), 3).

Дома : 13.79 5)–7); 13.80 4), 5); 13.83; 13.84 2); 13.88 2); 13.89 2) 13.93 6), 7).

Дополн.: [6] 262; 264; 303; 304; 307. [7] 35.10; 35.22; 35.29.

Занятие 15. Преобразование Лапласа.

15.6 4), 7); 15.18 1)–5); 15.21; 15.36 3), 4); 15.37 1), 3).

Дома : 15.6 1)–3), 8); 15.18 6)–8); 15.26 1), 3); 15.36 1), 2); 15.37 4), 5).

Занятие 16. Контрольная работа.

Задачи к экзамену

1. Найти $\lim_{n\to\infty} e^{2\pi i e n!}$.

2. а) Существует ли $f \in A(|z|<1)$ такая, что для всех $n \geqslant 2$ имеем $f(1/n) = 1/n$? б) Тот же вопрос для $f(1/n) = (-1)^n/n$.

3. Существует ли $f \in A(\mathbb{C})$ такая, что $|f(z)| \geqslant e^{|z|} - 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$?

4. Существует ли $f \in A(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ такая, что $|f(z)| \geqslant e^{1/|z|}$?

5. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $f(z)$ имеет в точке a устранимую особенность, $g(z)$ — полюс, $h(z)$ — существенную особенность. Какую особенность в точке a могут иметь функции: а) $f(z)^k g(z)^m$, $k, m \in \mathbb{Z}$; б) $g(z)^k h(z)^m$, $k, m \in \mathbb{Z}$; в) $e^{g(z)}$. Привести примеры.

6. Имеет ли $1/z$ первообразную в $\{0 < |z| < 1\}$? Иными словами, существует ли функция $f \in A(0 < |z| < 1)$ такая, что $f'(z) = 1/z$ при $0 < |z| < 1$?

7. Найти радиус сходимости ряда Тейлора функции $\frac{\operatorname{tg}(1/z)}{e^{2z}+10}$ с центром в точке $z = i$.

8. Пусть $f \in A(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$ (одна из точек $z_1, \ldots, z_n$ может быть равна ∞), причем каждая из точек $z_1, \ldots, z_n$ является полюсом для $f(z)$. Доказать, что $f(z)$ рациональна.

9. Вычислить $\int_{|z|=2} \frac{z^{2001}\, dz}{z^{2002}-1}$.

10. Пусть $f(z)$ — непостоянная целая функция. Доказать, что $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ есть строго возрастающая функция от r.

11. Существует ли $f \in A(|z| < 2)$ такая, что $f(z) = \bar{z}$ при $|z| = 1$?

12. Привести пример функции $f \in C(K)$, которую нельзя равномерно на K приблизить многочленами от z, если: а) $K = \{|z| \leqslant 1\}$; б) $K = \{|z| = 1\}$.

13. Найти число нулей (с учетом кратностей) следующих функций в круге $|z| < 1$: а) $z^7 + 5z^4 - 2z^2 + 1$; б) $z^2 + 3e^{z-i}$; в) $2z^2 + \cos z$.

14. Отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется локально конформным, если каждая точка $z_0 \in D$ имеет окрестность $U(z_0) \subset D$, в которой f конформно. Привести пример отображения $f : D \to \mathbb{C}$, которое локально конформно, но не конформно.

15. Можно ли конформно отобразить область $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ на $\{0 < |z| < 1\}$?

Задачи повышенной трудности

1. Существует ли $f \in A(|z| < 1)$ такая, что для всех $n \geqslant 2$ имеем $f(1/n) = (n!)^{-1}$?

2. Пусть f, g — целые функции и $f^3(z) + g^3(z) = 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Доказать, что $f \equiv \mathrm{const}$ и $g \equiv \mathrm{const}$.

3. Доказать, что сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ не продолжается аналитически ни через одну точку границы его круга сходимости.

4. Доказать лемму Шварца: Пусть $f \in A(|z| < 1)$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$ при $|z| < 1$. Тогда $|f(z)| \leqslant |z|$ при $|z| < 1$, причем если найдется точка $z_0 \neq 0$ с $|f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z) = Cz$ для некоторой константы $C \in \mathbb{C}$. Вывести отсюда (или из неравенств Коши), что в условиях леммы Шварца $|f'(0)| \leqslant 1$, причем если $|f'(0)| = 1$, то $f(z) = Cz$ для некоторой константы $C \in \mathbb{C}$.

5. Пусть $f \in A(|z| < 1)$ и $|f(z)| \leqslant 1$ при $|z| < 1$. Доказать, что $|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ при $|z| < 1$.

6. Пусть $\Pi = \{\operatorname{Re} z > 0\}$. Существует ли $f \in A(\Pi)$ такая, что $|f| \leqslant 1$ на Π и $|f'(1)| > 100$?

7. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная (не обязательно односвязная) область, а функция $f \in A(D)$ такова, что $f(D) \subset D$ и $f(a) = a$ для некоторой точки $a \in D$. Доказать, что $|f'(a)| \leqslant 1$. Доказать, что если $f'(a) = 1$, то $f(z) \equiv z$.

Варианты контрольных работ

Вариант 1.

1. Разложить функцию $f(z) = \frac{1+2z^2}{1+z-z^2}$ в ряд Лорана по степеням z в кольце D, содержащем точку $3/4$. Указать границы кольца D.

2. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{1-\operatorname{ch}(z/2)}{e^z - e^{3z}}$ и определить их вид.

3. Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы

$$\text{а)} \int_{|z-1/2|=1} \frac{z^3 e^{1/z}}{1-z^2}\,dz; \quad \text{б)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-x)\cos 2x}{x^2+6x+10}\,dx.$$

4. Отобразить область $\{|z| > 1, \max(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) > 0\}$ конформно на верхнюю полуплоскость.

Вариант 2.

1. Найти множество точек z, в которых дифференцируема функция $f(z) = |z|e^z$.

2. Разложить функцию $f(z) = \operatorname{ch} z$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 2i$ и указать область, где справедливо разложение.

3. Разложить $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ в ряд Лорана в кольце $\{0 < |z+1| < 3\}$.

4. Определить все особые точки функции $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{\sin(z-1)}$ и классифицировать их, включая точку $z = \infty$.

5. Вычислить $\int_{|z|=3} \sin\frac{z}{z+1}\,dz$.

6. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0$.

7. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость внутренность угла $\{\pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$ с выброшенным лучом $[i, i\infty] = \{it \,|\, t \geqslant 1\}$.

Вариант зачетной комиссии

1. Исследовать на равномерную сходимость на множестве

$$\int_1^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}, \quad \alpha > 0.$$

2. Обосновать возможность дифференцирования под знаком интеграла и вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} t\,dt, \quad a > 0.$$

4. Разложить в ряд Лорана на указанном множестве

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad 0 < |z - i| < 2.$$

5. Применить методы ТФКП для вычисления интеграла. Обосновать применимость метода.

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin ax}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad a > 0.$$

6. Отобразить конформно единичный круг на плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси.