ГЛАВА 1

КОМПЛЕКСНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Комплексное число и действия над комплексными числами

1. Понятие комплексного числа. Мы считаем, что с понятием комплексного числа и определением арифметических действий над комплексными числами читатель уже знаком. Комплексные числа и действия над ними изложены в предыдущих выпусках курса *). Однако из соображений цельности изложения имеет смысл еще раз напомнить основные понятия.

Комплексным числом z называется пара действительных чисел (a, b) с установленным порядком следования чисел a и b. Это условно записывается в виде $z=(a, b)$. Первое число a пары (a, b) называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается символом $a=\operatorname{Re} z$; второе число b пары (a, b) называется *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается символом $b=\operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1=(a_1, b_1)$ и $z_2=(a_2, b_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны и их действительные и их мнимые части, т. е. $z_1=z_2$ лишь при $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

2. Действия над комплексными числами. Перейдем к определению алгебраических операций над комплексными числами.

Суммой комплексных чисел $z_1=(a_1, b_1)$ и $z_2=(a_2, b_2)$ называется комплексное число $z=(a, b)$, где $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$. Легко видеть, что при таком определении сохраняются переместительный и сочетательный законы сложения, т. е. $z_1+z_2=z_2+z_1$ и $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$. Так же, как и в области действительных чисел, нулем называется такое комплексное число 0, сумма которого с любым комплексным числом z равна этому числу z, т. е. $z+0=z$. Очевидно, что существует единственное комплексное число $0=(0, 0)$, обладающее этим свойством.

*) См. вып. 1, стр. 195—199.

Произведением комплексных чисел $z_1=(a_1, b_1)$ и $z_2=(a_2, b_2)$ называется комплексное число $z=(a, b)$ такое, что $a=a_1a_2-b_1b_2$, $b=a_1b_2+a_2b_1$. При таком определении произведения выполняются переместительный: $z_1z_2=z_2z_1$, сочетательный: $z_1(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)z_3$ и распределительный: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$ законы.

Включим действительные числа в множество комплексных чисел, рассматривая действительное число a как комплексное число $a=(a, 0)$. Тогда, как следует из определения действий сложения и умножения, для комплексных чисел сохраняются известные правила действий над действительными числами. Поэтому множество комплексных чисел рассматривается как расширение множества действительных чисел *). Заметим, что умножение на действительную единицу (1, 0) не меняет комплексного числа: $z\cdot 1=z$.

Комплексное число вида $z=(0, b)$ называется *чисто мнимым* и символически обозначается $z=ib$. Чисто мнимое число $(0, b)=ib$ можно рассматривать как произведение мнимой единицы (0, 1) и действительного числа $(b, 0)$. Мнимую единицу обычно обозначают символом $(0, 1)=i$. В силу определения произведения комплексных чисел справедливо соотношение $i\cdot i=i^2=-1$. Оно позволяет придать прямой алгебраический смысл так называемой *алгебраической форме* записи комплексного числа

$$z=(a, b)=a+ib \tag{1.1}$$

и производить операции сложения и умножения комплексных чисел по обычным правилам алгебры многочленов.

Комплексное число $\bar z=a-ib$ называется *комплексно сопряженным числу* $z=a+ib$.

Операция вычитания комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению. Комплексное число $z=a+ib$ называется *разностью* комплексных чисел $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$, если $a=a_1-a_2$, $b=b_1-b_2$.

Операция деления комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению. Комплексное число $z=a+ib$ называется *частным* комплексных чисел $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2\neq 0$, если $z_1=z\cdot z_2$. Отсюда следует, что действительная a и мнимая b части частного z определяются из линейной системы алгебраических уравнений

$$a_2a-b_2b=a_1,$$
$$b_2a+a_2b=b_1$$

с определителем $a_2^2+b_2^2$, отличным от нуля. Решив эту систему, получим

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}. \tag{1.2}$$

*) Как будет следовать из дальнейших рассмотрений, множество комплексных чисел, в отличие от множества действительных чисел, не обладает свойством упорядоченности, так как не существует рациональной системы сравнения комплексных чисел.

ее свойств опять удобно представить комплексные числа в показательной форме: $z=\rho e^{i\varphi}$, $w=re^{i\psi}=\rho^2e^{i2\varphi}$. Отсюда легко заключить, что точки плоскости z, лежащие на луче, составляющем угол φ с положительным направлением действительной оси, переходят в точки плоскости w, лежащие на луче, составляющем с положительным направлением действительной оси угол 2φ. Поэтому точкам z и $-z$, аргументы которых различаются на π, а модули одинаковы, соответствует одно и то же значение w ($e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$). Тем самым обратная функция оказывается многозначной. Рассмотрим подробнее отображение, осуществляемое функцией $w=z^2$. Верхняя полуплоскость z вместе с действительной осью переходит в полную

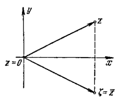


Рис. 1.5.

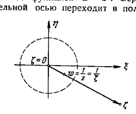


Рис. 1.6.

плоскость w. Положим для определенности, что в верхней полуплоскости аргумент z заключен в пределах $0<\varphi<\pi$. Тогда различным точкам области $0<\varphi<\pi$ соответствуют различные значения w. Такая область изменения независимой переменной, различным точкам которой соответствуют различные значения функции, называется областью однолистности функции. В предыдущих примерах областью однолистности являлась вся область задания функции; в данном случае для функции $w=z^2$, областью задания которой является полная комплексная плоскость z, областью однолистности служит полуплоскость. Отметим, что в рассматриваемом случае границы области однолистности — лучи $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ — переходят в одну и ту же прямую — положительную часть действительной оси плоскости w. Продолжая наши рассмотрения, легко показать, что функция $w=z^2$ производит отображение и нижней полуплоскости z вместе с действительной осью на полную плоскость w. Тем самым обратная функция

$$z=\sqrt{w}, \tag{1.15}$$

определенная на полной плоскости w, уже не является однозначной — одной и той же точке плоскости w соответствуют две различные точки плоскости z: одна — в верхней, другая — в нижней полуплоскости.

Чтобы изучить отображение, осуществляемое данной функцией, воспользуемся опять показательной формой записи комплексного

числа: $w=re^{i\psi}$. Тогда, согласно правилу извлечения корня из комплексного числа, мы получаем два различных значения функции $z(w)$: $z_k=\sqrt{r}\,e^{\frac{i}{2}(\psi+2\pi k)}$ $(k=0,1)$ (заметим, что $\arg z_1-\arg z_0=\pi$). Рассмотрим на плоскости w некоторую замкнутую кривую C, не имеющую самопересечений. Фиксируем на ней точку w_0, которой припишем определенное значение аргумента ψ_0, найдем $z_0(w_0)$, $z_1(w_0)$ и будем следить за изменением функций $z_0(w)$ и $z_1(w)$ при непрерывном движении точки w по кривой C. Аргумент точки w на кривой C изменяется непрерывно. Поэтому, как легко видеть, функции $z_0(w)$ и $z_1(w)$ являются непрерывными функциями w на кривой C. При этом возможны два различных случая. В первом случае кривая C не содержит внутри точку $w=0$. Тогда после обхода кривой C аргумент точки w_0 вернется к первоначальному значению $\arg w_0=\psi_0$. Следовательно, и значения функций $z_0(w)$ и $z_1(w)$ в точке $w=w_0$ после обхода кривой C будут равны их первоначальным значениям. Тем самым на кривой C в этом случае определены две различные однозначные функции комплексной переменной w: $z_0=\sqrt{r}\,e^{\frac{i\psi}{2}}$ и $z_1=\sqrt{r}\,e^{\frac{i}{2}(\psi+2\pi)}$ (ψ изменяется непрерывно на кривой C, начиная от значения ψ_0 в точке w_0). Очевидно, если область D плоскости w обладает тем свойством, что любая замкнутая кривая в этой области не содержит точки $w=0$, то в D определены две различные однозначные непрерывные функции $z_0(w)$ и $z_1(w)$. Функции $z_0(w)$ и $z_1(w)$ называются *ветвями многозначной функции* $z(w)=\sqrt{w}$.

Во втором случае кривая C содержит внутри точку $w=0$. Тогда после обхода кривой C в положительном направлении значение аргумента точки w_0 уже не вернется к первоначальному значению ψ_0, а изменится на 2π: $\arg w_0=\psi_0+2\pi$. Поэтому и значения функций $z_0(w)$ и $z_1(w)$ в точке w_0 в результате их непрерывного изменения после обхода кривой C уже не будут равны их первоначальным значениям. Более точно, получим $\tilde z_0(w_0)=z_0(w_0)\,e^{i\pi}$, $\tilde z_1(w_0)=z_1(w_0)\,e^{i\pi}$. То есть функция $z_0(w)$ перейдет в функцию $z_1(w)$, и наоборот.

Если для точки z_0 можно указать такую ε-окрестность, что при однократном обходе точки z_0 по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в этой ε-окрестности, одна ветвь многозначной функции переходит в другую, то точка z_0 называется *точкой разветвления (ветвления)* данной многозначной функции. В окрестности точки разветвления отдельные ветви многозначной функции уже нельзя рассматривать как различные однозначные функции, поскольку при обходе точки разветвления их значения меняются. В рассматриваемом примере точкой разветвления является точка $w=0$.

Заметим, что обход окружности $|z|=R$ сколь угодно большого радиуса соответствует обходу на плоскости $\zeta=\frac{1}{z}$ точки $\zeta=0$ по

Комплексное число $z_1=\sqrt[n]{z}$ называется *корнем n-й* степени из комплексного числа z, если $z=z_1^n$. Из этого определения следует, что $\rho_1=\sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi_1=\frac{\varphi}{n}$. Как было отмечено выше, аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до аддитивного слагаемого, кратного 2π. Поэтому из выражения для аргумента комплексного числа z_1:

$$\varphi_k=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n},$$

где φ — одно из значений аргумента комплексного числа z, получим, что существуют различные комплексные числа, которые при возведении в n-ю степень равны одному и тому же комплексному числу z. Модули этих комплексных чисел одинаковы и равны $\sqrt[n]{\rho}$, а аргументы различаются на число, кратное $\frac{2\pi}{n}$. Число различных значений корня n-й степени из комплексного числа z равно n. Точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-й степени из комплексного числа z, расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке $z=0$. Соответствующие значения φ_k получаются при k, принимающем значения $k=0, 1, \ldots, n-1$.

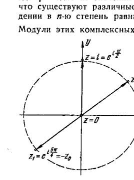


Рис. 1.2.

Классический анализ поставил задачу так расширить множество действительных чисел, чтобы не только элементарные алгебраические операции сложения и умножения, но и операция извлечения корня не выводила из этого расширенного множества. Как мы видим, введение комплексных чисел решает эту задачу.

Примеры: 1) Найти все значения $\sqrt{i}$. Записав в показательной форме комплексное число $z=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$, получим для значений квадратного корня из данного комплексного числа выражения $z_k=e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{2\pi k}{2}}$, $k=0, 1$ (рис. 1.2), откуда

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$
$$z_1=e^{i\frac{5\pi}{4}}=-e^{i\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

2) Найти все значения $\sqrt[p]{1}$, где $p>0$ — целое число. Воспользовавшись представлением $1=e^{i0}$, так же, как и в предыдущем примере, получим $z_k=e^{i\frac{2\pi}{p}k}$, $k=0, \ldots, p-1$, откуда

$$z_0=e^{i0}=1,\quad z_1=e^{i\frac{2\pi}{p}}=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p},\ \ldots$$
$$\ldots,\ z_{p-1}=e^{i\frac{2\pi}{p}(p-1)}=e^{-i\frac{2\pi}{p}}=\cos\frac{2\pi}{p}-i\sin\frac{2\pi}{p}.$$

То есть корень p-й степени из 1 имеет ровно p различных значений. Эти комплексные числа соответствуют вершинам правильного p-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в точке $z=0$, причем одна из вершин лежит в точке $z=1$.

3) Найти все значения $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$. Так как $z=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, то для значений квадратного корня из данного комплексного числа получим выражения $z_k=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{2\pi k}{2}}$, $k=0, 1$, откуда

$$z_0=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}},$$
$$z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}=-z_0.$$

Итак, для извлечения корня n-й степени из комплексного числа надо перейти к показательной форме записи комплексного числа, извлечь корень n-й степени из модуля данного комплексного числа (берется арифметическое — действительное и положительное — значение корня), а аргумент данного комплексного числа разделить на n. (Для получения всех значений корня надо иметь в виду многозначность аргумента.)

§ 2. Предел последовательности комплексных чисел

1. Определение сходящейся последовательности. Для построения теории функций комплексной переменной большое значение имеет перенесение основных идей анализа в комплексную область. Одним из фундаментальных понятий анализа является понятие предела и, в частности, понятие сходящейся числовой последовательности. Аналогичную роль играют соответствующие понятия и в области комплексных чисел. При этом многие определения, связанные с предельным переходом, полностью повторяют соответствующие определения теории функций действительной переменной.

Последовательностью комплексных чисел называется перенумерованное бесконечное множество комплексных чисел. В даль-

дифференцируемой функцией комплексной переменной z в точке $z_0=x_0+iy_0$.

Доказательство. По определению дифференцируемости *), приращения функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) могут быть записаны в виде

$$u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0, y_0)=$$
$$=u_x(x_0, y_0)\Delta x+u_y(x_0, y_0)\Delta y+\xi(x, y),$$
$$v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0, y_0)=$$
$$=v_x(x_0, y_0)\Delta x+v_y(x_0, y_0)\Delta y+\eta(x, y), \tag{1.18}$$

где функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ стремятся к нулю при $x\to x_0$, $y\to y_0$ быстрее, чем Δx и Δy $\left(\lim\limits_{|\Delta z|\to 0}\frac{\xi(x, y)}{|\Delta z|}=0,\ \lim\limits_{|\Delta z|\to 0}\frac{\eta(x, y)}{|\Delta z|}=0,\ |\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$. Составим теперь разностное отношение $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, где $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, и используя (1.18) и (1.17), преобразуем его к виду

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=u_x(x_0, y_0)\frac{\Delta x+i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+v_x(x_0, y_0)\frac{i\Delta x-\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+$$
$$+\frac{\xi(x, y)+i\eta(x, y)}{\Delta x+i\Delta y}=u_x(x_0, y_0)+iv_x(x_0, y_0)+\frac{\zeta(z)}{\Delta z}$$
$$(\zeta(z)=\xi(x, y)+i\eta(x, y)).$$

Заметим, что при стремлении Δz к нулю последнее слагаемое этой формулы стремится к нулю, а первые остаются неизменными. Поэтому существует предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)$, что и доказывает дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z_0.

Если функция $f(z)$ дифференцируема во всех точках некоторой области $\mathscr{G}$, а ее производная непрерывна в этой области, то функция $f(z)$ называется аналитической функцией **) *в области* $\mathscr{G}$.

Как известно ***), непрерывность частных производных является достаточным условием существования первого дифференциала (диффе-

*) См. вып. 1, стр. 479.

**) Приведенное здесь определение аналитической функции отличается от обычно принятого в литературе дополнительным требованием непрерывности производной. Это сделано с целью облегчения последующих доказательств. Кроме того, как это следует из более подробного исследования, математическое содержание понятия аналитической функции при этом не меняется. В частности, можно показать, что при дополнительном требовании непрерывности функции $f(z)$ в области $\mathscr{G}$ выполнение условий Коши — Римана (1.17) всюду в этой области является необходимым и достаточным для аналитичности $f(z)$ и непрерывности всех ее производных в области $\mathscr{G}$. См. подробнее А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950.

***) См. вып. 1, стр. 483.

ренцируемости) функции многих переменных. Поэтому из теорем 1.3 и 1.4 следует, что *необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ в области $\mathscr{G}$ является существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанных соотношениями Коши — Римана* (1.17).

Понятие аналитической функции является основным понятием теории функций комплексной переменной в силу особой роли, которую играет класс аналитических функций как при решении многочисленных математических проблем, так и при различных приложениях функций комплексной переменной в смежных областях естествознания.

Соотношения Коши — Римана часто используются при исследовании различных свойств аналитических функций. При этом равенства (1.17) не являются единственно возможной формой соотношений Коши — Римана. Как может установить сам читатель, действительная и мнимая части аналитической функции $f(z)=u(\rho, \varphi)+iv(\rho, \varphi)$ комплексной переменной $z=\rho e^{i\varphi}$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}, \tag{1.19}$$

где ρ и φ — полярные координаты точки (x, y). Аналогичным образом легко установить, что модуль и аргумент аналитической функции $f(z)=R(x, y)\,e^{i\Phi(x, y)}$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{1.20}$$

Отметим также, что соотношения (1.17) позволяют получить различные выражения для производной функции комплексной переменной

$$f'(z)=u_x(x, y)+iv_x(x, y)=v_y(x, y)+iv_x(x, y)=$$
$$=u_x(x, y)-iu_y(x, y)=v_y(x, y)-iu_y(x, y). \tag{1.21}$$

При этом каждый раз производная $f'(z)$ выражается через частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

2. Свойства аналитических функций. Определение производной (1.16) позволяет перенести на аналитические функции комплексной переменной ряд свойств дифференцируемых функций действительной переменной.

1. Если функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathscr{G}$, то она непрерывна в этой области.

2. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ суть аналитические функции в области $\mathscr{G}$, то их сумма и произведение также являются аналитическими функциями в области $\mathscr{G}$, а функция $\varphi(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ является аналитической функцией всюду, где $f_2(z)\neq 0$.

3. Если $w=f(z)$ является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$ плоскости комплексной переменной z, причем в области ее

2 Зак. 2862

достаточными условиями сходимости последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, т. е. сходимости последовательности $\{z_n\}$. Тем самым доказано, что для сходимости последовательности $\{z_n\}$ с комплексными элементами необходимым и достаточным является выполнение критерия Коши.

3. Бесконечно удаленная точка. Введем понятие бесконечно удаленной точки комплексной плоскости, существенное для дальнейшего. Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ такая, что для любого положительного числа R найдется номер N, начиная с которого члены последовательности удовлетворяют условию $|z_n|>R$ при $n\geqslant N$. Такую последовательность назовем неограниченно возрастающей. Согласно введенным ранее определениям данная последовательность, так же как и всякая ее подпоследовательность, предела не имеет. Такое особое положение неограниченно возрастающей последовательности вызывает ряд неудобств. Чтобы избежать этого, введем комплексное число $z=\infty$ и будем считать *всякую неограниченно возрастающую последовательность сходящейся к этому числу*, которому мы поставим в соответствие бесконечно удаленную точку комплексной плоскости. Введем понятие *полной комплексной плоскости*, состоящей из обычной комплексной плоскости, и единственного бесконечно удаленного элемента — бесконечно удаленной точки *) $z=\infty$. Если мы будем пользоваться геометрической иллюстрацией, ставя в соответствие элементам неограниченно возрастающей последовательности $\{z_n\}$ точки комплексной плоскости, то обнаружим, что точки рассматриваемой последовательности с возрастанием их номера располагаются вне концентрических кругов с центром в начале координат, радиусы которых могут быть сколь угодно большими. Отметим, что точки данной последовательности стремятся к точке ∞ *независимо от направления* на полной комплексной плоскости.

В связи с введенными понятиями естественно называть окрестностью бесконечно удаленной точки множество точек z полной комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z|>R$, где R — достаточно большое положительное число.

Определим алгебраические свойства числа $z=\infty$. Из элементов неограниченно возрастающей последовательности $\{z_n\}$ составим последовательность $\left\{\frac{1}{z_n}\right\}$. Эта последовательность сходится к точке $z=0$. Действительно, из предыдущих рассмотрений следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что $\left|\frac{1}{z_n}\right|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Очевидно и обратное утверждение, т. е. если последовательность $\{\zeta_n\}$ сходится к нулю и состоит из отличных от нуля элементов, то последовательность $\left\{\frac{1}{\zeta_n}\right\}$ сходится к бесконечно удаленной точке.

*) Заметим, что аргумент комплексного числа ∞ не определен, так же как и его действительная и мнимая части.

В связи с этим полагают $\frac{1}{\infty}=0$ и $\frac{1}{0}=\infty$. Вообще для бесконечно удаленной точки устанавливаются следующие соотношения: $z\cdot\infty=\infty$ при $z\neq 0$ и $z+\infty=\infty$, $\frac{z}{\infty}=0$ при $z\neq\infty$, которые естественны с точки зрения предельного перехода в операциях сложения и умножения. С этой точки зрения операция $\frac{\infty}{\infty}$, естественно, является неопределенной.

§ 3. Понятие функции комплексной переменной. Непрерывность

1. Основные определения. Целью настоящего пункта является введение понятия функции комплексной переменной. Это понятие вводится так же как и понятие функции действительной переменной. Будем говорить, что на множестве E комплексной плоскости задана функция комплексной переменной, если задан закон, ставящий в соответствие каждой точке множества E некоторое комплексное число. Множество E будем называть множеством значений независимой переменной. Структура этого множества может быть весьма сложной и разнообразной, однако в теории функций комплексной переменной рассматривают множества специальной структуры. Для дальнейшего нам потребуется ряд вспомогательных понятий.

Точка z называется *внутренней точкой множества E*, если существует ε-окрестность точки z, все точки которой принадлежат множеству E. Например, точка z множества $|z|\leqslant 1$ является внутренней, если $|z|<1$; точка $z=1$ не является внутренней точкой данного множества.

Множество E называется областью, если выполняются следующие условия: 1) каждая точка множества E — внутренняя точка этого множества; 2) любые две точки множества E можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат E.

В данном определении области второе требование является условием связности области. Например, множество точек $|z|<1$ образует область. Точно также и ε-окрестность точки z_0 ($|z-z_0|<\varepsilon$) образует область. Множество точек $|z|\leqslant 1$ не является областью, так как не все его точки являются внутренними. Также не являются областями множество точек $|z|\neq 1$ и множество $|z|<1$, $|z-4|<2$ (рис. 1.3), поскольку они не являются связными.

Для обозначения области обычно применяются буквы $\mathscr{G}$, G, D.

Точка z называется *внешней точкой области $\mathscr{G}$*, если существует такая ε-окрестность точки z, все точки которой не принадлежат области $\mathscr{G}$.

Точка z называется *граничной точкой области $\mathscr{G}$*, если в любой ее ε-окрестности содержатся как точки, принадлежащие области $\mathscr{G}$,

Так как производная $f'(z_0)$ не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет той же и для любой другой кривой, проходящей через точку z_0 (хотя значения самих углов Φ_1 и φ_1 могут измениться). Отсюда следует, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией $f(z)$, удовлетворяющей условию $f'(z_0)\neq 0$, угол $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ между любыми кривыми γ_2, γ_1, пересекающимися в точке z_0, равен углу $\Phi=\Phi_2-\Phi_1$ между их образами (кривыми Γ_2 и Γ_1), пересекающимися в точке $w_0=f(z_0)$. Заметим, что при этом сохраняется не только абсолютная величина углов между кривыми γ_2, γ_1 и их образами, но и направление углов. Это свойство данного отображения носит название *свойства сохранения углов*.

Аналогично из соотношения (1.22) получим

$$k=|f'(z_0)|=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}. \tag{1.24}$$

То есть с точностью до величин более высокого порядка малости имеет место равенство $|\Delta w|=k|\Delta z|$. Заметим, что и это соотношение не зависит от выбора кривой γ_1. Геометрический смысл этого соотношения состоит в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0)\neq 0$, бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причем $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия. Это свойство данного отображения носит название *свойства постоянства растяжения*.

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое аналитической функцией $w=f(z)$ и обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов и постоянством растяжений, называется конформным отображением. При конформном отображении окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0 бесконечно малые треугольники с вершиной в точке z_0 преобразуются в подобные им бесконечно малые треугольники с вершиной в точке w_0. Более подробное изложение основных понятий теории конформного отображения будет дано в гл. 6.

4. Примеры. В заключение данного параграфа отметим, что, как легко проверить, линейная функция и функция $w=z^2$, введенные в предыдущем параграфе, являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости; функция $w=\frac{1}{z}$ является аналитической всюду, за исключением точки $z=0$. Так как определение производной (1.16) аналогично определению производной функции одной действительной переменной, то для производных данных функций комплексной переменной имеют место выражения:

$$(az+b)'=a,\quad (z^2)'=2z,\quad \left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}. \tag{1.25}$$

Рассмотрим функцию комплексной переменной $w=e^z$, широко применяющуюся в приложениях. Определим эту функцию, задав

аналитические выражения ее действительной и мнимой частей:

$$u(x, y)=e^x\cos y,\quad v(x, y)=e^x\sin y. \tag{1.26}$$

На действительной оси эта функция совпадает с действительной функцией e^x действительного аргумента x и, как будет показано в дальнейшем, в комплексной области сохраняет основные свойства экспоненты. Поэтому для нее естественно сохранить обозначение

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{iy}. \tag{1.27}$$

Покажем, что e^z является аналитической функцией на всей комплексной плоскости z. Для этого проверим выполнение условий Коши — Римана (1.17)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

и заметим, что все производные в этих равенствах непрерывны по совокупности аргументов на всей плоскости x, y. Проводя вычисление производной e^z по формулам (1.21), получаем

$$(e^z)'=u_x+iv_x=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z.$$

Аналогично

$$(e^{\alpha z})'=\alpha e^{\alpha z}, \tag{1.28}$$

где α — произвольная комплексная постоянная.

Рассмотрим еще две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, определенные с помощью соотношений

$$f_1(z)=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\qquad f_2(z)=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}). \tag{1.29}$$

Как легко видеть, для действительных значений комплексной переменной $z=x$ эти функции совпадают с $\cos x$ и $\sin x$; поэтому для них естественно сохранить прежние обозначения. В дальнейшем мы подробно изучим свойства этих функций, а сейчас лишь отметим, что, как сложные функции от аналитической функции, $\cos z$ и $\sin z$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $(\cos z)'=-\sin z$. Действительно, с помощью (1.28) получим

$$f_1'(z)=\frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz})=-f_2(z). \tag{1.30}$$

Аналогично прямое вычисление дает

$$f_1^2(z)+f_2^2(z)\equiv 1, \tag{1.31}$$

так как согласно правилу возведения комплексного числа в целую степень из формулы (1.27) получим

$$(e^{\alpha z})^2=e^{2\alpha z}. \tag{1.32}$$

множестве E. Рассмотрим различные последовательности точек этого множества $\{z_n\}$, сходящиеся к некоторой точке z_0 и состоящие из точек z_n, отличных *) от точки z_0 ($z_n\neq z_0$), и соответствующие им последовательности значений функции $\{f(z_n)\}$. *Если независимо от выбора последовательности $\{z_n\}$ существует единственный предел $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z_n)=w_0$, то этот предел называется предельным значением, или пределом, функции $f(z)$ в точке z_0, что записывается в виде*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0. \tag{1.11}$$

Часто употребляется и другое **) определение понятия предельного значения (или предела) функции.

Число w_0 называется предельным значением функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех точек $z\in E$ и удовлетворяющих условию $0<|z-z_0|<\delta$, имеет место равенство $|f(z)-w_0|<\varepsilon$.

Докажем эквивалентность этих определений. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет второму определению. Возьмем произвольное положительное число ε и выберем для него соответствующее $\delta(\varepsilon)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{z_n\}\to z_0$ и найдем $N[\delta(\varepsilon)]=N(\varepsilon)$, начиная с которого $0<|z_n-z_0|<\delta$. Тогда по условию $|f(z_n)-w_0|<\varepsilon$ для $n\geqslant N(\varepsilon)$; а так как $\varepsilon>0$ — любое, то это в силу произвольности выбора последовательности $\{z_n\}$ и означает, что $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z_n)=w_0$, т. е. функция $f(z)$ удовлетворяет и первому определению. Тем самым из второго определения следует первое.

Докажем теперь, что из первого определения вытекает второе. Предположим, что это не имеет места. Тогда можно указать такое $\varepsilon_0>0$, что для любого $\delta_n>0$ найдется такая точка $z_n\in E$, что при $0<|z_n-z_0|<\delta_n$ будет выполнено неравенство $|f(z_n)-w_0|>\varepsilon_0$. Выберем стремящуюся к нулю последовательность $\{\delta_n\}\to 0$ и соответствующую ей последовательность точек $\{z_n\}$, удовлетворяющих приведенным выше неравенствам. Очевидно, $\{z_n\}\to z_0$, а последовательность $\{f(z_n)\}$ не сходится к числу w_0, так как все члены этой последовательности отличаются от w_0 больше чем на ε_0. Но полученный результат противоречит первому определению. Тем самым сделанное предположение не имеет места, т. е. из первого определения вытекает второе. Эквивалентность обоих определений доказана.

Так же, как и в случае действительной переменной, важную роль играет понятие непрерывности функции. Начнем с понятия непрерыв-

*) При этом предполагается, что точка z_0 является точкой сгущения множества E, т. е. существуют последовательности $\{z_n\}$ точек этого множества, сходящиеся к точке z_0.

**) Заметим, что это определение, в отличие от первого, имеет смысл лишь для конечных значений z_0 и w_0.

ности в точке. При этом будем считать, что точка z_0, в которой определяется это понятие, обязательно принадлежит множеству E задания функции.

Функция $f(z)$, заданная на множестве E, называется непрерывной в точке $z_0\in E$, если предельное значение этой функции в точке z_0 существует, конечно и совпадает со значением $f(z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0, т. е. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Это определение непрерывности распространяется как на внутренние, так и на граничные точки множества *).

Если функция $f(z)$, заданная на множестве E, непрерывна во всех точках этого множества, то говорят, что функция $f(z)$ непрерывна на множестве E. В частности, мы будем рассматривать функции, непрерывные в области, в замкнутой области и на кривой. Подчеркнем еще раз, что в силу данных выше определений следует рассматривать предельные значения функции $f(z)$ лишь на последовательностях точек, принадлежащих данному множеству (в последних случаях замкнутой области, кривой и т. д.).

С помощью $\varepsilon-\delta$-определения предельного значения условия непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 можно также сформулировать следующим образом. *Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех точек $z\in E$, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, имеет место неравенство $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.* Геометрически это означает, что функция комплексной переменной, непрерывная в некоторой точке **) z_0, ставит в соответствие каждой точке из δ-окрестности точки z_0 некоторую точку, принадлежащую ε-окрестности точки $w_0=f(z_0)$.

Из непрерывности функции комплексной переменной $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ следует непрерывность ее действительной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ частей по совокупности переменных x, y ***). Имеет место и обратное утверждение, т. е. если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ суть непрерывные функции по совокупности переменных x, y в некоторой точке (x_0, y_0), то $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ является функцией комплексной переменной $z=x+iy$, непрерывной в точке $z_0=x_0+iy_0$. Данные утверждения являются следствием того, что

*) Если точка z_0 является изолированной точкой множества E (т. е. существует такая ε-окрестность точки z_0, в которой нет других точек множества E), то функция $f(z)$, по определению, считается непрерывной в точке z_0.

**) Заметим, что данные определения понятия непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 справедливы не только в случае конечной точки z_0, но и в случае бесконечно удаленной точки $z_0=\infty$. При этом под предельным значением функции $f(z)$ в точке ∞, в силу определения на стр. 24, надо понимать предел последовательности $\{f(z_n)\}$, где $\{z_n\}$ — любая неограниченно возрастающая последовательность. Во втором определении непрерывности условие $|z-z_0|<\delta$ надо заменить на условие $|z|>R$.

***) Определение непрерывности функции двух действительных переменных по совокупности переменных см. вып. 1, стр. 471.

где $z=\varphi(\zeta)$ — аналитическая функция ζ, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между кривыми C и Γ. В частности,

$$\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \tag{1.44}$$

где $z=z(t)$ есть параметрическое задание кривой C, а $z(\alpha)$ и $z(\beta)$ суть начальная и конечная точки последней.

Пример. В качестве существенного для дальнейшего примера вычисления интеграла по комплексной переменной рассмотрим интеграл

$$I=\int_{C_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z_0}, \tag{1.45}$$

где кривая C_ρ представляет собой окружность радиуса ρ с центром в точке z_0, обходимую против часовой стрелки. Воспользовавшись параметрической формой задания кривой C_ρ: $\zeta=z_0+\rho e^{i\varphi}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, получим

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}}=i\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi i. \tag{1.46}$$

Отсюда следует, что интеграл (1.45) не зависит ни от ρ, ни от z_0.

Замечание. Формула (1.36), в силу которой интеграл по комплексной переменной представляет собой комплексное число, действительная и мнимая части которого являются криволинейными интегралами второго рода, а также соотношение (1.44) позволяют непосредственно перенести понятие несобственного интеграла от функции действительной переменной *) на случай комплексной переменной. В нашем курсе мы будем главным образом иметь дело с несобственными интегралами первого рода — интегралами по бесконечной кривой C. Несобственный интеграл первого рода по бесконечной кривой C называется сходящимся, если существует предел последовательности интегралов $\int_{C_n} f(\zeta)\,d\zeta$ по любой последовательности конечных кривых C_n, составляющих часть C, при C_n, стремящихся к C, причем этот предел не зависит от выбора последовательности $\{C_n\}$. Если лишь при определенном выборе последовательности $\{C_n\}$ существует предел последовательности интегралов $\int_{C_n} f(\zeta)\,d\zeta$, то несобственный интеграл называется сходящимся в смысле главного значения.

В дальнейшем мы будем рассматривать интегралы от функций, аналитических в некоторой ограниченной области, причем нас в основном будет интересовать тот случай, когда границей области является

*) См. вып. 2, стр. 358.

кусочно-гладкая замкнутая кривая, не имеющая самопересечений. *Кусочно-гладкую замкнутую кривую, не имеющую точек самопересечения, будем называть замкнутым контуром.* Если функция $z(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ задает параметрически замкнутый контур, то она удовлетворяет условию $z(t_i)\neq z(t_k)$ при $t_i\neq t_k$, за исключением случая $t_i=\alpha$, $t_k=\beta$. Интеграл (1.34) по замкнутому контуру часто называется контурным интегралом.

2. Теорема Коши. Поскольку значение контурного интеграла зависит от направления интегрирования, условимся в качестве *положительного направления обхода* контура принимать направление, при котором внутренняя область, ограниченная данным замкнутым контуром, остается *слева* от направления движения. Интегрирование в положительном направлении будем обозначать символом $\int_{C^+} f(z)\,dz$ или просто $\int_C f(z)\,dz$, интегрирование в отрицательном направлении — символом $\int_{C^-} f(z)\,dz$.

Свойства интегралов по замкнутому контуру от функций, аналитических внутри области, ограниченной данным контуром, во многом определяются известными свойствами криволинейных интегралов второго рода *). Как известно **), для криволинейных интегралов по замкнутому контуру имеет место следующее утверждение: *если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{\mathscr{G}}$, ограниченной кусочно-гладким контуром C, а их частные производные первого порядка непрерывны в $\mathscr{G}$, то*

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_{\mathscr{G}}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}dx\,dy. \tag{1.47}$$

Перейдем теперь к доказательству основного положения данного параграфа.

Теорема 1.5 (теорема Коши). *Пусть в односвязной области $\mathscr{G}$ задана однозначная аналитическая функция $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции $f(z)$ по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области $\mathscr{G}$, равен нулю.*

Доказательство. Согласно формуле (1.36)

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta=\int_\Gamma u\,dx-v\,dy+i\int_\Gamma v\,dx+u\,dy.$$

*) См. вып. 2, стр. 168. Напомним, что по принятому нами определению контуры интегрирования всегда являются кусочно-гладкими кривыми.

**) В вып. 2 эта теорема доказана при дополнительном условии ограниченности частных производных функций P и Q в области $\mathscr{G}$, введенном с целью облегчения доказательства. В случае кусочно-гладкой границы это условие может быть снято с помощью дополнительного предельного перехода. Мы здесь не будем приводить подробное доказательство, а ограничимся лишь данным замечанием.

окружности $|\zeta|=\rho=\frac{1}{R}$. Согласно пункту 2.3 имеет место соотношение $\frac{1}{0}=\infty$. Поэтому будем считать, что обход окружности бесконечно большого радиуса ($R\to\infty$) есть обход бесконечно удаленной точки $z=\infty$. Как легко видеть, в рассматриваемом примере при обходе точки $w=\infty$ одна ветвь функции $z=\sqrt{w}$ переходит в другую. Таким образом, второй точкой разветвления функции $z=\sqrt{w}$ на комплексной плоскости w является точка $w=\infty$. Областью D, в которой определены однозначные ветви функции $z=\sqrt{w}$, является любая область плоскости w, в которой невозможен обход по замкнутому контуру точек разветвления $w=0$ и $w=\infty$. Такой областью является, например, вся плоскость w с разрезом вдоль положительной части действительной оси. При этом берега разреза являются границей данной области, так что при непрерывном движении внутри области мы не можем пересекать разрез (границу области).

Если считать, что аргумент точек w для первой ветви изменяется в пределах $0<\arg w<2\pi$, а для второй — в пределах $2\pi<\arg w<4\pi$, то первая ветвь функции $z=\sqrt{w}$ производит отображение плоскости с разрезом на верхнюю полуплоскость z, а вторая ветвь данной функции отображает ту же область на нижнюю полуплоскость z.

Аналогичным образом легко показать, что функция $w=z^n$ ($n>0$ — целое число) производит отображение любого сектора $\frac{2\pi k}{n}<\arg z<\frac{2\pi(k+1)}{n}$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$) плоскости z на полную плоскость w, разрезанную по положительной части действительной оси. Тем самым эти секторы представляют собой области однолистности данной функции. Обратная функция $z=\sqrt[n]{w}$ является многозначной, и точки $w=0$ и $w=\infty$ представляют собой ее точки разветвления.

§ 4. Дифференцирование функции комплексной переменной

1. Определение. Условия Коши—Римана. До сих пор теория функций комплексной переменной строилась в полной аналогии с теорией функций действительной переменной. Однако понятие дифференцируемой функции комплексной переменной, введенное по аналогии с соответствующим понятием теории функций действительной переменной, приводит к существенным различиям.

Дадим определение производной функции комплексной переменной. Пусть в области $\mathcal{G}$ комплексной плоскости z задана функция $f(z)$. *Если для точки $z_0\in\mathcal{G}$ существует при $\Delta z\to 0$ предел (предельное значение) разностного отношения*

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z},$$

то этот предел называется производной функции $f(z)$ по комплексной переменной z в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$, т. е.

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{1.16}$$

Функция $f(z)$ в этом случае называется *дифференцируемой* в точке z_0. Подчеркнем еще раз, что если существует предел (1.16), то он не зависит от способа стремления Δz к нулю, т. е. от способа приближения точки $z=z_0+\Delta z$ к точке z_0. Требование дифференцируемости функции комплексной переменной в точке z_0 накладывает весьма важные условия на поведение действительной и мнимой частей этой функции в окрестности точки (x_0, y_0). Эти условия известны под названием условий Коши—Римана, которые могут быть сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 1.3. *Если функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по переменным x, y, причем имеют место следующие соотношения *)*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{1.17}$$

Доказательство. По условию теоремы существует предел (1.16), не зависящий от способа стремления Δz к нулю. Положим $\Delta z=\Delta x$ и рассмотрим выражение

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0, y_0)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x, y_0)-v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Из существования предела комплексного выражения следует существование пределов его действительной и мнимой частей. Поэтому в точке x_0, y_0 существуют частные производные по x функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ и имеет место формула

$$f'(z_0)=u_x(x_0, y_0)+iv_x(x_0, y_0).$$

Полагая $\Delta z=i\Delta y$, находим

$$f'(z_0)=-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0, y_0+\Delta y)-u(x_0, y_0)}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0, y_0+\Delta y)-v(x_0, y_0)}{\Delta y}=-iu_y(x_0, y_0)+v_y(x_0, y_0).$$

Сравнивая две последние формулы, убеждаемся в справедливости соотношений (1.17).

Теорема 1.4. *Если в точке (x_0, y_0) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы, а их частные производные связаны соотношениями (1.17), то функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ является*

*) Соотношения (1.17) обычно и называются соотношениями Коши — Римана.

3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. При изучении свойств комплексных чисел весьма удобной является их геометрическая интерпретация. Поскольку комплексное число определяется как пара действительных чисел, то естественной геометрической интерпретацией является изображение комплексного числа $z=a+ib$ точкой плоскости (x, y) с декартовыми координатами $x=a$ и $y=b$. Число $z=0$ ставится в соответствие началу координат данной плоскости. Такую плоскость мы в дальнейшем будем называть *комплексной плоскостью*, ось абсцисс — *действительной*, а ось ординат — *мнимой* осью комплексной плоскости. При этом, очевидно, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости, а также между множеством всех комплексных чисел $z=a+ib$ и множеством свободных векторов, проекции x и y которых на оси абсцисс и ординат соответственно равны a и b.

Весьма важной является также другая форма представления комплексных чисел. Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами (ρ, φ), где ρ — расстояние точки от начала координат, а φ — угол, который составляет радиус-вектор данной точки с положительным направлением оси абсцисс. Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки ($-\infty<\varphi<\infty$). Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим так называемую *тригонометрическую форму* записи комплексного числа:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1.3}$$

При этом ρ обычно называют *модулем*, а φ — *аргументом* комплексного числа и обозначают $\rho=|z|$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$. Предшествующие формулы дают выражение действительной и мнимой частей комплексного числа через его модуль и аргумент. Легко выразить модуль и аргумент комплексного числа через его действительную и мнимую части: $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ (при выборе из решений последнего уравнения значения φ следует учесть знаки a и b). Отметим, что аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до аддитивного слагаемого, кратного 2π. В ряде случаев удобно через $\arg z$ обозначать значение аргумента, заключенное в пределах $\varphi_0\leqslant\arg z<2\pi+\varphi_0$, где φ_0 — произвольное фиксированное число (например, $\varphi_0=0$ или $\varphi_0=-\pi$). Тогда $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). Аргумент комплексного числа $z=0$ вообще не определен, а его модуль равен нулю. Два отличных от нуля комплексных числа равны между собой в том и только в том случае, если равны их модули, а значения аргументов или равны, или отличаются на число кратное 2π. Комплексно сопряженные числа имеют один и тот же модуль, а значения их аргументов при соответствую-

щем выборе областей их изменения различаются знаком. Наконец, используя известную формулу Эйлера *) $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z=\rho e^{i\varphi}. \tag{1.4}$$

Отмеченное выше соответствие между множеством всех комплексных чисел и плоскими векторами позволяет отождествить операции сложения и вычитания комплексных чисел с соответствующими операциями над векторами (рис. 1.1). При этом легко устанавливаются неравенства треугольника:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\qquad |z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|. \tag{1.5}$$

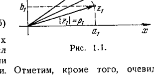


Рис. 1.1.

Модуль разности двух комплексных чисел имеет геометрический смысл расстояния между соответствующими точками на комплексной плоскости. Отметим, кроме того, очевидные неравенства $|z|\geqslant a$, $|z|\geqslant b$.

Для выполнения операции умножения удобно пользоваться тригонометрической формой представления комплексных чисел. Согласно правилам умножения получаем **)

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z_1\cdot z_2=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i\rho_1\rho_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]=\rho_1\cdot\rho_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Отсюда $\rho=\rho_1\cdot\rho_2$, $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, т. е. модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей. В случае деления комплексных чисел при $\rho_2\neq 0$ имеет место аналогичное соотношение:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

4. Извлечение корня из комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа удобны при рассмотрении алгебраических операций возведения комплексного числа в целую положительную степень и извлечения корня из комплексного числа. Так, если $z=z_1^n$, то $\rho=\rho_1^n$ и $\varphi=n\varphi_1$.

*) Это выражение мы пока будем рассматривать как сокращенную форму записи комплексного числа $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Полный смысл этого обозначения будет установлен в дальнейшем.

**) Эта формула показывает, что введенная выше функция $e^{i\varphi}$ обладает свойством $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

значений G на плоскости w определена аналитическая функция $\zeta=\varphi(w)$, то функция $F(z)=\varphi[f(z)]$ является аналитической функцией комплексной переменной z в области $\mathcal{G}$.

4. Если $w=f(z)$ является аналитической функцией в области $\mathcal{G}$, причем $|f'(z)|\neq 0$ в окрестности некоторой точки $z_0\in\mathcal{G}$, то в окрестности точки $w_0=f(z_0)$ области G значений функции $f(z)$ определена обратная функция $z=\varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией комплексной переменной w. При этом имеет место соотношение $f'(z_0)=\frac{1}{\varphi'(w_0)}$.

Доказательство. Для существования обратной функции необходимо, чтобы уравнения $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$ можно было разрешить относительно x, y в окрестности точки w_0. Для этого достаточно *), чтобы в окрестности точки z_0 выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=u_xv_y-u_yv_x\neq 0.$$

В силу соотношений (1.17) это условие можно переписать в виде $u_x^2+v_x^2\neq 0$. Но при условии $|f'(z)|\neq 0$ последнее имеет место. Тем самым существование обратной функции $z=\varphi(w)$ доказано. Составив разностное отношение $\frac{\Delta z}{\Delta w}=\frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}}$, легко доказать существование и непрерывность производной $\varphi'(w_0)$ при условии $|f'(z_0)|\neq 0$.

5. Пусть в области $\mathcal{G}$ плоскости x, y задана функция $u(x, y)$, являющаяся действительной частью аналитической функции $f(z)$. Тогда мнимая часть этой функции определяется с точностью до аддитивной постоянной. Действительно, в силу условий Коши — Римана по заданной функции $u(x, y)$ однозначно определяется полный дифференциал неизвестной функции $v(x, y)$:

$$dv=v_xdx+v_ydy=-u_ydx+u_xdy,$$

что и доказывает высказанное утверждение **).

6. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathcal{G}$. Рассмотрим в соответствующей области плоскости x, y семейства кривых $u(x, y)=C$ и $v(x, y)=C$, представляющие собой линии уровней действительной и мнимой частей функции $f(z)$. С помощью соотношений (1.17) легко показать, что во всех точках данной области $\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v=u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0$. Так как градиент ортогонален линии уровня, то отсюда следует, что семейства кривых $u(x, y)=C$ и $v(x, y)=C$ взаимно ортогональны.

*) Об условиях существования неявных функций см. вып. 1, стр. 538.

**) Определение функции двух действительных переменных по ее полному дифференциалу см. вып. 2, стр. 174.

3. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной. Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в некоторой области $\mathcal{G}$. Выберем какую-либо точку $z_0\in\mathcal{G}$ и проведем через нее произвольную *) кривую γ_1, целиком лежащую в $\mathcal{G}$. Функция $f(z)$ производит отображение области $\mathcal{G}$ комплексной плоскости z на некоторую область G комплексной плоскости w. Пусть точка z_0 переходит в точку w_0, а кривая γ_1 — в проходящую через w_0 кривую Γ_1 (рис. 1.7). По условию существует производная $f'(z)$ функции $w=f(z)$ в точке z_0. Предположим, что $f'(z_0)\neq 0$, и представим комплексное число $f'(z_0)$ в показательной форме **):

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=ke^{i\alpha}. \tag{1.22}$$

Выберем такой способ стремления Δz к нулю, при котором точки $z=z_0+\Delta z$ лежат на кривой γ_1. Очевидно, соответствующие им точки

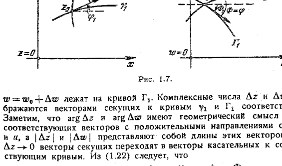


Рис. 1.7.

$w=w_0+\Delta w$ лежат на кривой Γ_1. Комплексные числа Δz и Δw изображаются векторами секущих к кривым γ_1 и Γ_1 соответственно. Заметим, что $\arg\Delta z$ и $\arg\Delta w$ имеют геометрический смысл углов соответствующих векторов с положительными направлениями осей x и u, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ представляют собой длины этих векторов. При $\Delta z\to 0$ векторы секущих переходят в векторы касательных к соответствующим кривым. Из (1.22) следует, что

$$\alpha=\arg f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w-\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z=\Phi_1-\varphi_1, \tag{1.23}$$

т. е. аргумент α производной имеет геометрический смысл разности угла Φ_1 вектора касательной к кривой Γ_1 в точке w_0 с осью u и угла φ_1 вектора касательной к кривой γ_1 в точке z_0 с осью x (рис. 1.7).

*) Здесь и в дальнейшем, если это не будет оговорено особо, под произвольной кривой мы понимаем гладкую кривую.

**) Условие $f'(z_0)\neq 0$ необходимо для возможности такого представления.

нейшем последовательность комплексных чисел мы будем обозначать символом $\{z_n\}$. Комплексные числа z_n, образующие последовательность $\{z_n\}$, называются ее элементами *).

Число z называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого все элементы z_n этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|z-z_n|<\varepsilon\quad\text{при}\quad n\geqslant N(\varepsilon). \tag{1.6}$$

Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел z, называется сходящейся к числу z, что записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.

Для геометрической интерпретации предельного перехода в комплексной области удобным оказывается понятие ε-окрестности точки комплексной плоскости.

Множество точек z комплексной плоскости, лежащих внутри окружности радиуса ε с центром в точке z_0 ($|z-z_0|<\varepsilon$), называется ε-окрестностью точки z_0.

Из этого определения следует, что точка z является пределом сходящейся последовательности $\{z_n\}$, если в любой ε-окрестности точки z лежат все элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера, зависящего от ε.

Поскольку каждое комплексное число $z_n=a_n+ib_n$ характеризуется парой действительных чисел a_n и b_n, то последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, составленные соответственно из действительных и мнимых частей элементов z_n последовательности $\{z_n\}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{z_n\}$ является сходимость последовательностей действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ($z_n=a_n+ib_n$).*

Доказательство. В самом деле, если последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу $z=a+ib$, то для любого $\varepsilon>0$ $|a_n-a|\leqslant|z_n-z|<\varepsilon$ и $|b_n-b|<\varepsilon$ при $n\geqslant N(\varepsilon)$. Это и доказывает сходимость последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ к a и b соответственно. Обратное утверждение следует из соотношения $|z_n-z|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}$, где a и b являются пределами последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ и $z=a+ib$.

Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что для всех элементов z_n этой последовательности имеет место неравенство $|z_n|<M$. Основное свойство ограниченной последовательности характеризует следующая теорема.

*) Определение последовательности не исключает возможности повторяющихся элементов, и, в частности, все элементы последовательности могут совпадать между собой.

Теорема 1.2. *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Поскольку последовательность $\{z_n\}$ ограничена, то ясно, что соответствующие ей действительные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ также ограничены. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Так как эта последовательность ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность *) $\{a_{n_i}\}$, предел которой обозначим a. Последовательности $\{a_{n_i}\}$ соответствует последовательность $\{b_{n_i}\}$, также являющаяся ограниченной. Поэтому из нее можно в свою очередь выделить сходящуюся подпоследовательность $\{b_{n_k}\}$, предел которой обозначим b. При этом соответствующая последовательность $\{a_{n_k}\}$ по-прежнему сходится к a. Отсюда следует, что последовательность комплексных чисел $\{z_{n_k}\}=\{a_{n_k}+ib_{n_k}\}$ также является сходящейся, причем $\lim\limits_{n_k\to\infty} z_{n_k}=z=a+ib$, что и доказывает теорему.

2. Критерий Коши. При исследовании сходимости последовательности во многих случаях удобным оказывается необходимый и достаточный признак сходимости последовательности, известный под названием критерия Коши.

Критерий Коши. *Последовательность $\{z_n\}$ сходится тогда и только тогда, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что*

$$|z_n-z_{n+m}|<\varepsilon \tag{1.7}$$

при $n\geqslant N(\varepsilon)$ и для любого номера $m\geqslant 0$.

Доказательство. Для доказательства критерия Коши мы опять воспользуемся эквивалентностью сходимости последовательности $\{z_n\}$ и последовательностей действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, а также тем обстоятельством, что критерий Коши является необходимым и достаточным признаком сходимости последовательности действительных чисел **). Начнем с доказательства необходимости критерия Коши. Так как последовательность $\{z_n\}$ сходится, то сходятся и последовательности действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon>0$ и любого номера $m>0$ $|a_n-a_{n+m}|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $n\geqslant N_1(\varepsilon)$ и $|b_n-b_{n+m}|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $n\geqslant N_2(\varepsilon)$. Выбирая в качестве $N(\varepsilon)$ наибольшее из N_1 и N_2, в силу неравенства треугольника получаем $|z_n-z_{n+m}|<\varepsilon$ при $n>N(\varepsilon)$.

Перейдем к доказательству достаточности признака Коши. Из соотношения (1.7) при $n\geqslant N$ следуют неравенства $|a_n-a_{n+m}|\leqslant|z_n-z_{n+m}|<\varepsilon$ и $|b_n-b_{n+m}|\leqslant|z_n-z_{n+m}|<\varepsilon$, являющиеся

*) См. вып. 1, стр. 82.

**) См. вып. 1, стр. 85.

§ 5. Интеграл по комплексной переменной

1. Основные свойства. Пусть на комплексной плоскости z задана кусочно-гладкая кривая C конечной длины L. Используя параметрическое представление кривой C, зададим координаты ξ, η каждой ее точки уравнениями $\xi=\xi(t)$, $\eta=\eta(t)$, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — кусочно-гладкие функции действительного параметра t, изменяющегося в пределах $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ (α и β могут соответственно принимать значения $\pm\infty$), удовлетворяющие условию $[\xi'(t)]^2+[\eta'(t)]^2\neq 0$. Задание координат ξ, η точек этой кривой C эквивалентно заданию комплексной функции $\zeta(t)=\xi(t)+i\eta(t)$ действительной переменной t.

Пусть в каждой точке ζ кривой C определено значение функции $f(\zeta)$. Важным понятием в теории функций комплексной переменной является понятие интеграла от функции $f(\zeta)$ по кривой C. Это понятие вводится следующим образом. Разобьем кривую C на n частичных дуг точками деления $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, соответствующими возрастающим значениям параметра t ($t_{i+1}>t_i$). Обозначим $\Delta\zeta_i=\zeta_i-\zeta_{i-1}$ и составим сумму

$$S(\zeta_i, \zeta_i^*)=\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i^*)\Delta\zeta_i, \tag{1.33}$$

где ζ_i^* — произвольная точка i-й частичной дуги.

Если при $\max|\Delta\zeta_i|\to 0$ существует предел сумм (1.33), не зависящий ни от способа разбиения кривой C, ни от выбора точек ζ_i^*, то этот предел называется интегралом от функции $f(\zeta)$ по кривой C и обозначается

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.34}$$

Вопрос существования интеграла (1.34) сводится к вопросу о существовании некоторых криволинейных интегралов от действительной u и мнимой v частей функции $f(z)$. В самом деле, записав $f(\zeta_i^*)=u(P_i^*)+iv(P_i^*)$, $\Delta\zeta_i=\Delta\xi_i+i\Delta\eta_i$, где $P_i(\xi_i^*, \eta_i^*)$ — точка кривой C на плоскости x, y, мы можем представить выражение (1.33) в виде

$$S(\zeta_i, \zeta_i^*)=\sum_{i=1}^{n}\{u(P_i^*)\Delta\xi_i-v(P_i^*)\Delta\eta_i\}+i\sum_{i=1}^{n}\{u(P_i^*)\Delta\eta_i+v(P_i^*)\Delta\xi_i\}.$$

Действительная и мнимая части $S(\zeta_i, \zeta_i^*)$ представляют собой интегральные суммы криволинейных интегралов второго рода

$$\int_C u\,d\xi-v\,d\eta\quad\text{и}\quad\int_C u\,d\eta+v\,d\xi \tag{1.35}$$

соответственно *), откуда и следует высказанное утверждение. Под-

*) Определение криволинейных интегралов и теорему существования см. вып. 2, стр. 150.

черкнем, что для существования криволинейных интегралов (1.35), а тем самым и интеграла (1.34) по комплексной переменной достаточно лишь кусочной непрерывности функций u и v действительных переменных. Это означает, что интеграл (1.34) существует и в случае неаналитической функции $f(z)$, если эта функция является кусочно-непрерывной.

Итак, интеграл (1.34) представим в виде

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta=\int_C u\,d\xi-v\,d\eta+i\int_C u\,d\eta+v\,d\xi. \tag{1.36}$$

Это соотношение может само служить определением интеграла от функции $f(z)$ по кривой C. Из него следует ряд свойств, являющихся очевидным следствием соответствующих свойств криволинейных интегралов:

1. $$\int_{AB}f(\zeta)\,d\zeta=-\int_{BA}f(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.37}$$

2. $$\int_{C_1}f(\zeta)\,d\zeta+\int_{C_2}f(\zeta)\,d\zeta=\int_{C_1+C_2}f(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.38}$$

3. Если a — комплексная постоянная, то

$$\int_C af(\zeta)\,d\zeta=a\int_C f(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.39}$$

4. $$\int_C\{f_1(\zeta)+f_2(\zeta)\}\,d\zeta=\int_C f_1(\zeta)\,d\zeta+\int_C f_2(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.40}$$

5. $$\left|\int_C f(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant\int_C|f(\zeta)|\,ds, \tag{1.41}$$

где ds — дифференциал длины дуги кривой C, а интеграл, стоящий справа, является криволинейным интегралом первого рода. Действительно, в силу неравенства треугольника имеем

$$\left|\int_C f(\zeta)\,d\zeta\right|=\left|\lim_{\max|\Delta\zeta_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i^*)\Delta\zeta_i\right|\leqslant\lim_{\max|\Delta\zeta_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}|f(\zeta_i^*)|\,|\Delta\zeta_i|=\int_C|f(\zeta)|\,ds.$$

Если $\max\limits_{\zeta\in C}|f(\zeta)|=M$ и L — длина дуги кривой C, то

$$\left|\int_C f(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant M\cdot L. \tag{1.42}$$

6. Имеет место следующая формула замены переменной интегрирования:

$$\int_C f(z)\,dz=\int_\Gamma f[\varphi(\zeta)]\varphi'(\zeta)\,d\zeta, \tag{1.43}$$

так и точки, не принадлежащие области $\mathcal{G}$. Например, точка $z=1$ является граничной точкой области $|z|<1$. *Совокупность всех граничных точек образует границу области.* В дальнейшем границу области мы будем обычно обозначать буквами γ, Γ, C. Простейшим примером границы области, очевидно, является кривая; однако граница области может состоять и из дискретного множества точек. Например, множество точек $|z|\neq 0$ образует на комплексной плоскости область, границей которой является точка $z=0$.

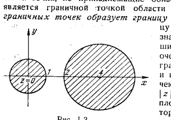


Рис. 1.3.

Множество, полученное присоединением к области всех ее граничных точек, называется замкнутой областью. Замкнутую область обычно будем обозначать, ставя черту над символом области, например: $\overline{\mathcal{G}}$, $\overline{G}$, $\overline{D}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать те случаи, когда граница области представляет собой одну или несколько кусочно-гладких кривых *), которые, в частности, могут вырождаться в отдельные точки. При этом будут рассматриваться как односвязные, так и многосвязные области **). Например, область $|z-i|<2$ является односвязной областью, границей которой является окружность $|z-i|=2$; круговое кольцо $1<|z|<2$ (рис. 1.4) представляет собой двухсвязную область; множество точек $z\neq 0$ представляет собой односвязную область и т. д.

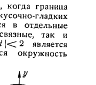


Рис. 1.4.

Если область $\mathcal{G}$ целиком лежит внутри некоторого круга конечного радиуса, то она называется *ограниченной*. В противном случае — *неограниченной*.

Мы будем рассматривать в основном те случаи, когда множество E значений комплексной переменной представляет собой область $\mathcal{G}$ или замкнутую область $\overline{\mathcal{G}}$ комплексной плоскости. Тогда *однозначная функция комплексной переменной z, заданная в области $\mathcal{G}$, определяется законом, ставящим каждому значению z из области $\mathcal{G}$ в соответствие определенное комплексное число w.* Символически указанное соответствие будем записывать в виде

$$w=f(z). \tag{1.8}$$

*) Понятие кусочно-гладкой кривой см. вып. 2, стр. 150.

**) Понятие многосвязной области см. вып. 2, стр. 117.

Множество комплексных чисел w, соответствующих всем $z\in\mathcal{G}$, называется множеством значений функции $f(z)$. Поскольку каждое комплексное число характеризуется парой действительных чисел, то задание комплексной функции $w=u+iv$ комплексной переменной $z=x+iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций двух действительных переменных, что может быть записано в виде

$$w(z)=u(x, y)+iv(x, y). \tag{1.9}$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определены в области $\mathcal{G}$ плоскости действительных переменных x, y, соответствующей области $\mathcal{G}$ комплексной плоскости z. Функция $u(x, y)$ называется *действительной*, а функция $v(x, y)$ — *мнимой* частью функции $w=f(z)$. В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы всегда будем пользоваться представлением (1.9), обозначая действительную часть функции $f(z)$ символом u, мнимую — символом v.

Часто рассматривают многозначные функции комплексной переменной, когда каждому значению $z\in\mathcal{G}$ ставится в соответствие несколько комплексных чисел. В настоящей главе мы будем рассматривать только однозначные функции комплексной переменной. Подробное рассмотрение многозначных функций будет проведено ниже.

Множество значений w функции $f(z)$ на комплексной плоскости w может иметь самую разнообразную структуру. В частности, это может быть область G или замкнутая область $\overline{G}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие случаи.

Заданием функции $w=f(z)$ устанавливается соответствие между точками области $\mathcal{G}$ комплексной плоскости z и точками области G комплексной плоскости w. Говорят, что при этом задано отображение области $\mathcal{G}$ на область G. Очевидно, устанавливается и обратное соответствие — каждой точке $w\in G$ ставится в соответствие одна или несколько точек z области $\mathcal{G}$. В последнем случае можно говорить, что в области G задана многозначная функция комплексной переменной w. Функция, осуществляющая отображение области G комплексной плоскости w на область $\mathcal{G}$ комплексной плоскости z, называется обратной функции $f(z)$. В этой главе мы в основном будем рассматривать тот случай, когда обратная функция

$$z=\varphi(w) \tag{1.10}$$

является однозначной в области G. Тогда функция $w=f(z)$ осуществляет взаимно однозначное отображение области $\mathcal{G}$ на область G.

Функция $f(z)$ называется однолистной функцией в области $\mathcal{G}$, если в различных точках z этой области она принимает различные значения.

Из этого определения следует, что однолистная функция осуществляет взаимно однозначное отображение.

2. Непрерывность. Перейдем к понятию непрерывности функции комплексной переменной. Пусть функция $f(z)$ определена на некотором

Так как функция $f(z)$ — аналитическая всюду внутри контура Γ, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в области, ограниченной этим контуром, обладают непрерывными частными производными первого порядка. Поэтому к криволинейным интегралам, стоящим в правой части последнего равенства, можно применить формулу (1.47). Кроме того, частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ связаны соотношениями Коши — Римана. Поэтому

$$\int_\Gamma u\,dx-v\,dy=\iint_{\mathcal{G}}\left\{-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\}dx\,dy=0$$

и

$$\int_\Gamma v\,dx+u\,dy=\iint_{\mathcal{G}}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right\}dx\,dy=0,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Итак, теорема 1.5 устанавливает факт равенства нулю интеграла от аналитической функции по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в односвязной области ее аналитичности. При дополнительном условии непрерывности функции в замкнутой области данное утверждение справедливо и для замкнутого контура, являющегося границей области аналитичности. Последнее утверждение фактически является несколько видоизмененной формулировкой теоремы Коши, но ввиду его важности для практических приложений мы выделим это утверждение в отдельную теорему.

Теорема 1.6 (вторая формулировка теоремы Коши). *Если функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области $\mathcal{G}$, ограниченной кусочно-гладким контуром C, и непрерывна в замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}$, то интеграл от функции $f(z)$ по границе C области $\mathcal{G}$ равен нулю:*

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta=0. \tag{1.48}$$

Теорема Коши устанавливает одно из основных свойств аналитической функции комплексной переменной. Ее фундаментальное значение будет следовать из дальнейшего изложения, здесь же мы ограничимся следующим замечанием.

Теорема формулировалась для односвязной области, однако ее легко обобщить и на случай многосвязной области. В этом случае полная граница области состоит из нескольких замкнутых контуров: внешнего C_0 и внутренних $C_1, C_2, \ldots, C_n$. *Положительным направлением обхода полной границы* многосвязной области будем называть такое направление движения, при котором *область все время остается слева*. При этом внешний контур обходится в положительном, а внутренние — в отрицательном направлении.

Теорема 1.7. *Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в многосвязной области $\mathcal{G}$, ограниченной извне контуром C_0, а изнутри контурами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}$. Тогда $\int_C f(\zeta)\,d\zeta=0$, где C — полная граница области $\mathcal{G}$, состоящая из контуров $C_0, C_1, \ldots, C_n$, причем обход границы C происходит в положительном направлении.*

Доказательство. Проведем гладкие кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, соединяющие контур C_0 с контурами C_1, C_2 и т. д. (рис. 1.8). Тогда область, ограниченная кривыми C_0, $C_1, \ldots, C_n$ и кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, проходимыми дважды в противоположных направлениях, оказывается односвязной *). В силу теоремы 1.6 интеграл по границе этой области равен нулю. Но интегралы по вспомогательным кривым $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ проходятся дважды в противоположных направлениях и при суммировании интегралов выпадают. Поэтому имеет место равенство

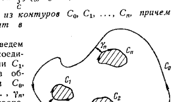


Рис. 1.8.

$$\int_{C_0^+}f(\zeta)\,d\zeta+\int_{C_1^-}f(\zeta)\,d\zeta+\ldots+\int_{C_n^-}f(\zeta)\,d\zeta=0 \tag{1.49}$$

(верхние индексы у C_i указывают направление обхода).

В заключение отметим, что если функция $f(z)$ является аналитической в многосвязной области $\mathcal{G}$ и Γ — произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в $\mathcal{G}$, то интеграл $\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta$ может, вообще говоря, оказаться отличным от нуля. Например, пусть область $\mathcal{G}$ представляет собой круговое кольцо $1<|z|<3$. Функция $f(z)=\frac{1}{z}$ является аналитической в этой области. В силу примера, рассмотренного на стр. 40, $\int_{|z|=2}\frac{d\zeta}{\zeta}=2\pi i\neq 0$. Данное обстоятельство связано, в частности, с тем, что контур $|z|=2$ не образует полную границу области аналитичности рассматриваемой функции.

X **3. Неопределенный интеграл.** Важным следствием теоремы Коши является следующее положение. Пусть функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области $\mathcal{G}$. Фиксируем в этой области некоторую точку z_0 и обозначим через $\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\,d\zeta$ интеграл по

*) Как нетрудно убедиться, кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ всегда можно выбрать так, чтобы они не пересекались, т. е. получим действительно односвязную область.

необходимым и достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел является сходимость последовательностей их действительных и мнимых частей.

Это позволяет перенести на функции комплексной переменной основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных *). Так, сумма и произведение двух функций комплексной переменной $f_1(z)$ и $f_2(z)$, непрерывных в области $\mathcal{G}$, также являются непрерывными функциями в этой области; функция $\varphi(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ непрерывна в тех точках области $\mathcal{G}$, где $f_2(z)\neq 0$, функция $f(z)$, непрерывная на замкнутом множестве $\overline{E}$, ограничена по модулю на $\overline{E}$ и т. д.

3. Примеры. Рассмотрим несколько простейших примеров.

1. В качестве первого примера функции комплексной переменной рассмотрим линейную функцию

$$f(z)=w=az+b. \tag{1.12}$$

Здесь a и b — заданные комплексные постоянные. Будем считать, что $a\neq 0$, так как в противном случае функция (1.12) ставит в соответствие всем точкам z комплексной плоскости одно и то же комплексное число b. Функция (1.12) определена при всех значениях независимой переменной z. Областью ее задания является полная **) комплексная плоскость z. Каждому значению z соответствует только одно значение w, т. е. $f(z)$ — однозначная функция z. Очевидно, обратная функция $\varphi(w)=z=\frac{1}{a}w-\frac{b}{a}=a_1w+b_1$ обладает теми же свойствами, что и $f(z)$. Тем самым $f(z)$ — однолистная функция z на полной комплексной плоскости, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между плоскостями z и w. В силу непрерывности действительной и мнимой части $f(z)$ по совокупности переменных x, y эта функция непрерывна на всей комплексной плоскости (при любых конечных значениях x, y). Чтобы выяснить геометрический смысл данного соответствия, рассмотрим вспомогательную функцию $\zeta=az$. На основании правила умножения комплексных чисел имеем

$$\zeta=|a|\cdot|z|\cdot\{\cos(\arg a+\arg z)+i\sin(\arg a+\arg z)\}.$$

Отсюда следует $|\zeta|=|a|\cdot|z|$, $\arg\zeta=\arg z+\arg a$. То есть функция $\zeta=az$ любому комплексному числу z ставит в соответствие комплексное число ζ, модуль которого в $|a|$ раз больше модуля z,

*) См. вып. 1, стр. 474.

**) В дальнейшем мы будем говорить, что функция комплексной переменной $f(z)$ определена на всей комплексной плоскости, если она определена для всех значений комплексного аргумента z, ограниченных по модулю, и будем говорить, что $f(z)$ определена на полной комплексной плоскости, если она задана и при $z=\infty$. В нашем примере $f(\infty)=\infty$.

а аргумент получается из аргумента z прибавлением постоянного слагаемого — аргумента комплексного числа a. Геометрический смысл этого преобразования очевиден: подобное растяжение плоскости z в $|a|$ раз и поворот этой плоскости как целого вокруг точки $z=0$ на угол $\arg a$.

Возвращаясь к функции (1.12), которую теперь можно записать в виде $w=\zeta+b$, видим, что геометрический смысл последнего преобразования состоит в сдвиге плоскости z, характеризуемом вектором **b**.

Итак, линейная функция преобразует комплексную плоскость z в комплексную плоскость w путем подобного растяжения, поворота и сдвига.

2. В качестве следующего примера рассмотрим функцию

$$w=f(z)=\frac{1}{z}. \tag{1.13}$$

Эта функция также определена на полной комплексной плоскости, причем $f(0)=\infty$ и $f(\infty)=0$. Как и в первом примере, устанавливаем, что $f(z)$ является однозначной и однолистной функцией z, отображающей полную плоскость z на полную плоскость w. Легко установить, что функция $f(z)$ является непрерывной на полной комплексной плоскости, за исключением точки $z=0$. Для геометрической интерпретации данной функции воспользуемся показательной формой записи комплексных чисел: $w=re^{i\Phi}=\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}$ ($z=\rho e^{i\varphi}$). Это равенство означает, что $\arg w=-\arg z$, $|w|=\frac{1}{|z|}$. Полученные соотношения позволяют рассматривать отображение, осуществляемое данной функцией, как совокупность двух отображений: $\zeta=\zeta(z)$, где $|\zeta|=|z|$, $\arg\zeta=-\arg z$, и $w=w(\zeta)$, где $|w|=\frac{1}{|\zeta|}$, $\arg w=\arg\zeta$. Первое отображение имеет геометрический смысл зеркального отражения относительно действительной оси, при котором точка z переходит в точку $\bar z$, а второе — инверсии *) в единичном круге, переводящей точку $\bar z$ в точку $w=\frac{1}{z}$ (рис. 1.5, 1.6). При этом точки плоскости z, лежащие вне единичного круга, переходят в точки, лежащие внутри единичного круга плоскости w, и наоборот.

3. Рассмотрим функцию

$$w=f(z)=z^2. \tag{1.14}$$

Эта функция является однозначной функцией комплексной переменной z, определенной на полной комплексной плоскости z. Для изучения

*) *Инверсией* (или преобразованием обратных радиусов) в круге радиуса a называется такое преобразование, при котором каждой точке внутри (вне) круга ставится в соответствие точка вне (внутри) круга, лежащая на луче, проведенном из центра круга в данную точку так, что произведение расстояний от этих точек до центра круга равно квадрату радиуса круга.

какой-либо кривой, целиком лежащей в $\mathscr{G}$ и соединяющей точки z и z_0. В силу теоремы Коши этот интеграл не зависит от выбора кривой интегрирования в области $\mathscr{G}$ и является однозначной функцией z:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z). \tag{1.50}$$

Теорема 1.8. *Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна в некоторой односвязной области $\mathscr{G}$, а интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в данной области, равен нулю. Тогда функция $\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ $(z, z_0 \in \mathscr{G})$ является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$ и $\Phi'(z)=f(z)$.*

Доказательство. Составим разностное отношение

$$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left\{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right\}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Последнее равенство имеет место в силу независимости значения интеграла, определяющего функцию $\Phi(z)$, от пути интегрирования и (1.38). Выберем в качестве пути интегрирования в последнем интеграле прямую, соединяющую точки z и $z+\Delta z$. Такой путь интегрирования является удобным, поскольку имеет место очевидное соотношение $\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta=\Delta z$. Оценим выражение

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\{f(\zeta)-f(z)\}\,d\zeta\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\max_{\zeta\in[z,\,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|\cdot|\Delta z|=\max_{\zeta\in[z,\,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|.$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z для любого положительного числа ε может быть указано такое значение $\delta>0$, что при $|\Delta z|<\delta$ $\max_{\zeta\in[z,\,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что

$$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon \quad \text{при } 0<|\Delta z|<\delta.$$

Это и означает, что существует

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\Phi'(z)=f(z). \tag{1.51}$$

Итак функция $\Phi(z)$, определенная интегралом (1.50), во всех точках области $\mathscr{G}$ имеет непрерывную производную (функция $f(z)$ по усло-

вию теоремы непрерывна в $\mathscr{G}$). Тем самым $\Phi(z)$ является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$.

Доказанная теорема позволяет ввести понятие неопределенного интеграла функции комплексной переменной. Аналитическая функция $\Phi(z)$ называется *первообразной* функции $f(z)$ в области $\mathscr{G}$, если в этой области имеет место соотношение $\Phi'(z)=f(z)$. Очевидно, функция $f(z)$ имеет множество различных первообразных, но, как легко доказать, все первообразные этой функции различаются между собой лишь постоянными слагаемыми *). *Совокупность всех первообразных функции $f(z)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(z)$.*

Так же, как и в случае функции действительной переменной, имеет место формула

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta=F(z_2)-F(z_1),$$

где $F(z)$ — любая первообразная функции $f(z)$. Действительно, интеграл, стоящий слева, не зависит от пути интегрирования. Поэтому его можно представить в виде

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta=\int_{z_0}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta-\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta,$$

где z_0 — произвольная точка области $\mathscr{G}$. Согласно (1.50) каждый из интегралов в правой части этой формулы представляет собой значение определенной первообразной в соответствующих точках, а так как все первообразные различаются лишь на постоянную, то безразлично, какую первообразную мы подставим в данную формулу.

В качестве существенного для дальнейшего примера рассмотрим функцию

$$f(z)=\int_{1}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{1.52}$$

Так как подынтегральная функция является аналитической на всей комплексной плоскости z, за исключением точки $z=0$, то выражение (1.52) имеет смысл при условии, что кривая интегрирования не проходит через точку $z=0$. При этом в любой односвязной области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости, не содержащей точку $z=0$, функция $f(z)$ является однозначной аналитической функцией z, не зависящей от выбора пути интегрирования в формуле (1.52). В качестве такой

*) Действительно, так как $\Phi'(z)=\Phi_1'(z)-\Phi_2'(z)\equiv 0$, где $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ суть различные первообразные функции $f(z)$, то из (1.21) следует, что все частные производные действительной и мнимой частей функции $\Phi(z)$ тождественно равны нулю, откуда по известной теореме анализа (см. вып. 1, гл. 8) получим $\Phi(z)\equiv\text{const}$.

Признак Вейерштрасса. *Если всюду в области $\mathscr{G}$ члены функционального ряда (2.3) могут быть мажорированы членами абсолютно сходящегося числового ряда, то ряд (2.3) сходится равномерно в области $\mathscr{G}$.*

Доказательство. По условию имеет место равномерная оценка

$$|u_n(z)|\leqslant|a_n|,\quad z\in\mathscr{G}. \tag{2.4}$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что $\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Но в силу (2.4) в области $\mathscr{G}$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(z)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k(z)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|<\varepsilon$$

при $n\geqslant N$, что и доказывает равномерную сходимость ряда (2.3) в области $\mathscr{G}$.

Следует иметь в виду, что признак Вейерштрасса является лишь достаточным признаком равномерной сходимости. Имеет место следующий необходимый и достаточный признак равномерной сходимости.

Критерий Коши. *Для того чтобы ряд (2.3) сходился равномерно в области $\mathscr{G}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое $N(\varepsilon)$, что одновременно во всех точках области $\mathscr{G}$ выполняется соотношение*

$$|S_{n+m}(z)-S_n(n)|<\varepsilon \tag{2.5}$$

при $n\geqslant N$ и для любого натурального m.

Доказательство. 1) Необходимость. Из равномерной сходимости ряда (2.3) следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что во всех точках z области $\mathscr{G}$ имеют место неравенства

$$|f(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad|f(z)-S_{n+m}(z)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при $n\geqslant N$ и для любого натурального m, откуда и следует (2.5).

2) Достаточность. Из соотношения (2.5) в силу критерия Коши для числовой последовательности с комплексными членами *) следует, что при любом фиксированном $z\in\mathscr{G}$ последовательность $\{S_n(z)\}$ является сходящейся. Следовательно, при выполнении (2.5) ряд (2.3) сходится в области $\mathscr{G}$ к некоторой функции $f(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z)$. Но в силу (2.5)

$$\lim_{m\to\infty}|S_{n+m}(z)-S_n(z)|=|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon \text{ при } n\geqslant N(\varepsilon)$$

*) См. гл. 1, стр. 19.

во всех точках области $\mathscr{G}$ одновременно, что и доказывает равномерную сходимость ряда (2.3) в области $\mathscr{G}$.

3. Свойства равномерно сходящихся рядов. Теоремы Вейерштрасса. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых общих свойств равномерно сходящихся рядов.

Теорема 2.1. *Если функции $u_n(z)$ непрерывны в области $\mathscr{G}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходится в этой области равномерно к функции $f(z)$, то $f(z)$ также непрерывна в области $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Рассмотрим выражение $|f(z+\Delta z)-f(z)|$, где точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области $\mathscr{G}$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что одновременно имеют место неравенства

$$\left|f(z+\Delta z)-\sum_{k=1}^{N}u_k(z+\Delta z)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad\left|f(z)-\sum_{k=1}^{N}u_k(z)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.6}$$

для любых точек z и $z+\Delta z$, принадлежащих области $\mathscr{G}$. В силу непрерывности функций $u_k(z)$, в любой точке $z\in\mathscr{G}$ для заданного ε и выбранного N можно указать такое $\delta>0$, что

$$\left|\sum_{k=1}^{N}u_k(z+\Delta z)-\sum_{k=1}^{N}u_k(z)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{N}|u_k(z+\Delta z)-u_k(z)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.7}$$

при $|\Delta z|<\delta$. Из (2.6), (2.7) и из того, что модуль суммы не превосходит сумму модулей, следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое δ, что $|f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon$ при $|\Delta z|<\delta$. Это и доказывает непрерывность функции $f(z)$ в области $\mathscr{G}$.

Теорема 2.2. *Если ряд (2.3) непрерывных функций $u_n(z)$ сходится равномерно в области $\mathscr{G}$ к функции $f(z)$, то интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой кривой C, целиком лежащей в области $\mathscr{G}$, можно вычислить путем почленного интегрирования ряда (2.3), т. е.*

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C u_n(\zeta)\,d\zeta.$$

Доказательство. Так как ряд (2.3) сходится равномерно, то для любого заданного $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что для всех точек $\zeta\in\mathscr{G}$

$$|r_n(\zeta)|<\frac{\varepsilon}{L}\quad\text{при } n\geqslant N(\varepsilon),$$

Так как в формуле (1.58) последнее слагаемое не зависит от ρ, то $\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi=2\pi f(z_0)$, а следовательно, $\int_{\gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=2\pi i f(z_0)$, и согласно (1.57)

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta. \tag{1.59}$$

Интеграл, стоящий в правой части (1.59), *выражает значение аналитической функции $f(z)$ в некоторой точке z_0 через ее значения на любом контуре Γ, лежащем в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащем точку z_0 внутри.* Этот интеграл и называется *интегралом Коши.* Формула (1.59) часто называется *формулой Коши.*

Замечание 1. В формуле (1.59) интегрирование производится по замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри точку z_0. При дополнительном условии непрерывности $f(z)$ в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}$ аналогичная формула имеет место, в силу теоремы 1.6, и при интегрировании по границе C области $\mathscr{G}$.

Замечание 2. Проведенные рассмотрения остаются справедливыми и в случае многосвязной области $\mathscr{G}$. При этом для вывода основной формулы (1.59) следует рассматривать такой замкнутый контур Γ, который может быть стянут к точке z_0, все время оставаясь в области $\mathscr{G}$. Тогда легко показать, что при условии непрерывности функции $f(z)$ в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}$ с кусочно-гладкой границей формула (1.59) остается справедливой при интегрировании в положительном направлении по полной границе C данной многосвязной области.

2. Следствия из формулы Коши. Сделаем ряд замечаний по поводу формулы (1.59).

1. Интеграл вида $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$ по замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области $\mathscr{G}$ аналитичности функции $f(z)$, имеет смысл для любого положения точки z_0 на комплексной плоскости при условии, что эта точка не лежит на контуре Γ. При этом, если точка z_0 лежит внутри Γ, то значение интеграла равно $f(z_0)$; если точка z_0 лежит вне Γ, значение интеграла равно нулю, поскольку в этом случае подынтегральная функция является аналитической всюду внутри Γ. Итак,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=\begin{cases}f(z_0), & z_0 \text{ — внутри } \Gamma,\\ 0, & z_0 \text{ — вне } \Gamma.\end{cases} \tag{1.60}$$

При $z_0\in\Gamma$ интеграл $I(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$ в обычном смысле не существует, однако при дополнительных требованиях на поведе-

ние функции $f(\zeta)$ на контуре Γ этому интегралу может быть придан определенный смысл. Так, если функция $f(\zeta)$ удовлетворяет на контуре Γ условию Гёльдера *)

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|\leqslant K|\zeta_1-\zeta_2|^\gamma,\quad 0<\gamma<1,$$

то существует *главное значение по Коши* интеграла $I(z_0)$

$$V.p.\,I(z_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta,$$

где Γ_ε представляет собой часть контура Γ, лежащую вне круга $|z-z_0|<\varepsilon$. При этом

$$V.p.\,I(z_0)=\frac{1}{2}f(z_0).$$

2. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области $\mathscr{G}$ и z_0 — некоторая внутренняя точка этой области. Опишем из этой точки как из центра окружность радиуса R_0, целиком лежащую в области $\mathscr{G}$. Тогда по формуле Коши получим

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_0}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta.$$

Но на окружности C_{R_0} $\zeta=z_0+R_0e^{i\varphi}$, поэтому

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+R_0e^{i\varphi})\,d\varphi, \tag{1.61}$$

или

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_{R_0}}f(\zeta)\,ds. \tag{1.62}$$

Эта формула носит название *формулы среднего значения* и выражает значение аналитической функции в центре окружности как среднее из ее граничных значений.

3. Принцип максимума модуля аналитической функции. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathscr{G}$ и непрерывной в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}$. Тогда или $|f(z)|\equiv\text{const}$, или максимальные значения $|f(z)|$ достигаются только на границе области.*

Действительная функция двух действительных переменных

$$|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$$

по условию является непрерывной в замкнутой области. Поэтому она достигает своего максимального значения M в какой-либо точке

*) По поводу условий Гёльдера см. вып. 2.

для всех $z\in\overline{\mathscr{G}}'$ одновременно, что и доказывает утверждение 3). Приведенное доказательство относится к случаю односвязной области $\mathscr{G}$. Случай многосвязной области рассматривается аналогично. Итак, теорема доказана.

Заметим, что примененный метод доказательства позволяет доказать равномерную сходимость ряда из производных лишь в любой *замкнутой подобласти $\overline{\mathscr{G}}'$ области $\mathscr{G}$*, даже если исходный ряд (2.3) сходится равномерно и в замкнутой области. Как показывают простые примеры, из равномерной сходимости ряда (2.3) в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}$ не следует равномерная сходимость в этой области ряда, составленного из производных. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ сходится равномерно в круге $|z|\leqslant 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$, составленной из производных членов исходного ряда, не может сходиться равномерно в круге $|z|\leqslant 1$, так как он расходится при $z=1$. Таким образом, утверждение пункта 3) теоремы о равномерной сходимости ряда, составленного из производных, лишь в замкнутой подобласти исходной области не может быть, вообще говоря, расширено.

Сделаем еще одно замечание. При доказательстве теоремы 2.3 мы предполагали равномерную сходимость ряда в любой замкнутой подобласти $\overline{\mathscr{G}}'$ области $\mathscr{G}$. Ясно, что теорема тем более будет иметь место при условии равномерной сходимости ряда (2.3) в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}'$. Как показывает нижеследующая теорема, последнее условие может быть заменено условием равномерной сходимости ряда (2.3) на границе Γ области $\mathscr{G}$.

Теорема 2.4 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функции $u_n(z)$ являются аналитическими в области $\mathscr{G}$, непрерывными в $\overline{\mathscr{G}}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходится равномерно на границе Γ этой области. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходится равномерно и в $\overline{\mathscr{G}}$.*

Доказательство. Разность частичных сумм данного ряда, функция $S_{n+p}(z)-S_n(z)$, как конечная сумма аналитических функций, является аналитической в $\mathscr{G}$ и непрерывной в $\overline{\mathscr{G}}$. Из равномерной сходимости на Γ следует, что

$$|S_{n+p}(\zeta)-S_n(\zeta)|=|u_{n+p}(\zeta)+\ldots+u_{n+1}(\zeta)|<\varepsilon$$

при $n\geqslant N$ для любого натурального p и всех точек $\zeta\in\Gamma$ одновременно. Следовательно, по теореме о максимуме модуля аналитической функции $|S_{n+p}(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$ для любого натурального

p и для всех $z\in\overline{\mathscr{G}}$. Тем самым для данного ряда выполнен критерий Коши, что и доказывает теорему.

Замечание. Очевидно, что все доказанные выше свойства функциональных рядов справедливы и для функциональных последовательностей.

4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. В гл. 1 мы, рассматривая свойства интегралов, зависящих от параметра, ограничились лишь случаем собственных интегралов по кривой C конечной длины. Теорема Вейерштрасса позволяет обобщить полученные результаты на случай несобственных интегралов. Будем рассматривать зависящий от параметра несобственный интеграл первого рода $F(z)=\int_C f(z,\zeta)\,d\zeta$ по неограниченной кривой C. Пусть функция двух комплексных переменных $f(z,\zeta)$, определенная при $z\in\mathscr{G}$ и $\zeta\in C$, удовлетворяет тем же условиям, что и $\varphi(z,\zeta)$ в § 7 гл. 1, а именно:

а) Функция $f(z,\zeta)$ при любом значении $\zeta\in C$ является аналитической функцией z в области $\mathscr{G}$.

б) Функция $f(z,\zeta)$ и ее производная $\frac{\partial f}{\partial z}(z,\zeta)$ являются непрерывными функциями по совокупности переменных z, ζ при $z\in\mathscr{G}$ и $\zeta\in C$.

Пусть несобственный интеграл первого рода $\int_C f(z,\zeta)\,d\zeta$ сходится равномерно по параметру z в любой замкнутой подобласти $\overline{\mathscr{G}}'$ области $\mathscr{G}$. Это означает, что при любом выборе последовательности конечных кривых C_n, составляющих часть C, при $C_n\to C$ функциональная последовательность $u_n(z)=\int_{C_n}f(z,\zeta)\,d\zeta$ сходится равномерно в $\overline{\mathscr{G}}'$ к функции $F(z)$.

Легко показать, что при выполнении всех перечисленных условий функция $F(z)$ является аналитической в $\mathscr{G}$ и

$$F'(z)=\int_C\frac{\partial f}{\partial z}(z,\zeta)\,d\zeta.$$

Действительно, как доказано в § 7 гл. 1, собственные интегралы — функции $u_n(z)=\int_{C_n}f(z,\zeta)\,d\zeta$ являются аналитическими функциями в $\mathscr{G}$ и $u_n'(z)=\int_{C_n}\frac{\partial f}{\partial z}(z,\zeta)\,d\zeta$. Последовательность $\{u_n(z)\}$ сходится к $F(z)$ равномерно в любой $\overline{\mathscr{G}}'$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса функция $F(z)$ — аналитическая в $\mathscr{G}$ и $F'(z)=\int_C\frac{\partial f}{\partial z}(z,\zeta)\,d\zeta$.

поставить вопрос об общих свойствах интегралов по комплексной переменной, зависящих от параметра.

Пусть задана функция двух комплексных переменных *) $\varphi(z,\zeta)$, однозначно определенная для значений комплексной переменной $z=x+iy$ из области $\mathscr{G}$ и для значений комплексной переменной $\zeta=\xi+i\eta$, принадлежащих некоторой кусочно-гладкой кривой C. Взаимное расположение области $\mathscr{G}$ и кривой C может быть совершенно произвольно. Пусть функция двух комплексных переменных $\varphi(z,\zeta)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) *Функция $\varphi(z,\zeta)$ при любом значении $\zeta\in C$ является аналитической функцией z в области $\mathscr{G}$.*

б) *Функция $\varphi(z,\zeta)$ и ее производная $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)$ являются непрерывными функциями по совокупности переменных z, ζ при произвольном изменении z в области $\mathscr{G}$ и ζ на кривой C.*

Условие б) означает, что действительная и мнимая части функции $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)$ непрерывны по совокупности переменных x, y, ξ, η.

Очевидно, что при сделанных предположениях интеграл от функции $\varphi(z,\zeta)$ по кривой C существует при любом $z\in\mathscr{G}$ и является функцией комплексной переменной z:

$$F(z)=\int_C\varphi(z,\zeta)\,d\zeta=U(x,y)+iV(x,y). \tag{1.66}$$

Естественно поставить вопрос о свойствах функции $F(z)$. Оказывается, что при сделанных предположениях относительно функции $\varphi(z,\zeta)$ *функция $F(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z в области $\mathscr{G}$, причем производную функции $F(z)$ можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.*

Для того чтобы доказать это утверждение, рассмотрим криволинейный интеграл

$$U(x,y)=\int_C u(x,y,\xi,\eta)\,d\xi-v(x,y,\xi,\eta)\,d\eta.$$

Так как, по предположению, функции u и v обладают частными производными по x и y, непрерывными по совокупности переменных, то частные производные функции $U(x,y)$ по переменным x, y существуют и их можно вычислить при помощи дифференцирования

*) Функция двух комплексных переменных z, ζ определяется законом, ставящим в соответствие каждой паре значений z, ζ из области их определения некоторое комплексное число w. Подробнее о функциях многих комплексных переменных см. Приложение 3.

под знаком интеграла *):

$$U_x(x,y)=\int_C u_x\,d\xi-v_x\,d\eta,$$
$$U_y(x,y)=\int_C u_y\,d\xi-v_y\,d\eta.$$

Сами функции U_x и U_y являются непрерывными функциями переменных x, y в области $\mathscr{G}$**). На основании аналогичных свойств функции $V(x,y)$ и используя условия Коши — Римана для функции $\varphi(z,\zeta)$, получим

$$\begin{aligned}V_y(x,y)&=\int_C v_y\,d\xi+u_y\,d\eta=\int_C u_x\,d\xi-v_x\,d\eta=U_x,\\ V_x(x,y)&=\int_C v_x\,d\xi+u_x\,d\eta=-\int_C u_y\,d\xi-v_y\,d\eta=-U_y.\end{aligned} \tag{1.67}$$

Таким образом, для $F(z)$ выполнены условия Коши — Римана (частные производные функций $U(x,y)$ и $V(x,y)$ непрерывны и связаны соотношениями (1.67)), что и доказывает аналитичность $F(z)$ в области $\mathscr{G}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}F'(z)&=U_x(x,y)+iV_x(x,y)=\\&=\int_C u_x\,d\xi-v_x\,d\eta+i\int_C v_x\,d\xi+u_x\,d\eta=\int_C\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)\,d\zeta.\end{aligned} \tag{1.68}$$

Отсюда следует возможность вычисления производной от интеграла путем дифференцирования подынтегральной функции по параметру. При этом, если $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ удовлетворяет тем же условиям а) и б), что и $\varphi(z,\zeta)$, то $F'(z)$ также является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$.

2. Существование производных всех порядков у аналитической функции. Рассмотренное свойство интегралов, зависящих от параметра, позволяет установить важные характеристики аналитических функций. Как мы видели, значение функции $f(z)$, аналитической в некоторой области $\mathscr{G}$, ограниченной контуром Γ, и непрерывной в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}$, во внутренних точках этой области может быть выражено через граничные значения с помощью интеграла Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{1.69}$$

Рассмотрим в области $\mathscr{G}$ некоторую замкнутую подобласть $\overline{\mathscr{G}}'$, расстояние всех точек которой от границы Γ области $\mathscr{G}$ больше

*) Об условиях дифференцируемости по параметру интеграла, зависящего от параметра, см. вып. 2, гл. 10.
**) См. вып. 2, гл. 10.

Итак, мы установили

Следствие 2. Для всякого степенного ряда существует такое число R, что внутри круга $|z-z_0|<R$ данный степенной ряд сходится, а вне этого круга расходится.

В круге $|z-z_0|\leqslant\rho<R$ любого радиуса ρ, меньшего, чем радиус сходимости R, степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится равномерно. Отметим, что радиус сходимости степенного ряда в зависимости от вида его коэффициентов может иметь любое значение в пределах от 0 до ∞. Первый предельный случай будет соответствовать ряду, сходящемуся лишь в точке z_0, второй — сходящемуся на всей комплексной плоскости. Примеры соответствующих рядов уже были приведены. Радиус сходимости степенного ряда может быть определен через его коэффициенты c_n.

Следствие 3. Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции. Действительно, члены степенного ряда $u_n(z)=c_n(z-z_0)^n$ представляют собой функции, аналитические на всей комплексной плоскости, ряд сходится равномерно в любой замкнутой подобласти круга сходимости. Следовательно, по первой теореме Вейерштрасса сумма ряда есть аналитическая функция.

Следствие 4. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда. Это свойство также является прямым следствием теорем Абеля и Вейерштрасса.

Следствие 5. Коэффициенты степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ выражаются через значения суммы ряда $f(z)$ и ее производных в центре круга сходимости по формулам

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0). \tag{2.9}$$

Положив $z=z_0$ в выражении суммы степенного ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, получим $f(z_0)=c_0$; продифференцировав ряд почленно и положив $z=z_0$ в выражении для производной $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nn(z-z_0)^{n-1}$, получим $f'(z_0)=c_1$; аналогично, положив $z=z_0$ в выражении для k-й производной

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_nn(n-1)\ldots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k},$$

получим $f^{(k)}(z_0)=c_k\cdot k!$.

Следствие 6. Радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ определяется формулой *) $R=\frac{1}{l}$, где $l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$ есть верхний предел **) последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$.

Предположим вначале, что $0<l<\infty$. Нам надо показать, что в любой точке z_1, удовлетворяющей условию $|z_1-z_0|<\frac{1}{l}$, ряд сходится, а в любой точке z_2, удовлетворяющей условию $|z_2-z_0|>\frac{1}{l}$, — расходится. Так как l — верхний предел последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать номер N, начиная с которого $\sqrt[n]{|c_n|}<l+\varepsilon$. С другой стороны, для того же ε найдется бесконечно много членов последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, бóльших $l-\varepsilon$. Возьмем произвольную точку z_1, удовлетворяющую неравенству $l|z_1-z_0|<1$, и выберем в качестве ε число $\frac{1-l|z_1-z_0|}{2|z_1-z_0|}>0$. Тогда

$$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_1-z_0|<(l+\varepsilon)|z_1-z_0|=\frac{1+l|z_1-z_0|}{2}=q<1.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_1-z_0)^n$ мажорируется геометрической прогрессией $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ со знаменателем, меньшим единицы, что и доказывает его сходимость. Взяв теперь некоторую точку z_2, удовлетворяющую неравенству $l|z_2-z_0|>1$, и выбрав в качестве ε число $\frac{l|z_2-z_0|-1}{|z_2-z_0|}>0$, получим

$$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_2-z_0|>(l-\varepsilon)|z_2-z_0|=1$$

для бесконечного множества значений n. Отсюда $|c_n(z_2-z_0)^n|>1$, что на основании необходимого признака сходимости свидетельствует о расходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_2-z_0)^n$.

Замечание. Мы провели доказательство для случая $0<l<\infty$. Рассмотрим теперь предельные случаи.

*) Эта формула часто называется формулой Коши — Адамара.
**) Напомним определение понятия верхнего предела числовой последовательности. Верхним пределом $\bar{x}$ последовательности $\{x_n\}$ называется наибольшая предельная точка этой последовательности (см. вып. 1, стр. 80).

В § 4 мы ввели тригонометрические функции комплексной переменной и показали, что они являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости. В силу только что доказанной теоремы эти функции не могут быть равномерно ограничены на всей комплексной плоскости. Отсюда, в частности, следует, что найдутся такие значения комплексной переменной z, для которых

$$|\sin z|>1. \tag{1.73}$$

Этим тригонометрические функции комплексной переменной существенно отличаются от соответствующих функций действительной переменной.

ГЛАВА 2

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В настоящей главе будут рассмотрены основные свойства функциональных рядов, члены которых являются функциями комплексной переменной. Особую роль в теории функций комплексной переменной играют ряды аналитических функций и, в частности, степенные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, где c_n — заданные комплексные постоянные, z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости. Изучение этих рядов оказывается весьма существенным как для выяснения ряда общих свойств функций комплексной переменной, так и для решения различных задач, связанных с применением методов теории функций комплексной переменной.

§ 1. Равномерно сходящиеся ряды функций комплексной переменной

1. Числовые ряды. Начнем с рассмотрения некоторых общих свойств числовых рядов с комплексными членами, т. е. выражений вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k, \tag{2.1}$$

где $\{a_k\}$ — заданная числовая последовательность с комплексными членами.

Ряд (2.1) *называется сходящимся, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$.* При этом предел S последовательности $\{S_n\}$ называется *суммой ряда* (2.1). Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$ называется *n-м остатком ряда* (2.1). В случае сходящегося ряда сумму его n-го остатка обозначают r_n и обычно также называют остатком ряда (2.1). Для сходящегося ряда $S=S_n+r_n$ и для

В формуле (2.14) окружность C_ρ можно заменить, в силу теоремы Коши, любым замкнутым контуром C, лежащим в области $|z-z_0|<R$ и содержащим точку z_0 внутри. Так как z — произвольная точка данной области, то отсюда следует, что ряд (2.15) сходится к $f(z)$ всюду внутри круга $|z-z_0|<R$, причем в круге $|z-z_0|\leqslant\rho<R$ этот ряд сходится равномерно. Итак, функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, разлагается в этом круге в сходящийся степенной ряд. Коэффициенты разложения (2.14) на основании формулы (1.72) для производных аналитической функции имеют вид

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{2.16}$$

Остается доказать единственность разложения (2.15). Предположим, что имеет место другое разложение:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n, \tag{2.15'}$$

где хотя бы один коэффицинет $c_n'\neq c_n$. Степенной ряд (2.15') сходится в круге $|z-z_0|<R$, поэтому на основании формулы (2.9), $c_n'=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, что совпадает с выражением (2.16) для коэффициентов c_n. Тем самым единственность определения коэффициентов доказана.

Разложение функции, аналитической в круге $|z-z_0|<R$, в сходящийся степенной ряд (2.15) часто называется *разложением Тейлора*, а сам ряд (2.15) — *рядом Тейлора*.

Доказанная теорема устанавливает взаимно однозначное соответствие между функцией, аналитической в окрестности некоторой точки z_0, и степенным рядом с центром в этой точке. Это означает эквивалентность понятий аналитической функции, как функции, бесконечное число раз дифференцируемой, и функции, представимой в виде суммы степенного ряда *). Последнее имеет не только большое значение для построения теории аналитических функций, но и находит широкое применение при решении многочисленных прикладных вопросов.

*) Заметим, что аналогичная эквивалентность для функций действительной переменной не имеет места. Действительно, из существования на отрезке $[a,b]$ всех производных функции $f(x)$ еще не следует возможность разложения этой функции в степенной ряд вида $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$, где $x_0\in[a,b]$, сходящийся на всем отрезке $[a,b]$. Например, функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ при любом действительном x имеет производные всех порядков, однако при $x_0=0$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$ сходится к данной функции лишь на интервале $-1<x<1$, а не на всей действительной оси x. Подробнее о разложении функций действительной переменной в степенные ряды см. вып. 2, гл. 8.

Заметим, наконец, что если функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathscr{G}$ и z_0 — внутренняя точка этой области, то радиус сходимости ряда Тейлора $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ этой функции не меньше, чем расстояние от точки z_0 до границы области $\mathscr{G}$.

Пример 1. В качестве простейшего примера рассмотрим разложения в ряд Тейлора функции $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$. Эта функция является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z_{1,2}=\pm i$, в которых знаменатель дроби обращается в нуль. Поэтому в любом круге на комплексной плоскости, не содержащем точек $z_{1,2}=\pm i$, эта функция в силу теоремы 2.6 может быть разложена в ряд Тейлора. Начнем с круга $|z|<1$. При условии $|z|<1$ выражение $\frac{1}{1+z^2}$ может рассматриваться как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому в силу (2.10)

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}, \tag{2.17}$$

что и дает искомое разложение. Заметим, что радиус сходимости ряда (2.17) равен 1, т. е. определяется расстоянием от центра разложения до границы области аналитичности функции $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$.

Найдем теперь разложение функции $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ в ряд Тейлора в круге $|z-1|<\sqrt{2}$. Определение коэффициентов c_n ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$ по формуле (2.16) в данном случае связано с довольно громоздкими вычислениями. Поэтому, представив $\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right\}$ и воспользовавшись формулой (2.10), справедливой в данном случае при условии $|z-1|<\sqrt{2}$, получим

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right](z-1)^n.$$

С помощью показательной формы записи комплексных чисел $1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, легко теперь получить

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n. \tag{2.18}$$

где L — длина дуги кривой C. Тогда

$$\left|\int_C f(\zeta)\,d(\zeta)-\sum_{k=1}^{n}\int_C u_n(\zeta)\,d\zeta\right|=\left|\int_C r_n(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant\int_C|r_n(\zeta)\,d\zeta|<\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Отметим, что свойства равномерно сходящихся рядов с комплексными членами, сформулированные в теоремах 2.1 и 2.2, совершенно аналогичны соответствующим свойствам функциональных рядов с действительными членами, и проведенные доказательства фактически повторяют доказательства соответствующих теорем анализа *).

Перейдем теперь к рассмотрению важнейшего свойства равномерно сходящихся рядов, характеризующего поведение ряда, членами которого являются аналитические функции.

Теорема 2.3 (теорема Вейерштрасса). *Пусть функции $u_n(z)$ являются аналитическими в области $\mathscr{G}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{\mathscr{G}}'$ области $\mathscr{G}$ к функции $f(z)$. Тогда:*

1) *$f(z)$ является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$.*

2) $f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$.

3) *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{\mathscr{G}}'$ области $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Проведем доказательство каждого из вышеперечисленных утверждений.

1) Рассмотрим произвольную внутреннюю точку $z_0\in\mathscr{G}$ и построим односвязную подобласть $\mathscr{G}'$ области $\mathscr{G}$, содержащую точку z_0 внутри. В силу теоремы 2.1 $f(z)$ является непрерывной функцией в области $\mathscr{G}$. Рассмотрим интеграл от $f(z)$ по произвольному замкнутому контуру C, целиком лежащему в области $\mathscr{G}'$. По теореме 2.2 этот интеграл можно вычислить путем почленного интегрирования ряда (2.3). Тогда в силу аналитичности функций $u_n(z)$ получим

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C u_n(\zeta)\,d\zeta=0.$$

Тем самым выполнены все условия теоремы Морера. Следовательно, $f(z)$ — функция аналитическая в окрестности $\mathscr{G}'$ точки z_0. В силу произвольности выбора точки z_0 отсюда следует аналитичность $f(z)$ в области $\mathscr{G}$. Заметим, что для любого натурального числа n функ-

*) См. вып. 2, гл. 8.

ция $r_n(z)=\sum_{j=n+1}^{\infty}u_j(z)=f(z)-\sum_{j=1}^{n}u_j(z)$, представляющая собой сумму конечного числа аналитических функций, также является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$.

2) Фиксируем произвольную точку $z_0\in\mathscr{G}$ и выберем произвольный замкнутый контур C, целиком лежащий в построенной выше подобласти $\mathscr{G}'$ и содержащий точку z_0 внутри. Минимальное расстояние от точки z_0 до контура C обозначим через d. Рассмотрим ряд

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

Так как $\min_{z\in C}|z-z_0|=d>0$, то этот ряд в силу условий теоремы сходится равномерно на C. Поэтому, проинтегрировав его почленно по контуру C и воспользовавшись выражением производной аналитической функции через интеграл Коши, получим $f^{(k)}(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z_0)$. Так как z_0 — произвольная точка области $\mathscr{G}$, то утверждение 2) доказано.

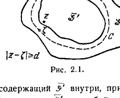


Рис. 2.1.

3) Рассмотрим произвольную подобласть $\overline{\mathscr{G}}'$ области $\mathscr{G}$ и построим в области $\mathscr{G}$ замкнутый контур C, содержащий $\overline{\mathscr{G}}'$ внутри, причем так, чтобы расстояние от произвольной точки $z\in\overline{\mathscr{G}}'$ до любой точки $\zeta\in C$ было не меньше некоторого положительного числа d, $|z-\zeta|\geqslant d>0$ (рис. 2.1) (очевидно, для любой подобласти $\overline{\mathscr{G}}'$ области $\mathscr{G}$ найдутся соответствующие контур C и число d). Так как $r_n(z)$ является аналитической функцией в $\mathscr{G}$, то для любой точки $z\in\overline{\mathscr{G}}'$ имеет место соотношение $\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{r_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta=r_n^{(k)}(z)$. Причем, согласно только что доказанному утверждению, $r_n^{(k)}(z)$ представляет собой остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$. В силу равномерной сходимости исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что на контуре C при $n\geqslant N$ имеет место равномерная оценка $|r_n(\zeta)|<\varepsilon\cdot\frac{2\pi d^{k+1}}{k!L}$, где L — длина контура C. Тогда

$$|r_n^{(k)}(z)|\leqslant\frac{k!}{2\pi}\int_C\frac{|r_n(\zeta)|}{|\zeta-z|^{k+1}}\,ds<\varepsilon$$

области будем рассматривать полную комплексную плоскость z, разрезанную по отрицательной части действительной оси, т. е. область $-\pi<\arg z<\pi$. Будем считать, что путь интегрирования в формуле (1.52) лежит целиком в области $-\pi<\arg z<\pi$, т. е. не пересекает разреза и не проходит через точку $z=0$. Тогда для действительных положительных значений $z=x$, выбрав в качестве пути интегрирования в формуле (1.52) соответствующий отрезок действительной оси, получим

$$f(x)=\int_1^x\frac{dx}{x}=\ln x. \qquad (1.53)$$

То есть для положительных значений своего аргумента функция $f(z)$ совпадает с логарифмической функцией действительной переменной. Поэтому для функции (1.52) в рассматриваемой области $(-\pi<\arg z<\pi)$ сохраним прежнее обозначение, положив

$$\ln z=\int_1^z\frac{dz}{z}. \qquad (1.54)$$

Последнее равенство (в котором путь интегрирования выбирается указанным выше способом) можно рассматривать как определение логарифмической функции для всех комплексных значений ее аргумента, за исключением значений, лежащих на отрицательной части действительной оси $z=x\leqslant 0$. В дальнейшем (гл. 3) мы подробно изучим свойства этой функции, а сейчас лишь отметим, что в силу формулы (1.51) имеет место соотношение

$$(\ln z)'=\frac{1}{z}, \qquad (1.55)$$

т. е. в области $-\pi<\arg z<\pi$ производная логарифмической функции имеет то же выражение, что и для действительных положительных значений аргумента. Ниже будет установлено, что функция (1.54) является обратной к функции $w=e^z$, введенной в § 4 настоящей главы.

§ 6. Интеграл Коши

1. Вывод формулы Коши. В предыдущем параграфе мы доказали теорему Коши. Эта теорема влечет за собой ряд важных следствий, в частности, позволяет установить определенную связь между значениями аналитической функции во внутренних точках области ее аналитичности и граничными значениями этой функции. К установлению данного соотношения мы сейчас и перейдем.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $\mathscr{G}$, ограниченной контуром C. Возьмем произвольную внутреннюю точку z_0 и построим замкнутый контур Γ, целиком лежащий в $\mathscr{G}$

и содержащий точку z_0 внутри себя. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}. \qquad (1.56)$$

Функция $\varphi(z)$, очевидно, является аналитической функцией всюду в области $\mathscr{G}$, за исключением точки z_0. Поэтому, если мы в области $\mathscr{G}$ возьмем такой замкнутый контур γ, лежащий внутри Γ, чтобы точка z_0 попала внутрь области, ограниченной контуром γ, то функция $\varphi(z)$ будет аналитической в двухсвязной области $\mathscr{G}^*$, заключенной между контурами Γ и γ. Согласно теореме Коши интеграл от функции $\varphi(z)$ по кривой $\Gamma+\gamma$ равен нулю:

$$\int_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta+\int_{\gamma^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=0.$$

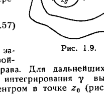


Рис. 1.9.

Изменив направление интегрирования во втором интеграле, это равенство можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=\int_{\gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta. \qquad (1.57)$$

Поскольку интеграл, стоящий слева, не зависит от выбора контура γ, то этим свойством обладает и интеграл, стоящий справа. Для дальнейших рассмотрений удобно в качестве контура интегрирования γ выбрать окружность γ_ρ некоторого радиуса ρ с центром в точке z_0 (рис. 1.9). Положив $\zeta=z_0+\rho e^{i\varphi}$, имеем

$$\int_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=i\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,d\varphi.$$

Последний интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,d\varphi=\int_0^{2\pi}[f(\zeta)-f(z_0)]\,d\varphi+\int_0^{2\pi}f(z_0)\,d\varphi=$$
$$=\int_0^{2\pi}[f(\zeta)-f(z_0)]\,d\varphi+2\pi f(z_0). \qquad (1.58)$$

Устремим теперь ρ к нулю. Так как $f(z)$ — аналитическая, а следовательно, непрерывная функция в области $\mathscr{G}$, то для любого положительного числа ε можно указать такое значение ρ, что $|f(\zeta)-f(z_0)|<\varepsilon$ для $|\zeta-z_0|<\rho$. Отсюда следует, что при $\rho\to 0$ существует предел

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}[f(\zeta)-f(z_0)]\,d\varphi=0.$$

§ 2. Степенные ряды. Ряд Тейлора

1. Теорема Абеля. В предыдущем параграфе рассматривались общие функциональные ряды (2.3), причем вид функций $u_n(z)$ не конкретизировался. Очень важными являются так называемые степенные ряды, для которых $u_n(z)=c_n(z-z_0)^n$, где c_n — некоторые комплексные числа, а z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости. Члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости, поэтому для исследования свойств данного ряда могут быть применены общие теоремы предыдущего параграфа. Как было установлено, многие важные свойства являются следствием равномерной сходимости. Тем самым при исследовании степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ важно установить область его равномерной сходимости. Сразу заметим, что область сходимости степенного ряда определяется видом коэффициентов c_n. Например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}n!(z-z_0)^n$ сходится лишь в одной точке $z=z_0$. Действительно, отношение модулей двух последовательных членов ряда $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=(n+1)|z-z_0|>1$ при любом фиксированном значении $z\neq z_0$, начиная с некоторого $N(z)$, что, согласно рассмотрениям стр. 58, свидетельствует о расходимости данного ряда. С другой стороны, с помощью признака Даламбера легко установить абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$ при любом z.

Для определения области сходимости степенного ряда существенной оказывается следующая теорема.

Теорема 2.5 (теорема Абеля). *Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится в некоторой точке $z_1\neq z_0$, то он абсолютно сходится и в любой точке z, удовлетворяющей условию $|z-z_0|<|z_1-z_0|$; причем в круге $|z-z_0|\leqslant\rho$ радиуса ρ, меньшего $|z_1-z_0|$, ряд сходится равномерно.*

Доказательство. Выберем произвольную точку z, удовлетворяющую условию $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, и рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. Обозначим $|z-z_0|=q|z_1-z_0|$, $q<1$. В силу необходимого условия сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_1-z_0)^n$ его члены стремятся к нулю

при $n\to\infty$. Следовательно, существует такая константа M, что $|c_n|\cdot|z_1-z_0|^n\leqslant M$. Отсюда для коэффициентов c_n данного степенного ряда получим оценку $|c_n|\leqslant\frac{M}{|z_1-z_0|^n}$. Тогда

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot|z-z_0|^n\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n. \qquad (2.8)$$

По условию теоремы число $q=\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|<1$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, представляющий собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы, сходится. Тогда из (2.8) следует сходимость и рассматриваемого ряда. Чтобы доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ в круге $|z-z_0|\leqslant\rho<|z_1-z_0|$, достаточно, в силу признака Вейерштрасса, построить сходящийся числовой ряд, мажорирующий данный функциональный ряд в рассматриваемой области. Очевидно, таковым является ряд $M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{|z_1-z_0|^n}$, также представляющий собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы. Теорема полностью доказана.

Из теоремы Абеля можно вывести ряд важных следствий.

Следствие 1. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ расходится в некоторой точке z_1, то он расходится и во всех точках z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|>|z_1-z_0|$.

Предполагая противное, получим, что по теореме Абеля ряд должен сходиться в любом круге радиуса $\rho<|z-z_0|$, в частности и в точке z_1, что противоречит условию.

Рассмотрим точную верхнюю грань R расстояний $|z-z_0|$ от точки z_0 до точек z, в которых сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. Если $R\neq\infty$, то во всех точках z', удовлетворяющих условию $|z'-z_0|>R$, данный степенной ряд расходится. Пусть R строго больше нуля, тогда наибольшей областью сходимости данного ряда является круг $|z-z_0|<R$. Всюду вне этого круга ряд расходится, в точках границы $|z-z_0|=R$ он может как сходиться, так и расходиться.

Область $|z-z_0|<R$ $(R>0)$ называется кругом сходимости степенного ряда, а число R — его радиусом сходимости.

(x_0, y_0) данной области. То есть

$$M=|f(z_0)|\geqslant|f(z)|,\qquad z_0=x_0+iy_0,\quad z\in\overline{\mathscr{G}}. \qquad (1.63)$$

Предположим, что точка z_0 — внутренняя точка области $\mathscr{G}$. Построим в области $\mathscr{G}$ круг K_0 некоторого радиуса R с центром в точке z_0 и запишем формулу среднего значения для z_0 и R. Учтя (1.63), получим

$$2\pi M=\left|\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,d\varphi\right|\leqslant\int_0^{2\pi}|f(\zeta)|\,d\varphi\leqslant 2\pi M.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi}|f(\zeta)|\,d\varphi=2\pi M. \qquad (1.64)$$

Из этого соотношения в силу непрерывности функции $f(\zeta)$ на контуре интегрирования и неравенства (1.63) следует, что

$$|f(\zeta)|=M\quad\text{при}\quad\zeta=z_0+Re^{i\varphi}. \qquad (1.65)$$

Действительно, по (1.63) функция $|f(\zeta)|$ не может быть больше M ни в одной точке контура интегрирования. Если мы предположим, что в какой-либо точке ζ_0 контура интегрирования функция $|f(\zeta_0)|$ строго меньше M, то из непрерывности $|f(\zeta)|$ следует, что $|f(\zeta)|$ строго меньше M и в некоторой окрестности точки ζ_0, т. е. можно указать отрезок $[\varphi_1,\varphi_2]$ интегрирования, на котором

$$|f(\zeta)|\leqslant M-\varepsilon,\qquad\varepsilon>0.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi}|f(\zeta)|\,d\varphi=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}|f(\zeta)|\,d\varphi+\int_0^{\varphi_1}|f(\zeta)|\,d\varphi+\int_{\varphi_2}^{2\pi}|f(\zeta)|\,d\varphi\leqslant$$
$$\leqslant(M-\varepsilon)(\varphi_2-\varphi_1)+M[2\pi-(\varphi_2-\varphi_1)]<2\pi M,$$

что противоречит (1.64). Итак, соотношение (1.65) действительно имеет место. Это означает, что на окружности радиуса R с центром в точке z_0 функция $|f(z)|$ имеет постоянное значение, равное своему максимальному значению в области $\mathscr{G}$. То же будет иметь место и на любой окружности меньшего радиуса с центром в точке z_0, а следовательно, и во всем круге K_0. Теперь легко показать, что это же значение функция $|f(z)|$ имеет и в любой другой внутренней точке z^* области $\mathscr{G}$. Для этого соединим точки z_0 и z^* кривой C, целиком лежащей в области $\mathscr{G}$ и отстоящей от ее границы не меньше чем на некоторое положительное число d. Возьмем точку z_1, являющуюся последней общей точкой кривой C и круга K_0 (рис. 1.10). Поскольку $|f(z_1)|=M$, то, повторяя проведенные выше рассуждения, покажем,

что внутри круга $K_1\subset\mathscr{G}$ с центром в точке z_1 радиуса $R_1\geqslant d$ модуль функции $f(z)$ принимает постоянное значение, равное максимальному значению M. Взяв на кривой C точку z_2, являющуюся последней общей точкой кривой C и круга K_1, и продолжая данный процесс, мы в результате конечного числа шагов получим, что внутри круга K_n, которому принадлежит точка z^*, имеет место равенство $|f(z)|=M$, что и доказывает высказанное утверждение.

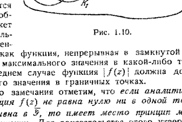


Рис. 1.10.

Итак, мы показали, что если $|f(z)|$ принимает максимальное значение M в некоторой внутренней точке области, то $|f(z)|\equiv M$ во всей области *).

Таким образом, если функция $|f(z)|$ не является постоянной величиной в области $\mathscr{G}$, то она не может достигать своего максимального значения во внутренних точках $\mathscr{G}$. Но так как функция, непрерывная в замкнутой области, достигает своего максимального значения в какой-либо точке этой области, то в последнем случае функция $|f(z)|$ должна достигать своего максимального значения в граничных точках.

В качестве последнего замечания отметим, что *если аналитическая в области $\mathscr{G}$ функция $f(z)$ не равна нулю ни в одной точке этой области и непрерывна в $\overline{\mathscr{G}}$, то имеет место принцип минимума модуля этой функции.* Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть функцию $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ и воспользоваться принципом максимума модуля этой функции.

§ 7. Интегралы, зависящие от параметра

1. Аналитическая зависимость от параметра. Рассматривая интеграл Коши, мы видим, что подынтегральная функция зависит от двух комплексных переменных: переменной интегрирования ζ и фиксированного значения переменной z_0. Тем самым интеграл Коши является интегралом, зависящим от параметра z_0. Естественно

*) Как следует из соотношений (1.20), в этом случае и аргумент аналитической функции $f(z)$ также сохраняет постоянное значение в области $\mathscr{G}$, откуда следует, что если модуль аналитической функции постоянен в некоторой области, то эта функция тождественно равна постоянной в данной области.

При $l=0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится в любой точке z, т. е. $R=\infty$. Действительно, в этом случае для любого $\varepsilon>0$ может быть указан такой номер N, начиная с которого $\sqrt[n]{|c_n|}<\varepsilon$. Выбрав в качестве ε число $\frac{q}{|z-z_0|}$, где z — произвольная точка комплексной плоскости и $0<q<1$, получим $|c_n(z-z_0)^n|<q^n$, что и доказывает сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

При $l=\infty$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ расходится в любой точке $z\neq z_0$, т. е. $R=0$. Действительно, в этом случае для любого числа M найдется бесконечно много коэффициентов c_n таких, что $\sqrt[n]{|c_n|}>M$. Рассмотрим произвольную точку $z\neq z_0$ и выберем M так, чтобы $M|z-z_0|=q>1$. Тогда бесконечное множество членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ удовлетворяет условию $|c_n(z-z_0)^n|>1$, что и доказывает его расходимость.

Итак, формула Коши — Адамара $R=\frac{1}{l}$, где $l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$, справедлива при любом значении l.

В качестве примера, существенного для дальнейшего, рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n$, все коэффициенты c_n которого равны 1. По признаку Даламбера получим, что данный ряд сходится в круге $|z-z_0|<1$ к некоторой аналитической функции. Чтобы найти эту функцию, применим прямое определение суммы ряда как предела частичных сумм:

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(z-z_0)^n}{1-(z-z_0)}=\frac{1}{1-(z-z_0)}. \qquad (2.10)$$

Здесь мы воспользовались, очевидно, справедливой и в области комплексных чисел формулой суммы геометрической прогрессии с конечным числом членов и возможностью предельного перехода в числители дроби, знаменатель которой отличен от нуля. Равенство (2.10) означает, что формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии справедлива и в комплексной области.

2. Ряд Тейлора. Итак, степенной ряд внутри круга сходимости определяет некоторую аналитическую функцию. Естественно поставить вопрос: можно ли функции, аналитической внутри некоторого круга, сопоставить степенной ряд, сходящийся в этом круге к данной функции? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.6 (теорема Тейлора). *Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, причем этот ряд определен однозначно.*

Доказательство. Выберем произвольную точку z внутри круга $|z-z_0|<R$ и построим окружность C_ρ с центром в точке z_0 радиуса $\rho<R$, содержащую точку z внутри (рис. 2.2). Очевидно, для любой точки z данной области такое построение возможно. Так как точка z — внутренняя точка области $|z-z_0|<\rho$, в которой функция $f(z)$ является аналитической, то по формуле Коши имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \qquad (2.11)$$

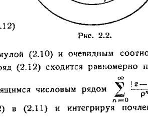


Рис. 2.2.

Осуществим в подынтегральном выражении преобразование

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=$$
$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}. \qquad (2.12)$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.10) и очевидным соотношением $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$. При $\zeta\in C_\rho$ ряд (2.12) сходится равномерно по ζ, так как он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$ $(|z-z_0|<\rho)$. Подставляя (2.12) в (2.11) и интегрируя почленно, получаем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n. \qquad (2.13)$$

Введя обозначение

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad (2.14)$$

перепишем (2.13) в виде сходящегося в выбранной точке z степенного ряда:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \qquad (2.15)$$

Ряд Тейлора

некоторого положительного числа d $(|z-\zeta|\geqslant d>0)$. Функция

$$\varphi(z,\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

является аналитической функцией z в области $\mathscr{G}'$, причем ее частная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$ в этой области является непрерывной функцией своих аргументов. Тем самым в силу общих свойств интегралов, зависящих от параметра, во внутренних точках области $\mathscr{G}'$ производная $f'(z)$ может быть представлена в виде

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta. \qquad (1.70)$$

Интеграл (1.70) опять является интегралом, зависящим от параметра, причем его подынтегральная функция обладает теми же свойствами, что и подынтегральная функция интеграла (1.69). Следовательно, $f'(z)$ является аналитической функцией z в области $\mathscr{G}'$, причем для ее производной справедлива формула

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,d\zeta. \qquad (1.71)$$

Так как для любой внутренней точки z области $\mathscr{G}$ может быть построена соответствующая замкнутая подобласть $\overline{\mathscr{G}}'$, то формулы (1.70) и (1.71) справедливы в любой точке z. Имеет место и более общая теорема.

Теорема 1.9. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathscr{G}$ и непрерывной в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}$. Тогда во внутренних точках области $\mathscr{G}$ существует производная любого порядка функции $f(z)$, причем для нее имеет место формула*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta. \qquad (1.72)$$

Для доказательства этой теоремы достаточно повторить предыдущие рассуждения соответствующее число раз.

Итак, если функция $f(z)$ является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$, то в этой области функция $f(z)$ обладает непрерывными производными всех порядков. Это свойство аналитической функции комплексной переменной существенным образом отличает ее от функции действительной переменной, имеющей непрерывную первую производную в некоторой области. В последнем случае из существования первой производной, вообще говоря, не следует существование высших производных.

Рассмотрим ряд важных следствий установленного свойства аналитической функции комплексной переменной.

Теорема 1.10 (Морера). *Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в односвязной области $\mathscr{G}$ и интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру, целиком принадлежащему $\mathscr{G}$, равен нулю. Тогда $f(z)$ является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Выше *) было доказано, что при условиях теоремы функция

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\,d\zeta,$$

где z_0 и z — произвольные точки области $\mathscr{G}$, а интеграл берется по любому пути, соединяющему эти точки в области $\mathscr{G}$, является аналитической в этой области функцией, причем $F'(z)=f(z)$. Но, как только что было установлено, производная аналитической функции также является аналитической функцией, т. е. существует непрерывная производная функции $F'(z)$, а именно функция $F''(z)=f'(z)$, что и доказывает теорему.

Отметим, что теорема 1.10 является в определенном смысле обратной по отношению к теореме Коши. Ее легко обобщить и на многосвязные области.

Теорема 1.11 (Лиувилля). *Пусть на всей комплексной плоскости функция $f(z)$ является аналитической, а ее модуль равномерно ограничен. Тогда эта функция $f(z)$ тождественно равна постоянной.*

Доказательство. Запишем значение производной $f'(z)$ в произвольной точке z по формуле (1.70):

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta,$$

причем интегрирование будем вести по окружности некоторого радиуса R с центром в точке z, т. е. $|\zeta-z|=R$. По условию теоремы существует такая константа M, что $|f(\zeta)|\leqslant M$ независимо от R. Поэтому

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\frac{|f(\zeta)|}{R^2}\,ds\leqslant\frac{M}{R}.$$

Так как радиус R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)|=0$. В силу произвольности выбора точки z заключаем, что $|f'(z)|\equiv 0$ на всей комплексной плоскости. Отсюда следует, что $f(z)\equiv\mathrm{const}$.

*) См. теорему 1.8, стр. 44.

Как следует из формулы Коши — Адамара, радиус сходимости ряда (2.18) равен $\sqrt{2}$, т. е. опять определяется расстоянием от центра разложения до границы области аналитичности рассматриваемой функции.

Пример 2. В качестве следующего примера рассмотрим разложение в ряд Тейлора функции $f(z)=\ln z=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}$, введенной в гл. 1 (стр. 45). Выше было установлено, что эта функция является аналитической на всей комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, а следовательно, и внутри круга $|z-1|<1$. Полагая $z_0=1$ и вычисляя коэффициенты c_n по формуле (2.16), получаем

$$c_0=\ln 1=0;\quad c_1=\left.\frac{1}{z}\right|_{z=1}=1;$$
$$c_n=\frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\left.\frac{(n-1)!}{z^n}\right|_{z=1}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\quad n=2,\ 3,\ \ldots$$

Отсюда

$$\ln z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}. \qquad (2.19)$$

Как легко убедиться с помощью признака Даламбера, кругом сходимости ряда (2.19) является круг $|z-1|<1$.

§ 3. Единственность определения аналитической функции

Уже изученные нами свойства функций комплексной переменной позволяют заключить, что для определения функции, аналитической в данной области, можно ограничиться заданием значений этой функции не во всей области. Например, задавая значения аналитической функции на границе области, мы с помощью интеграла Коши можем определить ее значения во всех внутренних точках области. Тем самым функция, аналитическая в данной области, определяется заданием неполной информации о ее значениях в этой области. Естественно поставить вопрос: какова та «минимальная» информация, которую надо иметь, чтобы полностью определить функцию, аналитическую в данной области?

1. Нули аналитической функции. Предварительно введем понятие нуля аналитической функции. Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в области $\mathscr{G}$. Точка $z_0\in\mathscr{G}$ называется нулем $f(z)$, если $f(z_0)=0$. Из разложения $f(z)$ в окрестности точки z_0 в степенной ряд, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, следует, что в данном случае коэффици-

ент $c_0=0$. Если не только коэффициент c_0, но и коэффициенты c_1, c_2, …, c_{k-1} равны нулю, а коэффициент c_k отличен от нуля, то точка z_0 называется *нулем k-го порядка* функции $f(z)$. Согласно формуле (2.9) в нуле k-го порядка не только сама функция, но и ее первые $k-1$ производных равны нулю, а k-я производная отлична от нуля. В окрестности нуля порядка k разложение функции $f(z)$ в степенной ряд имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$$
$$=(z-z_0)^k\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+k}(z-z_0)^n=(z-z_0)^k\varphi(z), \qquad (2.20)$$

где $\varphi(z)$ является аналитической функцией в окрестности точки z_0, разложение которой в степенной ряд имеет вид $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+k}(z-z_0)^n$, причем $\varphi(z_0)\neq 0$. Отметим, что последний ряд сходится в том же круге, что и исходный.

2. Теорема единственности. Перейдем теперь к формулировке основного положения данного параграфа.

Теорема 2.7. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathscr{G}$ и обращается в нуль в различных точках $z_n\in\mathscr{G}$, $n=1$, 2, … Если последовательность $\{z_n\}$ сходится к пределу a, принадлежащему той же области, то функция $f(z)$ тождественно равна нулю в области $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Так как $a\in\mathscr{G}$, то функцию $f(z)$ можно разложить в степенной ряд в окрестности данной точки: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, причем радиус R_0 сходимости данного ряда не меньше расстояния от точки a до границы области. Из определения непрерывности функции $f(z)$ следует, что $f(a)=0$. Отсюда следует, что $c_0=0$, и разложение функции $f(z)$ в окрестности $z=a$ имеет вид

$$f(z)=(z-a)f_1(z),\quad\text{где}\quad f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}(z-a)^n.$$

Будем предполагать, что все точки последовательности $\{z_n\}$ отличны от a. Это не уменьшает общности наших рассмотрений, так как только одна из этих точек могла быть равна a. В силу последнего условия $f_1(z_n)=0$, и по определению непрерывной функции $f_1(a)=0$. Отсюда $c_1=0$, и разложение $f_1(z)$ в окрестности a принимает вид $f_1(z)=(z-a)f_2(z)$, где $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+2}(z-a)^n$. Аналогично преды-

любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что $|r_n|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Из определения сходящегося ряда следует, что необходимым и достаточным признаком его сходимости является *критерий Коши* *). А именно, ряд (2.1) сходится тогда и только тогда, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что $\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$ и любом натуральном p.

Необходимым условием сходимости ряда (2.1) является требование $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Действительно, из сходимости этого ряда, в силу критерия Коши, следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что $|a_{n+1}|=|S_{n+1}-S_n|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$.

Если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \qquad (2.2)$$

с действительными положительными членами, то, очевидно, сходится и ряд (2.1), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*. Одним из наиболее часто употребляемых способов исследования сходимости ряда с комплексными членами является рассмотрение ряда с действительными членами, являющимися модулями членов исходного ряда. Как известно **), достаточными признаками сходимости ряда с действительными положительными членами являются *признаки Даламбера и Коши*.

Согласно признаку Даламбера ряд (2.2) сходится, если, начиная с некоторого номера N, отношение $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant l<1$ для всех $n\geqslant N$.

Отметим, что если, начиная с некоторого номера N, отношение $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geqslant 1$, то ряд (2.1) с комплексными членами расходится. Действительно, в этом случае все члены ряда (2.1), начиная с a_N, удовлетворяют соотношению $|a_n|\geqslant|a_N|\neq 0$, т. е. не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Согласно признаку Коши ряд (2.2) сходится, если $\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant q<1$ для всех $n\geqslant N$. Если, начиная с некоторого N, для всех $n\geqslant N$ имеет место соотношение $\sqrt[n]{|a_n|}\geqslant 1$, то ряд (2.1) расходится.

2. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Перейдем теперь к рассмотрению функциональных рядов, членами которых являются функции комплексной переменной. Пусть в области $\mathscr{G}$ определена бесконечная последовательность однозначных функций

*) Являющийся прямым следствием критерия Коши сходимости числовой последовательности $\{S_n\}$; см. стр. 19.

**) См. вып. 1, гл. 13.

комплексной переменной $\{u_n(z)\}$. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z) \qquad (2.3)$$

будем называть *функциональным рядом*. При фиксированном значении $z_0\in\mathscr{G}$ ряд (2.3) превращается в числовой ряд вида (2.1).

Функциональный ряд (2.3) *называется сходящимся в области $\mathscr{G}$, если при любом $z\in\mathscr{G}$ соответствующий ему числовой ряд сходится.* Если ряд (2.3) сходится в области $\mathscr{G}$, то в этой области можно определить однозначную функцию $f(z)$, значение которой в каждой точке области $\mathscr{G}$ равно сумме соответствующего числового ряда. Эта функция называется *суммой ряда* (2.3) в области $\mathscr{G}$. В силу данных определений в этом случае для любой фиксированной точки $z\in\mathscr{G}$ и любого заданного положительного числа ε можно указать такой номер N, что

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right|<\varepsilon\ \text{при}\ n\geqslant N(\varepsilon,\ z).$$

Заметим, что в общем случае N зависит и от ε и от z.

В теории рядов функций комплексной переменной, так же как и в случае действительной переменной, особую роль играет понятие равномерной сходимости. Например, как помнит читатель из курса анализа *), сходящийся ряд непрерывных функций далеко не всегда сходится к непрерывной функции. В то же время сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций всегда является непрерывной функцией. Равномерно сходящиеся ряды функций комплексной переменной, так же как и в случае действительной переменной, обладают рядом весьма важных свойств, к изучению которых мы и перейдем. Начнем с определения.

Если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n\geqslant N(\varepsilon)$ неравенство

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right|<\varepsilon$$

выполняется сразу для всех точек z области $\mathscr{G}$, то ряд (2.3) *называется равномерно сходящимся в области $\mathscr{G}$.*

Обозначив $r_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(z)$, условие равномерной сходимости ряда (2.3) можем записать в виде $|r_n(z)|<\varepsilon$ при $n\geqslant N(\varepsilon)$. Ниже будет установлен ряд свойств равномерно сходящихся рядов.

Укажем важный для приложений достаточный признак равномерной сходимости.

*) См. вып. 2, стр. 300.

дущему получим, что и $f_2(a)=0$, т. е. $c_2=0$. Продолжая неограниченно данный процесс, получим, что все коэффициенты c_n в разложении $f(z)$ в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

в окрестности точки a равны нулю. Отсюда следует, что $f(z)\equiv 0$ внутри круга $|z-a|<R_0$.

Обратимся теперь к доказательству *) тождественного равенства функции $f(z)$ нулю во всей области $\mathcal{G}$. Достаточно показать, что $f(z_1)=0$, где z_1 — произвольная точка области $\mathcal{G}$, лежащая вне круга $|z-a|<R_0$. Для этого соединим точки a и z_1 спрямляемой кривой L, целиком лежащей в $\mathcal{G}$ и отстоящей от ее границы на расстояние $d>0$. Поскольку любую точку круга $|z-a|<R_0$, лежащую внутри области $\mathcal{G}$, можно рассматривать как предел последовательности нулей функции $f(z)$, то, выбрав в качестве нового центра разложения последнюю точку $z=a_1$ пересечения кривой L с окружностью $|z-a|=R_0$, получим, что $f(z)\equiv 0$ внутри круга $|z-a_1|<R_1$, где $R_1\geqslant d$. Продолжая аналогичным образом, покроем всю кривую L конечным числом кругов, радиусов, не меньших d, внутри которых $f(z)\equiv 0$. При этом точка $z=z_1$ попадает внутрь последнего круга, тем самым $f(z_1)=0$. Поскольку z_1 — произвольная точка области $\mathcal{G}$, отсюда следует, что $f(z)\equiv 0$ в $\mathcal{G}$.

Доказанная теорема имеет ряд важных следствий.

Следствие 1. Функция $f(z)\not\equiv 0$ и аналитическая в области $\mathcal{G}$, в любой замкнутой ограниченной подобласти $\overline{\mathcal{G}}'$ области $\mathcal{G}$ имеет лишь конечное число нулей.

Если множество нулей функции $f(z)$ в области $\overline{\mathcal{G}}'$ бесконечно, то по теореме 1.2 из него можно выделить сходящуюся последовательность $\{z_n\}\to a$, причем предел a этой последовательности принадлежит $\overline{\mathcal{G}}'$. Отсюда $f(z)\equiv 0$ в $\mathcal{G}$, что противоречит условию.

Следствие 2. Если точка $z_0\in\mathcal{G}$ является нулем бесконечного порядка **) функции $f(z)$ $\left(\text{т. е. в разложении } f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ в окрестности точки } z_0 \text{ все коэффициенты } c_n\equiv 0\right)$, то $f(z)\equiv 0$ в области $\mathcal{G}$.

Следствие 3. Аналитическая функция может иметь бесконечное число нулей лишь в открытой или неограниченной области.

*) Это доказательство проводится аналогично доказательству на стр. 51.

**) Очевидно, при этом и сама функция $f(z)$ и все ее производные в точке z_0 равны нулю.

Функция комплексной переменной, аналитическая на всей комплексной плоскости ($z\neq\infty$), называется *целой функцией*. Из предыдущих рассмотрений следует, что целая функция в любой ограниченной части комплексной плоскости имеет лишь конечное число нулей. Следовательно, все нули целой функции можно перенумеровать в каком-либо порядке, например в порядке возрастания их абсолютных величин. На полной плоскости целая функция может иметь лишь счетное множество нулей, причем предельной точкой этого множества является бесконечно удаленная точка комплексной плоскости. Целые функции играют важную роль как в теории функций комплексной переменной, так и в ее приложениях.

Теорема 2.8. *Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в области $\mathcal{G}$. Если в $\mathcal{G}$ существует сходящаяся к некоторой точке $a\in\mathcal{G}$ последовательность различных точек $\{z_n\}$, в которых значения функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ совпадают, то $f(z)\equiv\varphi(z)$ в $\mathcal{G}$.*

Для доказательства теоремы достаточно с помощью теоремы 2.7 установить, что функция $\psi(z)=f(z)-\varphi(z)\equiv 0$ в $\mathcal{G}$.

Теорема 2.8 имеет чрезвычайно большое значение, поскольку она означает, что в данной области $\mathcal{G}$ может существовать лишь единственная аналитическая функция, принимающая заданные значения в последовательности точек $\{z_n\}$, сходящейся к точке $a\in\mathcal{G}$. Эту теорему называют *теоремой единственности определения аналитической функции.*

Часто применяются следующие следствия теоремы единственности.

Следствие 1. Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в области $\mathcal{G}$, совпадают на некоторой кривой L, принадлежащей данной области, то они тождественно равны в области $\mathcal{G}$.

Следствие 2. Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические соответственно в областях $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, имеющих общую подобласть $\mathcal{G}$, совпадают в $\mathcal{G}$, то существует единственная аналитическая функция $F(z)$ такая, что

$$F(z)\equiv\begin{cases} f_1(z), & z\in\mathcal{G}_1,\\ f_2(z), & z\in\mathcal{G}_2.\end{cases}$$

Теореме единственности и ее следствиям можно придать также следующие формы.

1° Пусть в области $\mathcal{G}$ выбрана сходящаяся к точке $a\in\mathcal{G}$ последовательность различных точек $z_n\in\mathcal{G}$. Тогда в этой области может существовать лишь единственная аналитическая функция $f(z)$, принимающая в точках z_n заданные значения.

2° Пусть в области $\mathcal{G}$ дана некоторая кривая L. Тогда в $\mathcal{G}$ может существовать лишь единственная аналитическая функция $f(z)$, принимающая заданные значения на L.

полоса плоскости z, ограниченная прямыми $y=0$ и $y=2\pi$, перейдет в полную плоскость w, причем граничные прямые $y=0$ и $y=2\pi$ будут отображаться на один и тот же луч плоскости w — положительную часть действительной оси u (рис. 3.2). При этом устанавливается взаимно однозначное отображение открытой области $0<y<2\pi$ на плоскость w с выброшенной положительной частью действительной оси u. Чтобы установить взаимно однозначное отображение соответствующих замкнутых областей, будем считать, что произведен разрез по положительной части действительной оси u и установлено взаимно

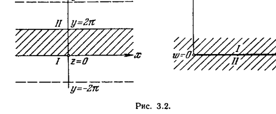


Рис. 3.2.

однозначное соответствие между верхним берегом разреза и прямой $y=0$, а также между нижним берегом разреза и прямой $y=2\pi$ плоскости z. Итак, *показательная функция e^z производит взаимно однозначное отображение полосы $0\leqslant y\leqslant 2\pi$ плоскости z на полную плоскость w, разрезанную по положительной части действительной оси* *). Аналогичным образом устанавливается, что показательная функция производит взаимно однозначное отображение любой полосы $2\pi\cdot n\leqslant y\leqslant 2\pi(n+1)$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$ плоскости z на ту же полную плоскость w с разрезом вдоль положительной части действительной оси u. При этом точки $z_0=x_0+iy_0$ и $z_1=x_0+i(y_0+2\pi k)$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ переходят в одну и ту же точку плоскости w. Это означает, что *показательная функция является бесконечнолистной периодической функцией комплексной переменной z с мнимым периодом $2\pi i$.* Областью ее однолистности является любая полоса $y_0<y<y_0+2\pi$, отображающаяся на полную плоскость w с разрезом, по лучу $\arg w=y_0$. Заметим, что аргумент w на плоскостях, соответствующих различным полосам $2\pi\cdot n\leqslant y\leqslant 2\pi(n+1)$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$ изменяется соответственно в различных пределах. Тем самым мы получаем бесконечный набор различных экземпляров плоскости w, раз-

*) При этом граница полосы $y=0$ переходит в верхний, а граница $y=2\pi$ — в нижний берег разреза плоскости w.

резанной по положительной части действительной оси u. Чтобы непрерывному движению точки z на плоскости z, при котором она переходит из одной полосы в другую, отвечало непрерывное движение w, соответствующие экземпляры (листы) плоскости w должны быть соединены между собой, причем, очевидно, верхний берег разреза n-го листа должен быть соединен с нижним берегом разреза $(n-1)$-го листа и нижний берег разреза n-го листа — соединен с верхним берегом разреза $(n+1)$-го листа. Полученное геометрическое многообразие образует *бесконечнолистную риманову поверхность.*

Аналогичные рассмотрения могут быть проведены и для тригонометрических функций комплексной переменной. Сразу заметим, что в силу формул (3.34), (3.35) *тригонометрические функции являются бесконечнолистными функциями комплексной переменной z, периодическими с действительным периодом* 2π. Так же, как и в случае функции e^z, нетрудно рассмотреть геометрические свойства отображений, осуществляемых тригонометрическими функциями. Мы ограничимся лишь функцией $\cos z$. С помощью установленных выше свойств тригонометрических функций получаем

$$\cos z=\cos(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)=\cos x\cdot\operatorname{ch} y-i\sin x\cdot\operatorname{sh} y.$$

Отсюда следует, что прямую $x=x_0$ плоскости z функция $\cos z$ отображает в ветвь гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 x_0}-\frac{v^2}{\sin^2 x_0}=1 \tag{3.49}$$

на плоскости w. При $0<x_0<\frac{\pi}{2}$ прямая $x=x_0$ переходит в правую ветвь гиперболы, а прямая $x=\pi-x_0$ — в ее левую ветвь. Как легко установить, все гиперболы (3.49) являются софокусными, причем их фокусы лежат в точках ± 1 действительной оси u. Прямая $x_0=\frac{\pi}{2}$ функцией $\cos z$ отображается на мнимую ось v плоскости w, а прямые $x_0=0$ и $x_0=\pi$ — в лучи $[1,\infty]$ и $[-\infty, -1]$ действительной оси u плоскости w, причем при движении точки z по данной прямой (например, по прямой $x_0=0$) соответствующий луч проходится дважды. Тем самым *функция $\cos z$ осуществляет взаимно однозначное отображение полосы $0\leqslant x\leqslant\pi$ плоскости z на полную плоскость w, разрезанную по лучам действительной оси $[1,\infty]$ и $[-\infty, -1]$.* При этом верхняя полуполоса $0\leqslant x\leqslant\pi$, $y>0$ переходит в нижнюю полуплоскость $v<0$, а нижняя полуполоса $0\leqslant x\leqslant\pi$, $y<0$ — в верхнюю полуплоскость $v>0$, что отмечено соответствующей штриховкой на рис. 3.3. Как легко видеть, следующая полоса $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ функцией $\cos z$ отображается на ту же полную плоскость w с разрезами по лучам действительной оси $[1,\infty]$ и $[-\infty, -1]$. Так как $\cos(z+\pi)=-\cos z$, то верхняя полуполоса $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$, $y>0$ переходит в верхнюю полуплоскость $v>0$, а нижняя полуполоса

в ряды Тейлора:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \tag{3.1}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{3.2}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{3.3}$$

причем эти ряды сходятся при всяком значении x.

Рассмотрим на комплексной плоскости следующие степенные ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.6}$$

При действительных $z=x$ выражения (3.4), (3.5), (3.6) и (3.1), (3.2), (3.3) соответственно совпадают.

Как следует из теоремы Абеля, областью сходимости рядов (3.4) — (3.6) является вся плоскость комплексной переменной, т. е. эти ряды представляют собой целые функции комплексной переменной z, являющиеся аналитическим продолжением на всю комплексную плоскость элементарных функций действительной переменной e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Для введенных функций естественно сохранить прежние обозначения. Положим

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \tag{3.7}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{3.8}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.9}$$

С помощью функции e^z построим гиперболические функции комплексной переменной:

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \tag{3.10}$$

и

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}. \tag{3.11}$$

В силу общих свойств аналитических функций эти функции также являются целыми.

Аналогичным образом с помощью основных тригонометрических функций $\sin z$ и $\cos z$ путем формального переноса в комплексную область соответствующих определений могут быть построены и остальные тригонометрические функции: $\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{cosec} z=\frac{1}{\sin z}$ и т. д. Эти функции уже не являются целыми, поскольку их аналитичность нарушается в тех точках плоскости z, где знаменатели определяющих их выражений обращаются в нуль.

Как будет показано ниже, для всех построенных функций комплексной переменной сохраняются многие основные свойства соответствующих элементарных функций действительной переменной. Это будет установлено на основании некоторых общих положений, а сейчас мы построим продолжение на комплексную область еще двух элементарных функций. Рассмотрим следующие степенные ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} \tag{3.12}$$

и

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)} \tag{3.13}$$

Как известно, первый ряд *) сходится в интервале $0<x<2$, а второй — в интервале $-1<x<1$ к функциям действительной переменной $\ln x$ и $\arcsin x$ соответственно. Как легко установить, степенные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n} \tag{3.12$'$}$$

и

$$z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)\,z^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)} \tag{3.13$'$}$$

*) См. вып. 1, стр. 275, где приведено разложение $\ln(1+y)$, замена $y=x-1$ дает (3.12).

продолжением $f_1(z)$, заданной в области $\mathcal{G}_1-\mathcal{G}''_{12}$ на область $\hat{\mathcal{G}}$. Эта функция тождественно совпадает с функцией $f_1(z)$ в области $\mathcal{G}_1-\mathcal{G}''_{12}$ и с $f_2(z)$ в области $\mathcal{G}_2-\mathcal{G}''_{12}$. Функция $\hat F(z)$ может быть аналитически продолжена на множество $\mathcal{G}''_{12}$ двумя способами:

$$F_1(z)=\begin{cases}\hat F(z), & z\in\hat{\mathcal{G}},\\ f_1(z), & z\in\mathcal{G}''_{12}\end{cases} \tag{3.51}$$

или

$$F_2(z)=\begin{cases}\hat F(z), & z\in\hat{\mathcal{G}},\\ f_2(z), & z\in\mathcal{G}''_{12}.\end{cases} \tag{3.52}$$

Это нас, естественно, приводит к необходимости рассмотрения *многозначной аналитической функции* $F(z)$, определенной в области $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2$ и принимающей различные значения в одних и тех же точках части $\mathcal{G}''_{12}$ области $\mathcal{G}$. В частности, в данном случае мы получаем двухзначную аналитическую функцию $F(z)$, принимающую в одной и той же точке $z_0\in\mathcal{G}''_{12}$ два различных значения, совпадающие со значениями функций $f_1(z)$ или $f_2(z)$ в этой точке.

Оперируя с многозначной функцией $F(z)$, имеющей различные значения в одной и той же точке комплексной плоскости, приходится встречаться с трудностями выбора ее значений в данной точке. Для удобства выбора этих значений часто пользуются понятием *ветви* аналитической функции *), являющейся однозначной и непрерывной функцией в соответствующей части области определения функции $F(z)$. Однако более удобным оказывается несколько иное представление, позволяющее рассматривать данную функцию как однозначную, но определенную на более сложном многообразии, чем использовавшаяся до сих пор обычная плоскость комплексной переменной. Так, возвращаясь к рассмотренному выше примеру двухзначной функции $F(z)$, будем считать, что области $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ склеены по общей части $\mathcal{G}'_{12}$, в которой функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают, а два экземпляра $\mathcal{G}''_{12}$, принадлежащие областям $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, оставлены свободными.

Тогда на полученном геометрическом многообразии, представляющем собой объединение областей $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, склеенных по $\mathcal{G}'_{12}$ (так что точки, принадлежащие $\mathcal{G}''_{12}$, перекрыты дважды), функция $F(z)$ является однозначной аналитической функцией.

Построенное таким образом многообразие называется *римановой поверхностью аналитической функции* $F(z)$, являющейся аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ $(f_2(z))$, а отдельные экземпляры повторяющихся областей — различными *листами* римановой поверхности.

*) Например, такое рассмотрение мы проводили в гл. I при изучении функции $z=\sqrt{w}$.

Таким образом, вместо рассмотрения многозначной функции на комплексной плоскости z мы можем рассматривать однозначную функцию на римановой поверхности. Так же как и в простейшем случае, рассмотренном в начале данного пункта, приведенный способ аналитического продолжения функции $f_1(z)$ из области $\mathcal{G}_1$ на более широкую область, представляющую собой уже риманову поверхность, является частной формой общего *принципа аналитического продолжения.* Очевидно, можно аналогичным образом строить и аналитическое продолжение однозначных аналитических функций, заданных на римановой поверхности. При этом мы, естественно, придем к многолистным римановым поверхностям, представляющим собой геометрическое многообразие, в которое одна и та же область комплексной плоскости входит уже не в двух, а во многих экземплярах. Соответствующие примеры будут рассмотрены в пункте 3 данного параграфа, а сейчас рассмотрим еще один способ аналитического продолжения.

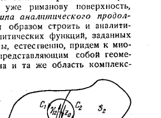


Рис. 3.6.

2. Аналитическое продолжение через границу. В ряде случаев для аналитического продолжения функции $f_1(z)$, первоначально заданной в области $\mathcal{G}_1$, используется также следующий способ. Пусть области $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ имеют в качестве общего участка границы кусочногладкую кривую Γ_{12} (рис. 3.6) и в этих областях заданы аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, непрерывные соответственно в $\mathcal{G}_1+\Gamma_{12}$ и $\mathcal{G}_2+\Gamma_{12}$ и совпадающие на Γ_{12}. Рассмотрим множество точек $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2+\Gamma_{12}$. Так как точки $z\in\Gamma_{12}$ являются внутренними точками этого множества, то множество $\mathcal{G}$ является областью. Покажем, что функция $F(z)$, определенная с помощью соотношений

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in\mathcal{G}_1+\Gamma_{12},\\ f_2(z), & z\in\mathcal{G}_2+\Gamma_{12},\end{cases} \tag{3.53}$$

является аналитической в области $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2+\Gamma_{12}$. Очевидно, достаточно доказать, что для каждой точки z_0 области $\mathcal{G}$, лежащей на кривой Γ_{12}, можно указать такую окрестность, в которой функция $F(z)$ является аналитической. Возьмем произвольную точку $z_0\in\Gamma_{12}$ и построим окружность C_0 с центром в этой точке, целиком лежащую в $\mathcal{G}$. Рассмотрим интеграл типа интеграла Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{3.54}$$

В силу установленных ранее свойств интегралов, зависящих от параметра (гл. 1, стр. 52), функция $\Phi(z)$ является аналитической функ-

Пусть дана функция $F[w_1, \ldots, w_n]$ комплексных переменных $w_1, \ldots, w_n$, аналитическая по каждой переменной *) $w_i\in D_i$ и такая, что она сама и ее частные производные $\frac{\partial F}{\partial w_i}$ непрерывны по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_n$. Обладающую указанными свойствами функцию $F[w_1, \ldots, w_n]$ будем называть аналитической функцией многих комплексных переменных. Пусть даны n функций $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ комплексной переменной z, определенные в области $\mathcal{G}$ комплексной плоскости z, причем $f_i(z)\in D_i$.

Будем говорить, что функции $f_i(z)$ удовлетворяют *соотношению* $F[f_1(z), \ldots, f_n(z)]=0$ на множестве M, если это соотношение удовлетворяется во всех точках $z\in M$. В дальнейшем будем рассматривать соотношения, задаваемые только аналитическими функциями многих комплексных переменных. Имеет место

Теорема 3.1. *Если функции $f_i(z)$ являются аналитическими функциями z в области $\mathcal{G}$, содержащей отрезок $[a, b]$ действительной оси x, то из соотношения $F[f_1(x), \ldots, f_n(x)]=0$ при $a\leqslant x\leqslant b$ следует соотношение $F[f_1(z), \ldots, f_n(z)]=0$ при $z\in\mathcal{G}$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при сформулированных условиях функция $\Phi(z)=F[f_1(z), \ldots, f_n(z)]$ является аналитической функцией комплексной переменной z в области $\mathcal{G}$. Доказательство проведем для случая двух переменных w_i, т. е. когда $\Phi(z)=F[f_1(z), f_2(z)]$. Фиксируем в области $\mathcal{G}$ произвольную точку $z_0\in\mathcal{G}$ и обозначаем $f_1(z_0)=w_1^0$ и $f_2(z_0)=w_2^0$. Составим выражение

$$\Phi(z_0+\Delta z)-\Phi(z_0)=F[w_1^0+\Delta w_1, w_2^0+\Delta w_2]-F[w_1^0, w_2^0], \tag{3.22}$$

где Δw_1, Δw_2 суть приращения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, соответствующие приращению Δz независимой переменной z. Так как, по предположению, существуют частные производные функции F, непрерывные по совокупности переменных, то (3.22) можно преобразовать к виду

$$\Phi(z_0+\Delta z)-\Phi(z_0)=\frac{\partial F}{\partial w_1}(w_1^0, w_2^0+\Delta w_2)\Delta w_1+\eta_1\Delta w_1+\frac{\partial F}{\partial w_2}(w_1^0, w_2^0)\Delta w_2+\eta_2\cdot\Delta w_2, \tag{3.23}$$

*) Назовем функцию многих комплексных переменных $F(z_1, \ldots, z_n)$, определенную для значений $z_i\in D_i$, аналитической функцией каждой из своих переменных z_i $(i=1, 2, \ldots, m; m\leqslant n)$, если при любом $i=1, 2, \ldots, m$ соответствующая функция $\Phi_i(z_i)=F(z_1^0, \ldots, z_{i-1}^0, z_i, z_{i+1}^0, \ldots, z_n^0)$ одной комплексной переменной z_i, получающаяся при произвольных фиксированных значениях остальных переменных $z_j=z_j^0$ $(j\neq i)$, является аналитической функцией данной переменной. Производные функции $\Phi_i(z_i)$ по соответствующим переменным будем называть частными производными функции $F(z_1, \ldots, z_n)$ многих комплексных переменных $\Phi'_i(z_i)=\frac{\partial F(z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_i}$. Подробнее см. приложение 3.

где функции η_1 и η_2 бесконечно малы при Δw_1 и Δw_2, стремящихся к нулю, а тем самым и при $\Delta z\to 0$. Составив теперь разностное отношение $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$ и перейдя к пределу при $\Delta z\to 0$, в силу непрерывности частных производных функции F по совокупности переменных, получим

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z_0+\Delta z)-\Phi(z_0)}{\Delta z}=\frac{\partial F}{\partial w_1}(w_1^0, w_2^0)f'_1(z_0)+\frac{\partial F}{\partial w_2}(w_1^0, w_2^0)f'_2(z_0),$$

что и доказывает существование производной $\Phi'(z_0)$ в точке z_0. В силу сделанных предположений функция $\Phi'(z)$ непрерывна в точке z_0, а так как z_0 — произвольная точка области $\mathcal{G}$, отсюда и следует аналитичность функции $\Phi(z)$ в области $\mathcal{G}$. В случае большего числа переменных w_i доказательство проводится совершенно аналогично.

Теорема 3.1 позволяет аналитически продолжать в комплексную область соотношения вида (3.17), (3.18) между элементарными функциями одной действительной переменной, что существенно для изучения различных свойств элементарных функций комплексной переменной. Соответствующие примеры будут приведены ниже, а здесь ограничимся лишь следующим замечанием к теореме 3.1.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 3.1 и функции $f_i(z)$ соответственно равны: $f_1(z)=f(z)$, $f_2(z)=f'(z)$, ..., $f_{n+1}(z)=f^{(n)}(z)$, то из соотношения*

$$F[f(x), \ldots, f^{(n)}(x)]=0 \quad \text{при} \quad a<x<b \tag{3.24}$$

следует

$$F[f(z), \ldots, f^{(n)}(z)]=0, \quad z\in\mathcal{G}. \tag{3.25}$$

Это означает, что если функция действительной переменной $f(x)$ является решением дифференциального уравнения (3.24), то ее аналитическое продолжение $f(z)$ в область $\mathcal{G}$ удовлетворяет в этой области дифференциальному уравнению (3.25), являющемуся аналитическим продолжением уравнения (3.24) в область $\mathcal{G}$.

Перейдем теперь к обоснованию аналитического продолжения соотношений вида (3.19) и (3.20). Мы не будем рассматривать каждое из этих соотношений в отдельности, а сразу сформулируем общую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть функции $w_1=f_1(z_1)$, ..., $w_n=f_n(z_n)$ являются аналитическими функциями комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, в областях $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$, содержащих отрезки $[a_i, b_i]$ $(i=1, \ldots, n)$ действительной оси x. Пусть функция $F[w_1, \ldots, w_n]$ является аналитической функцией по каждой из переменных $w_1, \ldots, w_n$ в области их изменения. Тогда из соотношения $F[f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)]=0$ при $a_i\leqslant x\leqslant b_i$ следует соотношение $F[f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n)]=0$ при $z_i\in\mathcal{G}_i$.*

продолжения через границу функция $w_2(z)$ является аналитическим продолжением функции $w_1(z)$ в область $\mathcal{G}_2$. С другой стороны, $\mathcal{G}_1$ и $\overline{\mathcal{G}}_2$ фактически совпадают на плоскости z, так как точки комплексной плоскости с равными модулями и отличающимися на 2π аргументами совпадают. Поскольку функции (3.58) и (3.59) в одной и той же точке z имеют различные значения, то согласно предыдущим рассмотрениям, для того чтобы функция

$$F_1(z)=\begin{cases} w_1(z), & z\in\mathcal{G}_1+\Gamma_{1,2},\\ w_2(z), & z\in\mathcal{G}_2+\Gamma_{1,2},\end{cases} \tag{3.60}$$

была однозначной в области определения $R_1=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2+\Gamma_{1,2}$, мы должны считать, что многообразие R_1 является римановой поверхностью, склеенной из листов $\overline{\mathcal{G}}_1$ и $\overline{\mathcal{G}}_2$. Очевидно, что данное склеивание следует произвести по общей части границы $\Gamma_{1,2}$ лучу $\arg z=2\pi$, склеив нижний берег разреза области $\overline{\mathcal{G}}_1$ с верхним берегом разреза области $\overline{\mathcal{G}}_2$. Повторив наши рассмотрения, мы установим, что функция

$$w_{k+1}(z)=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi), \tag{3.61}$$

определенная в замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_{k+1}$ $(2\pi k\leqslant\arg z\leqslant 2\pi(k+1))$, является аналитическим продолжением функции $w_k(z)$, определенной в $\overline{\mathcal{G}}_k$. Заметим, что функция $w_{n+1}(z)$ тождественно совпадает с функцией $w_1(z)$. Поэтому естественно рассматривать однозначную аналитическую функцию

$$F(z)=\begin{cases} w_1(z), & z\in\mathcal{G}_1+\Gamma_{1,2},\\ w_2(z), & z\in\mathcal{G}_2+\Gamma_{1,2}+\Gamma_{2,3},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ w_n(z), & z\in\mathcal{G}_n+\Gamma_{n-1,n},\end{cases} \tag{3.62}$$

определенную на римановой поверхности $R=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2+\ldots+\mathcal{G}_n+\Gamma_{1,2}+\ldots+\Gamma_{n-1,n}$, склеенной указанным выше способом из n листов, представляющих собой плоскость z с разрезом по положительной части действительной оси x. При этом остаются свободными верхний берег разреза ($\arg z=0$) на первом листе $\mathcal{G}_1$ и нижний берег разреза ($\arg z=2\pi n$) на n-м листе $\mathcal{G}_n$. Чтобы сохранить непрерывность функции $F(z)$ во всей области ее определения, мы произведем склеивание этих берегов разрезов (рис. 3.7) *). Функцию (3.62) называют полной аналитической функцией $w=\sqrt[n]{z}$, а построенное указанным выше способом замкнутое многообразие R — полной римановой

*) Для большей наглядности можно произвести указанные склеивания на разрезанных листах бумаги. При этом последнее склеивание оказывается физически невозможным и может быть произведено лишь мысленно.

поверхностью этой функции. На каждом листе римановой поверхности определена отдельная ветвь данной многозначной функции.

Отметим еще следующее обстоятельство. Фиксируем на плоскости z некоторую точку z_0 и проведем через нее замкнутую кривую C. Тогда, если $\arg z$ при движении по кривой C изменяется непрерывным образом и кривая C пересекает линию разреза на плоскости z, то при полном обходе кривой C априори возможны два случая (рис. 3.8) В первом случае точка $z=0$ лежит вне кривой C. Поэтому, выйдя из точки $z=z_0$ ($\arg z_0=\varphi_0$) на k-м листе *), мы после обхода этой кривой вернемся в исходную точку z_0 на том же k-м ($\arg z_0=\varphi_0$) листе, хотя в процессе движения мы, пересекая линию разреза, переходили и на другие листы. Во втором случае точка $z=0$ лежит внутри кривой C. Поэтому, выйдя из точки $z=z_0$ ($\arg z_0=\varphi_0$) на k-м листе, мы после обхода кривой C вернемся в точку $z=z_0$

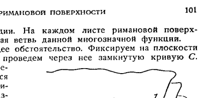


Рис. 3.7.

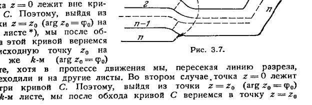


Рис. 3.8.

уже не на исходном k-м, а например, на $(k+1)$-м листе ($\arg z_0=\varphi_0+2\pi$). Точка z_0, при обходе которой по любой замкнутой кривой в достаточно малой окрестности этой точки происходит переход с одного листа римановой поверхности аналитической функции $F(z)$ на другой ее лист, называется *точкой разветвления* функции $F(z)$. Как легко видеть, это определение точки разветвления эквивалентно определению, данному в гл. 1, стр. 29. Очевидно, в рассматриваемом примере функции $w=\sqrt[n]{z}$ точками разветвления являются точки $z=0$ и $z=\infty$.

*) Рис. 3.8 соответствует случаю $k=1$.

В частности,

$$\sin iy=i\operatorname{sh} y, \quad \cos iy=\operatorname{ch} y. \tag{3.37}$$

Установим еще некоторые важные свойства рассматриваемых функций. Предварительно заметим, что в силу формулы (3.30) имеет место соотношение

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}. \tag{3.38}$$

Отсюда следует, что $|w|=e^x$ и $\arg w=y$.

Рассмотрим теперь функцию $w=\ln z=\int_0^z\frac{d\zeta}{\zeta}$, являющуюся аналитическим продолжением $\ln x$ на комплексную плоскость, разрезанную по отрицательной части действительной оси. Так как для действительных положительных x функция $\ln x$ является обратной экспоненте, то в силу теоремы 3.1 в области $-\pi<\arg z<\pi$ сохраняется соотношение

$$e^{\ln z}=z, \tag{3.39}$$

являющееся аналитическим продолжением соотношения $e^{\ln x}=x$ $(x>0)$ в комплексную область. Тем самым *функция $\ln z$ является обратной к функции e^w.*

Отметим важное следствие формулы (3.39). В силу этой формулы и формулы (3.38) из соотношения $w=u+iv=\ln z$ следует

$$z=e^w=e^{u+iv}=e^u\cdot e^{iv}. \tag{3.40}$$

Отсюда $|z|=e^u$, $\arg z=v$, а так как u и $|z|$ — действительные переменные, окончательно получим

$$u=\ln|z|, \qquad v=\arg z, \tag{3.41}$$

где символ $\ln|z|$ означает действительную логарифмическую функцию действительного положительного аргумента. Тем самым для функции комплексной переменной $\ln z$ получим алгебраическую форму записи в виде

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z. \tag{3.42}$$

Из (3.42) получим значения: $\ln i=i\frac{\pi}{2}$, $\ln(1)=0$, $\ln(-i)=-i\frac{\pi}{2}$, $\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}$ и т. д.

Аналогичным образом на основании теоремы 3.1 нетрудно показать, что и функция $\arcsin z$, определенная формулой (3.15), является обратной к функции $\sin z$, т. е.

$$\sin(\arcsin z)=z. \tag{3.43}$$

Выше была установлена связь между показательной и тригонометрическими функциями. Очевидно, и функции, обратные к данным, на-

пример $\ln z$ и $\arcsin z$, также связаны между собой определенными соотношениями.

В силу (3.43) из выражения $w=\arcsin z$ следует $z=\sin w$, что согласно (3.35) можно переписать в виде

$$z=\frac{1}{2i}(e^{iw}-e^{-iw}) \tag{3.44}$$

или

$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0. \tag{3.45}$$

Разрешив квадратное уравнение (3.45) относительно e^{iw}, получим

$$e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}. \tag{3.46}$$

Мы не пишем знак $\pm$ перед корнем потому, что функция $\sqrt{1-z^2}$ комплексной переменной z сама является многозначной функцией (см. гл. 1, стр. 28). Выбор ветви многозначной функции $\sqrt{1-z^2}$ здесь производится из условия, чтобы рассматриваемая функция $w=\arcsin z$ являлась аналитическим продолжением соответствующей функции действительной переменной. Из последнего условия следует, что должно быть взято то значение корня, которое положительно при положительных действительных значениях подкоренного выражения. Из (3.39) и (3.46) следует

$$iw=\ln[iz+\sqrt{1-z^2}],$$

откуда окончательно получим

$$w=\arcsin z=-i\ln[iz+\sqrt{1-z^2}] \tag{3.47}$$

Это выражение на первый взгляд довольно сложно, и невольно возникает сомнение, дает ли оно, в частности, действительные значения $\arcsin x$ для действительных значений $z=x$, удовлетворяющих условию $|x|\leqslant 1$. Однако сомнение нетрудно рассеять. Обозначим $\zeta=iz+\sqrt{1-z^2}$. Для действительных значений $z=x$, удовлетворяющих условию $|x|\leqslant 1$, получим $|\zeta|=\sqrt{x^2+1-x^2}=1$ и $\arg\zeta=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$. Отсюда в силу формулы (3.42) имеем $-i\ln\zeta=-i[\ln 1+i\arg\zeta]=\arg\zeta=\arcsin x$.

Так как функция (3.42) определена для всех значений своего аргумента на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси, то формула (3.47) дает аналитическое продолжение функции $\arcsin z$ на некоторую область плоскости z. При этом точки $z=\pm 1$ оказываются в определенном смысле особыми. Действительно, в результате обхода любой из этих точек на плоскости z по замкнутой кривой, принадлежащей достаточно малой ε-окрестности этой точки, при непрерывном изменении функции (3.47) она изменит свое значение, так как при однократном обходе точки

$\mathcal{G}_2$ сходящийся степенной ряд (3.68) определяет аналитическую функцию $f_2(z)$, совпадающую с $f_1(z)$ в $\mathcal{G}_{12}$. Эта функция $f_2(z)$ является аналитическим продолжением $f_1(z)$ в область $\mathcal{G}_2$. Следовательно, в области $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2$ определена аналитическая функция

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in\mathcal{G}_1,\\ f_2(z), & z\in\mathcal{G}_2.\end{cases} \tag{3.69}$$

Итак, в рассматриваемом случае разложение (3.68) выводит за границу Γ_1 области $\mathcal{G}_1$ первоначального определения аналитической функции $f_1(z)$. Проведя аналогичные рассмотрения для некоторой точки z_1 построенной области $\mathcal{G}_2$, затем для точки z_2 области $\mathcal{G}_3$ и т. д., мы получим аналитическое продолжение функции $f_1(z)$ вдоль *цепочки областей* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n, \ldots$ При этом возможны такие взаимные наложения областей цепочки, которые приводят к необходимости рассматривать функцию $F(z)$ как однозначную аналитическую функцию, определенную уже не на обычной комплексной плоскости z, а на римановой поверхности.

Рассмотрим конкретный пример разобранного способа аналитического продолжения.

Пример 3. Пусть первоначально функция $f_1(z)$ задана своим степенным рядом

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n. \tag{3.70}$$

Этот ряд сходится внутри круга $|z|<1$ к аналитической функции $f_1(z)=\frac{1}{1-z}$. Всюду вне круга $|z|<1$ ряд расходится; следовательно, $f_1(z)$ не определена вне круга $|z|<1$. Выберем некоторую точку z_0 внутри круга $|z|<1$ и построим разложение $f_1(z)$ в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ с центром в этой точке. Вычислив коэффициенты c_n по формуле (2.16), получим $c_n=\frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}$. Легко показать, что радиус сходимости данного ряда $\rho(z_0)$ равен $|1-z_0|$. Как следует из элементарных геометрических соображений, в том случае, когда точка z_0 не лежит на отрезке действительной оси $[0, 1]$, круг сходимости данного ряда выйдет за пределы первоначального круга сходимости $|z|<1$. Следовательно, функция $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$ является аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ на область $|z-z_0|<|1-z_0|$.

Заметим, что степенной ряд, определяющий функцию $f_2(z)$, также легко суммируется, причем $f_2(z)=\frac{1}{1-z}$. Поэтому взяв в качестве

нового центра разложения точку z_1 внутри круга $|z-z_0|<|1-z_0|$, получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_1)^n}{(1-z_1)^{n+1}}$, сходящийся внутри круга $|z-z_1|<|1-z_1|$ к функции $f_3(z)=\frac{1}{1-z}$, совпадающий с $f_2(z)$ и $f_1(z)$ в общих частях круга $|z-z_1|<|1-z_1|$ и областей определения соответствующих функций. Тем самым $f_3(z)$ является аналитическим продолжением $f_1(z)$ на новую область. Отметим, что при любом выборе точки z_1 граница соответствующего круга сходимости пройдет через точку $z=1$ (рис. 3.10). Поступая аналогичным образом, можно построить аналитическое продолжение функции $f_1(z)$ на полную плоскость комплексной переменной, за исключением точки $z=1$. При этом аналитическим продолжением $f_1(z)$, полученным с помощью степенных рядов, является функция $F(z)=\frac{1}{1-z}$, определенная и аналитическая всюду, за исключением точки $z=1$.

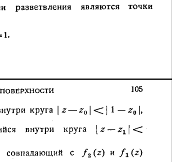


Рис. 3.10.

Итак, нам удалось расширить область первоначального задания аналитической функции $F(z)$ — круг $|z|<1$, в которой была задана функция $f_1(z)$, — на большую область. Заметим, что, хотя и имеют место многочисленные взаимные наложения построенной цепочки областей, полученная аналитическая функция $F(z)=\frac{1}{1-z}$ является однозначной во всей области своего определения — на полной плоскости z с выброшенной точкой $z=1$. Дальнейшее аналитическое продолжение функции $F(z)$ на бо́льшую область уже невозможно. Точка $z=1$, являющаяся границей области аналитичности функции $F(z)$, представляет собой в определенном смысле особую точку этой функции. Поведение аналитической функции в окрестности таких точек заслуживает более подробного изучения, что и будет проведено в дальнейшем.

5. Правильные и особые точки аналитической функции. Пусть функция $f(z)$ задана в области $\mathcal{G}$, ограниченной контуром Γ. *Точка $z_0\in\overline{\mathcal{G}}$ называется правильной точкой функции $f(z)$, если существует сходящийся степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, который в общей части области $\mathcal{G}$ и своего круга сходимости $|z-z_0|<\rho(z_0)$*

$\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $y<0$ — в нижнюю полуплоскость $v<0$ (рис. 3.3). Аналогичное положение, очевидно, имеет место и для любой полосы $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$. Отсюда следует, что областью однолистности функции $\cos z$ является полоса $n\pi < x < (n+1)\pi$. Функция $\cos z$ представляет собой бесконечнолистную функцию, а ее областью значений является бесконечнолистная риманова поверхность, получающаяся путем склеивания плоскостей w, разрезанных по лучам действительной оси $[-\infty, -1]$ и $[1, \infty]$, по соответствующим берегам разрезов.

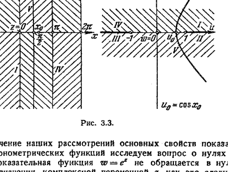


Рис. 3.3.

В заключение наших рассмотрений основных свойств показательной и тригонометрических функций исследуем вопрос о нулях этих функций. Показательная функция $w=e^z$ не обращается в нуль ни при каком значении комплексной переменной z, как это следует из формулы (3.38). Все нули тригонометрических функций лежат на действительной оси. В самом деле, если $\sin z = 0$, то $e^{iz}-e^{-iz}=0$, $e^{2iz}=1$. Но если комплексные числа равны, то их аргументы различаются на число, кратное 2π, откуда $z=n\pi$, что и доказывает высказанное утверждение.

§ 2. Аналитическое продолжение. Понятие римановой поверхности

1. Основные принципы. Понятие римановой поверхности. Основной задачей аналитического продолжения является продолжение значений функции $f(z)$, заданной в некоторой области $\mathcal{G}'$ на большую область $\mathcal{G}$.

Пусть на комплексной плоскости даны две области $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, имеюие общую часть *) $\mathcal{G}_{12}$ (рис. 3.4). Пусть однозначные аналитические ункции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ заданы соответственно в областях $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ и ождественно совпадают между собой в пересечении $\mathcal{G}_{12}$. Тогда функия $F(z)$, определенная соотношениями

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in\mathcal{G}_1,\\ f_2(z), & z\in\mathcal{G}_2,\end{cases} \qquad (3.50)$$

вляется аналитической в расширенной области $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2$ и совпает с $f_1(z)$ в $\mathcal{G}_1$ и с $f_2(z)$ в $\mathcal{G}_2$.

Функция $F(z)$ называется *аналитическим продолжением функи $f_1(z)$ $(f_2(z))$ на область $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2$*. Функцию $f_2(z)$ $(f_1(z))$ кже называют аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ $(f_2(z))$ область $\mathcal{G}_2(\mathcal{G}_1)$.

Как легко видеть, аналитическое родолжение $F(z)$ функции $f_1(z)$

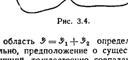


Рис. 3.4.

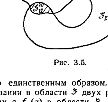


Рис. 3.5.

область $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2$ определено единственным образом. Действильно, предположение о существовании в области $\mathcal{G}$ двух различных ункций, тождественно совпадающих с $f_1(z)$ в области $\mathcal{G}_1$, приводит противоречию с теоремой о единственности определения аналитиской функции, доказанной в предыдущей главе.

Данный способ аналитического продолжения функции $f_1(z)$ из бласти $\mathcal{G}_1$ на более широкую область $\mathcal{G}$ представляет собой простейшую форму *принципа аналитического продолжения*.

Обратимся теперь к случаю, когда функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ тождественно совпадают лишь на части $\mathcal{G}'_{12}$ пересечения $\mathcal{G}_{12}$ областей $\mathcal{G}_1$ $\mathcal{G}_2$ (рис. 3.5). Рассмотрим область $\hat{\mathcal{G}}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2-\mathcal{G}''_{12}$, где $\mathcal{G}''_{12}=\mathcal{G}_{12}-\mathcal{G}'_{12}$ — та часть пересечения $\mathcal{G}_{12}$, в которой функции $f_1(z)$ и (z) различны. Согласно предыдущим рассмотрениям в $\hat{\mathcal{G}}$ определена динственная аналитическая функция $\hat{F}(z)$, являющаяся аналитическим

*) При этом могут быть различные случаи. Например: а) область $\mathcal{G}_1$ держится в области $\mathcal{G}_2$, тогда $\mathcal{G}_{12}$, очевидно, совпадает с областью $\mathcal{G}_1$; пересечение $\mathcal{G}_{12}$ является односвязной или многосвязной областью; в) пересечение $\mathcal{G}_{12}$ состоит из нескольких (может быть, и бесконечного числа) отдельых связных областей.

3° Пусть в области $\mathcal{G}$ дана некоторая подобласть $\mathcal{G}'$. Тогда в области $\mathcal{G}$ может существовать лишь единственная аналитическая функция $f(z)$, принимающая заданные значения в подобласти $\mathcal{G}'$.

Если существует функция $f(z)$, определенная в области $\mathcal{G}$, о которой говорилось в 1°, 2° и 3°, то она может быть названа аналитическим продолжением в $\mathcal{G}$ с множества $\{z_n\}$, линии L или подобласти $\mathcal{G}'$.

Отметим, что задание значений аналитической функции на соответствующем множестве точек не может быть произведено произвольно. Однако мы здесь не будем обсуждать требования, которым должны удовлетворять эти значения, чтобы их можно было аналитически продолжить в области $\mathcal{G}$.

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В этой главе мы рассмотрим ряд фундаментальных следствий теоремы о единственности определения аналитической функции. Как было установлено, аналитическая функция однозначно определяется заданием ее значений на некотором множестве точек в области ее определения. Это обстоятельство позволяет построить аналитическое продолжение в комплексную область элементарных функций действительной переменной и выяснить их свойства в комплексной плоскости. Мы также кратко рассмотрим общие принципы аналитического продолжения.

§ 1. Элементарные функции комплексной переменной. Продолжение с действительной оси

1. Продолжение с действительной оси. Теорема о единственности определения аналитической функции позволяет автоматически распространить на комплексную область элементарные функции действительной переменной. Предварительно отметим справедливость следующего утверждения: пусть на отрезке $[a, b]$ действительной оси x задана непрерывная функция $f(x)$ действительной переменной; тогда в некоторой области $\mathcal{G}$ комплексной плоскости, содержащей отрезок $[a, b]$ действительной оси, может существовать только одна аналитическая функция $f(z)$ комплексной переменной z, принимающая данные значения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Назовем функцию $f(z)$ *аналитическим продолжением функции $f(x)$ действительной переменной x в комплексную область $\mathcal{G}$*.

Перейдем к рассмотрению примеров построения аналитических продолжений элементарных функций действительной переменной. Среди элементарных функций действительной переменной особую роль играют показательная функция e^x и тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Как известно*), эти функции могут быть заданы своими разложениями

*) Определение и основные свойства этих функций действительной переменной см. вып. 1, стр. 412.

цией z при любом положении точки z, не лежащей на кривой C_0. Покажем, что когда точка z лежит внутри окружности C_0, то $\Phi(z)\equiv F(z)$. Действительно, представим интеграл (3.54) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1+\gamma_{12}}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{12}+C_2}\frac{f_2(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad (3.55)$$

где C_1 и C_2 суть части окружности C_0, лежащие в $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ $(C_0=C_1+C_2)$, а γ_{12} — часть кривой Γ_{12}, попавшая внутрь окружности C_0. Если точка z принадлежит области $\mathcal{G}_1$, то в силу теоремы Коши *) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1+\gamma_{12}}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f_1(z),\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{12}+C_2}\frac{f_2(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0, \qquad (3.56)$$

откуда $\Phi(z)=f_1(z)=F(z)$ при $z\in\mathcal{G}_1$. Аналогично $\Phi(z)=f_2(z)=F(z)$ при $z\in\mathcal{G}_2$. В точке z_0, принадлежащей γ_{12}, в силу непрерывности функций $\Phi(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ внутри окружности C_0, также будем иметь $\Phi(z_0)=f_1(z_0)=f_2(z_0)=F(z_0)$, откуда и следует, что $F(z)$ является аналитической функцией в области $\mathcal{G}$.

И в этом случае, так же как и в предыдущих, мы будем говорить, что функция $f_1(z)$ $(f_2(z))$, заданная в области $\mathcal{G}_1(\mathcal{G}_2)$, *аналитически продолжена на область $\mathcal{G}_2(\mathcal{G}_1)$*. Построенная выше функция $F(z)$ является *аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ в область* $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2+\Gamma_{12}$. Описанная конструкция представляет собой частную форму *общего принципа аналитического продолжения — аналитическое продолжение через границу области*. При этом, так же как и в предыдущих случаях, мы при продолжении через границу можем прийти к необходимости рассмотрения однозначной аналитической функции на римановой поверхности в тех случаях, когда области $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, кроме общего участка границы Γ_{12}, имеют непустое пересечение $\mathcal{G}_{12}$, в котором функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ не равны тождественно друг другу.

Рассмотрим теперь ряд примеров применения общих принципов аналитического продолжения, приводящих как к многозначным, так и однозначным функциям.

3. Примеры построения аналитического продолжения. Продолжение через границу. Рассмотрим некоторые примеры построения аналитического продолжения функции $f_1(z)$, первоначально заданной в области $\mathcal{G}_1$ комплексной плоскости z. При этом, как было отмечено выше, мы в ряде случаев приходим к необходимости рассмотрения функции, многозначной на комплексной плоскости.

В гл. 1 мы уже имели простейший пример многозначной функции комплексной переменной — функцию $w=\sqrt{z}$, являющуюся **) обрат-

*) Применимость теоремы Коши к интегралам в правой части (3.55) очевидна в силу сделанного предположения о кусочной гладкости кривой Γ_{12} и выбора кривой C_0.

**) Мы изменили здесь обозначения зависимой и независимой переменных.

ой степенной функции $z=w^2$. Рассмотрим теперь эту и ряд других ункций с более общей точки зрения аналитического продолжения.

Пример 1. Функция $w=\sqrt[n]{z}$. Согласно правилу извлечения орня n-й степени из комплексного числа одному значению z соответвует n различных комплексных чисел w, вычисленных по формуле

$$w=re^{i\psi}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1), \qquad (3.57)$$

е $z=\rho e^{i\varphi}$ и φ — одно из значений $\operatorname{Arg} z$. Функция $w=\sqrt[n]{z}$ вляется многозначной функцией, имеющей n различных ветвей. Будем итать, что φ изменяется в пределах $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, и выберем ту ветвь ункции $w=\sqrt[n]{z}$, которая является аналитическим продолжением действительной функции $u=\sqrt[n]{x}$ действительной положительной переенной $x>0$. Очевидно, это будет

$$w_1=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{n}} \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi). \qquad (3.58)$$

бластью $\mathcal{G}_1$ определения функции w_1 является плоскость z, разреянная по положительной части действительной оси x. Верхний берег азреза соответствует значению $\arg z=0$, нижний — значению $\arg z=2\pi$. чевидно, функция w_1, являющаяся обратной функции $z=w^n$, осуществляет взаимно однозначное отображение замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_1$ лоскости z на сектор $0\leqslant\arg w\leqslant\frac{2\pi}{n}$ плоскости w. В силу общих войств аналитических функций (см. гл. 1, стр. 33) функция w_1 области $\mathcal{G}_1$ является однозначной аналитической функцией, произодная которой вычисляется по формуле $w_1'(z)=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}\times$ $\times e^{i\varphi\frac{1-n}{n}}$.

Рассмотрим теперь замкнутую область $\overline{\mathcal{G}}_2$ — ту же плоскость z разрезом по положительной части действительной оси x, но на оторой аргумент z изменяется в пределах $2\pi\leqslant\arg z\leqslant 4\pi$. Верхний ерег разреза соответствует значению $\arg z=2\pi$, нижний — значению $\arg z=4\pi$. Рассмотрим в этой области функцию

$$w_2(z)=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{(\varphi+2\pi)}{n}} \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi). \qquad (3.59)$$

та функция осуществляет взаимно однозначное отображение замкнуой области $\overline{\mathcal{G}}_2$ на сектор $\frac{2\pi}{n}\leqslant\arg w\leqslant\frac{4\pi}{n}$ плоскости w и является днозначной аналитической функцией z в области $\mathcal{G}_2$. Замкнутые бласти $\overline{\mathcal{G}}_1$ и $\overline{\mathcal{G}}_2$ имеют общую часть границы $\Gamma_{1,2}$ — луч $\arg z=2\pi$, — а которой совпадают функции w_1 и w_2, непрерывные в $\mathcal{G}_1+\Gamma_{12}$ $\mathcal{G}_2+\Gamma_{12}$ соответственно. Поэтому в силу принципа аналитического

сходятся первый — внутри круга $|z-1|<1$, а второй — внутри круга $|z|<1$ и на соответствующих отрезках действительной оси совпадают с рядами (3.12) и (3.13). Поэтому аналитические функции комплексной переменной z, определенные с помощью рядов (3.12′) и (3.13′) внутри их кругов сходимости, являются аналитическим продолжением на соответствующую комплексную область элементарных функций $\ln x$ и $\arcsin x$ действительной переменной x. Для этих функций мы также сохраним прежние обозначения, положив

$$\ln z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n} \qquad (3.14)$$

и

$$\arcsin z=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)\,z^{2n+1}}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}. \qquad (3.15)$$

Отметим, что функции (3.14) и (3.15), в отличие от введенных выше функций (3.7)—(3.9), уже не являются целыми функциями, так как определяющие их ряды сходятся не на всей комплексной плоскости, а лишь внутри кругов единичного радиуса. Свойства этих функций также будут рассмотрены несколько позже. Отметим только, что функция (3.14) в круге $|z-1|<1$ совпадает с введенной иным способом в гл. 1, стр. 45, функцией $\ln z=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}$, так как обе эти аналитические функции определены в указанной области и совпадают на общем интервале действительной оси $0<x<2$ с одной и той же функцией $\ln x$. Поэтому для обеих функций мы используем одно и то же обозначение. Тем самым и функция $f(z)=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}$, определенная на комплексной плоскости z, разрезанной по отрицательной части действительной оси, является аналитическим продолжением функции $\ln x$ на соответствующую область.

В заключение заметим, что если функция $f(x)$ действительной переменной x задана своим степенным рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (3.16)$$

сходящимся на отрезке $[a, b]$, то существует аналитическая функция $f(z)$ комплексной переменной z, являющаяся аналитическим продолжением $f(x)$ в комплексную область $\mathcal{G}$, содержащую отрезок $[a, b]$ действительной оси. Указанное обстоятельство позволяет называть функцию действительной переменной $f(x)$, представимую

рядом (3.16), аналитической функцией. Напомним *), что функция действительной переменной, представимая на отрезке $[a, b]$ степенным рядом (3.16), имеет на этом отрезке производные всех порядков. Очевидно, аналитическим продолжением производной $f^{(n)}(x)$ в область $\mathcal{G}$ является производная $f^{(n)}(z)$.

2. Продолжение соотношений. Перейдем к рассмотрению дальнейших следствий из теоремы о единственности определения аналитической функции. Эта теорема позволяет не только строить аналитические продолжения элементарных функций действительной переменной, но и *аналитически продолжать в комплексную область соотношения*, имеющие место между соответствующими функциями действительной переменной. В качестве типичных примеров рассмотрим, во-первых, соотношения вида

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \qquad (3.17)$$

$$e^{\ln x}=x \qquad (3.18)$$

и, во-вторых, соотношения вида

$$e^{x_1}\cdot e^{x_2}=e^{x_1+x_2}, \qquad (3.19)$$

$$\cos(x_1+x_2)=\cos x_1\cdot\cos x_2-\sin x_1\cdot\sin x_2. \qquad (3.20)$$

Соотношения (3.17) и (3.18) устанавливают связь между различными функциями одной действительной переменной; в соотношения (3.19) и (3.20) входят функции нескольких переменных. Это одни из основных соотношений для элементарных функций действительных переменных. Естественно поставить вопрос: останутся ли они справедливыми для аналитических продолжений элементарных функций в комплексную область?

Установим, что тождество (3.17) остается справедливым и в комплексной области. Для этого рассмотрим функцию

$$F(z)=\sin^2 z+\cos^2 z-1$$

комплексной переменной z. Согласно общим свойствам аналитических функций (см. гл. 1 стр. 33) $F(z)$ является целой функцией z, причем для действительных значений $z=x$ (в силу (3.17)) $F(x)\equiv 0$. Отсюда по теореме единственности мы и получим, что на всей комплексной плоскости z выполняется соотношение

$$\sin^2 z+\cos^2 z\equiv 1. \qquad (3.21)$$

Подобные же рассмотрения могут быть проведены и для доказательства справедливости в комплексной области выражения (3.18) и других соотношений, связывающих различные аналитические функции одной комплексной переменной. Однако нет нужды каждый раз проводить специальное исследование, а можно сформулировать общую теорему.

*) См. вып. 2, стр. 328.

Пример 2. Функция $w=\operatorname{Ln} z$.

Рассмотрим в замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_0$, представляющий собой плоскость z, разрезанную по отрицательной части действительной оси $-\pi\leqslant\arg z\leqslant\pi$, функцию $\ln z$, о которой шла речь в предыдущем параграфе:

$$w_0=\ln(z)=\ln|z|+i\arg z, \quad -\pi\leqslant\arg z\leqslant\pi. \qquad (3.63)$$

Как мы знаем, эта однозначная аналитическая функция является аналитическим продолжением действительной функции $u=\ln x$ и обратна функции $z=e^w$. Поэтому функция (3.63) отображает область $\mathcal{G}_0$ плоскости z на полосу $-\pi<\operatorname{Im} w<\pi$ плоскости w. Рассмотрим в замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_1$ $(\pi\leqslant\arg z\leqslant 3\pi)$ функцию

$$w_1=\ln_1(z)=\ln|z|+i\arg z, \quad \pi\leqslant\arg z\leqslant 3\pi. \qquad (3.64)$$

Очевидно, функция $w_1(z)$ является аналитическим продолжением $w_0(z)$ в область $\mathcal{G}_1$. Аналогично функция

$$w_{-1}(z)=\ln_{-1}(z)=\ln|z|+i\arg z, \quad -3\pi\leqslant\arg z\leqslant-\pi, \qquad (3.64')$$

определенная в замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_{-1}$ $(-3\pi\leqslant\arg z\leqslant-\pi)$, является аналитическим продолжением функции $w_0(z)$ в области $\mathcal{G}_{-1}$. Также и функция $w_k(z)$:

$$w_k(z)=\ln_k(z)=\ln|z|+i\arg z, \quad \pi(2k-1)\leqslant\arg z\leqslant\pi(2k+1), \qquad (3.65)$$

определенная в замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_k$, $\pi(2k-1)\leqslant\arg z\leqslant\pi(2k+1)$, является аналитическим продолжением функции $w_{k-1}(z)$. Функция $w_k(z)$, однозначно отображающая область $\mathcal{G}_k$ на полосу $\pi(2k-1)<\operatorname{Im} w<\pi(2k+1)$, также является обратной функции $z=e^w$. В отличие от предыдущего случая, ни одна из функций $w_k(z)$ $(k\neq 0)$ не равна тождественно функции $w_0(z)$. Поэтому данный процесс аналитического продолжения следует вести неограниченно как для $k>0$, так и для $k<0$. Тем самым полная аналитическая функция

$$F(z)=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\vdots\\ w_1(z), & z\in\mathcal{G}_1+\Gamma_{0,1}+\Gamma_{1,2},\\ w_0(z), & z\in\mathcal{G}_0+\Gamma_{0,1}+\Gamma_{0,-1},\\ w_{-1}(z), & z\in\mathcal{G}_{-1}+\Gamma_{0,-1}+\Gamma_{-1,-2},\\ \vdots\end{cases} \qquad (3.66)$$

является бесконечнозначной на обычной плоскости z и однозначной на бесконечнолистной римановой поверхности $R=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{\mathcal{G}}_n$, составленной из бесконечного множества листов $\overline{\mathcal{G}}_n$ путем склеивания верх-

него берега разреза каждого $(k+1)$-го листа с нижним берегом разреза предыдущего k-го листа. Как и в предыдущем случае, точки $z=0$ и $z=\infty$ являются точками разветвления функции $\operatorname{Ln} z$.

Отметим еще раз, что функция $w=\operatorname{Ln} z$ является обратной функции $z=e^w$. Это позволяет определить *степенную функцию z^α* для любого комплексного значения α в виде

$$z^\alpha=(e^{\operatorname{Ln} z})^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln} z}. \qquad (3.67)$$

4. Примеры построения аналитического продолжения. Продолжение с помощью степенных рядов. В рассмотренных примерах различные ветви аналитической функции задавались в явном виде на всей комплексной плоскости и построение аналитического продолжения производилось путем соответствующего склеивания областей определения этих ветвей. Рассмотрим теперь еще один метод конкретного построения аналитического продолжения аналитической функции, первоначально заданной в некоторой области $\mathcal{G}_1$ комплексной плоскости z.

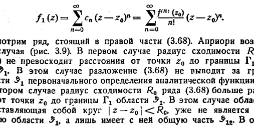


Рис. 3.9.

Пусть функция $f_1(z)$ является аналитической в области $\mathcal{G}_1$. Выберем произвольную точку $z_0\in\mathcal{G}_1$ и разложим $f_1(z)$ в степенной ряд в окрестности этой точки:

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \qquad (3.68)$$

Рассмотрим ряд, стоящий в правой части (3.68). Априори возможны два случая (рис. 3.9). В первом случае радиус сходимости R_0 ряда (3.68) не превосходит расстояния от точки z_0 до границы Γ_1 области $\mathcal{G}_1$. В этом случае разложение (3.68) не выводит за границы области $\mathcal{G}_1$ первоначального определения аналитической функции $f_1(z)$. Во втором случае радиус сходимости R_0 ряда (3.68) больше расстояния от точки z_0 до границы Γ_1 области $\mathcal{G}_1$. В этом случае область $\mathcal{G}_2$, представляющая собой круг $|z-z_0|<R_0$, уже не является подобластью области $\mathcal{G}_1$, а лишь имеет с ней общую часть $\mathcal{G}_{12}$. В области

Доказательство. Для доказательства теоремы фиксируем значения переменных $x_2=x_2^0,\ \ldots,\ x_n=x_n^0$ и рассмотрим функцию комплексной переменной $\Phi_1(z_1)=F[f_1(z_1),\ f_2(x_2^0),\ \ldots,\ f_n(x_n^0)]$. Эта функция, как сложная функция комплексной переменной z_1, в силу утверждения гл. 1, стр. 33, является аналитической функцией комплексной переменной $z_1\in\mathcal{G}_1$. Поэтому по теореме о единственности определения аналитической функции из соотношения $F[f_1(x_1),\ f_2(x_2^0),\ \ldots,\ f_n(x_n^0)]=0$ при $a_1\leqslant x_1\leqslant b_1$ следует $F[f_1(z_1),\ f_2(x_2^0),\ \ldots,\ f_n(x_n^0)]=0$ при $z_1\in\mathcal{G}_1$. Заметим, что отсюда в силу произвольности $x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0$ вытекает, что $F[f_1(z_1),\ f_2(x_2),\ \ldots,\ f_n(x_n)]=0$. Фиксируем теперь произвольное значение комплексной переменной $z_1^0\in\mathcal{G}_1$ и рассмотрим функцию $\Phi_2(z_2)=F[f_1(z_1^0),\ f_2(z_2),\ f_3(x_3^0),\ \ldots,\ f_n(x_n^0)]$ комплексной переменной $z_2\in\mathcal{G}_2$. Так же как и $\Phi_1(z_1)$, функция $\Phi_2(z_2)$ является аналитической функцией переменной $z_2\in\mathcal{G}_2$. Поэтому из соотношения $F[f_1(z_1^0),\ f_2(x_2),\ f_3(x_3^0),\ \ldots,\ f_n(x_n^0)]=0$ при $a_2\leqslant x_2\leqslant b_2$ следует $F[f_1(z_1^0),\ f_2(z_2),\ f_3(x_3^0),\ \ldots,\ f_n(x_n^0)]=0$ при $z_2\in\mathcal{G}_2$. В силу произвольности выбора z_1^0 мы получим, что соотношение $F[f_1(x_1),\ f_2(x_2),\ f_3(x_3^0),\ \ldots,\ f_n(x_n^0)]=0$ при $a_1\leqslant x_1\leqslant b_1$, $a_2\leqslant x_2\leqslant b_2$ влечет за собой соотношение $F[f_1(z_1),\ f_2(z_2),\ f_3(x_3^0),\ \ldots,\ f_n(x_n^0)]=0$ при $z_1\in\mathcal{G}_1$, $z_2\in\mathcal{G}_2$.

Продолжая аналогичным образом, мы и докажем теорему. Заметим, что доказательство теоремы не зависит от взаимного расположения областей $\mathcal{G}_i$.

Теорема 3.2 позволяет строить аналитические продолжения соотношений вида (3.19) и (3.20). Рассмотрим, например, соотношение (3.19) и введем функции w_1, w_2, w_3 комплексных переменных z_1, z_2 и $z_3=z_1+z_2$:

$$w_1=e^{z_1},\qquad w_2=e^{z_2},\qquad w_3=e^{z_3}=e^{z_1+z_2}. \qquad (3.26)$$

Рассмотрим функцию трех комплексных переменных

$$F[w_1,\ w_2,\ w_3]=w_3-w_1\cdot w_2. \qquad (3.27)$$

Поскольку функции (3.26), (3.27) являются целыми функциями своих переменных, а $F=0$ при $z_1=x_1$, $z_2=x_2$, $z_3=x_3$ $(-\infty<x_i<\infty)$, то выполнены все условия теоремы 3.2, что и доказывает справедливость соотношения (3.19) при любых значениях комплексных переменных z_1 и z_2.

3. Свойства элементарных функций. Перейдем теперь к более детальному изучению основных свойств введенных выше элементарных функций комплексной переменной. В силу теорем 3.1 и 3.2 при всех значениях комплексной переменной z имеют место соотношения

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1, \qquad (3.28)$$

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1. \qquad (3.29)$$

и другие известные тождества для различных тригонометрических и

гиперболических функций одной комплексной переменной. Также имеют место соотношения

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}, \qquad (3.30)$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \qquad (3.31)$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2 \qquad (3.32)$$

и другие тригонометрические формулы, являющиеся аналитическим продолжением в комплексную область известных соотношений для элементарных функций действительной переменной.

Установим связь между показательной и тригонометрическими функциями комплексной переменной. Для этого вернемся к выражению (3.7) для функции e^z и сделаем в нем замену переменной, положив $z=i\zeta$. Тогда

$$e^{i\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{\zeta^n}{n!}.$$

Разбив последний абсолютно сходящийся ряд на сумму двух рядов получим

$$e^{i\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

т. е.

$$e^{i\zeta}=\cos\zeta+i\sin\zeta. \qquad (3.33)$$

Очевидно, это тождество имеет место для всех значений комплексной переменной ζ.

Соотношение (3.33), устанавливающее связь между показательной и тригонометрическими функциями комплексной переменной, носит название *формулы Эйлера*. Из него следуют весьма важные для приложений формулы *)

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \qquad (3.34)$$

и

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}). \qquad (3.35)$$

С помощью этих формул и формул (3.10), (3.11) легко установить следующие соотношения, связывающие тригонометрические и гиперболические функции комплексной переменной:

$$\sin z=-i\operatorname{sh} iz,\qquad \cos z=\operatorname{ch} iz. \qquad (3.36)$$

*) Напомним, что в гл. 1 мы с помощью этих формул определили функции $\cos z$ и $\sin z$, а также формально ввели соотношение Эйлера.

сходится к функции $f(z)$. На значение числа $\rho(z_0)$ накладывается единственное ограничение: $\rho(z_0)$ строго больше нуля. Точки $z\in\overline{\mathcal{G}}$, не являющиеся правильными точками функции $f(z)$, называются ее *особыми точками*. Ясно, что если $f(z)$ — аналитическая в области $\mathcal{G}$, то все внутренние точки этой области суть правильные точки функции $f(z)$. Точки границы Γ могут быть как правильными, так и особыми точками аналитической функции $f(z)$. Очевидно, что все точки границы Γ, лежащие внутри круга $|z-z_0|<\rho(z_0)$ с центром в некоторой правильной точке $z_0\in\overline{\mathcal{G}}$, также являются правильными точками функции $f(z)$. Так, в рассмотренном выше примере все точки границы $|z|=1$ области первоначального определения функции $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, за исключением точки $z=1$, являются правильными точками. Единственной особой точкой этой функции может быть лишь точка $z=1$. Она же является и особой точкой функции $F(z)=\frac{1}{1-z}$, аналитического продолжения функции $f_1(z)$ на расширенную область. Аналогично точки $z=0$, ∞ являются особыми точками функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$, рассмотренных в пункте 3.

Пусть аналитическая функция $f_1(z)$ первоначально задана в области $\mathcal{G}_1$, и пусть все точки связного участка Γ' границы Γ этой области являются правильными точками функции $f_1(z)$. Тогда из проведенных выше рассмотрений следует, что функция $f_1(z)$ может быть аналитически продолжена через Γ' на бо́льшую область. Может оказаться, что все точки границы Γ области $\mathcal{G}_1$ первоначального задания аналитической функции $f(z)$ являются правильными. В этом случае функцию $f(z)$ будем называть *аналитической в замкнутой области* $\overline{\mathcal{G}}_1$. Из предыдущих рассмотрений следует, что *функцию, аналитическую в замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_1$, можно аналитически продолжить на бо́льшую область $\mathcal{G}$, содержащую область $\overline{\mathcal{G}}_1$*.

Аналитическое продолжение через участок границы, содержащий лишь особые точки функции $f_1(z)$, очевидно, невозможно.

Приведем пример аналитической функции, заданной в ограниченной области, которую невозможно продолжить на бо́льшую область.

Пример 4. Рассмотрим аналитическую функцию $f(z)$, заданную степенным рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}. \qquad (3.71)$$

Как легко определить с помощью простейших признаков, ряд (3.71) сходится внутри круга $|z|<1$. При действительном $x\to 1$ сумма $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2^n}$ неограниченно возрастает, тем самым точка $z=1$ является

особой точкой $f(z)$. Покажем, что и точки $z_{k,m}=e^{i\frac{2\pi}{2^k}m}$, где $m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2^k$, а k — любое натуральное число, являются особыми точками функции $f(z)$. Для этого рассмотрим точку $\tilde{z}_{k,m}=\rho\cdot e^{i\frac{2\pi}{2^k}m}$ $(0<\rho<1)$ и представим значение функции $f(z)$ в этой точке в виде

$$f(\tilde{z}_{k,m})=\sum_{n=0}^{k-1}\tilde{z}_{k,m}^{2^n}+\sum_{n=k}^{\infty}\tilde{z}_{k,m}^{2^n}. \qquad (3.72)$$

Первое слагаемое в (3.72), являющееся суммой конечного числа слагаемых, по абсолютной величине ограничено, а второе, в силу выбора точки $\tilde{z}_{k,m}$, может быть преобразовано к виду

$$\sum_{n=k}^{\infty}\tilde{z}_{k,m}^{2^n}=\sum_{n=k}^{\infty}\rho^{2^n}. \qquad (3.73)$$

При $\rho\to 1$ сумма выражения, стоящего справа в (3.73), неограниченно возрастает. Это и доказывает, что точки $z_{k,m}$ являются особыми точками функции $f(z)$. Но при $k\to\infty$ эти точки всюду плотно *) расположены на окружности $|z|=1$. Отсюда следует, что функция (3.71) действительно непродолжима ни через какую дугу этой окружности.

Строя аналитическое продолжение функции $F(z)=\frac{1}{1-z}$ с помощью степенных рядов, мы видели, что граница круга сходимости каждого ее элемента $f_k(z)$ проходит через точку $z=1$, особую точку этой функции. Тем самым на границе круга сходимости любого из построенных степенных рядов лежит особая точка аналитической функции, к которой этот ряд сходится. Это свойство является общим следствием следующей теоремы.

X *Теорема 3.3. На границе круга сходимости степенного ряда лежит хотя бы одна особая точка аналитической функции $F(z)$, к которой сходится данный ряд.*

Доказательство. Предположим, что все точки окружности C_0 круга K_0 сходимости ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ являются правильными, т. е. для любой точки $\hat{z}\in C_0$ существует такое $\rho(\hat{z})>0$, что в общей части круга K_0 и своего круга сходимости $|z-\hat{z}|<\rho(\hat{z})$ соответствующий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\hat{z})(z-\hat{z})^n$ сходится к $f(z)$. Пусть радиус круга K_0 есть R_0.

*) То есть в любой ε-окрестности каждой точки окружности $|z|=1$ найдутся точки последовательности $\{z_{k,m}\}$.

$z=1$ или $z=-1$ функция $\sqrt{1-z^2}$ изменяет свое значение *). Поэтому в качестве области однозначного определения функции (3.47) может быть выбрана, например, полная плоскость z с разрезами вдоль отрезков действительной оси $[-\infty, -1]$, $[1, \infty]$.

4. Отображения элементарных функций. В заключение данного параграфа, посвященного элементарным функциям комплексной переменной, рассмотрим некоторые геометрические свойства отображений, осуществляемых этими функциями. Начнем с простейших примеров.

Пример 1. В гл. 1 была рассмотрена простейшая степенная функция $w=z^2$. Рассмотрим теперь отображение, осуществляемое функцией

$$w=z^n, \qquad (3.48)$$

где n — произвольное целое число. Эта функция, очевидно, является целой функцией. Для изучения геометрических свойств ее отображения удобно воспользоваться показательной формой записи комплексных чисел: $z=\rho e^{i\varphi}$, $w=re^{i\psi}=\rho^n e^{in\varphi}$, из которой следует, что любой сектор **) с центральным углом $\alpha=\frac{2\pi}{n}$ плоскости z данной функцией отображается на полную плоскость w. Различные внутренние точки этого сектора отображаются на различные точки плоскости w. При этом границы сектора переходят в один и тот же луч $\psi=\psi_0$ на плоскости w. Для установления взаимно однозначного соответствия между областью однолистности функции z^n и плоскостью w будем считать, что на плоскости w произведен разрез по лучу $\psi=\psi_0$ и границам данного сектора плоскости z сопоставлены различные берега разреза. Например, сектор $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{n}$ плоскости z функцией (3.48) отображается на полную плоскость w, причем обе границы этого сектора, лучи I и II на рис. 3.1, переходят в положительную часть действительной оси u плоскости w. Сектор $\frac{2\pi}{n}\leqslant\varphi\leqslant\frac{4\pi}{n}$ также отображается на полную плоскость w и т. д. Поэтому геометрический образ функции $w=z^n$ представляет собой плоскость w, повторенную n раз. Тем самым отображение полной плоскости z на полную плоскость w, осуществляемое данной функцией, не является взаимно однозначным. Однако, если в качестве геометрического образа функции w рассматривать более сложное многообразие, чем обычная комплексная плоскость, можно сохранить взаимную однозначность отображения. Будем считать, что мы имеем n экземпляров (листов) плоскости w, разрезанной по положительной части действительной оси, на каждом из которых $\arg w$ изменяется в пределах $2\pi(k-1)\leqslant\arg w\leqslant$ $\leqslant 2\pi k$, где $k=1, 2, \ldots, n$. Сектору $\frac{2\pi}{n}(k-1)\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{n}k$ плоскости z

*) См. стр. 29—30.

**) Здесь под сектором мы понимаем замкнутую область.

ункция (3.48) ставит в соответствие k-й лист плоскости w; луч $=\frac{2\pi}{n}(k-1)$ переходит в верхний берег разреза k-го листа, а луч $=\frac{2\pi k}{n}$ — в нижний берег разреза этого же листа. Построим из этих истов непрерывное геометрическое многообразие так, чтобы непрерывному движению точки на плоскости z соответствовало непрерывное движение точки w на данном многообразии. Для этого заметим, что нижний рег разреза k-го листа и верхний берег разреза $(k+1)$-го листа меют один и тот же аргумент $\psi_k=2\pi\cdot k$. Когда точка z в своем

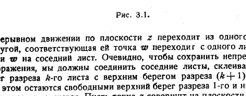


Рис. 3.1.

епрерывном движении по плоскости z переходит из одного сектора другой, соответствующая ей точка w переходит с одного листа плоскости w на соседний лист. Очевидно, чтобы сохранить непрерывность тображения, мы должны соединить соседние листы, склеивая нижний ерег разреза k-го листа с верхним берегом разреза $(k+1)$-го листа. При этом остаются свободными верхний берег разреза 1-го и нижний берег разреза n-го листов. Пусть точка z совершит на плоскости z полный оборот вокруг точки $z=0$, последовательно пройдя через все n секторов той плоскости, начиная с первого сектора, и вернется к своему первоначальному положению. Тогда соответствующая ей точка w пройдет листов, и, чтобы она вернулась на первый лист, надо склеить остававшиеся свободными берега разрезов на 1-м и n-м листах. Тем самым полной плоскости z функция $w=z^n$ ставит в соответствие n листов плоскости w, склеенных указанным выше образом. Такое геометрическое многообразие представляет собой частный случай так называемой *римановой поверхности*. Функция $w=z^n$ является n-листной функцией.

Пример 2. Рассмотрим отображение, осуществляемое функцией $w=e^z$. Из представления (3.38) следует, что эта функция каждому комплексному числу $z=x+iy$ ставит в соответствие комплексное число w, модуль которого есть e^x, а аргумент y. Это означает, что показательная функция $w=e^z$ производит отображение прямой $y=y_0$ плоскости z на луч $\arg w=y_0$ плоскости w. Как легко видеть, Рассмотрим функцию $\rho(\hat{z})$, определенную на окружности C_0. Покажем, что для любых двух точек $\hat{z}_1$ и $\hat{z}_2$ на окружности C_0 выполнено условие

$$|\rho(\hat{z}_1)-\rho(\hat{z}_2)|\leqslant|\hat{z}_1-\hat{z}_2|. \qquad (3.74)$$

Действительно, предположим, что это условие не выполнено, например, $\rho(\hat{z}_2)-\rho(\hat{z}_1)=|\hat{z}_1-\hat{z}_2|+\delta$, где $\delta>0$. Тогда круг $|z-\hat{z}_1|<\rho(\hat{z}_1)$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(\hat{z}_1)(z-\hat{z}_1)^n=f_1(z)$ лежит внутри круга $|z-\hat{z}_2|<\rho(\hat{z}_2)$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(\hat{z}_2)(z-\hat{z}_2)^n=f_2(z)$ (рис. 3.11). В общей части этих кругов и круга K_0 оба ряда сходятся к одной и той же функции $f(z)$. Следовательно, функция $f_2(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_1(z)$. Это означает, что в круге $|z-\hat{z}_1|<\rho(z_1)+\delta$ определена аналитическая функция $f_2(z)$, совпадающая с $f_1(z)$ в круге $|z-\hat{z}_1|<\rho(\hat{z}_1)$. В силу теоремы Тейлора отсюда следует, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(\hat{z}_1)(z-\hat{z}_1)^n$ не меньше чем $\rho(\hat{z}_1)+\delta$, что противоречит исходным данным. Итак, условие (3.74) установлено.

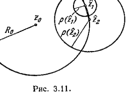


Рис. 3.11.

Из этого условия следует равномерная непрерывность функции $\rho(\hat{z})$ на кривой C_0. Действительно, соотношение $|\rho(\hat{z}_1)-\rho(\hat{z}_2)|<\varepsilon$ выполняется для любого наперед заданного $\varepsilon>0$, если только выполнено условие $|\hat{z}_1-\hat{z}_2|<\varepsilon$. Так как функция $\rho(\hat{z})>0$, то она ограничена снизу и в силу непрерывности достигает на C_0 своей точной нижней грани *) $\rho(\hat{z})\geqslant\rho(\hat{z}_0)=\rho_0>0$. Последнее неравенство имеет место, потому что для всех $\hat{z}\in C_0$ выполняется строгое неравенство $\rho(\hat{z})>0$.

В силу единственности аналитического продолжения можно утверждать, что в круге $|z-z_0|<R_0+\rho_0$ определена однозначная аналитическая функция $F(z)$, совпадающая с функцией $f(z)$ в круге $|z-z_0|<R_0$. Следовательно, радиус сходимости исходного степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ должен быть $R_0+\rho_0$, а не R_0. Но это про-

*) См. вып. 1, стр. 250.

тиворечит условию теоремы. Итак, предположение, что все точки границы круга сходимости правильные, приводит к противоречию. Теорема доказана.

Из теоремы 3 3 следует, что *радиус круга сходимости степенного ряда определяется расстоянием от центра сходимости до ближайшей особой точки* той аналитической функции, к которой сходится данный ряд.

6. Понятие полной аналитической функции. Предыдущие рассмотрения позволили построить аналитическое продолжение функции $f_1(z)$, заданной в области $\mathcal{G}_1$, на бо́льшую область $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2$ или соответствующую риманову поверхность. Как мы видели, можно рассматривать аналитическое продолжение вдоль цепочки областей $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, ..., $\mathcal{G}_n$, имеющих общие части $\mathcal{G}'_{i,\,i+1}$, в которых совпадают аналитические функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, заданные в областях $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, ..., $\mathcal{G}_n$. При этом мы получим в области $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2+\ldots+\mathcal{G}_n$ или на соответствующей римановой поверхности R однозначную аналитическую функцию $F(z)$, являющуюся аналитическим продолжением функции $f_1(z)$.

Если аналитическая функция $f_1(z)$ первоначально задана в области $\mathcal{G}_1$, то, строя различные цепочки областей, выходящие из области $\mathcal{G}_1$, мы можем получить аналитическое продолжение функции $f_1(z)$ на различные области, содержащие область $\mathcal{G}_1$. При этом существенным является понятие полной аналитической функции.

Функция $F(z)$, полученная путем аналитического продолжения вдоль всевозможных цепочек областей, выходящих из области $\mathcal{G}_1$ первоначального задания аналитической функции $f_1(z)$, называется полной аналитической функцией. Ее область определения R называется естественной областью существования полной аналитической функции.

Согласно только что проведенным рассмотрениям естественная область существования R полной аналитической функции $F(z)$ может быть римановой поверхностью. Отметим, что аналитическое продолжение функции $F(z)$ за границу Γ ее естественной области существования R уже невозможно. При этом все точки этой границы являются особыми точками функции $F(z)$. Это легко доказать. Предположим, что точка $z_0\in\Gamma$ является правильной точкой функции $F(z)$. В таком случае, по определению правильной точки, внутри круга $|z-z_0|<\rho(z_0)$ существует некоторая аналитическая функция $\Phi(z)$, совпадающая с $F(z)$ в общей части данного круга и области $\mathcal{G}$. Но круг $|z-z_0|<\rho(z_0)$ заведомо выходит из области $\mathcal{G}$, поэтому $\Phi(z)$ является аналитическим продолжением полной аналитической функции через границу ее естественной области существования, что невозможно.

В рассмотренных в предыдущих пунктах примерах мы построили ряд полных аналитических функций и их естественные области существования. Так, естественными областями существования полных

в ее изолированной особой точке может быть применена формула (5.3):

$$\text{Выч}\,[f(z),\ z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}f(\zeta)\,d\zeta=c_{-1}. \qquad (5.4)$$

Однако в ряде случаев может быть указан более простой способ вычисления вычета, сводящийся к дифференцированию функции $f(z)$ в окрестности точки z_0. Тем самым вычисление контурного интеграла от аналитической функции может быть заменено вычислением производных от этой функции в некоторых точках, лежащих внутри контура интегрирования. Это обстоятельство определяет одно из основных приложений теории вычетов. Перейдем к рассмотрению указанных случаев.

1° Пусть точка z_0 является полюсом первого порядка функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки имеет место разложение

$$f(z)=c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots \qquad (5.5)$$

Умножив обе части (5.5) на $(z-z_0)$ и перейдя к пределу при $z\to z_0$, получим

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \qquad (5.6)$$

Заметим, что в данном случае функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде отношения двух аналитических функций:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad (5.7)$$

причем $\varphi(z_0)\neq0$, а точка z_0 является нулем первого порядка функции $\psi(z)$, т. е.

$$\psi(z)=(z-z_0)\psi'(z_0)+\frac{\psi''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\ldots,\quad \psi'(z_0)\neq0. \qquad (5.8)$$

Тогда из (5.6)—(5.8) получим следующую формулу.

Формула вычисления вычета в полюсе первого порядка:

$$\text{Выч}\,[f(z),\ z_0]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\qquad\left(f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right). \qquad (5.9)$$

Пример 1. Пусть $f(z)=\frac{z}{z^n-1}$. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_k=\sqrt[n]{1}=e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$, причем все эти точки представляют собой полюсы первого порядка. Найдем Выч $[f(z),\ z_k]$. Согласно формуле (5.9) получим

$$\text{Выч}\,[f(z),\ z_k]=\frac{z_k}{nz_k^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot z_k^2=\frac{1}{n}e^{i\frac{4\pi k}{n}}\quad(z_k^n=1). \qquad (5.10)$$

2° Пусть точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$. Согласно предыдущему в окрестности этой точки имеет место разложение

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots \qquad (5.11)$$

Умножив обе части (5.11) на $(z-z_0)^m$, получим

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\ldots \qquad (5.12)$$

Взяв производную порядка $(m-1)$ от обеих частей этого равенства и перейдя к пределу при $z\to z_0$, окончательно получим следующую формулу.

Формула вычисления вычета в полюсе порядка m:

$$\text{Выч}\,[f(z),\ z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]. \qquad (5.13)$$

Как легко видеть, формула (5.6) является частным случаем последней формулы.

Пример 2. Пусть $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^n}$. Особыми точками этой функции являются точки $z_{1,2}=\pm i$, причем обе эти точки представляют собой полюсы порядка n. Вычислим Выч $[f(z),\ i]$. Согласно (5.13) получим

$$\begin{aligned}\text{Выч}\left[\frac{1}{(1+z^2)^n},\ i\right]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-i)^n\frac{1}{(1+z^2)^n}\right]=\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{1}{(z+i)^n}\right]=\\&=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{(z+i)^{2n-1}}\bigg|_{z=i}=\\&=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\cdot\frac{1}{(2i)^{2n-1}}=-i\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}.\end{aligned} \qquad (5.14)$$

2. Основная теорема теории вычетов. Перейдем теперь к рассмотрению важнейших применений введенных понятий. Для многих теоретических рассмотрений и практических применений весьма существенной является следующая

Теорема 5.1 (основная теорема теории вычетов). *Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\bar{\mathcal{G}}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=1,\ \ldots,\ N)$, лежащих внутри области $\mathcal{G}$.*

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma^+}f(\zeta)\,d\zeta=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\,[f(z),\ z_k], \qquad (5.15)$$

где Γ^+ представляет собой полную границу области $\mathcal{G}$, проходимую в положительном направлении.

может, в частности, равняться нулю или бесконечности). Внутри круга сходимости этот ряд сходится к некоторой аналитической функции комплексной переменной

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\qquad|z-z_0|<R_1. \qquad (4.3)$$

Для определения области сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ сделаем замену переменной, положив $\zeta=\frac{1}{z-z_0}$. Тогда этот ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n$. То есть он представляет собой обычный степенной ряд, сходящийся внутри своего круга сходимости к некоторой аналитической функции $\varphi(\zeta)$ комплексной переменной ζ. Обозначим радиус сходимости полученного степенного ряда через $\frac{1}{R_2}$. Тогда

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n,\qquad|\zeta|<\frac{1}{R_2}. \qquad (4.4)$$

Возвращаясь к старой переменной и полагая $\varphi(\zeta(z))=f_2(z)$, получим

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},\qquad|z-z_0|>R_2. \qquad (4.5)$$

Отсюда следует, что областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ по отрицательным степеням разности $(z-z_0)$ является область, внешняя к окружности $|z-z_0|=R_2$ (так же как и R_1, значение R_2 может, в частности, равняться нулю или бесконечности).

Итак, каждый из степенных рядов правой части (4.2) сходится в своей области сходимости к соответствующей аналитической функции. Если $R_2<R_1$, то существует общая область сходимости этих рядов — *круговое кольцо* $R_2<|z-z_0|<R_1$, в котором ряд (4.1) сходится к аналитической функции

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\qquad R_2<|z-z_0|<R_1. \qquad (4.6)$$

Так как ряды (4.3) и (4.4) являются обычными степенными рядами, то в указанной области функция $f(z)$ обладает всеми свойствами суммы степенного ряда. Это означает, что *ряд Лорана* (4.1) *сходится внутри своего кольца сходимости к некоторой функции $f(z)$, аналитической в данном кольце.*

Если $R_2>R_1$, то ряды (4.3) и (4.5) общей области сходимости не имеют. Тем самым в этом случае ряд (4.1) нигде не сходится к какой-либо функции.

2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Теперь естественно поставить вопрос: можно ли функции, аналитической в некотором круговом кольце, сопоставить ряд Лорана, сходящийся к этой функции в данном кольце? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.*

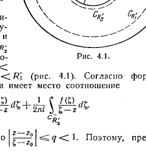


Рис. 4.1.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку z внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$ и построим окружности $C_{R'_1}$ и $C_{R'_2}$ с центрами в z_0, радиусы которых удовлетворяют условиям $R_2<R'_2<R'_1<R_1$, $R'_2<|z-z_0|<R'_1$ (рис. 4.1). Согласно формуле Коши для многосвязной области имеет место соотношение

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R'_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-_{R'_2}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \qquad (4.7)$$

На $C_{R'_1}$ выполняется неравенство $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|\leqslant q<1$. Поэтому, представив дробь $\frac{1}{\zeta-z}$ в виде

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

и проведя почленное интегрирование, что возможно в силу равномерной сходимости ряда по переменной ζ (подробнее см. гл. 2), получим

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R'_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (4.8)$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R'_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta,\quad n\geqslant0. \qquad (4.9)$$

Построим вне Γ функцию $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$, где z_0 — произвольная точка комплексной плоскости. Очевидно, что точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой и функции $\varphi(z)$, причем Выч $[\varphi(z),\ \infty]=-f(\infty)$.

Если точка z_0 лежит внутри Γ, то функция $\varphi(z)$ других особых точек не имеет. Если точка z_0 — вне Γ, то $z=z_0$ является полюсом не выше первого порядка функции $\varphi(z)$, причем Выч $[\varphi(z),\ z_0]=f(z_0)$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma^+}\varphi(\zeta)\,d\zeta=\int\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$, в котором контур Γ обходится таким образом, что область $\mathcal{G}$ остается слева. В силу формулы (5.19) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=\begin{cases}f(\infty), & z_0 \text{ — внутри } \Gamma,\\ f(\infty)-f(z_0), & z_0 \text{ — вне } \Gamma.\end{cases} \qquad (5.20)$$

Формула (5.20) и является обобщением интегральной формулы Коши на случай функции $f(z)$, аналитической в неограниченной области.

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Доказанные в предыдущем параграфе теоремы находят многочисленные применения не только при вычислении интегралов от функций комплексной переменной, но и при вычислении различных определенных интегралов от функций действительной переменной, причем часто удается достаточно просто получить ответ и в тех случаях, когда применение других методов анализа оказывается затруднительным. Рассмотрим ряд типичных случаев.

1. Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi}R(\cos\theta,\ \sin\theta)\,d\theta$. Рассмотрим интеграл

$$I=\int\limits_0^{2\pi}R(\cos\theta,\ \sin\theta)\,d\theta, \qquad (5.21)$$

где R — рациональная функция своих аргументов. Интегралы типа (5.21) легко могут быть сведены к интегралам от аналитической функции комплексной переменной по замкнутому контуру. Для этого сделаем замену переменной интегрирования, введя комплексную переменную z, связанную с переменной θ соотношением $z=e^{i\theta}$. Очевидно,

$$d\theta=\frac{1}{i}\frac{dz}{z},\quad\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

При изменении θ от 0 до 2π комплексная переменная z пробегает замкнутый контур — окружность $|z|=1$ в положительном направлении. Таким образом, интеграл (5.21) переходит в интеграл по замкну-

ому контуру от функции комплексной переменной:

$$I=\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}R\left[z+\frac{1}{z},\ z-\frac{1}{z}\right]\frac{dz}{z}. \qquad (5.22)$$

В силу общих свойств аналитических функций подынтегральная функция в (5.22), являющаяся, очевидно, рациональной функцией

$$\tilde{R}(z)=\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\ldots+b_mz^m}, \qquad (5.23)$$

представляет собой функцию, аналитическую внутри круга $|z|=1$ всюду, за исключением конечного $N\leqslant m$ числа особых точек z_k, являющихся нулями знаменателя в (5.23). Поэтому в силу теоремы 5.1

$$I=2\pi\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\,[\tilde{R}(z),\ z_k]. \qquad (5.24)$$

Точки z_k являются полюсами функции $\tilde{R}(z)$. Пусть α_k — порядок полюса z_k $\left(\text{очевидно, }\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k\leqslant m\right)$. Тогда на основании формулы (5.13) можно переписать (5.24) в виде

$$I=2\pi\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(\alpha_k-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{\alpha_k-1}}{dz^{\alpha_k-1}}[(z-z_k)^{\alpha_k}\tilde{R}(z)]. \qquad (5.25)$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta},\qquad|a|<1. \qquad (5.26)$$

Положив $z=e^{i\theta}$, получим

$$I=\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{1+\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a}. \qquad (5.27)$$

Особыми точками подынтегральной функции являются нули знаменателя $z_{1,2}=-\frac{1}{a}\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$. Это полюсы первого порядка. Так как $z_1\cdot z_2=1$, то лишь одна из этих точек лежит внутри круга $|z|=1$. Как легко видеть, это — точка $z_1=-\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$. Поэтому в силу теоремы 5.1

$$I=4\pi\,\text{Выч}\left[\frac{1}{az^2+2z+a},\ z_1\right]=4\pi\frac{1}{a(z-z_2)}\bigg|_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \qquad (5.28)$$

5 Зак. 2862

3° Содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$.

В зависимости от указанных возможностей и производится классификация изолированных особых точек. Перейдем к последовательному рассмотрению каждого из указанных выше случаев.

1° Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки z_0 не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, т. е. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. Как легко видеть, при $z\to z_0$ существует предельное значение функции $f(z)$, причем это предельное значение равно c_0. Если функция $f(z)$ не была определена в точке z_0, то доопределим ее, положив $f(z_0)=c_0$. Если первоначально заданное значение $f(z_0)$ не совпадает с c_0, то изменим значение функции $f(z)$ в точке z_0, положив $f(z_0)=c_0$. Так определенная функция $f(z)$ будет аналитической всюду внутри круга $|z-z_0|<R_1$. Тем самым мы устранили разрыв функции $f(z)$ в точке z_0. Поэтому изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$, для которой разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, называется *устранимой особой точкой.*

Проведенные рассмотрения доказывают следующую теорему.

Теорема 4.2. *Если точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, то существует предельное значение $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, причем $|c_0|<\infty$.*

Заметим, что в окрестности устранимой особой точки функция $f(z)$ ограничена и может быть представлена в виде

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z), \qquad (4.17)$$

где $m\geqslant0$ — целое число, а $\varphi(z_0)\neq0$. При этом, если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=0$, то в представлении (4.17) число $m>0$ определяет порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0.

Имеет место и обратная теорема, которую мы докажем в усиленной формулировке.

Теорема 4.3. *Если функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|<R_1$, ограничена ($|f(z)|<M$ при $0<|z-z_0|<R_1$), то точка z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$.*

Доказательство. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана (4.14) и рассмотрим выражение (4.13) для коэффициентов этого ряда:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta.$$

В качестве контура интегрирования выберем круг с центром в точке z_0

радиуса ρ. Тогда в силу условия теоремы имеет место мажорантная оценка

$$|c_n|<M\rho^{-n}. \qquad (4.18)$$

Будем рассматривать коэффициенты с отрицательным индексом $n<0$. Так как значение коэффициентов c_n не зависит от ρ, то из (4.18) получим $c_n=0$ при $n<0$, что и доказывает теорему.

2° Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки z_0 содержит конечное число m членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, т. е. $f(z)=\sum\limits_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. В этом случае точка z_0 называется *полюсом порядка m функции $f(z)$*. Поведение аналитической функции в окрестности ее полюса определяется следующей теоремой.

Теорема 4.4. *Если точка z_0 является полюсом аналитической функции $f(z)$, то при $z\to z_0$ модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает независимо от способа стремления точки z к z_0.*

Доказательство. Представим функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 в виде

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\\&=(z-z_0)^{-m}\{c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}\}+\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.\end{aligned} \qquad (4.19)$$

Функция $\varphi(z)$, очевидно, является ограниченной аналитической функцией в окрестности точки z_0. Из представления (4.19) следует, что при $z\to z_0$ модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает независимо от способа стремления точки z к точке z_0, что и доказывает теорему. Заметим, что, если доопределить функцию $\varphi(z)$ в точке z_0, положив $\varphi(z_0)=c_{-m}\neq0$, формула (4.19) может быть переписана в виде

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \qquad (4.20)$$

где $\psi(z)$ — аналитическая функция и $\psi(z_0)\neq0$; число m называется порядком полюса.

Имеет место и теорема, обратная теореме 4.4.

Теорема 4.5. *Если функция $f(z)$, аналитическая в окрестности своей излированной особой точки z_0, неограниченно возрастает по модулю независимо от способа стремления точки z к точке z_0, то точка z_0 является полюсом функции $f(z)$.*

Доказательство. По условию теоремы для любого числа $A>0$ можно указать такую ε-окрестность точки z_0, в которой

виям теоремы 5.3. Ее особыми точками в верхней полуплоскости являются точки $z_{0,1}=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}$ $(k=0,\ 1)$, причем обе эти точки — полюсы первого порядка. Поэтому

$$\begin{aligned}I&=2\pi i\left\{\text{Выч}\left[\frac{1}{1+z^4},\ e^{i\frac{\pi}{4}}\right]+\text{Выч}\left[\frac{1}{1+z^4},\ e^{i\frac{3\pi}{4}}\right]\right\}=\\&=2\pi i\left\{\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}+\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right\}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.\end{aligned} \qquad (5.34)$$

Замечание 1. Если функция $f(x)$ является четной функцией и удовлетворяет условиям теоремы 5.3, то

$$\int\limits_0^{\infty}f(x)\,dx=\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\,[f(z),\ z_k]. \qquad (5.35)$$

Действительно, если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int\limits_0^{\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx,$$

откуда и следует формула (5.35).

Замечание 2. Очевидно, имеет место аналогичная теорема и в том случае, когда аналитическое продолжение функции $f(x)$ в нижнюю полуплоскость удовлетворяет условиям леммы, аналогичной лемме 1.

3. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}f(x)\,dx$. Лемма Жордана. Вычисление следующего важного класса несобственных интегралов с помощью теории вычетов основано на применении так называемой леммы Жордана, к доказательству которой мы сейчас перейдем.

Лемма 2 (лемма Жордана). *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно $\arg z$ $(0\leqslant\arg z\leqslant\pi)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $a>0$*

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C'_R}e^{ia\zeta}f(\zeta)\,d\zeta=0, \qquad (5.36)$$

где C'_R — дуга полуокружности $|z|=R$ в верхней полуплоскости z.

Доказательство. Условие равномерного стремления $f(z)$ к нулю означает, что при $|z|=R$ имеет место оценка

$$|f(z)|<\mu_R,\quad|z|=R, \qquad (5.37)$$

где $\mu_R\to0$ при $R\to\infty$. С помощью соотношения (5.37) оценим исследуемый интеграл. Сделаем замену переменной, положив $\zeta=Re^{i\varphi}$,

воспользуемся очевидным соотношением

$$\sin\varphi\geqslant\frac{2}{\pi}\varphi\quad\text{при}\quad0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}. \qquad (5.38)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{C'_R}e^{ia\zeta}f(\zeta)\,d\zeta\right|&\leqslant\mu_R\cdot R\int\limits_0^{\pi}|e^{ia\zeta}|\,d\varphi=\\&=\mu_R\cdot R\int\limits_0^{\pi}e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi=2\mu_R\cdot R\int\limits_0^{\pi/2}e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi<\\&<2\mu_R\cdot R\int\limits_0^{\pi/2}e^{-\frac{2aR}{\pi}\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{a}\mu_R(1-e^{-aR})\xrightarrow[R\to\infty]{}0,\end{aligned} \qquad (5.39)$$

что и доказывает лемму.

Замечание 1. Если $a<0$, а функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}z\leqslant0$, то формула (5.36) имеет место при интегрировании по дуге полуокружности C'_R в нижней полуплоскости z. Аналогичные утверждения имеют место и при $a=\pm i\alpha$ $(\alpha>0)$ при интегрировании соответственно в правой ($\operatorname{Re}z\geqslant0$, рис. 5.3) или левой ($\operatorname{Re}z\leqslant0$) полуплоскости z. Доказательства этих утверждений проводятся совершенно аналогично предыдущему, и мы предоставляем их читателю. Выпишем только важную для дальнейших приложений форму леммы Жордана, относящуюся к интегрированию в правой полуплоскости:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C'_R}e^{-\alpha\zeta}f(\zeta)\,d\zeta=0,\qquad\alpha>0, \qquad (5.40)$$

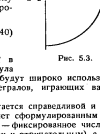


Рис. 5.3.

где C'_R — дуга полуокружности $|z|=R$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re}z\geqslant0$. Формула (5.40) и ряд последующих, в частности, будут широко использованы в гл. 8 при вычислении различных интегралов, играющих важную роль в операционном исчислении.

Замечание 2. Лемма Жордана остается справедливой и в том случае, когда функция $f(z)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям в полуплоскости $\operatorname{Im}z\geqslant y_0$ (y_0 — фиксированное число, которое может быть как положительным, так и отрицательным), а интегрирование производится по дуге полуокружности $|z-iy_0|=R$ в полуплоскости $\operatorname{Im}z\geqslant y_0$. Доказательство проводится аналогично предыдущему, причем при оценке интеграла следует сделать замену переменной интегрирования $\zeta=\text{Re}^{i\varphi}+iy_0$.

число отрицательных степеней. И наконец, если функция при стремлении к особой точке не имеет конечного или бесконечного предела, то это — существенно особая точка, разложение в ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней.

В заключение данного параграфа остановимся на вопросе о поведении аналитической функции в окрестности бесконечно удаленной точки. *Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$, если можно указать такое значение R, что вне круга $|z|>R$ функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки $z=0$.* Так как $f(z)$ является аналитической функцией в круговом кольце $R<|z|<\infty$, то ее можно разложить в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n,\quad R<|z|<\infty, \qquad (4.23)$$

сходящийся к $f(z)$ в данном кольце. Так же как и для конечной изолированной особой точки z_0 здесь возможны три случая:

1° Точка $z=\infty$ называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, если разложение (4.23) не содержит членов с положительными степенями z, т. е. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}=c_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$, или если при $z\to\infty$ существует конечное предельное значение функции $f(z)$, не зависящее от способа предельного перехода. Если $c_0=c_{-1}=\ldots=c_{-m+1}=0$, $c_{-m}\neq0$, то бесконечно удаленная точка является нулем m-го порядка функции $f(z)$.

2° Точка $z=\infty$ называется *полюсом порядка m* функции $f(z)$, если разложение (4.23) содержит конечное m число членов с положительными степенями z, т. е. $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{m}c_nz^n$, $(m>0)$ или если эта функция неограниченно возрастает по модулю при $z\to\infty$ независимо от способа предельного перехода.

3° Точка $z=\infty$ называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$, если разложение (4.23) содержит бесконечное число членов с положительными степенями z, т. е. $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$, или если в зависимости от выбора последовательности $\{z_n\}\to\infty$ можно получить последовательность значений $\{f(z_n)\}$, сходящуюся к любому наперед заданному пределу.

Очевидно, доказательство эквивалентности всех приведенных выше определений характера изолированной особой точки $z=\infty$ может быть проведено так же, как и для случая конечной изолированной особой точки.

Кроме того, как легко видеть, преобразование $z=\frac{1}{\zeta}$ переводит точку ∞ плоскости z в точку $\zeta=0$, характер же особой точки при этом преобразовании не меняется в силу следующей общей теоремы.

Теорема 4.7. *Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$, аналитической в области $\mathcal{G}$. Пусть аналитическая функция $\zeta=\psi(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью $\mathcal{G}$ и областью $\mathcal{G}'$ комплексной плоскости ζ, в которой определена обратная функция $z=\varphi(\zeta)$. Тогда точка $\zeta_0=\psi(z_0)$ является изолированной особой точкой аналитической функции $F(\zeta)=f[\varphi(\zeta)]$, причем характер этой особой точки тот же, что и точки z_0.*

Эта теорема является очевидным следствием свойства аналитических функций, установленного в гл. 1, в силу которого аналитическая функция от аналитической функции является аналитической, а также геометрических свойств аналитической функции в окрестности изолированной особой точки.

Пример. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$. Данная многозначная функция имеет две точки разветвления $z=\pm i$. Точка $z=\infty$ — ее правильная точка. Поэтому в круговом кольце $1<|z|<\infty$ определены две ветви этой функции, являющиеся однозначными аналитическими функциями в данном кольце. Выберем ветвь, являющуюся непосредственным аналитическим продолжением действительной функции $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ действительной переменной $x>1$, и построим ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$. Для этого, положив $\zeta=\frac{1}{z}$, отобразим данное кольцо на круг единичного радиуса на плоскости ζ (при этом точка $z=\infty$ переходит в точку $\zeta=0$) и разложим функцию $\varphi(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\zeta^2}}}=\frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}$ в ряд Тейлора в окрестности ее правильной точки $\zeta=0$. Предварительно заметим, что функция $\varphi(\zeta)$ является производной функции $\psi(\zeta)=\sqrt{1+\zeta^2}$. (При этом наш выбор ветви исходной функции $f(z)$ определяет выбор той ветви функции $\psi(\zeta)$, для которой $\psi(0)=+1$.) Чтобы разложить функцию $\psi(\zeta)$ в ряд Тейлора, положим $w=\zeta^2$ и рассмотрим функцию $\chi(w)=\sqrt{1+w}$. Вычисляя производные функции $\chi(w)$, получаем

$$\begin{aligned}\chi^{(n)}(w)\Big|_{w=0}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(1+w)^{\frac{1}{2}-n}\Big|_{w=0}=\\&=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}.\end{aligned}$$

Тогда разложение выбранной ветви функции $\chi(w)$ в круге $|w|<1$ принимает вид

$$\chi(w)=\sqrt{1+w}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!\,w^n}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!}.$$

Мы доказали леммы 1 и 2, предполагая, что функция $f(x)$ имеет лишь конечное число особых точек в верхней плоскости. Однако, как легко видеть, при незначительном изменении формулировок этих лемм они остаются справедливыми и в случае бесконечного числа изолированных особых точек функции $f(z)$. Потребуем, чтобы существовала такая неограниченно возрастающая при $n\to\infty$ последовательность чисел R_n, что на дугах полуокружностей C'_{R_n} в верхней полуплоскости выполнялись бы условия (5.29) или (5.37) соответственно. Тогда утверждения (5.30) или соответственно (5.36) лемм 1 и 2 будут иметь место при условии, что предельный переход в рассматриваемых интегралах совершается по последовательности дуг C'_{R_n} при $n\to\infty$. Очевидно также, что в случае существования соответствующих интегралов мы можем распространить рассматриваемые методы интегрирования и на случай функций с бесконечным числом изолированных особых точек. Важным классом таких функций являются так называемые *мероморфные* функции.

Функция комплексной переменной $f(x)$ называется мероморфной, если она определена на всей комплексной плоскости и не имеет в конечной части плоскости особых точек, отличных от полюсов. Как легко видеть, в любой ограниченной области комплексной плоскости мероморфная функция имеет конечное число особых точек. Действительно, если бы число особых точек в ограниченной области было бесконечным, то согласно теореме 1.2 в этой области существовала бы предельная точка данного множества, которая тем самым не была бы уже изолированной особой точкой, что противоречит условию. Примерами мероморфных функций являются дробно-рациональные функции, тригонометрические функции $\operatorname{tg}z$, $\sec z$.

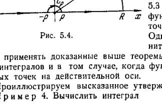


Рис. 5.4.

При доказательстве теорем 5.3 и 5.4 мы предполагали, что функция $f(x)$ не имеет особых точек на действительной оси. Однако незначительные дополнительные рассмотрения позволяют применять доказанные выше теоремы к вычислению несобственных интегралов и в том случае, когда функция $f(x)$ имеет несколько особых точек на действительной оси.

Проиллюстрируем высказанное утверждение на простом примере.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx,\qquad\alpha>0. \qquad (5.48)$$

Воспользовавшись формулой Эйлера и свойством четности подынтегральной функции, осуществим формальное преобразование

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}I_1. \qquad (5.49)$$

Заметим, что интеграл I_1 имеет смысл лишь как главное значение несобственного интеграла второго рода *):

$$I_1=\text{V. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx=\lim_{\substack{\rho\to0\\R\to\infty}}\left\{\int\limits_{-R}^{-\rho}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx+\int\limits_{\rho}^{R}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx\right\}. \qquad (5.50)$$

Рассмотрим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}z\geqslant0$ замкнутый контур Γ, состоящий из отрезков действительной оси $[-R,\ -\rho]$, $[\rho,\ R]$ и дуг полуокружностей C'_ρ, $|z|=\rho$, и C'_R, $|z|=R$ (рис. 5.4). Функция $\frac{e^{i\alpha z}}{z}$, являющаяся аналитическим продолжением в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}z>0$ функции $\frac{e^{i\alpha x}}{x}$, заданной на положительной части действительной оси $0<x<\infty$, в области, ограниченной контуром Γ, особых точек не имеет. Поэтому на основании теоремы Коши

$$\int\limits_{\Gamma}f(\zeta)\,d\zeta=\int\limits_{-R}^{-\rho}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx+\int\limits_{\rho}^{R}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx+\int\limits_{C'^-_\rho}\frac{e^{i\alpha\zeta}}{\zeta}\,d\zeta+\int\limits_{C'^+_R}\frac{e^{i\alpha\zeta}}{\zeta}\,d\zeta=0. \qquad (5.51)$$

Последнее слагаемое левой части (5.51) стремится к нулю при $R\to\infty$ в силу леммы Жордана. Рассмотрим третье слагаемое. Заметив, что в этом интеграле полуокружность C'_ρ проходится в отрицательном направлении (по часовой стрелке), и сделав замену переменной интегрирования $\zeta=\rho e^{i\varphi}$, получим

$$I_3=\int\limits_{C'^-_\rho}\frac{e^{i\alpha\zeta}}{\zeta}\,d\zeta=i\int\limits_{\pi}^{0}e^{i\alpha\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\,d\varphi. \qquad (5.52)$$

Подынтегральная функция в (5.52) является непрерывной функцией параметра ρ, и при $\rho\to0$ ее предел равен 1. Поэтому

$$\lim_{\rho\to0}I_3=-i\pi. \qquad (5.53)$$

Перейдя в (5.51) к пределу при $\rho\to0$ и $R\to\infty$, согласно (5.50) и (5.53) получим

$$I_1=\text{V. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x}\,dx=i\pi,\qquad\alpha>0, \qquad (5.54)$$

*) См. вып. 2, стр. 383.

Доказательство. Напомним, что если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\bar{\mathscr{G}}$, то все точки границы Γ этой области суть правильные точки функции $f(z)$. Выделим каждую из особых точек z_k функции $f(z)$ замкнутым контуром γ_k, не содержащим внутри других особых точек, кроме точки z_k.

В замкнутой многосвязной области, ограниченной контуром Γ и всеми контурами γ_k (рис. 5.1) функция $f(z)$ является всюду аналитической.

Поэтому по второй теореме Коши получим

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta)\,d\zeta + \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k^-} f(\zeta)\,d\zeta = 0. \tag{5.16}$$

Перенеся второе слагаемое в (5.16) направо, мы в силу формулы (5.4) и получим утверждение теоремы:

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\,[f(z),\ z_k].$$

Большое практическое значение этой формулы заключается в том, что во многих случаях оказывается гораздо проще вычислить вычеты функции $f(z)$ в особых точках, лежащих внутри области интегрирования, чем непосредственно вычислять интеграл, стоящий в левой части (5.15). В дальнейшем мы рассмотрим ряд важных приложений полученной формулы, а сейчас введем еще одно понятие — понятие вычета в бесконечно удаленной точке.

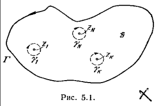


Рис. 5.1.

Пусть точка $z=\infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$.

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ называется комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\zeta)\,d\zeta,$$

где контур C — произвольный замкнутый контур, вне которого функция $f(z)$ является аналитической и не имеет особых точек, отличных от ∞. Очевидно, в силу определения коэффициентов ряда Лорана имеет место формула

$$\text{Выч}\,[f(z),\ \infty] = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\zeta)\,d\zeta = -c_{-1}. \tag{5.17}$$

Отсюда, в частности, следует, что если точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то Выч $[f(z), \infty]$ может оказаться отличным от нуля, в то время как вычет в конечной устранимой особой точке всегда равен нулю.

Формулы (5.15) и (5.17) позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 5.2. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k=1, 2, \ldots, N$), включая и $z=\infty$ ($z_N=\infty$). Тогда*

$$\sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\,[f(z),\ z_k] = 0. \tag{5.18}$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим замкнутый контур C, содержащий внутри все $(N-1)$ особые точки z_k, расположенные на конечном расстоянии от точки $z=0$. По теореме 5.1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{N-1} \text{Выч}\,[f(z),\ z_k].$$

Но, в силу (5.17), интеграл, стоящий слева, равен вычету функции $f(z)$ в точке $z=\infty$, взятому с обратным знаком, откуда и получим утверждение теоремы 5.2.

Доказанная теорема иногда позволяет упростить вычисление интеграла от функции комплексной переменной по замкнутому контуру. Пусть функция $f(z)$ является однозначной и аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и требуется вычислить интеграл от $f(z)$ по некоторому замкнутому контуру Γ. Если внутри Γ содержится много особых точек функции $f(z)$, то применение формулы (5.15) может быть сопряжено с весьма трудоемкими вычислениями. При этом может оказаться, что вне Γ функция $f(z)$ имеет лишь несколько особых точек z_k ($k=1, 2, \ldots, m$), значение вычетов в которых, а также вычет в бесконечно удаленной точке определяются достаточно просто. Тогда удобнее вместо прямого вычисления искомого интеграла по формуле (5.15) воспользоваться очевидным следствием формул (5.15) и (5.18):

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta)\,d\zeta = -2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Выч}\,[f(z),\ z_k] - 2\pi i\,\text{Выч}\,[f(z),\ \infty]. \tag{5.19}$$

Формула (5.19) позволяет легко получить обобщение формулы Коши (см. гл. 1, § 6, формулы (1.59), (1.60)) на случай неограниченной области. Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую вне замкнутого контура Γ, являющегося границей ограниченной области $\mathscr{G}$. Пусть все точки Γ — правильные точки функции $f(z)$, а точка $z=\infty$ — ее устранимая особая точка. Обозначим $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty)$.

аналитических функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$ являются соответственно n-листная и бесконечнолистная римановы поверхности; естественной областью существования полной аналитической функции $\frac{1}{1-z}$ — полная комплексная плоскость с выброшенной точкой $z=1$; естественной областью существования функции (3.71), рассмотренной в примере 4, — единичный круг $|z|<1$.

При этом в последнем примере область $\mathscr{G}_1$ первоначального задания аналитической функции $f_1(z)$ такова, что невозможно аналитическое продолжение функции $f_1(z)$ за границу Γ_1 области $\mathscr{G}_1$. Это и означает, что $f_1(z)$ — полная аналитическая функция и $\mathscr{G}_1$ — ее естественная область существования. Если же область $\mathscr{G}_1$ такова, что возможно аналитическое продолжение $f_1(z)$ на бо́льшую область, то функцию $f_1(z)$ называют *элементом полной аналитической функции $F(z)$*. Аналитическое продолжение $f_2(z)$ функции $f_1(z)$, заданной в области $\mathscr{G}_1$, на область $\mathscr{G}_2$, имеющую с $\mathscr{G}_1$ общую часть $\mathscr{G}_{12}$, будем называть *непосредственным аналитическим продолжением* функции $f_1(z)$.

ГЛАВА 4

РЯД ЛОРАНА И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

В этой главе будет изучено поведение однозначной аналитической функции в окрестности ее изолированных особых точек. Знание этого поведения не только позволяет глубже проникнуть в природу аналитических функций, но и находит прямое практическое применение в многочисленных приложениях теории функций комплексной переменной.

В предыдущих главах мы видели, какую большую роль играют степенные ряды и, в частности, ряд Тейлора в изучении свойств аналитических функций в области, где отсутствуют особые точки исследуемых функций. Аналогичную роль при изучении свойств аналитических функций в окрестности их изолированных особых точек играет ряд Лорана.

§ 1. Ряд Лорана

1. Область сходимости ряда Лорана. Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{4.1}$$

где z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — некоторые комплексные числа, а суммирование ведется как по положительным, так и по отрицательным значениям индекса n. Ряд (4.1) носит название *ряда Лорана*. Установим область сходимости этого ряда. Для этого представим выражение (4.1) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{4.2}$$

Очевидно, областью сходимости ряда (4.1) является общая часть областей сходимости каждого из слагаемых правой части (4.2) Областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ является круг с центром в точке z_0 некоторого радиуса R_1 (как было установлено в гл. 2, значение R_1

2. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. В этом пункте мы рассмотрим применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов первого рода *) вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Мы будем рассматривать тот случай, когда функция $f(x)$ задана на всей действительной оси и может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость так, что ее продолжение удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Эти условия будут сформулированы ниже в теореме 5.3.

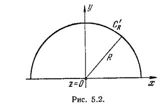


Рис. 5.2.

Для дальнейших рассмотрении нам потребуются некоторые вспомогательные положения.

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и существуют такие положительные числа R_0, M и δ, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z|>R_0$, имеет место оценка*

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z|>R_0. \tag{5.29}$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} f(\zeta)\,d\zeta = 0, \tag{5.30}$$

где контур интегрирования C'_R представляет собой полуокружность $|z|=R$, $\operatorname{Im} z>0$ в верхней полуплоскости z (рис. 5.2).

Действительно, в силу (1.41) и условий леммы при $R>R_0$

$$\left|\int_{C'_R} f(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant \int_{C'_R} |f(\zeta)|\,ds < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и доказывает лемму.

Замечание 1. Если условия леммы выполнены в каком-либо секторе $\varphi_1<\arg z<\varphi_2$ плоскости z, то формула (5.30) имеет место при интегрировании по дуге C'_R окружности, лежащей в данном секторе.

Замечание 2. Условия леммы, очевидно, будут выполнены, если функция $f(z)$ является аналитической в окрестности бесконечно

*) Определение несобственных интегралов см. вып. 2, стр. 358.

удаленной точки и точка $z=\infty$ представляет собой нуль не ниже второго порядка функции $f(z)$. Действительно, в этом случае разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots = \frac{\psi(z)}{z^2},$$

причем $|\psi(z)|<M$, откуда и следует оценка (5.29) при $\delta=1$.

Лемма 1 находит широкое применение при вычислении ряда несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Теорема 5.3. *Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty<x<\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, причем ее аналитическое продолжение, функция $f(z)$, удовлетворяет условиям леммы 1 и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда несобственный интеграл первого рода $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ существует и равен*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\,[f(z),\ z_k], \tag{5.31}$$

где z_k — особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Доказательство. По условию теоремы функция $f(z)$ в верхней полуплоскости имеет конечное число особых точек z_k, причем все они удовлетворяют условию $|z_k|<R_0$. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $-R\leqslant x\leqslant R$ $(R>R_0)$ и полуокружности C'_R, $|z|=R$, в верхней полуплоскости. В силу основной теоремы теории вычетов

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C'_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Выч}\,[f(z),\ z_k]. \tag{5.32}$$

Так как выполнены условия леммы 1, то предел второго слагаемого в левой части (5.32) при $R\to\infty$ равен нулю; правая часть (5.32) при $R>R_0$ от R не зависит. Отсюда следует, что предел первого слагаемого существует и его значение определяется формулой (5.31). Теорема доказана.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}. \tag{5.33}$$

Аналитическое продолжение подынтегральной функции в верхнюю полуплоскость, функция $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$, очевидно, удовлетворяет усло-

Так как на $C_{R'_2}$ выполняется неравенство $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$, то аналогично предыдущему имеем

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n.$$

В результате почленного интегрирования этого ряда получим

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\bar{R}'_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{4.10}$$

где

$$c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\bar{R}'_2}} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}\,d\zeta. \tag{4.11}$$

Изменив направление интегрирования в (4.11), перепишем это выражение в виде

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,d\zeta,\quad n>0. \tag{4.12}$$

Заметим, что подынтегральные функции в (4.9) и (4.12) являются аналитическими в круговом кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$. Поэтому в силу теоремы Коши значения соответствующих интегралов не изменятся при произвольной деформации контуров интегрирования в области аналитичности подынтегральных функций. Это позволяет объединить формулы (4.9) и (4.12):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta,\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots, \tag{4.13}$$

где C — произвольный замкнутый контур, лажащий в кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$ и содержащий точку z_0 внутри. Возвратившись к формуле (4.7), получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{4.14}$$

где коэффициенты c_n для всех значений индекса n определяются единообразной формулой (4.13). Так как z — произвольная точка внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$, то отсюда следует, что ряд (4.14) сходится к функции $f(z)$ всюду внутри данного кольца, причем в замкнутом кольце $R_2<\bar{R}_2\leqslant|z-z_0|\leqslant\bar{R}_1<R_1$ ряд сходится к функции $f(z)$ равномерно. Остается доказать единственность раз-

ложения (4.14). Предположим, что имеет место другое разложение:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-z_0)^n,$$

где хотя бы один коэффициент $c'_n \neq c_n$. Тогда всюду внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$ имеет место равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-z_0)^n. \tag{4.15}$$

Проведем окружность C_R радиуса R, $R_2<R<R_1$, с центром в точке z_0. Ряды (4.15) сходятся на C_R равномерно. Умножим их на $(z-z_0)^{-m-1}$, где m — фиксированное целое число, и проинтегрируем почленно. Рассмотрим $\int_{C_R} (z-z_0)^{n-m-1}\,dz$. Положив $z-z_0=Re^{i\varphi}$, получим

$$\int_{C_R} (z-z_0)^{n-m-1}\,dz = R^{n-m}\,i\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi}\,d\varphi = \begin{cases} 0, & n\neq m, \\ 2\pi i, & n=m. \end{cases} \tag{4.16}$$

Учтя (4.16), найдем, что после указанного интегрирования выражения (4.15) отличными от нуля окажутся лишь по одному слагаемому из бесконечных сумм в левой и правой частях этого выражения. Отсюда получим: $c_m=c'_m$. Так как m — произвольное число, то это и доказывает единственность разложения (4.14). Теорема полностью доказана.

Из полученных результатов следует, что точной областью сходимости ряда Лорана (4.1) является круговое кольцо $R_2<|z-z_0|<R_1$, на границах которого имеется хотя бы по одной особой точке аналитической функции $f(z)$, к которой сходится ряд (4.1). Последнее утверждение является следствием теоремы 3.3.

§ 2. Классификация изолированных особых точек однозначной аналитической функции

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная и аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|<R_1$, а точка z_0 является особой точкой функции $f(z)$. В самой точке z_0 функция $f(z)$ может быть не определена. Изучим поведение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0. Согласно предыдущему параграфу функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана (4.14), сходящийся в кольце $0<|z-z_0|<R_1$. При этом возможны три различных случая:

1° Полученный ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$.

2° Содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$.

Замечание 3. Лемма Жордана остается справедливой и при ослабленных условиях на функцию $f(z)$. Пусть функция $f(z)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>y_0$ при $|z|>R_0$ равномерно относительно аргумента $z-iy_1$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$ в секторах $-\varphi_0\leqslant\arg(z-iy_1)\leqslant\varphi_1$, $\pi-\varphi_2\leqslant\arg(z-iy_1)\leqslant\pi+\varphi_0$ и равномерно ограничена в секторе $\varphi_1\leqslant\arg(z-iy_1)\leqslant\pi-\varphi_2$, где φ_0, φ_1 и φ_2 — заданные положительные числа $0\leqslant\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $y_1>y_0$. Тогда интеграл $\int_{C_R} e^{ia\zeta}(\zeta)\,d\zeta$ по дуге C_R окружности $|z-iy_1|=R$, $\operatorname{Im} z\geqslant y_0$ стремится к нулю при $a>0$ и $R\to\infty$.

Для доказательства разобьем этот интеграл на сумму $I=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$ интегралов по дугам $C_R^{(1)}$ $(y_1>\operatorname{Im} z>y_0,\ \arg(z-iy_1)<0)$, $C_R^{(2)}$ $(0<\arg(z-iy_1)<\varphi_1)$, $C_R^{(3)}$ $(\varphi_1<\arg(z-iy_1)<\pi-\varphi_2)$, $C_R^{(4)}$ $(\pi-\varphi_2<\arg(z-iy_1)<\pi)$ и $C_R^{(5)}$ $(y_1>\operatorname{Im} z>y_0,\ \arg(z-iy_1)>\pi)$ и докажем сходимость к нулю каждого интеграла в отдельности. Для интеграла I_1 получим $|I_1|\leqslant\mu_R e^{-ay_0}L_R^{(1)}$, где $L_R^{(1)}$ — длина кривой $C_R^{(1)}$. При $R\to\infty$ величина $L_R^{(1)}$ остается ограниченной и стремится к значению y_1-y_0. Поэтому $|I_1|\to 0$ при $R\to\infty$. Аналогично $I_5\to 0$. Сходимость к нулю интегралов I_2 и I_4 устанавливается приемом, использованным в доказательстве леммы Жордана. Для интеграла I_3 легко получить оценку $|I_3|<Ce^{-aR\sin\varphi^*}R(\pi-\varphi_1-\varphi_2)$, где $|f(\zeta)|<C$ и $\varphi^*=\min\{\varphi_1, \varphi_2\}$, из которой следует, что $I_3\to 0$ при $R\to\infty$.

Итак, лемма Жордана имеет место при значительно более слабых ограничениях на функцию $f(z)$, чем в случае леммы 1. Это связано с наличием в подынтегральной функции дополнительного множителя $e^{ia\zeta}$, который при $a>0$ обеспечивает достаточно быстрое убывание подынтегральной функции в секторе $0<\varphi_1\leqslant\arg(z-iy_1)\leqslant\pi-\varphi_2$ при $|z|\to\infty$.

Лемма Жордана находит многочисленные применения при вычислении широкого класса несобственных интегралов.

Теорема 5.4. *Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty<x<\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, а ее аналитическое продолжение $f(z)$ в верхней полуплоскости удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\,dx$, $a>0$, существует и равен*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\,[e^{iaz}f(z),\ z_k], \tag{5.41}$$

где z_k — особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости z.

Доказательство. По условию теоремы особые точки z_k функции $f(z)$ в верхней полуплоскости удовлетворяют условию

$|z_k|<R_0$. Рассмотрим в верхней полуплоскости z замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $-R\leqslant x\leqslant R$, $R>R_0$ и дуги C'_R полуокружности $|z|=R$ в верхней полуплоскости z. По основной теореме теории вычетов

$$\int_{-R}^{R} e^{iax}f(x)\,dx + \int_{C'_R} e^{ia\zeta}f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\,[e^{iaz}f(z),\ z_k]. \tag{5.42}$$

По лемме Жордана предел второго слагаемого в левой части (5.42) при $R\to\infty$ равен нулю. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}\,dx, \quad \alpha>0, \quad a>0. \tag{5.43}$$

Чтобы иметь возможность воспользоваться леммой Жордана, заметим, что в силу формулы Эйлера

$$I = \operatorname{Re} I_1 = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}\,dx. \tag{5.44}$$

Аналитическое продолжение подынтеграральной функции интеграла I_1 — функция $e^{iaz}\frac{1}{z^2+a^2}$ — удовлетворяет условиям теоремы 5 4 и имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_1=ia$ являющуюся полюсом первого порядка. Поэтому

$$I_1 = 2\pi i\,\text{Выч}\left[\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+a^2},\ ia\right] = 2\pi i\,\frac{e^{-a\alpha}}{2ia} = \frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}.$$

Отсюда

$$I = \operatorname{Re} I_1 = \frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}. \tag{5.45}$$

Замечание 1. Если $f(x)$ является четной функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 5.4, то при $a>0$

$$\int_0^{\infty} f(x)\cos ax\,dx = \pi\operatorname{Re} i\sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\,[e^{iaz}f(z), z_k] = -\pi\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\,[e^{iaz}f(z),\ z_k]. \tag{5.46}$$

Замечание 2. Если $f(x)$ является нечетной функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 5.4, то при $a>0$

$$\int_0^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = \pi\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\,[e^{iaz}f(z),\ z_k]. \tag{5.47}$$

$|f(z)|>A$. Рассмотрим функцию $g(z)=\frac{1}{f(z)}$. В указанной ε-окрестности точки z_0 эта функция является аналитической и $\lim_{z\to z_0} g(z)=0$. Поэтому на основании теоремы 4.3 точка z_0 является устранимой особой точкой функции $g(z)$, и функция $g(z)$ в силу формулы (4.17) в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде $g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция, причем $\varphi(z_0)\neq 0$, а $m>0$. Тогда в окрестности точки z_0 для исходной функции $f(z)$ имеет место представление $f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}$. Оно в силу условия $\varphi(z_0)\neq 0$ может быть переписано в виде $f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$, совпадающем с представлением (4.20), где $\psi(z)$ — аналитическая функция. Отсюда и следует, что точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$. Теорема доказана.

Заметим, что точка z_0, являющаяся нулем порядка m аналитической функции $g(z)$, является полюсом того же порядка m функции $f(z)=\frac{1}{g(z)}$, и наоборот. Это устанавливает очень простую связь между нулями и полюсами аналитических функций.

3° Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки z_0 содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ т. е. $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. В этом случае точка z_0 называется *существенно особой точкой функции $f(z)$*. Поведение аналитической функции в окрестности ее существенно особой точки описывается следующей теоремой.

Теорема 4.6 (теорема Сохоцкого — Вейерштрасса). *Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в любой окрестности существенно особой точки z_0 функции $f(z)$ найдется хотя бы одна точка z_1, в которой значение функции $f(z)$ отличается от произвольно заданного комплексного числа B меньше чем на ε.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. при заданном комплексном числе B и заданном $\varepsilon>0$ найдется такое $\eta_0>0$, что во всех точках z из η_0-окрестности точки z_0 значение функции $f(z)$ отличается от заданного B больше чем на ε:

$$|f(z)-B|>\varepsilon, \quad |z-z_0|<\eta_0. \tag{4.21}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(z)=\frac{1}{f(z)-B}$. В силу (4.21) функция $\psi(z)$ определена и ограничена в η_0-окрестности точки z_0. Следовательно, по теореме 4.3 точка z_0 является устранимой особой точкой функции $\psi(z)$. Это означает, что разложение функции $\psi(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$\psi(z) = (z-z_0)^m\,\tilde{\varphi}(z), \qquad \tilde{\varphi}(z_0)\neq 0.$$

Тогда, в силу определения функции $\psi(z)$, в данной окрестности точки z_0 имеет место следующее разложение функции $f(z)$:

$$f(z) = (z-z_0)^{-m}\varphi(z) + B, \tag{4.22}$$

где аналитическая функция $\varphi(z)=\frac{1}{\tilde{\varphi}(z)}$ ограничена в η_0-окрестности точки z_0. Но разложение (4.22) означает, что точка z_0 является или полюсом порядка m, или при $m=0$ правильной точкой функции $f(z)$, и разложение в ряд Лорана последней должно содержать лишь конечное число членов, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 4.6 дает следующую характеристику поведения аналитической функции в окрестности $|z-z_0|<\eta_0$ существенно особой точки: в существенно особой точке z_0 не существует конечного или бесконечного предельного значения аналитической функции. В зависимости от выбора последовательности точек, сходящейся к точке z_0, мы можем получить последовательности значений функции, сходящиеся к различным пределам. При этом всегда можно выбрать последовательность, сходящуюся к любому наперед заданному комплексному числу, включая и ∞.

Очевидно, нет необходимости доказывать теорему, обратную теореме 4.6, так как если при $z\to z_0$ не существует конечного или бесконечного предела функции $f(z)$, то в силу теорем 4.2 и 4.4 точка z_0 не может быть ни устранимой, ни полюсом.

Заметим также, что если точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, причем $f(z)\neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0, то и для функции $g(z)=1/f(z)$ точка z_0 является существенно особой точкой.

Рассмотренные три случая исчерпывают возможный вид разложения аналитической функции в ряд Лорана в окрестности ее изолированной особой точки и имеют решающее значение для выяснения общего хода изменения аналитической функции в окрестности ее особых точек.

Из проведенных рассмотрений следует, что возможны две различные точки зрения на классификацию изолированных особых точек однозначной аналитической функции, приводящие к одинаковым результатам. Мы исходили из аналитической точки зрения, основанной на характере разложения функции в ряд Лорана, и установили, как ведет себя сама функция при стремлении к особой точке. Возможен и другой, геометрический подход, при котором в основу классификации кладется поведение функции в окрестности ее изолированной особой точки. При этом, если функция ограничена в окрестности особой точки, то эта точка называется устранимой и, как следует из теоремы 4.3, разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности этой особой точки не содержит отрицательных степеней. Если при стремлении к особой точке функция имеет бесконечный предел, то эта точка — полюс и разложение в ряд Лорана имеет конечное

откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha>0. \tag{5.55}$$

При $\alpha<0$ имеет место формула

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha<0, \tag{5.56}$$

в чем легко убедиться при помощи изменения знака у α в формуле (5.55).

4. Случай многозначных функций. Во всех предыдущих рассмотрениях мы фактически основывались на формуле Коши, справедливой для однозначной аналитической функции. Следовательно, рассмотренные методы можно применять лишь тогда, когда аналитическое продолжение $f(z)$ функции $f(x)$ с действительной оси в область, ограниченную контуром интегрирования, является однозначной аналитической функцией. В тех же случаях, когда полная аналитическая функция $F(z)$ оказывается многозначной на полной комплексной плоскости z, надо так выбирать контур интегрирования, чтобы внутри его не содержалось точек разветвления функции $F(z)$, и рассматривать лишь однозначную ветвь $f(z)$ полной аналитической функции $F(z)$, являющуюся непосредственным аналитическим продолжением функции $f(x)$ в комплексную область. Эти соображения позволяют распространить рассмотренные выше методы на ряд несобственных интегралов, часто встречающихся в приложениях. Рассмотрим несколько типичных случаев.

Рис. 5.5.

1° *Интегралы вида*

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}f(x)\,dx, \quad 0<\alpha<1. \tag{5.57}$$

Пусть функция $f(x)$, заданная на положительной части действительной оси, может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость. Пусть ее аналитическое продолжение $f(z)$ является однозначной аналитической функцией, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k=1, \ldots, n$), не лежащих на положительной части действительной оси, и $z=\infty$ является нулем не ниже

первого порядка функции $f(z)$, а точка $z=0$ — устранимой особой точкой. Функция

$$\varphi(z) = z^{\alpha-1}f(z) \tag{5.58}$$

в области $\mathscr{G}$ $[0<\arg z<2\pi]$, представляющей собой плоскость z с разрезом по положительной части действительной оси, очевидно, является аналитическим продолжением подынтегральной функции, совпадающей с ней на верхнем берегу разреза ($\arg z=0$). Функция $\varphi(z)$ является однозначной функцией в области $\mathscr{G}$, и ее особые точки совпадают с особыми точками z_k функции $f(z)$. Рассмотрим в области $\mathscr{G}$ замкнутый контур Γ, составленный из отрезков действительной оси $[\rho, R]$ на верхнем и нижнем берегах разреза и разомкнутых окружностей C_ρ, $|z|=\rho$, и C_R, $|z|=R$ (рис. 5.5). По основной теореме теории вычетов

$$\int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\,d\zeta = \int_{\rho}^{R} x^{\alpha-1}f(x)\,dx + \int_{C_R^+}\zeta^{\alpha-1}f(\zeta)\,d\zeta + \int_{R}^{\rho}\zeta^{\alpha-1}f(\zeta)\,d\zeta + \int_{C_\rho^-}\zeta^{\alpha-1}f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Выч}\,[z^{\alpha-1}f(z),\ z_k]. \tag{5.59}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых левой части равенства (5.59).

$$|I_2| = \left|\int_{C_R^+}\zeta^{\alpha-1}f(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant \frac{MR^{\alpha-1}}{R}2\pi R = 2\pi MR^{\alpha-1} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{5.60}$$

так как по условию в окрестности точки $z=\infty$ для функции $f(z)$ имеет место оценка $|f(z)|<\frac{M}{|z|}$. Третье слагаемое в (5.59) представляет собой интеграл по нижнему берегу разреза, где $\arg z=2\pi$, т. е. $z=x\cdot e^{i2\pi}$ $(x>0)$ и $z^{\alpha-1}=x^{\alpha-1}\cdot e^{i2\pi(\alpha-1)}$. Поэтому

$$\int_{R}^{\rho}\zeta^{\alpha-1}f(\zeta)\,d\zeta = -e^{i2\pi(\alpha-1)}\int_{\rho}^{R} x^{\alpha-1}f(x)\,dx. \tag{5.61}$$

Наконец,

$$\left|\int_{C_\rho^-}\zeta^{\alpha-1}f(\zeta)\,d\zeta\right| < M_1\rho^{\alpha-1}2\pi\rho \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{5.62}$$

так как в окрестности точки $z=0$ имеет место оценка $|f(z)|<M_1$ и $\alpha>0$.

Перейдя к пределу в (5.59) при $\rho\to 0$ и $R\to\infty$, на основании (5.60) — (5.62) окончательно получим

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi\alpha}}\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\,[z^{\alpha-1}f(z),\ z_k]. \tag{5.63}$$

Отсюда для функции $\psi(\zeta)$ при $|\zeta|<1$ получим

$$\psi(\zeta) = \sqrt{1+\zeta^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!\,\zeta^{2n}}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!}$$

и для функции $\varphi(\zeta)$

$$\varphi(\zeta) = \psi'(\zeta) = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!\,2n}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!}\zeta^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\zeta^{2n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\zeta^{2k+1}.$$

Наконец, для выбранной ветви функции $f(z)$ в кольце $1<|z|<\infty$ получаем разложение в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{1}{z^{2k+1}}. \tag{4.24}$$

ГЛАВА 5

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке

1. Определение и формулы вычисления вычета. Введем важное для приложений понятие вычета однозначной аналитической функции в изолированной особой точке.

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$. Согласно предыдущим рассмотрениям в окрестности этой точки функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{5.1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \tag{5.2}$$

и, в частности,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta. \tag{5.3}$$

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$, взятому в положительном направлении по любому лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ замкнутому контуру γ, содержащему единственную особую точку z_0 функции $f(z)$. Для обозначения вычета обычно применяются выражения Выч $[f(z), z_0]$ или res $[f(z), z_0]$. Мы в дальнейшем будем пользоваться первым обозначением. Очевидно, что если точка z_0 является правильной или устранимой особой точкой функции $f(z)$, то вычет $f(z)$ в этой точке равен нулю. Для вычисления вычета функции $f(z)$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx,\quad 0<\alpha<1. \tag{5.64}$$

Подынтегральная функция в (5.64) удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Поэтому

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi\alpha}}\,\text{Выч}\left[\frac{z^{\alpha-1}}{1+z},-1\right]=\frac{2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}}{1-e^{i2\pi\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}. \tag{5.65}$$

2° Интегралы вида *)

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}f(x)\,dx,\quad 0<\alpha<1. \tag{5.66}$$

Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке действительной оси (0, 1), может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость. Пусть ее аналитическое продолжение является однозначной аналитической функцией, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k=1, 2, \ldots, N$), не лежащих на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, а точка $z=\infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$. Тогда интеграл (5.66) легко может быть вычислен методами, аналогичными разобранным выше. Заметим, что аналитическое продолжение подынтегральной функции $\Phi(z)=z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}f(z)$ имеет две точки разветвления: $z=0$ и $z=1$. Точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $\Phi(z)$. Действительно, полный обход по окружности достаточно большого радиуса, содержащий внутри обе точки разветвления $z=0$ и $z=1$, не меняет значения функции $\Phi(z)$. Рассмотрим область $\mathscr{G}$, представляющую собой полную плоскость z с разрезом по отрезку действительной оси [0, 1]. Ветвь функции $\Phi(z)$, совпадающая на верхнем берегу разреза с подынтегральной функцией (5.66) действительной переменной x, является однозначной аналитической функцией в $\mathscr{G}$. Выберем в $\mathscr{G}$ замкнутый контур Γ, сос-

Рис. 5.6.

*) Как легко видеть, данный интеграл с помощью замены $y=\frac{x}{1-x}$ может быть сведен к интегралу типа (5.57), однако в ряде случаев проще произвести непосредственное вычисление интеграла (5.66), что и делается в этом пункте.

тоящий из обоих берегов разреза [0, 1], замыкающих их окружностей C'_ρ, $|z|=\rho$, и C''_ρ, $|z-1|=\rho$, достаточно малого радиуса ρ и окружности C_R, $|z|=R$, содержащей внутри отрезок [0, 1] и все особые точки функции $f(z)$ (рис. 5.6). По основной теореме теории вычетов

$$\int_\Gamma \Phi(\zeta)\,d\zeta=\int_\rho^{1-\rho}x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}f(x)\,dx+\int_{C''^{-}_{\rho}}\Phi(\zeta)\,d\zeta+$$
$$+\int_{1-\rho}^{\rho}\Phi(\zeta)\,d\zeta+\int_{C'^{-}_{\rho}}\Phi(\zeta)\,d\zeta+\int_{C_R^+}\Phi(\zeta)\,d\zeta=$$
$$=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{Выч}\left[z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}f(z),\ z_k\right]. \tag{5.67}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в левой части равенства (5.67). По условию $z=\infty$ — устранимая особая точка $f(z)$, т. е. в окрестности $z=\infty$ имеет место разложение

$$f(z)=a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\ldots, \tag{5.68}$$

где $a_0=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}=\frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}, \tag{5.69}$$

являющуюся указанной выше ветвью функции $\Phi(z)/f(z)$. Точка $z=\infty$ является правильной точкой выбранной ветви функции $\varphi(z)$; поэтому в окрестности точки $z=\infty$ функция $\varphi(z)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(z)=\frac{e^{i\pi\alpha}}{z}+\frac{\psi_1(z)}{z^2}, \tag{5.70}$$

где $\psi_1(z)$ — ограниченная аналитическая функция в окрестности точки $z=\infty$. Отсюда для разложения функции $\Phi(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$ получаем выражение

$$\Phi(z)=a_0\frac{e^{i\pi\alpha}}{z}+\frac{\psi(z)}{z^2}, \tag{5.71}$$

где $\psi(z)$ — ограниченная аналитическая функция в окрестности точки $z=\infty$. Из (5.71) находим

$$\text{Выч}\left[\Phi(z),\ \infty\right]=-a_0e^{i\pi\alpha}. \tag{5.72}$$

Поэтому по формуле (5.17)

$$\int_{C_R^+}\Phi(\zeta)\,d\zeta=2\pi i a_0e^{i\pi\alpha}. \tag{5.73}$$

в $\mathscr{G}$ функцией $f(z)$, устанавливается взаимно однозначное соответствие этих областей. Тем самым условие однолистности функции $f(z)$ в области $\mathscr{G}$ является необходимым условием конформности отображения. Оказывается, что это условие является и достаточным.

Теорема 6.3. *Пусть функция $f(z)$ является однозначной аналитической функцией в области $\mathscr{G}$, осуществляющей взаимно однозначное отображение области $\mathscr{G}$ на область G комплексной плоскости w. Тогда это отображение является конформным.*

Доказательство. Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что при выполнении условий теоремы производная функции $f(z)$ отлична от нуля всюду в области $\mathscr{G}$. Предположим, что это не имеет места, т. е. что в области $\mathscr{G}$ существует такая точка z_0, в которой $f'(z_0)=0$. Так как $f(z)$ является аналитической в области $\mathscr{G}$, то в силу сделанного предположения ее разложение в степенной ряд в окрестности точки z_0 должно иметь вид

$$f(z)=a_0+a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots, \tag{6.7}$$

причем $k\geqslant 2$ и $a_k\neq 0$. Если $f'(z)\not\equiv 0$, то точка z_0 не может быть предельной точкой нулей функции $f'(z)$. Это означает, что можно указать такое значение δ', что $f'(z)\neq 0$ во всех точках $z\neq z_0$ внутри круга $|z-z_0|<\delta'$. Кроме того, очевидно, можно выбрать такое значение δ'', чтобы имело место неравенство

$$\psi(z)=a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\ldots\neq 0$$

при $|z-z_0|<\delta''$.

Выбрав $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$, получим

$$\left.\begin{aligned}&f'(z)\neq 0 &&\text{при } z\neq z_0,\\ &\psi(z)=a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\ldots\neq 0&&\end{aligned}\right\}\ \text{при } |z-z_0|\leqslant\delta. \tag{6.8}$$

Из последнего соотношения следует в силу непрерывности функции $\psi(z)$, что

$$\min\left|(z-z_0)^k\psi(z)\right|_{|z-z_0|=\delta}=m>0.$$

Выберем некоторое комплексное число α, удовлетворяющее условию $|\alpha|<m$. Согласно теореме Руше аналитическая функция

$$\varphi(z)=(z-z_0)^k\psi(z)-\alpha=f(z)-a_0-\alpha \tag{6.9}$$

имеет внутри круга $|z-z_0|\leqslant\delta$ столько же нулей, сколько и функция $(z-z_0)^k\psi(z)$. Последняя в силу условия (6.8) имеет в этом круге k нулей — точка $z=z_0$ является ее нулем k-го порядка. Тогда из (6.9) следует, что уравнение

$$f(z)=a_0+\alpha \tag{6.10}$$

имеет k корней в круге $|z-z_0|\leqslant\delta$, причем все эти корни простые, так как точка $z=z_0$ не является корнем уравнения (6.10) и в силу

(6.8) $f'(z)\neq 0$ в остальных точках данного круга. Это означает, что в k различных точках круга $|z-z_0|\leqslant\delta$ функция $f(z)$ принимает одно и то же значение $f(z)=a_0+\alpha$. Но последнее противоречит условию взаимной однозначности отображения области $\mathscr{G}$ на область G, что и доказывает теорему.

Итак, из доказанной теоремы следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы однозначная функция $f(z)$, аналитическая в области $\mathscr{G}$, осуществляла конформное отображение этой области на некоторую область G плоскости w, является условие однолистности $f(z)$ в области $\mathscr{G}$.

б) Принцип соответствия границ. При решении конкретных задач конформного отображения заданной области $\mathscr{G}$ на заданную область G обычно следят лишь за тем, чтобы искомая функция $f(z)$ производила отображение границы γ области $\mathscr{G}$ на границу Γ области G, не рассматривая специально отображения внутренних точек. Это можно делать в силу так называемого принципа соответствия границ, доказательство которого будет проведено ниже. Предварительно сделаем следующее замечание. Пусть в области $\mathscr{G}$ задана однозначная непрерывная функция $w=f(z)$. Очевидно, эта функция переводит любую замкнутую кривую γ, целиком лежащую в области $\mathscr{G}$, также в замкнутую кривую Γ на плоскости w. Мы будем говорить, что при отображении кривой γ, осуществляемом функцией $f(z)$, сохраняется направление обхода, если при непрерывном движении точки в положительном направлении вдоль кривой γ соответствующая ей точка обходит кривую Γ также в положительном направлении. Перейдем теперь к рассмотрению самого принципа.

Теорема 6.4. *Пусть в конечной области $\mathscr{G}$, ограниченной контуром γ, задана однозначная аналитическая функция $f(z)$, непрерывная в $\overline{\mathscr{G}}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ комплексной плоскости w. Тогда, если при данном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $\mathscr{G}$, на внутреннюю область G, ограниченную контуром Γ.*

Доказательство. Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $f(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между областями $\mathscr{G}$ и G, т. е. надо показать, что функция $f(z)$ каждому значению $z\in\mathscr{G}$ ставит в соответствие некоторую точку $w\in G$ и для каждой точки $w_1\in G$ найдется, и притом только одна, точка $z_1\in\mathscr{G}$ такая, что $f(z_1)=w_1$. Для этого рассмотрим две произвольные точки $w_1\in G$ и $w_2\notin G$ (рис. 6.4) и построим в области $\mathscr{G}$ вспомогательные функции

$$\begin{aligned}F_1(z)&=f(z)-w_1,\quad z\in\mathscr{G},\\ F_2(z)&=f(z)-w_2,\quad z\in\mathscr{G}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

области $\mathscr{G}$ нет ни нулей, ни особых точек функции $f(z)$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{5.85}$$

Функцию $\varphi(z)$ часто называют *логарифмической производной* функции $f(z)$, а вычеты функции $\varphi(z)$ в ее особых точках z_m ($m=1,\ldots,M$) — *логарифмическими вычетами* функции $f(z)$. Определим особые точки функции $\varphi(z)$ в области $\mathscr{G}$. В силу общих свойств аналитических функций ясно, что особыми точками функции $\varphi(z)$ будут нули $\tilde z_k$ ($k=1,\ldots,n$) и полюсы z_k ($k=1,\ldots,p$) функции $f(z)$. Найдем значение вычета функции $\varphi(z)$ в каждой из ее особых точек. Пусть точка $z=\tilde z_k$ является нулем порядка n_k функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=(z-\tilde z_k)^{n_k}f_1(z),\quad f_1(\tilde z_k)\neq 0, \tag{5.86}$$

причем точка $\tilde z_k$ является правильной точкой функции $f_1(z)$. Вычисляя функцию $\varphi(z)$ в окрестности точки $z=\tilde z_k$ по формуле (5.85), получаем

$$\varphi(z)=(\ln f(z))'=n_k\left(\ln(z-\tilde z_k)\right)'+(\ln f_1)'=\frac{n_k}{z-\tilde z_k}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Отсюда следует, что точка $\tilde z_k$ является полюсом первого порядка функции $\varphi(z)$, причем вычет функции $\varphi(z)$ в этой точке равен n_k. Итак, в нуле порядка n_k функции $f(z)$ ее логарифмический вычет равен n_k, т. е. порядку нуля:

$$\text{Выч}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},\tilde z_k\right]=n_k. \tag{5.87}$$

Пусть точка z_k является полюсом порядка p_k функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-z_k)^{p_k}},\quad f_1(z_k)\neq 0, \tag{5.88}$$

причем точка z_k является правильной точкой функции $f_1(z)$. Поэтому для логарифмической производной функции $f(z)$ в окрестности точки $z=z_k$ получим выражение

$$\varphi(z)=-\frac{p_k}{z-z_k}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Отсюда следует, что точка z_k также является полюсом первого порядка функции $\varphi(z)$, причем вычет в этой точке равен $-p_k$. Итак, в полюсе порядка p_k функции $f(z)$ ее логарифмический вычет равен порядку полюса, взятому со знаком минус:

$$\text{Выч}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},\ z_k\right]=-p_k. \tag{5.89}$$

2. Подсчет числа нулей аналитической функции. Полученные результаты позволяют доказать следующую важную теорему.

Теорема 5.5. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}$, за исключением конечного числа лежащих внутри $\mathscr{G}$ изолированных особых точек z_k, которые все являются полюсами, и пусть $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы Γ области $\mathscr{G}$. Тогда разность между полным числом нулей и полным числом полюсов функции $f(z)$ в области $\mathscr{G}$ определяется выражением*

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta. \tag{5.90}$$

Под полным числом нулей (полюсов) понимается число нулей N (полюсов P) с учетом их кратности:

$$N=\sum_{k=1}^{n}n_k,\quad P=\sum_{k=1}^{p}p_k. \tag{5.91}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы заметим, что интеграл по Γ от функции $\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$ может быть вычислен с помощью основной теоремы теории вычетов, причем так как все особые точки функции $\varphi(z)$ — это нули и полюсы функции $f(z)$, а вычеты в этих точках определяются формулами (5.87) и (5.89), то

$$\int_{\Gamma+}\varphi(\zeta)\,d\zeta=2\pi i\sum_{m=1}^{M}\text{Выч}\left[\varphi(z),\ z_m\right]=2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n}n_k-\sum_{k=1}^{p}p_k\right\}=2\pi i(N-P),$$

что и доказывает теорему.

Отметим простой геометрический смысл доказанной теоремы, для чего преобразуем интеграл, стоящий в правой части (5.90):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+}d\ln f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+}d\left\{\ln|f(\zeta)|+i\arg f(\zeta)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+}d\ln|f(\zeta)|+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma+}d\arg f(\zeta). \tag{5.92}$$

Действительная функция $\ln|f(\zeta)|$ является однозначной функцией, поэтому ее вариация (изменение) при обходе точкой ζ замкнутого контура Γ равна нулю. Следовательно, первое слагаемое в правой части (5.92) равно нулю. Второе слагаемое представляет собой полную вариацию аргумента функции $f(\zeta)$ при обходе точкой ζ замкнутого контура Γ, деленную на 2π. Итак,

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\,\text{Var}\left[\arg f(z)\right]_{\Gamma+}. \tag{5.93}$$

вования предела разностного отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ следует существование предела разностного отношения $\frac{\Delta\hat w}{\Delta\hat z}$. Аналитические функции $f(z)$, $z\in\mathscr{G}$, и $\hat f(\hat z)$, $\hat z\in\hat{\mathscr{G}}$, совпадают и непрерывны на общем участке γ' границ областей $\mathscr{G}$ и $\hat{\mathscr{G}}$. Поэтому в силу принципа аналитического продолжения функция $\hat f(\hat z)$ и является аналитическим продолжением функции $f(z)$ из области $\mathscr{G}$ в область $\hat{\mathscr{G}}$. Первая часть утверждения теоремы доказана. В силу (6.16) отображение области $\hat{\mathscr{G}}$ на область $\hat G$, осуществляемое функцией $\hat f(\hat z)$, является взаимно однозначным. Следовательно, на основании теоремы 6.3 это отображение является конформным. Теорема полностью доказана.

Замечание. Доказанная теорема остается справедливой и в том случае, если в формулировке теоремы прямолинейный отрезок γ' заменить на отрезок дуги окружности. При этом симметрию относительно отрезка дуги окружности надо понимать как зеркальное отражение в данной окружности, осуществляемое преобразованием инверсии. Как будет показано ниже, всегда можно осуществить конформное отображение области $\mathscr{G}$ на новую область $\mathscr{G}_1$ так, чтобы отрезок γ' дуги окружности, являющийся частью границы γ области $\mathscr{G}$, перешел в прямолинейный отрезок γ_1', являющийся частью границы γ_1 области $\mathscr{G}_1$. Это и докажет справедливость высказанного утверждения.

4. Теорема Римана. До сих пор мы проводили наши рассмотрения, предполагая, что существует функция $f(z)$, осуществляющая конформное отображение данной области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z на заданную область G комплексной плоскости w. Сейчас мы сформулируем условия, гарантирующие существование и единственность такого отображения. Соответствующая теорема, являющаяся фундаментальной теоремой теории конформных отображений, была доказана Риманом в 1851 г. Доказательство существования конформного отображения выходит за рамки нашего курса, поэтому мы ограничимся лишь формулировкой теоремы *).

Теорема 6.7 (теорема Римана). *Всякую односвязную область $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w|<1$ плоскости w.*

Очевидно, из данной теоремы следует возможность конформного отображения данной односвязной области $\mathscr{G}$ плоскости z на заданную односвязную область G комплексной плоскости w, если граница каждой из этих областей состоит более чем из одной точки. Действительно, отобразив области $\mathscr{G}$ и G на вспомогательный круг

*) Подробное доказательство см., например, А. В. Бицадзе, Основы теории аналитических функций комплексного переменного, «Наука», 1972.

$|\zeta|<1$ (что возможно в силу теоремы Римана), мы и получим требуемое отображение.

Условие односвязности областей $\mathscr{G}$ и G является существенным, так как предположение о возможности конформного отображения многосвязной области $\mathscr{G}$ на односвязную область G приводит к противоречию. Действительно, возьмем в $\mathscr{G}$ замкнутый контур γ, внутри которого лежат граничные точки области $\mathscr{G}$. Контур γ отображается на некоторую замкнутую кривую Γ, целиком лежащую в односвязной области G (рис. 6.6). Будем стягивать Γ к некоторой внутренней точке w_0 области G; тогда в силу непрерывности отображения контур γ также должен стягиваться к некоторой внутренней точке z_0 области $\mathscr{G}$, оставаясь все время внутри этой области, что,

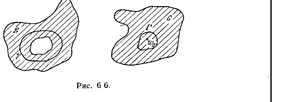


Рис. 6.6.

очевидно, невозможно в силу многосвязности области $\mathscr{G}$ и указанного выбора контура γ. Итак, конформное отображение многосвязной области на односвязную невозможно. Однако, как будет показано ниже, в ряде случаев возможно конформное отображение областей одинаковой связности.

Перейдем теперь к определению условий, однозначно определяющих функцию, осуществляющую заданное конформное отображение. Ясно, что такие условия необходимы, поскольку, как видно из предыдущих примеров, единичный круг с помощью простейшего линейного преобразования, заключающегося в повороте комплексной плоскости, можно конформно отобразить сам на себя. Поэтому, если функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение заданной области $\mathscr{G}$ на единичный круг, то и любая функция, полученная из $f(z)$ с помощью указанного линейного преобразования, будет осуществлять конформное отображение области $\mathscr{G}$ на тот же единичный круг.

Теорема 6.8. *Функция $f(z)$, осуществляющая конформное отображение заданной односвязной области $\mathscr{G}$ (граница которой состоит более чем из одной точки) на единичный круг $|w|<1$ так, что $f(z_0)=0$ и $\arg f'(z_0)=\alpha_0$ (где $z_0\in\mathscr{G}$ и α_0 — заданное действительное число), определена единственным образом.*

Доказательство. Предположим, что в области $\mathscr{G}$ существуют две различные функции $w_1=f_1(z)$ и $w_2=f_2(z)$, осуществляющие

ГЛАВА 6

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Как при построении общей теории функций комплексной переменной, так и в ее многочисленных приложениях, в частности к решению задач механики и физики, большое значение имеет изучение геометрических свойств конформных отображений, осуществляемых аналитическими функциями. В гл. 1 было введено понятие конформного отображения, обладающего свойствами сохранения углов и постоянства растяжений. Фундаментальной задачей теории конформных отображений является следующая. Даны две области комплексной плоскости, и требуется найти функцию, осуществляющую взаимно однозначное и конформное отображение одной области на другую. При этом, конечно, возникают вопросы об условиях существования и однозначного определения такой функции.

В этой главе будут кратко изложены основные понятия теории конформного отображения. Мы также рассмотрим некоторые геометрические свойства отображений, осуществляемых рядом аналитических функций, находящих наиболее широкое применение в приложениях.

§ 1. Общие свойства

1. Определение конформного отображения. В гл. 1 при рассмотрении геометрического смысла модуля и аргумента производной было введено понятие конформного отображения. Было показано, что если функция $w=f(z)$ является однозначной и аналитической в окрестности некоторой точки z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то отображение, осуществляемое данной функцией, в точке z_0 обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений. То есть угол между любыми двумя гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0, равен и по абсолютной величине и по направлению углу между их образами на плоскости w в точке $w_0=f(z_0)$, а бесконечно малые линейные элементы, выходящие из точки z_0, преобразуются подобным образом. Это означает, что при рассматриваемом отображении любой бесконечно малый треугольник с вершиной в точке z_0 преобразуется в подобный ему бесконечно малый треугольник с вершиной в точке w_0.

Отметим, что в силу общих свойств аналитических функций *) в окрестности точки w_0 определена однозначная аналитическая функция $z=\varphi(w)$. Тем самым между окрестностями точек z_0 и w_0 установлено взаимно однозначное соответствие. Введем следующее фундаментальное определение.

Взаимно однозначное отображение области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w называется конформным, если это отображение во всех точках $z\in\mathscr{G}$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений. Подчеркнем, что данное определение подразумевает непрерывность рассматриваемого отображения.

Из предыдущего ясно, что при конформном отображении области $\mathscr{G}$ на область G бесконечно малые плоские фигуры области $\mathscr{G}$ преобразуются в подобные им бесконечно малые фигуры области G. Также легко видеть, что при конформном отображении сохраняется свойство взаимной ортогональности системы кривых на плоскости. Действительно, пусть в области $\mathscr{G}$ плоскости z ($z=x+iy$) заданы два взаимно ортогональных однопараметрических семейства кривых $\varphi(x,y)=c$ и $\psi(x,y)=c$, причем через любую точку области $\mathscr{G}$ проходят по одной кривой каждого семейства. Тогда при конформном отображении области $\mathscr{G}$ на некоторую область G плоскости w ($w=u+iv$) образы данных кривых на плоскости w — кривые $\Phi(u,v)=c$ и $\Psi(u,v)=c$ — на основании свойства сохранения углов также будут взаимно ортогональны. Это означает, что если в области $\mathscr{G}$ введена некоторая ортогональная криволинейная система координат, то при конформном отображении эта система координат перейдет также в ортогональную систему.

Выясним теперь, какими свойствами должна обладать функция комплексной переменной для того, чтобы отображение, осуществляемое этой функцией, было конформным.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть функция $f(z)$ является однозначной и однолистной аналитической функцией в области $\mathscr{G}$ и $f'(z)\neq 0$ при $z\in\mathscr{G}$. Тогда функция $f(z)$ производит конформное отображение области $\mathscr{G}$ на область G комплексной плоскости w, представляющую собой область значений функции $w=f(z)$ при $z\in\mathscr{G}$.*

Доказательство. Действительно, в силу условия $f'(z)\neq 0$ при $z\in\mathscr{G}$ отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, во всех точках области $\mathscr{G}$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений, что и доказывает теорему.

Итак, условия аналитичности, однолистности и отличия от нуля производной функции комплексной переменной являются достаточными условиями конформности отображения, осуществляемого этой

*) См. гл. 1, стр. 33.

так как в противном случае функция $f(z)$ тождественно равна постоянной. Без ограничения общности можно считать, что $b\neq 0$ и $d\neq 0$, ибо в противном случае w переходит в уже изученные линейную функцию и функцию $w=\frac{1}{\zeta}$. Итак, можно записать (6.21) в эквивалентной форме:

$$w=f(z)=\lambda\frac{\alpha+z}{\beta+z},\quad \lambda=\frac{b}{d},\quad \alpha=\frac{a}{b},\quad \beta=\frac{c}{d},\quad \alpha\neq\beta. \tag{6.23}$$

Функция (6.21), (6.23) является однозначной аналитической функцией на полной комплексной плоскости z, имеющей единственную особую точку — полюс первого порядка $z_0=-\frac{c}{d}=-\beta$. Обратная функция

$$z=\frac{\lambda\alpha-\beta w}{-\lambda+w} \tag{6.24}$$

также является дробно-линейной функцией, определенной на полной плоскости w. При этом точка $z_0=-\frac{c}{d}=-\beta$ переходит в точку $w=\infty$, а точка $z=\infty$ переходит в точку $w_0=\lambda=\frac{b}{d}$.

Найдем производную функции $w=f(z)$:

$$f'(z)=\lambda\frac{\beta-\alpha}{(\beta+z)^2}\neq 0. \tag{6.25}$$

В силу условия (6.22) производная дробно-линейной функции отлична от нуля во всех конечных точках плоскости z. Это означает, что *дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение плоскости z на плоскость w.* Конформность отображения в бесконечно удаленных точках легко проверяется указанным выше способом.

В выражение дробно-линейной функции входят три произвольных параметра λ, α, β, тем самым существует бесконечное множество дробно-линейных функций, осуществляющих конформное отображение полной плоскости z на полную плоскость w. Естественно поставить вопрос об условиях, однозначно определяющих дробно-линейную функцию.

Теорема 6.9. *Заданием соответствия трем различным точкам плоскости z трех различных точек плоскости w дробно-линейная функция определена однозначно.*

Доказательство. Мы должны доказать, что условия

$$f(z_1)=w_1,\quad f(z_2)=w_2,\quad f(z_3)=w_3, \tag{6.26}$$

где z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 — заданные комплексные числа, однозначно определяют значения параметров λ, α, β. Составим выражения

$$w_1-w_3=\lambda\frac{(z_1-z_3)(\beta-\alpha)}{(\beta+z_1)(\beta+z_3)}, \tag{6.27}$$

$$w_2-w_3=\lambda\frac{(z_2-z_3)(\beta-\alpha)}{(\beta+z_2)(\beta+z_3)}. \tag{6.28}$$

Разделив (6.27) на (6.28), получим

$$\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{\beta+z_2}{\beta+z_1}. \tag{6.29}$$

Для произвольной точки z можем записать аналогичное соотношение:

$$\frac{w_1-w}{w_2-w}=\frac{z_1-z}{z_2-z}\cdot\frac{\beta+z_2}{\beta+z_1}. \tag{6.30}$$

Исключив из соотношений (6.29) и (6.30) параметр β, окончательно получим

$$\frac{w_1-w}{w_2-w}:\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}=\frac{z_1-z}{z_2-z}:\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}. \tag{6.31}$$

Соотношение (6.31) и представляет собой неявное выражение искомой дробно-линейной функции. Очевидно, разрешив (6.31) относительно w, мы получим явное выражение коэффициентов λ, α, β, дробно-линейной функции через заданные числа z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, что и доказывает теорему.

Заметим, что поскольку дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение полной плоскости z на полную плоскость w, то одна из точек z_i и одна из точек w_i, заданием которых определяется дробно-линейная функция, могут быть бесконечно удаленными точками.

Рассмотрим геометрические свойства отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией. Для этого несколько преобразуем выражение (6.23), представив его в виде

$$f(z)=\lambda\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta+z}+1\right), \tag{6.32}$$

и введем вспомогательные функции

$$z_1=\beta+z,\quad z_2=\frac{1}{z_1},\quad z_3=\lambda(\alpha-\beta)z_2+\lambda. \tag{6.33}$$

Из соотношений (6.33) следует, что отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией, представляет собой совокупность простейших отображений, осуществляемых линейными функциями z_1 и z_3 и функцией $\frac{1}{z}$, рассмотренными в гл. 1. Тем самым рассматриваемое отображение слагается из подобных растяжений, поворотов и сдвигов комплексной плоскости, а также преобразования инверсии в круге. При этом данное отображение обладает рядом важных свойств, на которых мы остановимся подробнее.

Теорема 6.10 (*круговое свойство дробно-линейной функции*). *Дробно-линейная функция переводит окружности на плоскости z в окружности на плоскости w.* При этом мы включаем прямые в семейство окружностей, рассматривая прямые как окружности бесконечно большого радиуса.

комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w. Рассмотрим функцию $w_1=\overline{w}$, отображающую область G на область G^* комплексной плоскости w_1. Очевидно, геометрический смысл последнего отображения заключается в зеркальном отражении области G относительно действительной оси u плоскости w. Но при зеркальном отражении направление всех углов меняется на противоположное при сохранении их абсолютной величины. Это означает, что отображение области $\mathscr{G}$ на область G^*, осуществляемое функцией

$$\varphi(z)=w_1=\overline{w}=\overline{f(z)},\quad z\in\mathscr{G}, \tag{6.6}$$

является конформным отображением первого рода. Тем самым функция $\varphi(z)$ должна быть аналитической в области $\mathscr{G}$, причем $\varphi'(z)\neq 0$, $z\in\mathscr{G}$. Но из (6.6) следует, что $f(z)=\overline{\varphi(z)}$, что и доказывает высказанное утверждение. До сих пор мы предполагали, что производятся конформные отображения ограниченной области $\mathscr{G}$ на ограниченную область G. В некоторых случаях приходится рассматривать отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки $w=\infty$ (или наоборот). При этом мы будем называть данное отображение конформным, если окрестность точки z_0 конформно отображается на окрестность точки $\zeta=0$, где $\zeta=\frac{1}{w}$. Аналогично определяется конформное отображение окрестности точки $z=\infty$ на окрестность точки $w=\infty$.

2. Простейшие примеры. В предыдущих главах мы уже рассмотрели некоторые геометрические свойства отображений, осуществляемых рядом элементарных функций. Выясним теперь, являются ли эти отображения конформными, и если да, то в каких областях.

Как легко видеть, линейная функция $w=f(z)=az+b$ ($a\neq 0$ и b — произвольные комплексные постоянные) осуществляет конформное отображение полной комплексной плоскости z на полную плоскость w, поскольку эта функция однолистна и ее производная $f'(z)=a$ отлична от нуля во всех точках плоскости z. Чтобы убедиться в сохранении конформности отображения окрестности точки $z=\infty$ на окрестность точки $w=\infty$, положим (следуя сделанному выше замечанию) $t=\frac{1}{z}$ и $\zeta=\frac{1}{w}$. Функция $w=az+b$ перейдет в функцию $\zeta=\frac{t}{a+bt}$, которая осуществляет конформное отображение окрестности точки $t=0$ на окрестность точки $\zeta=0$ (точка $t=0$ является правильной точкой этой функции, и $\zeta'(t)\big|_{t=0}=\frac{1}{a}\neq 0$).

Выше мы видели, что геометрический смысл отображения, осуществляемого линейной функцией, заключается в подобном растяжении и сдвиге плоскости z. Поэтому данная функция может быть применена для построения конформных отображений подобных фигур.

Пример 1. Построить функцию, осуществляющую конформное отображение круга $|z-1-i|\leqslant 2$ на единичный круг $|w|\leqslant 1$.

Так как области $\mathscr{G}$ и G представляют собой подобные фигуры, то задача может быть решена при помощи линейной функции, которая осуществляет подобное растяжение плоскости z и сдвиг начала координат. Как легко видеть, искомая функция имеет вид

$$w=a(z-1-i),$$

где $|a|=\frac{1}{2}$, а аргумент комплексного числа a может иметь любое значение, определяя поворот плоскости w вокруг точки $w=0$.

Рассмотрим степенную функцию $w=f(z)=z^n$, где $n>1$ — целое число. Как следует из рассмотрений, проведенных в гл. 1 и 3, эта функция осуществляет взаимно однозначное отображение области

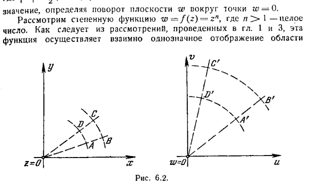


Рис. 6.2.

своей однолистности — сектора $\psi_0<\arg z<\psi_0+\frac{2\pi}{n}$ — на полную плоскость w, разрезанную по лучу $\arg w=n\psi_0$. Ее производная $f'(z)=nz^{n-1}$ отлична от нуля и ограничена всюду внутри данного сектора и в точках его границы, за исключением точек $z=0$ и $z=\infty$. Поэтому данная функция осуществляет конформное отображение области внутри указанного сектора на разрезанную плоскость w. Любая бесконечно малая плоская фигура, лежащая внутри данного сектора, переходит в подобную ей бесконечно малую фигуру на плоскости w, например параллелограмм $ABCD$, сторонами которого являются координатные линии полярной системы координат (рис. 6.2), перейдет в подобный ему бесконечно малый параллелограмм $A'B'C'D'$, сторонами которого также являются координатные линии полярной системы координат на плоскости w. Однако в граничной точке $z=0$ конформность отображения нарушается. Действительно, рассмотрим кривые γ_1 и γ_2, лежащие внутри данного сектора и пересекающиеся в точке $z=0$ под углом φ_0 (рис. 6.3). Как легко видеть, функцией $w=z^n$ эти кривые переводятся в кривые Γ_1 и Γ_2, пересекающиеся в точке $w=0$ под углом $\Phi_0=n\varphi_0\neq\varphi_0$. Тем самым бесконечно

когда заданными точками плоскости w являются точки $w=0$ и $w=\infty$. В этом случае сразу определяются значения коэффициентов α и β.

Следующее свойство дробно-линейной функции заключается в сохранении точек, симметричных относительно окружности. Напомним, что точки P и P' называются симметричными относительно окружности C, если они лежат на общем луче, проходящем через центр O окружности C, и произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса окружности: $OP\cdot OP'=R^2$. Имеет место

Теорема 6.11. *При отображении, осуществляемом дробно-линейной функцией, точки, симметричные относительно любой окружности, переходят в точки, симметричные относительно образа этой окружности.*

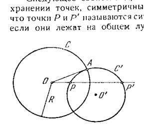


Рис. 6.8

Доказательство. Воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями элементарной геометрии.

Утверждение 1. Любая окружность C', проходящая через точки P и P', ортогональна окружности C.

Действительно, проведя луч OP' и радиус OA в точку пересечения окружностей C и C' (рис. 6.8), мы в силу симметрии точек P и P' относительно окружности C получим

$$OP\cdot OP'=(OA)^2=R^2.$$

Но это, согласно известной теореме элементарной геометрии *), означает, что OA является касательной к окружности C', проведенной из точки O, откуда и следует, что $C'\perp C$.

Утверждение 2. Две взаимно пересекающиеся окружности C' и C'', ортогональные одной и той же окружности C, пересекаются в точках P и P', симметричных относительно окружности C.

Проведем через точку P пересечения окружностей C' и C'', лежащую внутри окружности C, луч OP. Предположим, что луч OP пересекает окружности C' и C'' в различных точках, соответственно P^* и P^{**} (рис. 6.9). Так как окружности C' и C'' ортогональны окружности C, то по указанной выше теореме элементарной геометрии имеют место соотношения

$$OP\cdot OP^*=R^2, \tag{6.39}$$

$$OP\cdot OP^{**}=R^2. \tag{6.40}$$

Но, так как точки P^* и P^{**} лежат на одном луче, равенства (6.39) и (6.40) возможны только в том случае, когда точки P^* и P^{**} совпадают, $P^*=P^{**}=P'$, что и доказывает утверждение.

*) Произведение отрезков секущей, проведенной из внешней точки окружности, равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть точки P и P' симметричны относительно окружности C. Проведем через эти точки две вспомогательные окружности C' и C''. В силу утверждения 1 окружности C' и C'' ортогональны C. При конформном отображении, осуществляемом какой-либо дробно-линейной функцией, окружности C, C' и C'' перейдут соответственно в окружности K, K' и K'', причем окружности K' и K'' будут ортогональны окружности K. Точки P и P' пересечения окружностей C' и C'' перейдут в точки Q и Q' пересечения их образов — окружностей K' и K''. Но в силу утверждения 2 точки Q и Q' должны быть симметричны относительно окружности K, что и доказывает теорему.

Очевидно, доказанная теорема остается справедливой и в том случае, когда рассматриваются и окружности бесконечно большого радиуса, т. е. прямые.

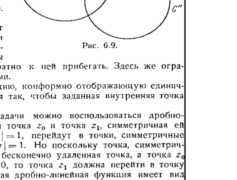


Рис. 6.9.

Доказанная теорема находит многочисленные применения при решении конкретных задач конформных отображений, и мы будем в дальнейшем неоднократно к ней прибегать. Здесь же ограничимся лишь двумя примерами.

Пример 2. Найти функцию, конформно отображающую единичный круг $|z|<1$ сам на себя так, чтобы заданная внутренняя точка z_0 перешла в центр круга.

Очевидно, для решения задачи можно воспользоваться дробно-линейной функцией. При этом точка z_0 и точка z_1, симметричная ей относительно окружности $|z|=1$, перейдут в точки, симметричные относительно окружности $|w|=1$. Но поскольку точка, симметричная центру окружности, есть бесконечно удаленная точка, а точка z_0 должна перейти в точку $w=0$, то точка z_1 должна перейти в точку $w=\infty$. Следовательно, искомая дробно-линейная функция имеет вид

$$w=\lambda\frac{z-z_0}{z-z_1}. \tag{6.41}$$

Так как $z_1=\frac{1}{\bar z_0}$, то (6.41) можно переписать в виде

$$w=\lambda\bar z_0\frac{z-z_0}{z\bar z_0-1}. \tag{6.42}$$

Для того чтобы при отображении (6.42) окружность $|z|=1$ перешла также в окружность $|w|=1$ единичного радиуса, должно выполняться условие

$$|\lambda\bar z_0|\cdot\left|\frac{e^{i\varphi}-z_0}{e^{i\varphi}\bar z_0-1}\right|=|\lambda\bar z_0|\left|\frac{e^{i\varphi}-z_0}{\bar z_0-e^{-i\varphi}}\right|=|\lambda\bar z_0|=1.$$

Подсчитаем число нулей этих функций в области $\mathscr{G}$, для чего воспользуемся формулой (5.93). Так как в силу условий теоремы положительному обходу контура γ соответствует положительный обход контура Γ, получим

$$N[F_1(z)] = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg(f - w_1)]_\gamma = 1 \tag{6.12}$$

и

$$N[F_2(z)] = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg(f - w_2)]_\gamma = 0. \tag{6.13}$$

Из (6.13) в силу произвольности выбора точки w_2 вне области G следует, что все значения функции $f(z)$ при $z \in \mathscr{G}$ принадлежат области G. Из (6.12) следует, что для любой точки $w_1 \in G$ в области $\mathscr{G}$ найдется одна и только одна точка z_1, для которой $f(z_1) = w_1$, что и доказывает взаимную однозначность данного отображения. Теорема доказана.

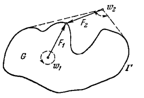


Рис. 6.4.

Замечание. Если функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathscr{G}$, за исключением единственной особой точки z_0, являющейся полюсом первого порядка, и при отображении границы области $\mathscr{G}$, контура γ, на контур Γ плоскости w направление обхода меняется на противоположное, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $\mathscr{G}$ на область G', внешнюю к контуру Γ, на плоскости w (при этом точка z_0 соответствует точке $w = \infty$).

Данное утверждение доказывается аналогично предыдущей теореме, причем вместо (6.12) и (6.13) получим соотношения

$$N[F_1(z)] - 1 = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg(f - w_1)]_\gamma = -1 \tag{6.14}$$

и

$$N[F_2(z)] - 1 = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg(f - w_2)]_\gamma = 0, \tag{6.15}$$

из которых и следует справедливость высказанного утверждения.

Приведем без доказательства утверждение, в известном смысле обратное доказанной теореме.

Теорема 6.5. *Если функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z на ограниченную область G плоскости w, то функция $f(z)$ непрерывна на границе области $\mathscr{G}$ и осуществляет непрерывное и взаимно однозначное соответствие границ γ и Γ областей $\mathscr{G}$ и G.*

в) Принцип симметрии. Этот принцип находит многочисленные применения при решении задач конформного отображения областей, границы которых имеют прямолинейные участки. Пусть граница γ области $\mathscr{G}$ имеет прямолинейный участок γ' (рис. 6.5). Область $\hat{\mathscr{G}}$, полученную путем зеркального отражения области $\mathscr{G}$ относительно прямой, на которой лежит отрезок γ', будем называть областью, симметричной области $\mathscr{G}$ относительно γ'. Симметрию точек областей $\mathscr{G}$ и $\hat{\mathscr{G}}$ будем обозначать символом $z \leftrightarrow \hat{z}$. Принцип симметрии может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 6.6. *Пусть в замкнутой области $\mathscr{G}$, граница γ которой имеет прямолинейный участок γ', задана непрерывная функция $f(z)$, осуществляющая конформное отображение области $\mathscr{G}$ на область G комплексной плоскости w, при котором участок γ' границы γ переходит также в прямолинейный участок Γ' границы Γ области G. Тогда в области $\hat{\mathscr{G}}$, симметричной $\mathscr{G}$ относительно отрезка γ', можно построить функцию $\hat{f}(z)$, являющуюся аналитическим продолжением функции $f(z)$ из области $\mathscr{G}$ в область $\hat{\mathscr{G}}$, осуществляющую конформное отображение области $\hat{\mathscr{G}}$ на область $\hat{G}$ комплексной плоскости w, симметричную области G относительно отрезка Γ'.*

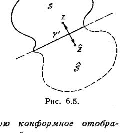


Рис. 6.5.

Заметим, что полученная таким образом область $\tilde{\mathscr{G}} = \mathscr{G} + \hat{\mathscr{G}}$ может иметь участок $\mathscr{G}_{12}$, принадлежащий одновременно областям $\mathscr{G}$ и $\hat{\mathscr{G}}$. Тогда полная аналитическая функция $F(z)$, полученная аналитическим продолжением функции $f(z)$ в область $\hat{\mathscr{G}}$, должна рассматриваться на соответствующей римановой поверхности (то же относится и к областям G и $\hat{G}$).

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Доказательство. Сопоставим каждой точке $z \in \mathscr{G}$ симметричную ей относительно отрезка γ' точку $\hat{z} \in \hat{\mathscr{G}}$, а точке $w \in G$ — симметричную ей относительно отрезка Γ' точку $\hat{w} \in \hat{G}$:

$$z \leftrightarrow \hat{z}, \quad w \leftrightarrow \hat{w}. \tag{6.16}$$

Определим в области $\hat{\mathscr{G}}$ функцию $\hat{f}(\hat{z})$, задавая ее значения для каждого $\hat{z} \in \hat{\mathscr{G}}$ по схеме $\hat{z} \leftrightarrow z$; $z \to w = f(z)$; $w \leftrightarrow \hat{w}$, $\hat{f}(\hat{z}) = \hat{w}$. Как легко видеть, построенная функция $\hat{f}(\hat{z})$ является аналитической в области $\hat{\mathscr{G}}$. Действительно, в силу соответствий (6.16) из сущест-

Так как при обходе точки $z = 1$ по часовой стрелке аргумент выражения $(1 - z)$ меняется на -2π, то аргумент функции $\Phi(z)$ на нижнем берегу разреза больше аргумента на верхнем берегу разреза на $2\pi\alpha$. Поэтому

$$\int_{l^-_\rho} \Phi(\zeta)\,d\zeta = -e^{i2\pi\alpha}\int_\rho^{1-\rho} \Phi(x)\,dx. \tag{5.74}$$

Как легко показать с помощью оценок, аналогичных (5.62), при $0 < \alpha < 1$ интегралы по малым окружностям C'_ρ и C_ρ стремятся к нулю при $\rho \to 0$. Тогда, переходя в (5.67) к пределу при $\rho \to 0$, получаем

$$(1 - e^{i2\pi\alpha})I + 2\pi i e^{i\pi\alpha}a_0 = 2\pi i\sum_{k=1}^N \text{Выч}\,[z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}f(z),\ z_k],$$

откуда

$$I = \frac{\pi a_0}{\sin\pi\alpha} + \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}}\sum_{k=1}^N \text{Выч}\,[z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}f(z),\ z_k], \tag{5.75}$$

где $a_0 = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Пример 6. Вычислить интеграл *)

$$I = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}\,dx,\ 0 < \alpha < 1. \tag{5.76}$$

Так как выполнены все сформулированные выше условия и $a_0 = 1$, то,

$$I = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}. \tag{5.77}$$

3° *Интегралы вида*

$$I = \int_0^\infty f(x)\ln x\,dx. \tag{5.78}$$

Пусть функция $f(x)$ является четной функцией и может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, причем ее аналитическое продолжение удовлетворяет условиям леммы 1. Рассмотрим в верхней полуплоскости замкнутый контур Γ, состоящий из отрезков действительной оси $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$ и соединяющих их полуокружностей C'_ρ, $|z| = \rho$, и C'_R, $|z| = R$. Функция $\Phi(z)$, являющаяся ветвью полной аналитической функции и совпадающая с $f(x)\ln x$ на положительной части действительной оси ($x > 0$), на отрицатель-

*) Заметим, что рассматриваемый интеграл является частным случаем B-функции (см. вып. 2, стр 434):

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

ной части действительной оси при $z = |z|e^{i\pi} = xe^{i\pi} = -x\ (x > 0)$ принимает значение

$$\Phi(z)|_{z=xe^{i\pi}} = f(x)\ln(xe^{i\pi}) = f(x)[\ln x + i\pi].$$

Поэтому

$$\int_\Gamma \Phi(\zeta)\,d\zeta = \int_\rho^R f(x)\ln x\,dx + \int_{C'^+_R}\Phi(\zeta)\,d\zeta + \int_\rho^R f(x)[\ln x + i\pi]\,dx + \\ + \int_{C'^-_\rho}\Phi(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\sum_{k=1}^N \text{Выч}\,[f(z)\ln z,\ z_k]. \tag{5.79}$$

Рассмотрим второе слагаемое в левой части (5.79)

$$\left|\int_{C'^+_R}\Phi(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant \frac{M}{R^{1+\delta}}\int_0^\pi |\ln\zeta|\,ds = \frac{M}{R^{1+\delta}}\int_0^\pi |\ln R + i\arg\zeta|\,ds \leqslant \\ \leqslant \frac{M\pi}{R^\delta}\sqrt{\ln^2 R + \pi^2}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5.80}$$

Проведя аналогичные оценки, легко показать, что и последнее слагаемое в левой части (5.79) стремится к нулю при $\rho \to 0$. Наконец, несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ существует и в силу (5.35) равен

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \pi i\sum_{k=1}^N \text{Выч}\,[f(z),\ z_k]. \tag{5.81}$$

Поэтому, перейдя в (5.79) к пределу при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$, получим

$$I = \int_0^\infty f(x)\ln x\,dx = \pi i\sum_{k=1}^N \text{Выч}\left[f(z)\left(\ln z - \frac{i\pi}{2}\right),\ z_k\right]. \tag{5.82}$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx. \tag{5.83}$$

Согласно проведенным выше рассуждениям

$$I = \pi i\,\text{Выч}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2}\left(\ln z - \frac{i\pi}{2}\right),\ i\right] = -\frac{\pi}{4}. \tag{5.84}$$

§ 3. Логарифмический вычет

1. Понятие логарифмического вычета. Пусть в области $\mathscr{G}$ задана однозначная функция $f(z)$, аналитическая всюду в $\mathscr{G}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k\ (k = 1, \ldots, p)$, причем все z_k являются полюсами. Предположим, что на границе Γ

заданное конформное отображение, т. е.

$$f_1(z_0) = 0,\quad \arg f_1'(z_0) = \alpha_0,\quad |f_1(z)|_\gamma = 1,$$
$$f_2(z_0) = 0,\quad \arg f_2'(z_0) = \alpha_0,\quad |f_2(z)|_\gamma = 1.$$

Заметим, что в силу теоремы 6.5 функции $w_1 = f_1(z)$ и $w_2 = f_2(z)$ устанавливают взаимно однозначное и непрерывное соответствие между границей γ области $\mathscr{G}$ и окружностями $|w_1| = 1$ и $|w_2| = 1$ соответственно.

Так как при конформном отображении устанавливается взаимно однозначное соответствие, то тем самым установлено и взаимно однозначное соответствие между точками единичных кругов $|w_1| \leqslant 1$ и $|w_2| \leqslant 1$. Значит, установленные соответствия определяют аналитическую функцию $w_2 = \varphi(w_1)$, осуществляющую конформное отображение единичного круга $|w_1| < 1$ на единичный круг $|w_2| < 1$, причем

$$\varphi(0) = 0,\quad |\varphi(w_1)|_{|w_1|=1} = 1.$$

Заметим, что, кроме того, в силу взаимно однозначного соответствия областей $|w_1| < 1$ и $|w_2| < 1$ имеет место условие

$$\varphi(w_1) \neq 0 \quad\text{при}\quad w_1 \neq 0.$$

Вычисляя значение производной $\frac{dw_2}{dw_1}$ по правилу определения производной от сложной функции, получаем

$$\left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0} = \left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{w_1=0} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{\Delta w_2}{\Delta z}}{\dfrac{\Delta w_1}{\Delta z}} = \frac{k_2e^{i\alpha_0}}{k_1e^{i\alpha_0}} = \frac{k_2}{k_1} > 0.$$

Отсюда следует, что производная $\frac{dw_2}{dw_1}$ в точке $w_1 = 0$ является положительным действительным числом. Рассмотрим вспомогательную функцию, определенную при $|w_1| \leqslant 1$,

$$\psi(w_1) = \frac{1}{w_1}\varphi(w_1). \tag{6.17}$$

Очевидно, функция $\psi(w_1)$ является однозначной аналитической функцией в области $0 < |w_1| < 1$. Точка $w_1 = 0$ — устранимая особая точка этой функции. Доопределим $\psi(w_1)$ при $w_1 = 0$ по непрерывности. Разложим $\varphi(w_1)$ в окрестности $w_1 = 0$ в ряд Тейлора:

$$w_2 = \varphi(w_1) = \varphi(0) + \left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0}w_1 + \ldots = \left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0}w_1 + \ldots$$

Переходя к пределу при $w_1 \to 0$, получаем

$$\psi(0) = \lim_{w_1\to 0}\frac{\varphi(w_1)}{w_1} = \left.\frac{d\varphi}{dw_1}\right|_{w_1=0} = \frac{k_2}{k_1} > 0. \tag{6.18}$$

Функция $\psi(w_1)$ непрерывна в замкнутой области $|w_1| \leqslant 1$, причем в этой области $\psi(w_1) \neq 0$ и

$$|\psi(w_1)|_{|w_1|=1} = 1. \tag{6.19}$$

В силу принципа максимума и минимума модуля аналитической функции из (6.19) следует, что

$$|\psi(w_1)| \equiv 1 \quad\text{при}\quad |w_1| \leqslant 1,$$

откуда в силу замечания на стр. 51 (гл. 1) получим, что

$$\psi(w_1) \equiv \text{const} \quad\text{при}\quad |w_1| \leqslant 1. \tag{6.20}$$

Чтобы найти эту постоянную, заметим, что в силу (6.18) она равна $\frac{k_2}{k_1}$, т. е. является положительным действительным числом. Согласно (6.19) модуль этого числа равен единице. Отсюда следует, что $\psi(w_1) \equiv 1$. Следовательно, $w_2 = \varphi(w_1) \equiv w_1$. Это и доказывает, что не существует двух различных функций, осуществляющих заданное конформное отображение данной области $\mathscr{G}$ на внутренность единичного круга.

Замечание. Сформулированные выше условия однозначного определения функции $f(z)$, осуществляющей конформное отображение заданной односвязной области $\mathscr{G}$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$, можно заменить требованием соответствия трех граничных точек границы γ области $\mathscr{G}$ трем точкам окружности $|w| = 1$.

Мы ограничимся лишь формулировкой данного утверждения, не приводя его доказательства.

Мы рассмотрели ряд основных общих свойств конформного отображения. Однако проведенные рассмотрения не дают общих рецептов решения основной задачи построения конформного отображения данной области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z на заданную область G плоскости w. В самом общем случае указать такой рецепт и не представляется возможным, для решения конкретных задач приходится прибегать к различным специальным методам. При этом большую пользу оказывает достаточно полное представление о геометрических свойствах ряда функций комплексной переменной, наиболее часто используемых при решении практических задач.

§ 2. Дробно-линейная функция

Так называется функция комплексной переменной, имеющая вид

$$w = f(z) = \frac{a + bz}{c + dz}, \tag{6.21}$$

где a, b, c, d — заданные комплексные постоянные, которые, очевидно, должны удовлетворять условию

$$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}, \tag{6.22}$$

Будем изображать значения функции $w = f(z)$ точками на комплексной плоскости w. Так как функция $f(z)$ непрерывна на контуре Γ, то при полном обходе точкой z контура Γ на плоскости z соответствующая ей точка на плоскости w описывает некоторый замкнутый контур C. При этом точка $w = 0$ может оказаться как вне, так и внутри области, ограниченной контуром C. В первом случае вариация аргумента w при полном обходе C, очевидно, равна нулю. Во втором случае вариация аргумента w определяется числом полных обходов вокруг точки $w = 0$, которые совершает точка w при своем движении по контуру C. При этом точка w может обходить точку $w = 0$ как против часовой стрелки (в положительном направлении), так и по часовой стрелке (в отрицательном направлении). Итак, разность между полным числом нулей и полюсов функции $f(z)$ в области $\mathscr{G}$ определяется числом оборотов, которые совершает точка $w = f(z)$ вокруг точки $w = 0$ при положительном обходе точкой z контура Γ. Эти соображения часто оказываются существенными при подсчете полного числа нулей аналитической функции в заданной области. При этом во многих случаях соответствующие вычисления можно значительно облегчить благодаря следующей теореме.

X **Теорема 5.6 (теорема Руше).** *Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}}$, причем на границе Γ области $\mathscr{G}$ имеет место неравенство*

$$|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma. \tag{5.94}$$

Тогда полное число нулей в области $\mathscr{G}$ функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$.

Доказательство. Для функций $f(z)$ и $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ выполнены все условия теоремы 5.5. Действительно, функция $f(z)$ не имеет особых точек на Γ (она аналитическая в $\overline{\mathscr{G}}$) и не обращается в нуль на Γ в силу (5.94). Эти условия также выполнены для функции $F(z)$, так как $|F(z)|_\Gamma = |f(z) + \varphi(z)| \geqslant |f(z)|_\Gamma - |\varphi(z)|_\Gamma > 0$. Поэтому на основании формулы (5.93) получим

$$N[f(z) + \varphi(z)] = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg(f + \varphi)]_\Gamma \text{ и } N[f(z)] = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg f(z)]_\Gamma.$$

Рассмотрим разность

$$N[f(z) + \varphi(z)] - N[f(z)] = \\ = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg(f+\varphi) - \arg f]_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}\left[\arg\left(1 + \frac{\varphi}{f}\right)\right]_\Gamma. \\ \left(\arg(f + \varphi) - \arg f = \arg\frac{f + \varphi}{f}\right).$$

Введем функцию $w = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$. Как легко видеть, при обходе точкой z контура Γ соответствующая ей точка w опишет замкнутую

кривую C, которая в силу условия (5.94) будет целиком лежать внутри некоторого круга $|w - 1| \leqslant \rho_0 < 1$ (рис. 5.7). Тем самым точка $w = 0$ лежит вне кривой C. Следовательно, $\operatorname{Var}[\arg w]_\Gamma = 0$, что и доказывает теорему.

Пример. Найти полное число нулей функции $F(z) = z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ внутри единичного круга $|z| < 1$. Представим функцию $F(z)$ в виде $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, положив $f(z) = -5z^5 + 1$ и $\varphi(z) = z^8 - 2z$. Тогда

$$|f(z)|_{|z|=1} \geqslant |-5z^5|_{|z|=1} - 1 = 4,$$
$$|\varphi(z)|_{|z|=1} \leqslant |z^8|_{|z|=1} + |2z|_{|z|=1} = 3,$$

откуда $|f(z)|_{|z|=1} > |\varphi(z)|_{|z|=1} > 0$. Следовательно, полное число нулей в области $|z| < 1$ функции $F(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$, но последняя имеет, очевидно, ровно пять нулей:

$$z_k = \sqrt[5]{\frac{1}{5}}\,e^{i\frac{2\pi k}{5}}$$

$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4)$.

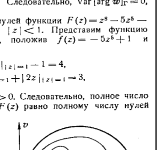


Рис. 5.7.

Важным принципиальным следствием теоремы Руше является

Основная теорема высшей алгебры. *Полином n-ой степени имеет на комплексной плоскости ровно n нулей (с учетом их кратности).*

Доказательство. Представим полином $F(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} \ldots + a_n$ в виде $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, положив $f(z) = a_0z^n$, $\varphi(z) = a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$. Составим отношение $\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\cdot\frac{1}{z^n}$. Как легко видеть, при любых заданных значениях коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ всегда найдется такое значение R_0, что для всех значений $|z| = R > R_0$ имеет место неравенство

$$0 < \left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|_{|z|=R} < 1. \tag{5.95}$$

В силу теоремы Руше из (5.95) следует, что полное число нулей функции $F(z)$ в круге $|z| = R$ равно числу нулей в этом круге функции $f(z) = a_0z^n$. Но функция $f(z) = a_0z^n$ на всей комплексной плоскости имеет единственный n-кратный нуль — точку $z = 0$. Отсюда в силу произвольности $R \geqslant R_0$ и следует утверждение теоремы.

Доказательство. Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что преобразование инверсии, осуществляемое функцией $w = \frac{1}{z}$, обладает круговым свойством, так как сохранение окружности при линейном преобразовании не может вызывать сомнений. Рассмотрим произвольную окружность, уравнение которой на плоскости z имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \tag{6.34}$$

где A, B, C, D — действительные числа, удовлетворяющие условиям $A \geqslant 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$. При $A = 0$ мы, очевидно, получим прямую; при $D = 0$ окружность (6.34) проходит через начало координат (точку $z = 0$). При преобразовании, осуществляемом функцией $w = u + iv = \frac{1}{z}$, координаты x, y связаны с координатами u, v соотношениями

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2},\quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}. \tag{6.35}$$

Поэтому окружность (6.34) в новых координатах примет вид

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0, \tag{6.36}$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Заметим, что при $D = 0$ уравнение (6.36) представляет уравнение прямой, т. е. окружность, проходящая через точку $z = 0$, функцией $w = \frac{1}{z}$ отображается в прямую.

Рассмотренное свойство дробно-линейной функции находит широкое применение при решении многих конкретных задач конформных отображений, связанных с отображением областей с круговыми границами. Действительно, пусть надо осуществить конформное отображение области $\mathscr{G}$, ограниченной окружностью γ, на плоскости z на область G, ограниченную окружностью Γ, на плоскости w. Как известно, положение окружности на плоскости полностью определяется заданием трех точек. С другой стороны, в силу теоремы 6.9, задав соответствие трех точек z_k плоскости z, лежащих на окружности γ, трем точкам w_k плоскости w, лежащим на окружности Γ, мы полностью определим дробно-линейную функцию, осуществляющую конформное отображение плоскости z на плоскость w. При этом согласно теореме 6.10 окружность γ перейдет в окружность Γ. Если при этом соответствие точек z_k и w_k выбрано так, что сохранено направление обхода, то в силу теоремы 6.4 данная функция осуществляет конформное отображение области $\mathscr{G}$ на область G. Заметим, что при этом область, внешняя окружности γ на плоскости z, конформно отображается на область, внешнюю окружности Γ на плоскости w. Если соответствие точек z_k и w_k установлено так, что направления обхода

окружностей γ и Γ противоположны, то область $\mathscr{G}$ конформно отображается на область, внешнюю окружности Γ на плоскости w.

Пример 1. Найти функцию, конформно отображающую единичный круг $|z| < 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Для решения поставленной задачи установим следующее соответствие граничных точек данных областей (рис. 6.7):

$$z_1 = 1 \to w_1 = 0, \tag{6.37'}$$
$$z_2 = i \to w_2 = 1, \tag{6.37''}$$
$$z_3 = -1 \to w_3 = \infty, \tag{6.37'''}$$

и найдем коэффициенты λ, α, β дробно-линейной функции, осуществляющей искомое отображение. Как легко видеть из условий (6.37')

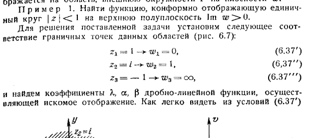


Рис. 6.7.

и (6.37'''), сразу определяются значения α и β, после чего искомая функция принимает вид

$$w = \lambda\frac{z - 1}{z + 1}.$$

Последний коэффициент λ определяется из условия (6.37''):

$$1 = \lambda\frac{i - 1}{i + 1},$$

откуда $\lambda = -i$. Тем самым функция, осуществляющая искомое отображение, имеет вид

$$w = i\frac{1 - z}{1 + z}. \tag{6.38}$$

Отметим, что функция (6.38) осуществляет конформное отображение области $|z| > 1$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$.

Как следует из рассмотренного примера, построение искомой дробно-линейной функции проводится наиболее просто в том случае,

функцией. Естественно поставить вопрос, являются ли эти условия необходимыми. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w и ограничена в $\mathscr{G}$. Тогда функция $f(z)$ является однолистной и аналитической в области $\mathscr{G}$, причем $f'(z) \neq 0$ при $z \in \mathscr{G}$.*

Доказательство. Так как отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, является конформным, то оно является взаимно однозначным, и в любой точке $z_0 \in \mathscr{G}$ выполняются свойства сохранения углов и постоянства растяжений. Следовательно, для любых точек z_1 и z_2, принадлежащих окрестности точки z_0, с точностью до бесконечно малых величин выполняются соотношения

$$\arg\Delta w_2 - \arg\Delta w_1 = \arg\Delta z_2 - \arg\Delta z_1 \tag{6.1}$$

и

$$\frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|} = \frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} = k \neq 0, \tag{6.2}$$

где $\Delta z_1 = z_1 - z_0$ и $\Delta z_2 = z_2 - z_0$ суть бесконечно малые линейные элементы, выходящие из точки z_0, а Δw_1 и Δw_2 — их образы (рис. 6.1).

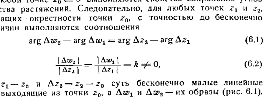


Рис. 6.1.

Заметим, что в силу (6.1) соответствующие углы в точках z_0 и w_0 равны не только по абсолютной величине, но и по направлению. Обозначив $\arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}$ через α, из (6.1) найдем, что и $\arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha$. Действительно,

$$\arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg\Delta w_2 - \arg\Delta z_2 = \arg\Delta w_1 - \arg\Delta z_1 = \arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha. \tag{6.3}$$

Из (6.2) и (6.3) получим, что с точностью до бесконечно малых величин имеет место соотношение

$$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = ke^{i\alpha}. \tag{6.4}$$

В силу произвольности выбора точек z_1 и z_2 в окрестности точки z_0 соотношение (6.4) означает, что существует предел разностного отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$. Этот предел по определению является произ-

водной функции $f(z)$ в точке z_0. Так как $k \neq 0$, то эта производная отлична от нуля:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0. \tag{6.5}$$

Точка z_0 — произвольная точка области $\mathscr{G}$; поэтому из (6.5) следует, что функция $f(z)$ является аналитической *) в области $\mathscr{G}$ и $f'(z) \neq 0$ при $z \in \mathscr{G}$. Однолистность $f(z)$ следует из взаимной однозначности отображения. Теорема доказана.

Итак, *конформное отображение области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w осуществляется только однолистными аналитическими функциями комплексной переменной с производной, отличной от нуля во всех точках области $\mathscr{G}$.*

Отметим, что условие $f'(z) \neq 0$ всюду в области $\mathscr{G}$ является необходимым, но недостаточным условием конформности отображения области $\mathscr{G}$ на область G, осуществляемого функцией $f(z)$. Очевидно, если функция $f(z)$ является аналитической в области $\mathscr{G}$ и $f'(z) \neq 0$ всюду в $\mathscr{G}$, но функция $f(z)$ не является однолистной в $\mathscr{G}$, то отображение, осуществляемое этой функцией, не будет взаимно однозначным, а тем самым не будет и конформным. Таким простейшим примером является функция $w = z^4$, заданная в полукольце $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$. Эта функция аналитична в данной области, и $w' = 4z^3 \neq 0$ всюду в данном полукольце. Однако эта функция отображает данное полукольцо на область $1 \leqslant |w| \leqslant 16$, $0 \leqslant \arg w \leqslant 4\pi$, т. е. область, дважды покрывающую соответствующее кольцо на плоскости w, что и нарушает взаимно однозначное соответствие.

Итак, однолистность однозначной аналитической функции в области $\mathscr{G}$ является важнейшим условием конформного отображения. Как будет показано ниже (см. теорему 6.3 — принцип взаимно однозначного соответствия), это условие является необходимым и достаточным условием конформности отображения.

Как было отмечено выше, свойство сохранения углов означает, что сохраняется не только абсолютная величина углов между кривыми, пересекающимися в точке z_0, и их образами, но и их направление. Отображение, при котором сохраняются абсолютные величины углов между кривыми и их образами, но направление углов меняется на противоположное, называется *конформным отображением второго рода*. Рассмотренное выше отображение называется *конформным отображением первого рода*.

Нетрудно показать, что конформное отображение второго рода осуществляется функциями комплексной переменной, являющимися комплексно сопряженными аналитическим функциям с отличной от нуля производной. Действительно, пусть функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение второго рода некоторой области $\mathscr{G}$

*) См. сноску на стр. 32.

Отсюда $\lambda\bar{z}_0 = e^{i\alpha}$, где α — произвольное действительное число, и решение нашей задачи получаем в виде

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1}. \tag{6.43}$$

Заметим, что мы получили решение, определенное с точностью до одного произвольного параметра α, который, очевидно, определяет поворот окружности $|w| = 1$ вокруг центра. Задание значения аргумента производной функции w в точке $z = z_0$ полностью определяет функцию w.

Пример 3. Найти функцию, конформно отображающую эксцентрическое кольцо на концентрическое.

Пусть требуется построить конформное отображение области, ограниченной двумя окружностями с несовпадающими центрами (рис. 6.10), на какое-либо концентрическое кольцо. Поскольку мы имеем дело с двухсвязными областями, то теорема Римана о существовании конформного отображения здесь уже не имеет места и, как мы увидим, нельзя произвольно задать отношение радиусов окружностей концентрического кольца, на которое требуется конформно отобразить заданное эксцентрическое кольцо. Для удобства дальнейших рассмотрений положим, что центр большей окружности C находится в точке $z = 0$, ее радиус равен R, а центр меньшей окружности C', радиуса r, лежит в точке $z = a$ на действительной оси. Найдем точки P_1 и P_2, которые являются симметричными одновременно относительно обеих окружностей C и C'. Очевидно, эти точки лежат на действительной оси (рис. 6.10). Тогда их абсциссы x_1 и x_2 должны удовлетворять соотношениям

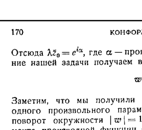


Рис. 6.10.

$$(x_1 - a)(x_2 - a) = r^2, \tag{6.44}$$
$$x_1\cdot x_2 = R^2. \tag{6.45}$$

Из (6.44) и (6.45) следует, что x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения

$$ax^2 - (R^2 - r^2 + a^2)x + aR^2 = 0. \tag{6.46}$$

Дискриминант этого уравнения $(R^2 - r^2 + a^2)^2 - 4a^2R^2$ положителен, так как имеет место очевидное соотношение $R - r > a$. Построим дробно-линейную функцию

$$w = \lambda\frac{z - x_1}{z - x_2}. \tag{6.47}$$

где x_1 и x_2 — абсциссы точек P_1 и P_2, найденные из уравнения (6.46). При отображении, осуществляемом функцией (6.47), окружности C и C' перейдут в некоторые окружности K и K' плоскости w, внешняя к окружностям C и C' точка P_2 — в точку $w = \infty$. Симметричная относительно окружностей C и C' точке P_2 точка P_1 должна при этом перейти в точку, симметричную точке $w = \infty$ относительно окружностей K и K'. Но точка, симметричная бесконечно удаленной точке, есть центр окружности. Следовательно, при отображении (6.47) точка P_1 перейдет в общий центр окружностей K и K'. Тем самым искомое отображение построено. Заметим, что в выражении (6.47) у нас остался произвол в определении параметра λ, однако изменение последнего приводит лишь к подобному растяжению плоскости w, что не может изменить отношения радиусов окружностей полученного концентрического кольца.

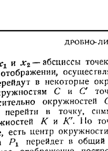


Рис. 6.11.

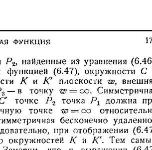


Рис. 6.12.

В заключение данного параграфа рассмотрим вопрос о применении дробно-линейной функции для построения конформного отображения двуугольников. *Двуугольником называется плоская фигура, образованная пересечением дуг двух окружностей*, вообще говоря, разных радиусов (рис. 6.11). Очевидно, углы при вершинах двуугольника равны друг другу. Пусть дан двуугольник с вершинами в точках $A(z_1)$ и $B(z_2)$ и углом α при вершине и требуется построить конформное отображение внутренней области данного двуугольника на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{6.48}$$

Дробно-линейная функция (6.48) производит конформное отображение полной плоскости z на полную плоскость ζ, при котором точка $z = z_1$ переходит в точку $\zeta = 0$, а точка $z = z_2$ — в точку $\zeta = \infty$. В силу кругового свойства дробно-линейной функции при отображении (6.48) окружности, образующие двуугольник, переходят также в окружности.

малый треугольник с вершиной в точке $z = 0$ данной функцией отображается на треугольник, который уже не является подобным исходному. Отметим, что в точке $z = 0$, где нарушается конформность отображения, производная функции $f(z) = z^n$ равна нулю. Продолжая наши рассмотрения, легко установить, что функция $w = z^n$ осуществляет конформное отображение области комплексной плоскости z, представляющей собой полную плоскость z, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$, на n-листную риманову поверхность обратной функции $z = \sqrt[n]{w}$. Причем точкам $z = 0$ и $z = \infty$, в которых нарушается конформность отображения, соответствуют точки $w = 0$ и $w = \infty$, являющиеся точками разветвления обратной функции.

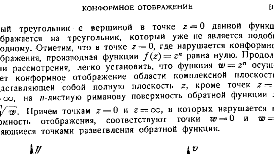


Рис. 6.3.

В общем случае степенная функция $w = f(z) = z^\alpha$, где $\alpha > 0$ — заданное действительное число, осуществляет отображение сектора $\frac{2\pi}{\alpha}k < \arg z < \frac{2\pi}{\alpha}(k+1)$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ своей римановой поверхности (бесконечнолистной для иррационального α, конечнолистной для рационального α) на полную плоскость w (луч $\arg z = \frac{2\pi}{\alpha}k$ отображается на положительную часть действительной оси). Ее производная $f'(z) = \alpha z^{\alpha-1}$ существует и отлична от нуля всюду внутри данного сектора, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$. Тем самым и эта функция осуществляет конформное отображение данного сектора на разрезанную плоскость w. В точках $z = 0$ и $z = \infty$, так же как и для функции $w = z^n$, конформность отображения нарушается.

Пример 2. Построить функцию, конформно отображающую первый квадрант плоскости z ($\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$) на верхнюю полуплоскость w ($\operatorname{Im} w > 0$).

Легко видеть, что функция

$$w = az^2 + b,$$

где $a > 0$ и b — произвольные действительные постоянные, дает решение этой задачи. В точках $z = 0$ и $z = \infty$ конформность отображения нарушается.

В гл. 3 мы рассмотрели отображение, осуществляемое показательной функцией $w = f(z) = e^z$. Было показано, что эта функция осуществляет взаимно однозначное отображение любой своей области однолистности — полосы $y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi$ плоскости z — на полную плоскость w, разрезанную по лучу $\arg w = y_0$. Так как производная рассматриваемой функции $f'(z) = e^z$ отлична от нуля всюду внутри данной полосы, то это отображение является конформным. Как легко видеть, при данном отображении ортогональная сетка декартовых координат $x = C_1$, $y = C_2$ внутри рассматриваемой полосы переходит в ортогональную сетку полярных координат $|w| = e^{C_1}$, $\arg w = C_2$ на плоскости w. Полная аналитическая функция $F(z) = e^z$, являющаяся целой функцией на плоскости z, осуществляет конформное отображение полной плоскости z на бесконечнолистную риманову поверхность обратной функции *) $z = \operatorname{Ln} w$. Заметим, что конформность отображения нарушается в окрестности точек $w = 0$ и $w = \infty$ плоскости w, являющихся точками разветвления функции $\operatorname{Ln} w$, где отображение не является взаимно однозначным.

Пример 3. Построить функцию, конформно отображающую полосу $0 < \operatorname{Re} z < a$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Функция $z_1 = \frac{\pi}{a}z$ отображает исходную полосу на полосу $0 < \operatorname{Re} z_1 < \pi$. Функция $z_2 = iz_1$ переводит полученную полосу в полосу $0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$. Наконец, функция $w = e^{z_2}$ осуществляет конформное отображение данной полосы на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Поэтому функция, осуществляющая заданное конформное отображение, может быть взята в виде

$$w = e^{i\frac{\pi}{a}z}.$$

3. Основные принципы. Мы рассмотрели некоторые простейшие примеры функций, осуществляющих конформные отображения, и с их помощью решили основную задачу конформного отображения для ряда простейших областей. Рассмотрение более сложных примеров требует использования общих принципов конформного отображения, к изложению которых мы переходим. При этом в ряде случаев ограничимся лишь формулировкой соответствующих положений, не проводя их строгого обоснования, что значительно выходит за рамки настоящего курса.

а) Взаимно однозначное соответствие. Как было отмечено, при конформном отображении области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z на область G плоскости w, осуществляемом аналитической

*) Построение римановой поверхности функции $\operatorname{Ln} w$, см. гл. 3, стр. 102.

Но окружность, проходящая через точки $\zeta=0$ и $\zeta=\infty$, имеет бесконечно большой радиус. Это означает, что при отображении (6.48) стороны двуугольника перейдут в лучи (I и II), выходящие из точки $\zeta=0$, причем угол между этими лучами равен углу α при вершине двуугольника (рис. 6.12). Итак, функция (6.48) осуществляет конформное отображение данного двуугольника на плоскости z на сектор с центральным углом α на плоскости ζ, причем луч I составляет с положительным направлением оси ξ угол α_0, значение которого определяется положением вершин A и B двуугольника. Как мы видели выше (гл. 6, стр. 155), функция

$$w=\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{6.49}$$

являющаяся непосредственным аналитическим продолжением действительной функции $x^{\frac{\pi}{\alpha}}$, $x>0$, осуществляет конформное отображение области внутри сектора $\alpha_0<\arg\zeta<\alpha_0+\alpha$ на полуплоскость $\frac{\alpha_0}{\alpha}\pi<\arg w<\frac{\alpha_0}{\alpha}\pi+\pi$. Остается перевести полученную полуплоскость в полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, для чего достаточно произвести поворот всей плоскости как целое на угол $-\frac{\alpha_0}{\alpha}\pi$, что может быть осуществлено путем умножения функции (6.49) на комплексное число $e^{-i\frac{\alpha_0}{\alpha}\pi}$. Итак, окончательно, искомая функция, осуществляющая конформное отображение двуугольника AB на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, принимает вид

$$w=e^{-i\frac{\alpha_0}{\alpha}\pi}\left(\frac{z_1-z}{z_2-z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{6.50}$$

Отметим, что конформность отображения нарушается в точках z_1 и z_2.

Пример 4. Построить конформное отображение верхней половины круга $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

Очевидно, данная область представляет собой двуугольник с вершинами в точках $z_1=-1$ и $z_2=1$ и углом $\alpha=\frac{\pi}{2}$ при вершине. Вспомогательная функция

$$\zeta=\frac{1+z}{1-z} \tag{6.51}$$

осуществляет конформное отображение этого двуугольника на первый квадрант плоскости ζ, а функция

$$w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \tag{6.52}$$

и дает искомое отображение.

§ 3. Функция Жуковского

Так называется функция комплексной переменной

$$w=f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right). \tag{6.53}$$

Эта функция была широко использована Н. Е. Жуковским при решении многих задач гидро- и аэродинамики.

Функция (6.53), очевидно, является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=0$, представляющей собой полюс первого порядка данной функции. Вычисляя производную функции (6.53), получаем

$$f'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right). \tag{6.54}$$

Отсюда следует, что производная функции Жуковского отлична от нуля во всех точках плоскости z, кроме точек ±1. Тем самым отображение, осуществляемое этой функцией, является конформным в окрестности любой точки z, за исключением этих двух точек. Найдем области однолистности функции Жуковского. Предположим, что две различные точки комплексной плоскости $z_1\neq z_2$ переводятся функцией $f(z)$ в одну и ту же точку плоскости w, т. е.

$$z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2},$$

или

$$z_1-z_2=\frac{z_1-z_2}{z_1\cdot z_2}. \tag{6.55}$$

Так как $z_1\neq z_2$, то из соотношения (6.55) следует

$$z_1\cdot z_2=1. \tag{6.56}$$

Полученное соотношение означает, что областями однолистности функции Жуковского являются, в частности, области внутри ($|z|<1$) и вне ($|z|>1$) единичного круга. Обе эти области функцией (6.53) отображаются конформно на одну и ту же область плоскости w. Чтобы определить эту область, рассмотрим отображение окружностей $|z|=r_0$, осуществляемое функцией (6.53). Для этого перейдем к показательной форме записи комплексных чисел: $z=re^{i\varphi}$ — и найдем выражение действительной и мнимой частей функции (6.53):

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\quad v(r,\ \varphi)=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{6.57}$$

Положив $r=r_0$ и исключив параметр φ, получим

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)^2}=1. \tag{6.58}$$

может быть получено лишь для ограниченного класса областей $\mathcal{G}$ с достаточно простой границей Γ.

Метод конформных преобразований дает достаточно универсальный алгоритм решения задачи Дирихле для плоских областей. Начнем с решения задачи Дирихле для круга радиуса a. Введем полярную систему координат r, φ с началом в центре круга. Тогда функция $\alpha(P)$ будет функцией лишь переменной φ. Постараемся выразить значение неизвестной функции $u(r,\ \varphi)$ в произвольной внутренней точке $(r_0,\ \varphi_0)$ круга через ее граничные значения $\alpha(\varphi)$. Для этого построим конформное отображение заданного круга на единичный круг $|w|<1$ плоскости w, при котором точка r_0, φ_0 перейдет в центр $w=0$. Решение этой задачи легко получить с помощью дробно-линейной функции, рассмотренной в гл. 6 (см. § 2). Отображающая функция имеет вид

$$w=f(z)=\lambda\frac{z-z_0}{z-\frac{a^2}{\bar z_0}}=\lambda\frac{z-r_0e^{i\varphi_0}}{z-\frac{a^2}{r_0}e^{i\varphi_0}}, \tag{7.15}$$

где постоянная λ выбирается из условия, чтобы граничные точки $z=ae^{i\varphi}$ заданного круга перешли в граничные точки $|w|=1$ единичного круга плоскости w; при этом $|\lambda|=\frac{a}{r_0}$, а $\arg\lambda$, определяющий поворот круга $|w|\leqslant1$ вокруг его центра $w=0$, может быть выбран произвольным. В результате произведенного преобразования искомая функция $u(r,\ \varphi)$ перейдет в функцию $U(\rho,\ \psi)=u[r(\rho,\ \psi),\ \varphi(\rho,\ \psi)]$, где ρ, ψ — полярные координаты на плоскости w, связанные с координатами r, φ соотношением (7.15). При этом заданная граничная функция $\alpha(\varphi)$ перейдет в функцию $A(\psi)=\alpha[\varphi(1,\ \psi)]$. Так как функция $U(\rho,\ \psi)$ является гармонической функцией своих переменных, то ее значение в центре круга может быть найдено по формуле среднего значения (7.4), откуда

$$u(r_0,\ \varphi_0)=U|_{w=0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A(\psi)\,d\psi. \tag{7.16}$$

Из (7.16) мы получим явное выражение решения задачи Дирихле для круга, если выразим функцию $A(\psi)$ через первоначально заданную функцию $\alpha(\varphi)$. Заметим, что для соответствия граничных точек круга $|z|\leqslant a$ и круга $|w|\leqslant1$ формула (7.15) дает

$$e^{i\psi}=\frac{a}{r_0}\,\frac{ae^{i\varphi}-r_0e^{i\varphi_0}}{ae^{i\varphi}-\frac{a^2}{r_0}e^{i\varphi_0}}, \tag{7.17}$$

откуда

$$d\psi=\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi.$$

Поэтому, сделав в интеграле (7.16) замену переменной интегрирования $\psi=\psi(\varphi)$, где связь переменных ψ и φ определяется формулой (7.17), получим

$$u(r_0,\ \varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,\alpha(\varphi)\,d\varphi. \tag{7.18}$$

Формула (7.18) и дает явное аналитическое выражение решения задачи Дирихле для круга радиуса a через функцию граничных условий $\alpha(\varphi)$. Эта формула, носящая название интеграла Пуассона, может быть получена и рядом других способов, например методом разделения переменных или с помощью функции источника *).

Полученные результаты позволяют в принципе решить задачу Дирихле для любой области $\mathcal{G}$, которую можно конформно отобразить на единичный круг $|w|\leqslant1$ плоскости w. Действительно, при конформном отображении уравнение Лапласа сохраняется, а решение задачи Дирихле для круга нами получено. Совершив в интеграле (7.18) или (7.16) замену переменной интегрирования, исходя из связи граничных точек области $\mathcal{G}$ и единичной окружности $|w|=1$ при данном конформном отображении, мы и получим выражение решения задачи Дирихле во внутренних точках области через граничную функцию (7.14).

Пример 1. Решение задачи Дирихле для полуплоскости. Пусть требуется определить ограниченную на бесконечности функцию $u(x,\ y)$, гармоническую в верхней полуплоскости $y>0$, непрерывную при $y\geqslant0$ и принимающую заданные значения:

$$u(x,\ 0)=\alpha(x)\quad\text{при } y=0. \tag{7.19}$$

Отобразим конформно верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на внутренность единичного круга $|w|<1$ так, чтобы заданная точка $z_0=x_0+iy_0$ ($y_0>0$) перешла в центр $w=0$ этого круга. Как легко видеть, это преобразование осуществляется дробно-линейной функцией:

$$w=f(z)=\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}. \tag{7.20}$$

При этом граничные точки связаны соотношением

$$e^{i\psi}=\frac{x-z_0}{x-\bar z_0}, \tag{7.21}$$

и граничная функция $\alpha(x)$ переходит в функцию $A(\psi)=\alpha[x(\psi)]$, где $x(\psi)$ определяется из соотношения (7.21). Заметим, что соотношение (7.21) дает

$$d\psi=\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,dx. \tag{7.22}$$

*) См. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнение математической физики, «Наука», 1972.

..., α_n — положительные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=n-2, \tag{6.63}$$

$$0<\alpha_i<2. \tag{6.64}$$

В подынтегральном выражении выбраны те ветви функций $(\zeta-a_i)^{\alpha_i-1}$, которые являются непосредственным аналитическим продолжением в верхнюю полуплоскость действительных функций $(x-a_i)^{\alpha_i-1}$ действительной переменной $x>a_i$. В таком случае функция (6.62) является однозначной аналитической функцией в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Точки a_i, лежащие на действительной оси, являются особыми точками этой функции. Функция (6.62) и называется интегралом Шварца — Кристоффеля. Функция (6.62) при соответствующем выборе точек a_i осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на область внутри некоторого n-угольника на плоскости w. Будем вначале считать, что все числа a_i ограничены. Покажем, что при этом функция (6.62) остается ограниченной всюду при $\operatorname{Im} z\geqslant0$. В силу условия (6.64) интеграл (6.62) остается ограниченным в окрестности особых точек a_i. Убедимся, что интеграл (6.62) остается ограниченным и при $z\to\infty$. Преобразуем подынтегральную функцию, использовав условие (6.63):

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=\zeta^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n}\left(1-\frac{a_1}{\zeta}\right)^{\alpha_1-1}\ldots\left(1-\frac{a_n}{\zeta}\right)^{\alpha_n-1}=\\&=\frac{1}{\zeta^2}\left(1-\frac{a_1}{\zeta}\right)^{\alpha_1-1}\ldots\left(1-\frac{a_n}{\zeta}\right)^{\alpha_n-1}.\end{aligned} \tag{6.65}$$

Из полученного выражения и следует сходимость интеграла при $z\to\infty$. Таким образом, интеграл (6.62), являющийся однозначной аналитической функцией z в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, осуществляет отображение этой полуплоскости на некоторую ограниченную область $\mathcal{G}$ плоскости w.

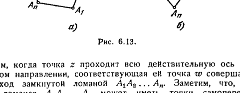
Посмотрим, в какую кривую при этом переходит действительная ось плоскости z. Рассмотрим выражение производной функции (6.62):

$$f'(z)=C(z-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n-1}. \tag{6.66}$$

Из этого выражения следует, что производная функции $f(z)$ отлична от нуля всюду в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant0$, за исключением особых точек a_i, в которых она обращается в нуль или бесконечность. При изменении z на каждом из интервалов $a_k<x<a_{k+1}$ ($k=1,\ \ldots,\ n-1$) действительной оси аргумент производной не меняется. Действительно, в силу указанного выше выбора ветвей функций $(z-a_i)^{\alpha_i-1}$ аргумент этих функций на данных интервалах действительной оси принимает значения

$$\arg(x-a_i)^{\alpha_i-1}=\begin{cases}\pi(\alpha_i-1), & x<a_i,\\ 0, & x>a_i,\end{cases} \tag{6.67}$$

что и доказывает высказанное утверждение. В силу геометрического смысла аргумента производной *) это означает, что отрезки действительной оси $a_k<x<a_{k+1}$ функцией $f(z)$ отображаются также на прямолинейные отрезки плоскости w. При этом точки a_k действительной оси функцией (6.62) переводятся в точки A_k плоскости w — концы соответствующих прямолинейных отрезков A_kA_{k+1}, на которые функция (6.62) отображает отрезки действительной оси $[a_k,\ a_{k+1}]$. Тем самым *функция* (6.62), *непрерывная и однозначная на действительной оси, производит отображение действительной оси плоскости z на некоторую замкнутую ломаную $A_1A_2\ldots A_n$, звеньями которой являются прямолинейные отрезки* A_kA_{k+1} (рис. 6.13).



а) б)

Рис. 6.13.

При этом, когда точка z проходит всю действительную ось в положительном направлении, соответствующая ей точка w совершает полный обход замкнутой ломаной $A_1A_2\ldots A_n$. Заметим, что, вообще говоря, ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ может иметь точки самопересечения (рис. 6.13, б).

Определим теперь величину углов между соседними отрезками полученной ломаной. Для этого рассмотрим, как меняется аргумент производной (6.66) при переходе z через точку a_i. Из (6.67) следует, что при движении точки z по действительной оси в положительном направлении, при котором особая точка a_i обходится по дуге бесконечно малого радиуса в верхней полуплоскости, аргумент производной изменяет свое значение на величину $-\pi(\alpha_i-1)$. В силу геометрического смысла аргумента производной это означает, что величина угла между направлениями векторов **) $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ и $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ равна

*) Аргумент производной функции $f(z)$ в точке z_0 определяет величину угла, на который нужно повернуть касательную к любой гладкой кривой γ, проходящей через точку z_0, чтобы получить касательную к образу этой кривой в точке $w_0=f(z_0)$.

**) При этом под углом между направлениями пересекающихся прямых b_1, b_2 мы понимаем величину угла наикратчайшего поворота, совмещающего прямую b_1 с прямой b_2.

Так как движение потенциальное, то существует скалярная функция $u(x,\ y)$, называемая потенциалом скоростей, связанная с вектором скорости $\mathbf{v}$ соотношением

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad}u(x,y), \tag{7.32}$$

т. е.

$$\mathrm{v}_x=\frac{\partial u}{\partial x}\quad\text{и}\quad\mathrm{v}_y=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7.33}$$

При этом вектор скорости $\mathbf{v}$ в каждой точке течения направлен по нормали к линии уровня $u(x,\ y)=\text{const}$ потенциала скоростей. Подставив (7.32) в уравнение (7.31), получим

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, \tag{7.34}$$

т. е. в рассматриваемом случае потенциал скоростей является гармонической функцией.

Построим аналитическую функцию комплексной переменной $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, для которой потенциал $u(x,\ y)$ рассматриваемого течения является действительной частью. Как было отмечено (см. стр. 34), при этом функция $f(z)$ определена с точностью до постоянного слагаемого. Ранее (см. стр. 35) было показано, что линии уровня $u(x,\ y)=\text{const}$ и $v(x,\ y)=\text{const}$ действительной и мнимой частей аналитической функции взаимно ортогональны. Поэтому вектор скорости $\mathbf{v}$ в каждой точке течения направлен по касательной к линии уровня $v(x,\ y)=\text{const}$, проходящей через данную точку. Функция $v(x,\ y)$, являющаяся мнимой частью построенной таким образом аналитической функции $f(z)$, называется функцией тока, а сама функция $f(z)$ комплексным потенциалом течения.

Область течения, ограниченная двумя линиями тока $v(x,\ y)=C_1$ и $v(x,\ y)=C_2$, называется трубкой тока. Так как скорость жидкости в любой точке направлена по касательной к линии тока, то в силу несжимаемости жидкости и стационарного характера движения количество жидкости, протекающее за единицу времени через любые два поперечных сечения S_1 и S_2 трубки тока, остается постоянным. Таким образом, разность значений постоянных C_1 и C_2 определяет расход жидкости в данной трубке тока.

Из условий Коши — Римана и формул (7.33) следует, что компоненты скорости могут быть выражены через частные производные от функции тока:

$$\mathrm{v}_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad\mathrm{v}_y=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7.35}$$

Как было отмечено в гл. 1, комплексное число $w=\mathrm{v}_x+i\mathrm{v}_y$ можно интерпретировать как плоский вектор с компонентами v_x и v_y. Имеет место очевидное соотношение

$$w=\mathrm{v}_x+i\mathrm{v}_y=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}=\overline{f'(z)}, \tag{7.36}$$

которое связывает вектор скорости и производную от комплексного потенциала течения.

В гидродинамике существенную роль играют понятия циркуляции и потока вектора скорости. Дадим выражение этих величин через комплексный потенциал течения.

Рассмотрим кусочно-гладкую плоскую кривую C (разомкнутую или замкнутую) и введем на ней векторы дифференциалов дуги $d\mathbf{s}$ и нормали $d\mathbf{n}$ с помощью соотношений

$$d\mathbf{s}=\mathbf{i}\,dx+\mathbf{j}\,dy, \tag{7.37}$$

$$d\mathbf{n}=\mathbf{i}\,dy-\mathbf{j}\,dx. \tag{7.38}$$

Имеет место очевидное соотношение $\mathbf{n}\,ds=d\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к кривой C, а ds — дифференциал длины дуги этой кривой.

При положительном обходе замкнутой кривой C формула (7.38) дает направление внешней нормали.

Потоком вектора скорости $\mathbf{v}$ через кривую C (разомкнутую или замкнутую) называется криволинейный интеграл от нормальной составляющей скорости

$$N_C=\int_C(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,ds. \tag{7.39}$$

Очевидно, этот интеграл определяет количество жидкости, протекающей через кривую C за единицу времени. Интеграл (7.39) запишем в виде

$$N_C=\int_C\mathbf{v}\,d\mathbf{n}=\int_C\mathrm{v}_x\,dy-\mathrm{v}_y\,dx=\int_C\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx=\int_C\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy. \tag{7.40}$$

При определении подъемной силы, действующей со стороны потока жидкости на обтекаемое им тело, большое значение имеет степень завихренности потока, которая характеризуется значением циркуляции. Циркуляцией вектора скорости вдоль кривой C называется криволинейный интеграл от касательной составляющей вектора скорости:

$$\Gamma_C=\int_C\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}. \tag{7.41}$$

Выражая скорость $\mathbf{v}$ через комплексный потенциал, получим

$$\Gamma_C=\int_C\mathbf{v}\,d\mathbf{s}=\int_C\mathrm{v}_x\,dx+\mathrm{v}_y\,dy=\int_C\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\int_C\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy. \tag{7.42}$$

Рассмотрим на комплексной плоскости интеграл вдоль кривой C от производной комплексного потенциала:

$$\int_C f'(z)\,dz=\int_C\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy+i\int_C\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy. \tag{7.43}$$

7 Зак. 2862

условия. Введем новую комплексную переменную t, связанную с z соотношением

$$z=a_n-\frac{1}{t}. \tag{6.68}$$

При этом точка $z=a_n$ переходит в точку $t=\infty$. Данное преобразование означает, что при отображении верхней полуплоскости $\operatorname{Im} t>0$ на внутренность многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ плоскости w бесконечно удаленная точка $t=\infty$ отображается на вершину A_n. На комплексной плоскости t функция (6.62) имеет вид

$$\begin{aligned}w=C\int_{t_0}^{t}\left(a_n-a_1-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_1-1}\ldots\left(a_n-a_{n-1}-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_{n-1}-1}\left(-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_n-1}\frac{d\tau}{\tau^2}+\\+C_1=A\int_{t_0}^{t}(\tau-a_1')^{\alpha_1-1}\ldots(\tau-a_{n-1}')^{\alpha_{n-1}-1}\,d\tau+C_1.\end{aligned} \tag{6.69}$$

Здесь использовано соотношение (6.63) и введены обозначения

$$a_i'=(a_n-a_i)^{-1},\quad t_0=\frac{1}{a_n-z_0},$$

$$A=C(a_n-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(a_n-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}(-1)^{\alpha_n-1}.$$

Соотношение (6.69) означает, что в том случае, когда при конформном отображении верхней полуплоскости на внутренность многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ бесконечно удаленная точка $t=\infty$ переходит в одну из вершин (A_n), это отображение осуществляется интегралом Шварца — Кристоффеля (6.69), в подынтегральной функции которого опущен множитель, соответствующий данной вершине (A_n). Это обстоятельство часто используется на практике, поскольку, как мы отметили выше (замечание 1), при решении задач о построении конформного отображения верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на заданный многоугольник плоскости w приходится, в случае большого числа вершин многоугольника, определять большое число неизвестных.

Рассмотрим некоторые простейшие примеры.

Пример 1. Найти функцию, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на сектор $0<\arg w<\alpha\pi$, $0<\alpha<2$.

Так как данный сектор представляет собой многоугольник с вершинами $A_1(w=0)$ и $A_2(w=\infty)$, то для решения задачи можно применить интеграл Шварца — Кристоффеля. Установим следующее соответствие точек действительной оси z вершинам данного многоугольника:

$$\begin{aligned}a_1(z=0)&\to A_1(w=0),\\a_2(z=\infty)&\to A_2(w=\infty).\end{aligned} \tag{6.70}$$

Тогда согласно (6.69) отображающая функция принимает вид

$$w=f(z)=C\int_{z_0}^{z}\zeta^{\alpha-1}\,d\zeta+C_1.$$

Положив $z_0=0$ и использовав (6.70), найдем, что постоянная C_1 равна нулю. Отсюда

$$w=C\int_0^z\zeta^{\alpha-1}\,d\zeta=\frac{C}{\alpha}z^\alpha. \tag{6.71}$$

Функция (6.71) определена с точностью до постоянного множителя, определяющего преобразование подобия. Данный произвол связан с тем, что условия (6.70) содержат требование соответствия лишь двух граничных точек, а, как мы видели (см. замечание на стр. 163), функция, осуществляющая конформное отображение, однозначно определяется заданием соответствия трех граничных точек. Потребовав, например, чтобы наряду с (6.70) имело место дополнительное соответствие граничных точек

$$z=1\to w=1,$$

определим значение оставшейся в (6.71) произвольной постоянной $C=\alpha$.

Итак, окончательно, функция

$$w=z^\alpha \tag{6.72}$$

осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на заданный сектор плоскости w. При этом в силу указанного выше выбора ветвей в подынтегральной функции интеграла Шварца — Кристоффеля (6.62) должна быть взята та ветвь многозначной функции (6.72), которая является непосредственным аналитическим продолжением действительной функции x^α действительной положительной переменной x.

Пример 2. Найти функцию, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на прямоугольник $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 6.15).

Пусть вершины прямоугольника на плоскости w расположены в точках $A_1(w=a)$, $A_2(w=a+ib)$, $A_3(w=-a+ib)$, $A_4(w=-a)$. Положим, что с помощью некоторой функции $f_1(z)$ произведено конформное отображение первого квадранта плоскости z ($\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$) на правую половину OA_1A_2O' прямоугольника (рис. 6.15), при котором положительная часть мнимой оси плоскости z перешла в отрезок OO'. Тогда на основании принципа симметрии (см. стр. 159) функция, являющаяся аналитическим продолжением $f_1(z)$ в область ($\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Im} z>0$), осуществляет конформное отображение данной области на левую часть исходного прямоугольника. При этом в вершины A_1 и A_4 переходят соответственно симметричные точки действительной оси z. То же имеет место для вершин A_2 и A_3. Поэтому можем установить следующее соответствие точек:

$$\begin{aligned}a_1(z=1)&\to A_1(w=a),\\a_4(z=-1)&\to A_4(w=-a).\end{aligned} \tag{6.73}$$

постоянной. В результате получим

$$f_0(z)=\frac{m}{z}. \tag{7.51}$$

Функция (7.51) представляет собой комплексный потенциал диполя мощности m, находящегося в начале координат. Линии тока диполя, очевидно, определяются уравнениями

$$-\frac{my}{x^2+y^2}=C$$

или

$$C(x^2+y^2)+my=0, \tag{7.52}$$

т. е. представляют собой окружности с центрами на оси y, касающиеся оси x в начале координат. При этом абсолютная величина скорости, равная

$$|w|=\frac{m}{|z|^2}=\frac{m}{x^2+y^2}, \tag{7.53}$$

стремится к нулю на бесконечности.

д) Рассмотрим течение, комплексный потенциал которого имеет вид

$$f(z)=\mathrm{v}_\infty z+\frac{m}{z}, \tag{7.54}$$

где v_∞ и m — положительные действительные числа. Очевидно, это течение представляет собой суперпозицию плоскопараллельного течения со скоростью, параллельной оси x и равной v_∞, и течения, создаваемого диполем мощности m, находящимся в начале координат. Линии тока этого течения определяются уравнениями

$$\mathrm{v}_\infty y-\frac{my}{x^2+y^2}=C. \tag{7.55}$$

Значению $C=0$ соответствует линия тока, уравнение которой имеет вид

$$y\left(\mathrm{v}_\infty-\frac{m}{x^2+y^2}\right)=0.$$

Она распадается на прямую $y=0$ и окружность $x^2+y^2=a^2$, где $a^2=\frac{m}{\mathrm{v}_\infty}$. Так как

$$f'(z)=\mathrm{v}_\infty-\frac{m}{z^2}=\mathrm{v}_\infty\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right), \tag{7.56}$$

то на бесконечности скорость течения равна v_∞ и направлена вдоль оси x. В точках окружности $x^2+y^2=a^2$, являющейся линией тока, скорость направлена по касательной к этой окружности. Для абсолютной величины скорости в точках окружности $z=ae^{i\varphi}$ из фор-

мул (7.36) и (7.56) получим

$$|w|\,\big|_{|z|=a}=|\overline{f'(z)}|\,\big|_{|z|=a}=\mathrm{v}_\infty|1-e^{2i\varphi}|=2\mathrm{v}_\infty|\sin\varphi|. \tag{7.57}$$

В рассмотренных примерах мы по заданному комплексному потенциалу определяли гидродинамические характеристики течения. Перейдем теперь к решению в определенном смысле обратной задачи, *задачи об определении комплексного потенциала течения по его гидродинамическим характеристикам*. Заметим, что поскольку физическая скорость течения выражается через производную комплексного потенциала (см. формулу (7.36)), то сам комплексный потенциал для заданного течения определяется неоднозначно. Однако его производная является однозначной аналитической функцией. Это означает, что в окрестности любой правильной точки течения имеет место разложение

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \tag{7.58}$$

а в окрестности изолированной особой точки — разложение

$$f'(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-z_0)^n. \tag{7.59}$$

Из (7.59) для комплексного потенциала в окрестности особой точки z_0 получим разложение

$$f(z)=b_{-1}\ln(z-z_0)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \tag{7.60}$$

В частности, если бесконечно удаленная точка z_∞ принадлежит области течения и комплексная скорость

$$w_\infty=(\mathrm{v}_x)_\infty+i(\mathrm{v}_y)_\infty$$

течения в этой точке ограничена, то разложение комплексного потенциала в окрестности точки z_∞ имеет вид

$$f(z)=\overline{w}_\infty z+b_{-1}\ln z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}. \tag{7.61}$$

Отсюда получим

$$\int_{C_R}f'(z)\,dz=2\pi ib_{-1}, \tag{7.62}$$

где C_R — окружность $|z|=R$ достаточно большого радиуса R, вне которой нет особых точек функции $f(z)$, за исключением точки z_∞. С другой стороны, в силу формулы (7.44) интеграл (7.62) определяет поток и циркуляцию вектора скорости через кривую C_R. Так как

ГЛАВА 7

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Методы теории функций комплексной переменной весьма широко и эффективно применяются для решения большого числа математических задач, возникающих в различных областях естествознания. В частности, применение аналитических функций дает во многих случаях достаточно простые способы решения краевых задач для уравнения Лапласа, к которым приводятся различные задачи гидро- и аэродинамики, теории упругости, электростатики и т. д. Это определяется тесной связью, существующей между аналитическими функциями комплексной переменной и гармоническими функциями двух действительных переменных. В настоящей главе мы остановимся на некоторых общих вопросах применения аналитических функций к решению краевых задач для уравнения Лапласа и приведем ряд примеров решения физических и механических задач.

§ 1. Общие положения

1. Связь аналитических и гармонических функций. Пусть в области $\mathcal{G}$ комплексной плоскости z задана аналитическая функция $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$. Тогда всюду в этой области функции u и v связаны условиями Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7.1}$$

Так как аналитическая функция имеет в области $\mathcal{G}$ производные всех порядков, то и действительные функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ имеют в соответствующей области плоскости x, y частные производные любого порядка. Это позволяет дифференцировать выражения (7.1) по переменным x, y любое число раз. Продифференцировав первое из равенств (7.1) по x, второе — по y и сложив, получим

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\quad x,\ y\in\mathcal{G}. \tag{7.2}$$

Аналогично продифференцировав первое из равенств (7.1) по y, второе — по x и вычтя одно из другого, получим

$$\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}=0,\quad x,\ y\in\mathcal{G}, \tag{7.3}$$

откуда следует, что функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ являются гармоническими в данной области плоскости x, y. Итак, действительная и мнимая части функции $f(z)$, аналитической в области $\mathcal{G}$, являются гармоническими функциями в соответствующей области плоскости x, y. При этом данные гармонические функции связаны условиями (7.1). С другой стороны, если в области $\mathcal{G}$ плоскости x, y заданы две гармонические функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$, удовлетворяющие в этой области условиям (7.1), то функция $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ комплексной переменной $z=x+iy$ является аналитической в соответствующей области плоскости z. Тем самым *необходимым и достаточным условием аналитичности функции $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ в области $\mathcal{G}$ является требование, чтобы функции $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ были гармоническими и удовлетворяли условиям* (7.1) *в соответствующей области плоскости* x, y. В гл. 1 (см. стр. 34) было показано, что заданием лишь одной действительной (или одной мнимой) части аналитической функции комплексной переменной последняя определяется с точностью до постоянного слагаемого. Отсюда следует, что все аналитические функции комплексной переменной, для которых заданная гармоническая функция двух действительных переменных является действительной (или мнимой) частью, различаются только на аддитивную постоянную.

Установленная связь между аналитическими и гармоническими функциями позволяет использовать для изучения различных свойств гармонических функций свойства аналитических функций. Так, например, из формулы среднего значения аналитической функции (см. гл. 1, стр. 48) непосредственно получается формула среднего значения для гармонической функции

$$u(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_{R_0}}u(\xi,\ \eta)\,ds, \tag{7.4}$$

где точка x_0, y_0 является центром круга C_{R_0} радиуса R_0, целиком лежащего в области гармоничности функции $u(x,\ y)$.

2. Сохранение оператора Лапласа при конформном отображении. Пусть в области $\mathcal{G}$ плоскости x, y задана гармоническая функция $u(x,\ y)$; т. е.

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\quad x,\ y\in\mathcal{G}. \tag{7.5}$$

С помощью невырожденного преобразования независимых переменных

$$\xi=\xi(x,\ y),\quad\eta=\eta(x,\ y), \tag{7.6}$$

$$\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)}\neq0,\quad x,\ y\in\mathcal{G}, \tag{7.7}$$

ний тока (рис. 7.1). При $\left|\frac{\Gamma_\infty}{4\pi\mathrm{v}_\infty}\right|=R$ обе критические точки совпадают (с точкой $z=iR$ при $\Gamma_\infty>0$ или точкой $z=-iR$ при $\Gamma_\infty<0$). Наконец, при $\left|\frac{\Gamma_\infty}{4\pi\mathrm{v}_\infty}\right|>R$ в области $|z|>R$ остается лишь одна критическая точка, лежащая на мнимой оси y. (Как следует из уравнения (7.69), произведение корней этого уравнения равно $-R^2$, поэтому вторая критическая точка лежит внутри окружности $|z|=R$.) Через эту точку проходит линия тока, отделяющая замкнутые линии тока течения от незамкнутых (рис. 7.2).

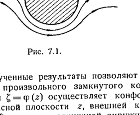


Рис. 7.1.

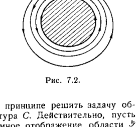


Рис. 7.2.

Полученные результаты позволяют в принципе решить задачу обтекания произвольного замкнутого контура C. Действительно, пусть функция $\zeta=\varphi(z)$ осуществляет конформное отображение области $\mathcal{G}$ комплексной плоскости z, внешней контуру C, на область $\mathcal{G}'$ плоскости ζ, внешнюю единичной окружности $|\zeta|=1$, так что $\varphi(\infty)=\infty$. Тогда, очевидно, рассматриваемая задача оказывается эквивалентной задаче обтекания кругового цилиндра единичного радиуса. При этом скорость потока на бесконечности, которая, вообще говоря, изменится, может быть легко определена. Комплексный потенциал $f(z)$ исходного течения при данном конформном преобразовании перейдет в функцию $F(\zeta)=f[z(\zeta)]$. Поэтому по формуле (7.36) найдем

$$\overline{W}_\infty=\frac{dF}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\infty}=\frac{df}{dz}\Big|_{z=\infty}\frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\infty}=\overline{w}_\infty\frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\infty}$$

и

$$W_\infty=w_\infty\frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\infty}.$$

В силу формул (7.67) и (7.68) решение преобразованной задачи имеет вид

$$F(\zeta)=\overline{W}_\infty\zeta+\frac{W_\infty}{\zeta}+\frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\ln\zeta.$$

Отсюда для решения исходной задачи получим выражение

$$f(z)=F[\zeta(z)]=\overline{w}_\infty\frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\infty}\varphi(z)+\frac{w_\infty\frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\infty}}{\varphi(z)}+\frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\ln\varphi(z). \tag{7.71}$$

В качестве примера рассмотрим бесциркуляционное обтекание бесконечной пластинки плоским потоком жидкости. Пусть плоскость x, y пересекает пластинку по отрезку $-a\leqslant x\leqslant a$, а вектор скорости потока лежит в плоскости x, y и на бесконечности имеет заданное значение w_∞. Как следует из рассмотрения свойств функции Жуковского (см. гл. 6, стр. 173), функция

$$z=\frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)=\psi(\zeta) \tag{7.72}$$

осуществляет конформное отображение внешности единичного круга плоскости ζ на плоскость z, разрезанную по отрезку $-a\leqslant x\leqslant a$. При этом $\psi(\infty)=\infty$ и $\frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\infty}=\frac{a}{2}$. Поэтому рассматриваемая задача эквивалентна задаче обтекания без циркуляции кругового цилиндра единичного радиуса на плоскости ζ потоком, имеющим на бесконечности комплексную скорость $W_\infty=\frac{a}{2}w_\infty$. Комплексный потенциал последней задачи имеет вид

$$F(\zeta)=\frac{a}{2}\left(\overline{w}_\infty\zeta+\frac{w_\infty}{\zeta}\right).$$

Подставим сюда вместо ζ и $\frac{1}{\zeta}$ найденные из (7.72) величины

$$\zeta=\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a},\quad\frac{1}{\zeta}=\frac{z-\sqrt{z^2-a^2}}{a}.$$

Здесь $\sqrt{z^2-a^2}>0$ при $z=x>a$. Разобьем w_∞ на действительную и мнимую части:

$$w_\infty=(\mathrm{v}_x)_\infty+i(\mathrm{v}_y)_\infty.$$

Тогда для комплексного потенциала исходной задачи получим окончательное выражение

$$f(z)=(\mathrm{v}_x)_\infty z-i(\mathrm{v}_y)_\infty\sqrt{z^2-a^2}. \tag{7.73}$$

В заключение найдем силу, действующую со стороны потока на обтекаемое им тело. Сила давления, действующая на элемент ds дуги контура C, пропорциональна гидродинамическому давлению p в данной точке потока и направлена по направлению внутренней нормали $-d\mathbf{n}=-\mathbf{i}\,dy+\mathbf{j}\,dx$. Поэтому для компонент силы, действующей на контур C, получим выражения

$$R_x=-\int_C p\,dy,\qquad R_y=\int_C p\,dx.$$

Значение искомой функции $u(x, y)$ в точке x_0, y_0 определяется интегралом (7.16). Произведя в нем замену переменной интегрирования по формулам (7.21), (7.22), получим

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\alpha(x)\,dx, \tag{7.23}$$

что и дает решение поставленной задачи. Формула (7.23), дающая решение задачи Дирихле для полуплоскости, носит также название интеграла Пуассона.

4. Построение функции источника. Методы конформного отображения позволяют построить функцию источника первой краевой задачи для уравнения Лапласа в плоской области $\mathscr{G}$, которую можно конформно отобразить на единичный круг $|w|<1$ плоскости w. Как известно, функция источника $G(M_0, M)$ данной задачи определяется следующими условиями:

1)
$$\Delta_M G(M_0, M) = 0 \quad \text{при} \quad M \neq M_0; \tag{7.24}$$

2) в окрестности точки M_0

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}} + v(M_0, M), \tag{7.25}$$

где функция $v(M_0, M)$ является гармонической функцией точки M всюду в области $\mathscr{G}$;

3)
$$G(M_0, M)|_{M\in\Gamma} = 0, \tag{7.26}$$

где Γ — граница области $\mathscr{G}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 7.1. *Если функция $w = f(z_0, z)$ осуществляет конформное отображение заданной области $\mathscr{G}$ плоскости z на внутренность единичного круга $|w|<1$ так, что точка $z_0 \in \mathscr{G}$ переходит в центр $w=0$ этого круга, то функция*

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z_0, z)|} \tag{7.27}$$

является функцией источника первой краевой задачи для уравнения Лапласа в области $\mathscr{G}$. Здесь координаты точки $M \in \mathscr{G}$ суть x, y и $z = x + iy$.

Доказательство. Для доказательства теоремы проверим, что функция, определенная формулой (7.27), удовлетворяет условиям (7.24)—(7.26). Функция $f(z, z_0)$, осуществляющая данное конформное отображение, является аналитической функцией, причем $f(z, z_0) \neq 0$ при $z \neq z_0$. Отсюда следует, что и функция

$$\ln f(z, z_0) = \ln|f(z, z_0)| + i\arg f(z, z_0)$$

является аналитической функцией всюду в области $\mathscr{G}$, за исключением точки z_0. Так как действительная часть аналитической функции есть функция гармоническая, то условие (7.24) выполнено. Поскольку $f'(z, z_0) \neq 0$ всюду в области $\mathscr{G}$, включая и точку $z = z_0$, а $f(z_0, z_0) = 0$, то точка z_0 является нулем первого порядка данной функции, т. е. в окрестности этой точки имеет место разложение

$$f(z, z_0) = (z - z_0)\,\varphi(z, z_0),$$

где $\varphi(z, z_0)$ — аналитическая в окрестности точки z_0 функция, причем $\varphi(z_0, z_0) \neq 0$. Отсюда следует выполнение условия (7.25) для функции (7.27). Наконец, так как $|f(z, z_0)|_\Gamma = 1$, то функция (7.27) удовлетворяет и условию (7.26). Теорема доказана.

Приведем пример применения доказанной теоремы.

Пример 2. Построить функцию источника первой краевой задачи для уравнения Лапласа в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \pi$.

Согласно только что доказанной теореме для решения задачи надо построить конформное отображение данной полосы плоскости z на внутренность единичного круга $|w|<1$, при котором заданная точка z_0 переходила бы в центр круга $w = 0$. Как легко видеть, функция, осуществляющая требуемое отображение, имеет вид

$$f(z_0, z) = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\bar z_0}}. \tag{7.28}$$

Поскольку имеет место соотношение

$$|e^z - e^{z_0}| = [(e^x\cos y - e^{x_0}\cos y_0)^2 + (e^x\sin y - e^{x_0}\sin y_0)^2]^{1/2} = e^{\frac{x+x_0}{2}}\sqrt{2}\,[\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)]^{1/2},$$

то после элементарных преобразований получим искомую функцию в виде

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z_0, z)|} = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}. \tag{7.29}$$

§ 2. Приложения к задачам механики и физики

1. Плоское установившееся движение жидкости. Будем рассматривать плоское потенциальное установившееся течение несжимаемой идеальной жидкости. Как известно, в случае потенциального движения в области, свободной от источников, вектор скорости $\mathbf{v}(x, y)$ удовлетворяет уравнениям *)

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \tag{7.30}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{7.31}$$

*) См. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

Из соотношения (6.58) следует, что функция (6.53) отображает концентрические окружности $|z| = r_0$ в эллипсы. Как легко видеть, фокусы всех эллипсов (6.58) лежат в одних и тех же точках действительной оси u:

$$c = \pm 1. \tag{6.59}$$

Тем самым функция (6.53) производит отображение семейства концентрических окружностей $|z| = r_0$ плоскости z на семейство софокусных эллипсов плоскости w. При этом, если $r_0 < 1$, то положительному направлению обхода эллипса (6.58), если $r_2 = \frac{1}{r_1} > 1$, то положительному направлению обхода окружности $|z| = r_2$ соответствует отрицательное направление обхода эллипса (6.58). При $r_1 \to 1$ эллипс (6.58) вырождается в отрезок $[-1, 1]$ действительной оси u, проходимый дважды. При $r_1 \to 0$ эллипс (6.58) переходит в окружность бесконечно большого радиуса. Тем самым *функция (6.58) производит конформное отображение области внутри единичного круга $|z|<1$ на плоскость w с разрезанной по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси.* Граница области — окружность $|z| = 1$ — отображается на этот отрезок, причем верхняя полуокружность отображается на нижний, а нижняя — на верхний берег разреза. Аналогично область $|z|>1$ вне единичного круга на плоскости z отображается на второй экземпляр плоскости w, разрезанной по отрезку $[-1, 1]$ действительной оси, причем верхняя полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, отображается на верхний берег, а нижняя полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z < 0$, — на нижний берег разреза. Тем самым функция Жуковского (6.53) осуществляет конформное отображение полной плоскости z на риманову поверхность обратной функции

$$z = \varphi(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}. \tag{6.60}$$

Риманова поверхность функции (6.60) представляет собой двулистную поверхность, составленную из двух экземпляров плоскости w, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$ действительной оси. Нижний берег разреза одного листа склеен с верхним берегом разреза другого листа, и наоборот. Функция (6.60) является однозначной аналитической функцией на своей римановой поверхности, имеющей две точки разветвления $w = \pm 1$, при обходе каждой из которых происходит переход с одного листа этой римановой поверхности на ее другой лист. Заметим, что при одновременном обходе обеих точек разветвления $w = \pm 1$ по замкнутой кривой, не пересекающей отрезка $[-1, 1]$, мы все время находимся на одном и том же листе.

Итак, функции (6.53) и (6.60) устанавливают взаимно однозначное соответствие между полной плоскостью z и данной римановой поверхностью. Отображение, осуществляемое этими функциями, является

всюду конформным, за исключением точек $z = \pm 1$, в которых производная функции (6.53) равна нулю. Заметим, что этим точкам соответствуют точки $w = \pm 1$, являющиеся точками разветвления функции (6.60), обратной по отношению к функции (6.53).

В заключение найдем образ лучей $\arg z = \varphi_0$ при отображении, осуществляемом функцией Жуковского. Для этого исключим из соотношений (6.57) параметр r и положим $\varphi = \varphi_0$. Тогда

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1. \tag{6.61}$$

Соотношение (6.61) означает, что при отображении (6.53) отрезки лучей $\arg z = \varphi_0$ переходят в ветви гиперболы (6.61). Отметим, что при любом значении φ_0 фокусы этой гиперболы находятся в точках ± 1. Тем самым функция Жуковского осуществляет преобразование ортогональной системы полярных координат на плоскости z в ортогональную криволинейную систему координат, координатными линиями которой являются софокусные семейства эллипсов (6.58) и гипербол (6.61).

Как уже отмечалось, функция Жуковского находит весьма широкое применение при решении многих конкретных задач конформных отображений, особенно связанных с исследованием гидродинамических проблем. На этих вопросах мы остановимся несколько позже, а сейчас рассмотрим еще одну функцию, находящую многочисленные приложения.

§ 4. Интеграл Шварца — Кристоффеля. Отображение многоугольников

Пусть на комплексной плоскости w задан n-угольник с вершинами в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и внутренними углами при этих вершинах $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ соответственно. (Очевидно, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = n - 2$, $n \geq 2$.) Пусть требуется построить конформное отображение верхней полуплоскости z на внутренность такого многоугольника. Эта задача решается с помощью так называемого интеграла Шварца — Кристоффеля, изучение некоторых свойств которого и составляет содержание настоящего параграфа.

Рассмотрим функцию комплексной переменной z, определенную в верхней полуплоскости z с помощью выражения

$$w = f(z) = C\int_{z_0}^{z}(\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1}\ldots(\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\,d\zeta + C_1. \tag{6.62}$$

Здесь z_0, C, C_1 — заданные комплексные постоянные; $a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа, расположенные в порядке возрастания; $\alpha_1, \ldots$

Сравнение (7.40), (7.42) и (7.43) приводит к формуле

$$\int_C f'(z)\,dz = \Gamma_C + iN_C. \tag{7.44}$$

Эта формула, дающая выражение циркуляции и потока вектора скорости через производную комплексного потенциала, находит многочисленные применения в гидродинамике. Заметим, что если область $\mathscr{G}$, в которой рассматривается движение, является односвязной, то интеграл (7.44) по любой замкнутой кривой C, целиком лежащей в $\mathscr{G}$, равен нулю в силу теоремы Коши. В случае движения в многосвязной области $\mathscr{G}$ интеграл по замкнутой кривой C, целиком лежащей в $\mathscr{G}$, может быть отличен от нуля. Это будет иметь место, когда внутри кривой C содержится область $\mathscr{G}'$, не принадлежащая $\mathscr{G}$, в которой находятся источники и вихревые точки рассматриваемого течения. В этой области, очевидно, нарушаются уравнения (7.30) и (7.31). В частном случае область $\mathscr{G}'$ может состоять из отдельных точек, которые при этом являются изолированными особыми точками аналитической функции $f(z)$ — комплексного потенциала течения.

Итак, *всякое плоское потенциальное течение в области, в которой отсутствуют источники и вихревые точки, может быть описано с помощью комплексного потенциала, являющегося аналитической функцией комплексной переменной.* Тем самым для изучения данного класса течений может быть использован весь аппарат теории аналитических функций.

Рассмотрим ряд примеров простейших течений, описываемых элементарными функциями комплексной переменной.

а) Пусть комплексный потенциал течения имеет вид

$$f(z) = az, \tag{7.45}$$

где $a = a_1 + ia_2$ — заданное комплексное число. Тогда

$$u(x, y) = a_1x - a_2y, \quad v(x, y) = a_2x + a_1y$$

и линии тока $v(x, y) = C$ представляют собой прямые, угол наклона которых к оси x определяется выражением $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_2}{a_1}$. Формула (7.36) дает

$$w = v_x + iv_y = \overline{f'(z)} = \bar a = a_1 - ia_2, \tag{7.46}$$

откуда следует, что скорость течения постоянна и направление вектора скорости совпадает с прямыми $v(x, y) = C$. Итак функция (7.45) определяет плоскопараллельное течение.

б) Пусть комплексный потенциал течения имеет вид

$$f(z) = a\ln z, \tag{7.47}$$

где a — действительное число. Тогда, перейдя к показательной форме записи $z = re^{i\varphi}$, получим выражение потенциала и функции тока

в полярных координатах:

$$u(r, \varphi) = a\ln r, \quad v(r, \varphi) = a\varphi.$$

Отсюда следует, что линии тока представляют собой лучи, выходящие из начала координат, а эквипотенциальные линии — окружности с центром в начале координат. Абсолютная величина скорости при этом равна

$$|w| = |f'(z)| = \left|\frac{a}{z}\right| = \frac{|a|}{r}, \tag{7.48}$$

а вектор скорости направлен по лучу $\varphi = \text{const}$. Из (7.48) следует, что в начале координат скорость обращается в бесконечность. Точка $z = 0$, особая точка функции $f(z)$, в этом случае является источником течения (положительным источником при $a > 0$, когда скорость направлена от начала координат, и отрицательным источником или стоком при $a < 0$, когда скорость направлена к началу координат). Взяв произвольный замкнутый контур C, содержащий точку $z = 0$ внутри, по формуле (7.44) получим

$$\int_C f'(z)\,dz = \int_C\frac{a}{z}\,dz = i2\pi a = \Gamma_C + iN_C.$$

Отсюда $N_C = 2\pi a$. Тем самым в рассматриваемом случае поток жидкости через любой замкнутый контур, содержащий внутри источник, постоянен и равен $2\pi a$. Эту величину называют мощностью источника.

в) Пусть комплексный потенциал имеет вид

$$f(z) = ia\ln z, \tag{7.49}$$

где a — действительное число. В этом случае линии тока представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат. Из формулы (7.44), так же как и в предыдущем случае, получим $N_C = 0$, $\Gamma_C = -2\pi a$. Точка $z = 0$ в этом случае называется вихревой точкой течения.

г) Пусть комплексный потенциал течения имеет вид

$$f(z) = a\ln(z - h) - a\ln(z), \tag{7.50}$$

где a — положительное действительное число, а h — некоторая комплексная постоянная. Согласно предыдущему этот потенциал определяет течение с положительным источником в точке $z = -h$ и стоком в точке $z = +h$, причем мощности источника и стока одинакова и равна $2\pi a$. Перепишем (7.50) в виде

$$f(z) = a2h\,\frac{\ln(z+h) - \ln(z-h)}{2h}$$

и перейдем к пределу при $h \to 0$, полагая, что мощность источника и стока при этом возрастает так, что величина $m = a2h$ остается

$-\pi(\alpha_i - 1)$. При этом при $\alpha_i < 1$ переход от направления вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ к направлению вектора $\overline{A_iA_{i+1}}$ происходит в положительном (рис. 6.14, *а*), а при $\alpha_i > 1$ в отрицательном (рис. 6.14, *б*) направлении. Как легко видеть, в обоих случаях величина угла при переходе в положительном направлении от вектора $\overline{A_iA_{i+1}}$ к направлению вектора $\overline{A_iA_{i-1}}$ равна $\pi\alpha_i$ (рис. 6.14). Если замкнутая ломаная $A_1A_2 \ldots A_n$ не имеет самопересечений, то она ограничивает некоторый n-угольник. Если, кроме того, движению точки z в положительном направлении действительной оси соответствует обход ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ в положительном направлении, то внутренний угол

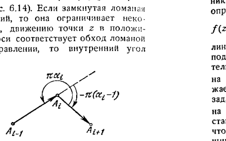


Рис. 6.14.

данного n-угольника при вершине A_i, на которую отображается точка a_i действительной оси плоскости z, равен $\pi\alpha_i$. В силу условия (6.63) при этом сумма всех внутренних углов данного n-угольника равна $(n-2)\pi$, как и должно быть.

На основании принципа соответствия границ (теорема 6.4) можно утверждать, что если ломаная $A_1A_2 \ldots A_n$, на которую функция (6.62) отображает действительную ось плоскости z, не имеет точек самопересечения и сохраняется направление обхода, то функция (6.62) осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность n-угольника, ограниченного ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$.

Как показывает детальное исследование, если на плоскости w задан произвольный n-угольник (известно положение его вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и углы при этих вершинах), то всегда можно задать значения постоянных C, C_1 и точки $a_1, \ldots, a_n$ действительной оси так, чтобы соответствующим образом построенная функция (6.62) осуществляла конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность данного n-угольника. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого положения *), а ограничимся лишь некоторыми замечаниями и примерами.

*) См., например, И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, «Наука», 1967.

Замечание 1. В формулу (6.62) входят ряд постоянных. Однако при построении конформного отображения верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на заданный многоугольник $A_1 \ldots A_n$ плоскости w можно произвольно задать лишь три точки a_1, a_2, a_3 действительной оси x, переходящие в какие-либо три выбранные вершины многоугольника A_1, A_j, A_k. При этом остальные постоянные в формуле (6.62) определяются однозначно. Действительно, (6.62) определяет функцию $f(z)$, связанную с функцией $\tilde f(z) = \int_{z_0}^{z}(\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1}\ldots(\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\,d\zeta$ линейным преобразованием, представляющим собой преобразование подобного растяжения, поворота и параллельного переноса. Следовательно, если функция $f(z)$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на заданный многоугольник плоскости w, то функция $\tilde f(z)$ отображает эту полуплоскость на многоугольник, подобный данному. При заданных значениях a_i для того, чтобы n-звенная замкнутая ломаная, на которую отображается функцией $\tilde f(z)$ действительная ось, представляла бы собой многоугольник, подобный данному, достаточно, чтобы $n-2$ звена этой ломаной были пропорциональны соответствующим сторонам многоугольника. (Два крайних звена полностью определяются заданием их направлений.) Тем самым мы имеем $n-3$ уравнения относительно n постоянных a_i. Если произвольно задать три из этих постоянных, то остальные из соответствующих уравнений определяются однозначно. Данное обстоятельство является также следствием теоремы Римана об однозначном определении функции, осуществляющей конформное отображение односвязных областей, при задании соответствия трех точек границы одной области трем точкам границы другой области. Заметим, кроме того, что положение заданного многоугольника (заданы длины сторон и величина углов при вершинах) на плоскости однозначно определяется положением трех его вершин.

Замечание 2. Мы предполагали, что все числа a_i в формуле (6.62) являются положительными. При этом интеграл (6.62) сходится при всех значениях $\operatorname{Im} z \geq 0$. Если какое-либо число a_k отрицательно, то при $z \to a_k$ интеграл (6.62) расходится. Это означает, что соответствующая вершина A_k многоугольника $A_1 \ldots A_n$ лежит в бесконечно удаленной точке $w = \infty$. При этом величину угла при вершине A_k мы полагаем равной взятой со знаком минус величине угла между продолжением отрезков A_kA_{k-1} и A_kA_{k+1} в конечной точке их пересечения. Как легко видеть, при таком определении угол при вершине A_k равен $\alpha_k\pi$ ($\alpha_k < 0$), и в силу условия (6.63) сумма внутренних углов полученного n-угольника с вершиной A_k в бесконечно удаленной точке по-прежнему равна $(n-2)\pi$. Данное замечание остается в силе и в том случае, когда несколько чисел α_k отрицательны.

Замечание 3. При исследовании формулы (6.62) мы предполагали, что все точки a_i конечны. Легко освободиться от этого

скорость в точке z_∞ ограничена, то эта точка не является источником, поэтому поток вектора скорости через кривую C_R равен нулю, и формула (7.62) дает

$$2\pi i b_{-1} = \Gamma_\infty.$$

Выпишем окончательное разложение комплексного потенциала в окрестности бесконечно удаленной точки, являющейся правильной точкой течения:

$$f(z) = \overline{w}_\infty z + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\ln z + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}. \tag{7.63}$$

Рассмотрим теперь *задачу обтекания замкнутого контура плоскопараллельным потоком.* Пусть поток, имеющий на бесконечности заданную скорость w_∞ и циркуляцию Γ_∞, обтекает тело S, ограниченное замкнутым контуром C. Требуется определить скорость в любой точке потока по заданным гидродинамическим характеристикам на бесконечности при условии, что в точках контура C скорость течения направлена по касательной к контуру. Последнее условие означает, что кривая C представляет собой линию тока рассматриваемого течения, т. е. мнимая часть комплексного потенциала, описывающего данное течение, должна сохранять постоянное значение на кривой C

$$v(x, y)|_C = \text{const}. \tag{7.64}$$

Задача сводится к определению вне контура C на комплексной плоскости аналитической функции $f(z)$, в разложении (7.63) которой заданы значения $\overline{w}_\infty$ и Γ_∞, а на контуре C выполняется условие (7.64). Так как комплексный потенциал определен с точностью до постоянного слагаемого, то значение постоянной в условии (7.64) можно положить равным нулю.

Начнем с задачи обтекания кругового цилиндра радиуса R с центром в начале координат. Пусть скорость потока на бесконечности равна v_∞ и направлена параллельно оси x, а циркуляция отсутствует, $\Gamma_\infty = 0$. Мы должны найти комплексный потенциал, разложение которого в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f(z) = v_\infty z + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n} \tag{7.65}$$

и мнимая часть которого обращается в нуль при $|z| = R$. Комплексный потенциал такого типа был нами уже рассмотрен в примере д) на стр. 196. Поэтому решение данной задачи имеет вид

$$f(z) = v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \tag{7.66}$$

При этом скорость в точках, лежащих на обтекаемом цилиндре, определяется формулой (7.57), откуда следует, что она обращается

в нуль в двух критических точках: в точке $z = -R$, в которой линия тока $y = 0$ разветвляется на две линии тока, совпадающие с верхней и нижней полуокружностями $|z| = R$, и в точке $z = R$, в которой эти линии тока сходятся опять в прямую $y = 0$. Эти точки называются точкой разветвления и точкой схода соответственно. Заметим, что если скорость потока на бесконечности не параллельна оси x, а имеет вид $w_\infty = v_\infty e^{i\alpha}$, то с помощью преобразования $\zeta = ze^{-i\alpha}$ мы приходим к уже рассмотренной задаче на плоскости ζ. Тогда решения исходной задачи получим выражение

$$f(z) = \overline{w}_\infty z + \frac{w_\infty R^2}{z}. \tag{7.67}$$

Пусть теперь циркуляция Γ_∞ не равна нулю. Как мы видели выше (см. пример в) на стр. 195), линии тока у течения с комплексным потенциалом $ia\ln z$ (a — действительное число) представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат. Поэтому комплексный потенциал течения, обтекающего круговой цилиндр радиуса R с заданной скоростью на бесконечности v_∞ и заданной циркуляцией Γ_∞, имеет вид

$$f(z) = v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\ln z. \tag{7.68}$$

Найдем критические точки течения, в которых скорость течения обращается в нуль. Согласно формуле (7.36) имеем

$$\overline{w} = f'(z) = v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi iz} = 0.$$

Отсюда

$$z^2 + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi iv_\infty}z - R^2 = 0 \tag{7.69}$$

и

$$z_{\text{кр}} = i\frac{\Gamma_\infty}{4\pi v_\infty} \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma_\infty^2}{16\pi^2v_\infty^2}}. \tag{7.70}$$

При $R \geq \left|\frac{\Gamma_\infty}{4\pi v_\infty}\right|$ подкоренное выражение в (7.70) положительно. Поэтому

$$|z_{\text{кр}}| = \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma_\infty^2}{16\pi^2v_\infty^2} + \frac{\Gamma_\infty^2}{16\pi^2v_\infty^2}} = R,$$

т. е. обе критические точки находятся на окружности $|z| = R$ обтекаемого цилиндра, причем при $\Gamma_\infty > 0$ ($v_\infty > 0$) обе точки лежат на верхней, а при $\Gamma_\infty < 0$ ($v_\infty > 0$) — на нижней полуокружности. Тем самым наличие циркуляции сближает точки разветвления и схода ли-

Кроме того, очевидно, должно иметь место соответствие

$$z = 0 \to w = 0. \tag{6.74}$$

Соотношения (6.73), (6.74) устанавливают соответствие трех граничных точек. Поэтому произвольно задать точку a_3 на действительной оси z, переходящую в вершину A_3 прямоугольника, уже нельзя. Положим, что в вершину A_3 переходит точка $a_3 = \frac{1}{k}$ действительной оси z, где k — неизвестная координата $\frac{1}{k}$, значение которой будет определено в дальнейшем. Очевидно, $0 < k < 1$.

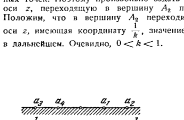


Рис. 6.15.

Итак, функция, осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости на заданный прямоугольник, может быть представлена в виде

$$w = f(z) = C'\int_{z_0}^{z}(\zeta - 1)^{-\frac{1}{2}}\left(\zeta - \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\zeta + \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}(\zeta + 1)^{-\frac{1}{2}}\,d\zeta + C_1 = C\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + C_1. \tag{6.75}$$

Положив $z_0 = 0$ и использовав соотношение (6.74), получим $C_1 = 0$. Тогда

$$w = C\int_0^z\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}. \tag{6.76}$$

Остается определить постоянные C и k из соответствия точек a_1 и a_2 действительной оси z вершинам A_1 и A_2. Отметим, что интеграл (6.76) не выражается в элементарных функциях. Этот так называемый *эллиптический интеграл* *) 1 рода, который обычно обозначается

$$F(z, k) = \int_0^z\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}. \tag{6.77}$$

*) См. вып. 1, стр. 236.

Условия (6.73) дают

$$a = C\int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}. \tag{6.78}$$

Интеграл, стоящий справа, так называемый *полный эллиптический интеграл 1 рода*

$$K(k) = \int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \tag{6.79}$$

является хорошо изученной и табулированной функцией. Соответствие точек $a_2\left(z = \frac{1}{k}\right) \leftrightarrow A_2(w = a + ib)$ позволяет записать

$$a + ib = C\left\{\int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + \int_1^{\frac{1}{k}}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\right\}, \tag{6.80}$$

откуда, учтя (6.78), получим

$$b = C\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(1-k^2\zeta^2)}} = C\tilde F\left(\frac{1}{k}, k\right), \tag{6.81}$$

где через $\tilde F\left(\frac{1}{k}, k\right)$ обозначен интеграл в формуле (6.81). Из (6.78) и (6.81) при заданных величинах a и b можем, решив трансцендентное уравнение

$$a\tilde F\left(\frac{1}{k}, k\right) = bK(k), \tag{6.82}$$

определить значения постоянных k и C. Тем самым функция (6.76), осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на заданный прямоугольник плоскости w, полностью определена. С другой стороны, если в формуле (6.76) заданы величины k и C, то эта функция осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на прямоугольник плоскости w, отношение сторон $\left(\frac{2a}{b}\right)$ которого определяется формулой (6.82), а абсолютная величина сторон — постоянной C. Произвольно изменяя значение этих постоянных, можно получить конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на любой прямоугольник плоскости w.

Определив гидродинамическое давление p из интеграла Бернулли:

$$p = A - \frac{\rho v^2}{2},$$

где A — постоянная, а ρ — плотность жидкости, и введя комплексную величину $R = R_y + iR_x$, получим

$$R = -\frac{\rho}{2}\int_C v^2(dx - i\,dy) = -\frac{\rho}{2}\int_C v^2\,\overline{dz}. \tag{7.74}$$

(Интеграл от постоянной A по замкнутому контуру C, очевидно, равен нулю.) Преобразуем интеграл (7.74). Так как в точках контура C скорость направлена по касательной к контуру, то комплексная скорость течения $\overline{w}$ связана с величиной физической скорости v соотношением $\overline{w} = ve^{i\varphi}$, где φ — угол между касательной к контуру и осью x. Тогда формула (7.36) дает $ve^{-i\varphi} = f'(z)$. С другой стороны, $\overline{dz} = ds\,e^{-i\varphi}$. Поэтому $v^2\,\overline{dz} = v^2e^{-i2\varphi}\,ds\,e^{i\varphi} = f'^2\,dz$, и формула (7.74) примет вид

$$R = -\frac{\rho}{2}\int_C f'^2(z)\,dz. \tag{7.75}$$

Это так называемая *формула Чаплыгина*, выражающая силу, действующую со стороны потока на обтекаемое им тело, через производную комплексного потенциала. Из формулы (7.63) для комплексного потенциала вне обтекаемого тела получим

$$f'(z) = \overline{w}_\infty + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n'}{z^n},$$

$$f'^2(z) = \frac{\overline{w}_\infty}{\pi i}\cdot\frac{\Gamma_\infty}{z} + \overline{w}_\infty^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}.$$

Следовательно,

$$\int_C f'^2(z)\,dz = 2\overline{w}_\infty\Gamma_\infty.$$

Подставив это выражение в формулу (7.75) и отделив действительную и мнимую части, найдем

$$R_x = \rho(v_y)_\infty\Gamma_\infty, \qquad R_y = -\rho(v_x)_\infty\Gamma_\infty. \tag{7.76}$$

Отсюда

$$|R| = \rho|v_\infty|\cdot|\Gamma_\infty|. \tag{7.77}$$

Формула (7.77) представляет собой теорему Жуковского о подъемной силе: *сила давления безвихревого потока, имеющего на бесконечности скорость v_∞ и обтекающего контур C с циркуляцией*

Γ, выражается формулой $|R| = \rho|v_\infty|\cdot|\Gamma|$. Направление этой силы получается поворотом вектора v_∞ на прямой угол в сторону, противоположную циркуляции.

Использование аппарата аналитических функций комплексной переменной позволило Н. Е. Жуковскому и С. А. Чаплыгину развить многие решения задач гидро- и аэродинамики, послуживших теоретической основой для практики авиастроения. Тем самым методы теории функций комплексного переменного сыграли огромную роль в развитии современной авиации.

2. Плоское электростатическое поле. Методы теории функций комплексной переменной, использованные в предыдущем пункте для изучения плоского потенциального течения идеальной жидкости, могут быть столь же успешно применены и при исследовании любого плоского векторного поля иной физической природы. В этом пункте мы рассмотрим применение данных методов к задачам электростатики.

Задачи электростатики заключаются в определении стационарного электрического поля, создаваемого в среде заданным распределением зарядов. В зависимости от постановки конкретной физической задачи задаются или плотность распределения зарядов как функция координат, или полный заряд, распределенный на поверхности идеального проводника. В последнем случае основная цель исследования заключается в определении плотности распределения зарядов на поверхности проводника.

Чтобы получить основные уравнения для вектора напряженности электростатического поля, будем исходить из общей системы уравнений Максвелла *) в изотропной среде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$$

В случае стационарного электромагнитного поля уравнения Максвелла для вектора $\mathbf{E}$ напряженности электрического поля в однородной среде принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \tag{7.78}$$

где ε — диэлектрическая постоянная среды, а ρ — плотность статических зарядов, создающих данное поле. В дальнейшем будем считать $\varepsilon \equiv 1$ и будем рассматривать плоскую задачу, когда заряды, создающие поле, распределены в пространстве так, что плотность их распределения не зависит от одной из координат (например, от координаты z), а является функцией лишь двух других координат, т. е. $\rho = \rho(x, y)$.

*) См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.

отобразим область $\mathscr{G}$ плоскости x, y на новую область $\mathscr{G}'$ плоскости ξ, η. Заметим, что задание двух действительных функций (7.6), двух действительных переменных x, y, эквивалентно заданию в области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z одной функции $\zeta = f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ комплексной переменной $z = x + iy$. При этом функция $f(z)$ осуществляет отображение области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z на область $\mathscr{G}'$ комплексной плоскости ζ. В силу условия (7.7) уравнения (7.6) однозначно разрешимы относительно старых переменных, и тем самым в области $\mathscr{G}'$, плоскости ξ, η определена функция $U(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$. Выясним, при каких условиях на преобразование (7.6) функция $U(\xi, \eta)$ будет гармонической функцией переменных ξ, η. Предполагая, что функции (7.6) дважды непрерывно дифференцируемы в области $\mathscr{G}$, выразим частные производные второго порядка от функции $u(x, y)$ по старым переменным через производные от функции $U(\xi, \eta)$ по новым переменным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}(\xi_x)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}\xi_x\eta_x + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}(\eta_x)^2 + \frac{\partial U}{\partial\xi}\xi_{xx} + \frac{\partial U}{\partial\eta}\eta_{xx},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}(\xi_y)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}\xi_y\eta_y + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}(\eta_y)^2 + \frac{\partial U}{\partial\xi}\xi_{yy} + \frac{\partial U}{\partial\eta}\eta_{yy}. \tag{7.8}$$

Подставив эти выражения в (7.5), получим следующее уравнение для функции $U(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}(\xi_x^2 + \xi_y^2) + 2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta}(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + \frac{\partial U}{\partial\xi}(\xi_{xx} + \xi_{yy}) + \frac{\partial U}{\partial\eta}(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0. \tag{7.9}$$

Для того чтобы это уравнение было уравнением Лапласа, должны выполняться следующие соотношения:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0, \tag{7.10}$$
$$\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y = 0, \tag{7.11}$$

и

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2 \neq 0. \tag{7.12}$$

Соотношения (7.10) означают, что функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ должны быть гармоническими в области $\mathscr{G}$. Перепишем (7.11) в виде

$$\frac{\xi_x}{\eta_y} = -\frac{\xi_y}{\eta_x} = \mu(x, y), \tag{7.13}$$

где $\mu(x, y)$ — некоторая, пока неизвестная функция. Тогда соотношение (7.12) дает

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 = \mu^2[\eta_y^2 + \eta_x^2] = \eta_x^2 + \eta_y^2 \neq 0.$$

Отсюда $\mu^2(x, y) \equiv 1$ при $x, y \in \mathscr{G}$. Таким образом, неизвестная функция $\mu(x, y)$ определена: $\mu = \pm 1$. При $\mu = 1$ соотношения (7.13) дают

$$\xi_x = \eta_y, \quad \xi_y = -\eta_x,$$

т. е. гармонические в области $\mathscr{G}$ функции ξ и η должны удовлетворять в этой области условиям Коши — Римана. Это означает, что функция $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ должна быть аналитической функцией в области $\mathscr{G}$ комплексной плоскости z. Заметим, что из (7.7) и (7.12) следует, что отображение области $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}'$ должно быть взаимно однозначным, а производная функции $f(z)$ должна удовлетворять условию $f'(z) \neq 0$ всюду в области $\mathscr{G}$. Тем самым отображение области $\mathscr{G}$ плоскости z на область $\mathscr{G}'$ плоскости ζ, осуществляемое функцией $f(z)$, должно быть конформным.

При $\mu = -1$ соотношения (7.13) дают

$$\xi_x = -\eta_y, \quad \xi_y = \eta_x.$$

Как легко видеть, в этом случае функция $\tilde f(z) = \xi(x, y) - i\eta(x, y)$ должна быть аналитической, а отображение, осуществляемое функцией $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$, должно быть конформным отображением II рода.

Итак, мы получили окончательный ответ на вопрос, поставленный в начале этого пункта. *При отображении области $\mathscr{G}$ плоскости z на область $\mathscr{G}'$ плоскости ζ, осуществляемом функцией $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$, уравнение Лапласа для функции $u(x, y)$ перейдет в уравнение Лапласа для функции $U(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ лишь в том случае, если данное отображение является конформным отображением I или II рода.* Заметим, что при данных отображениях оператор Лапласа Δ_{xy} переходит в оператор $|f'(z)|^2\Delta_{\xi\eta} = \frac{1}{|\varphi'(\zeta)|^2}\Delta_{\xi\eta}$, где $z = \varphi(\zeta)$ — обратная функция, осуществляющая конформное отображение области $\mathscr{G}'$ на область $\mathscr{G}$. Тем самым даже простейшее уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами $\Delta u + cu = 0$, $c = \text{const} \neq 0$, при конформном отображении перейдет, вообще говоря, в уравнение с переменным коэффициентом $\Delta_{\xi\eta}U + c|\varphi'(\zeta)|^2U = 0$.

3. Задача Дирихле. Полученные в предыдущем пункте результаты позволяют применить метод конформных преобразований к решению краевых задач для гармонических функций. Рассмотрим основную идею этого метода на примере решения задачи Дирихле.

Пусть требуется найти функцию $u(x, z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0$$

в области $\mathscr{G}$, непрерывную в замкнутой области $\overline{\mathscr{G}} = \mathscr{G} + \Gamma$ и принимающую заданные значения на границе Γ:

$$u(P)|_\Gamma = \alpha(P), \tag{7.14}$$

где $\alpha(P)$ — заданная непрерывная функция точки P контура Γ. Как известно *), решение этой задачи методом разделения переменных

*) См. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

Очевидно, при этом вектор $\mathbf{E}$ имеет лишь две отличные от нуля компоненты, которые также являются функциями лишь координат x, y:

$$\mathbf{E}(x, y) = \mathbf{i}E_x(x, y) + \mathbf{j}E_y(x, y). \tag{7.79}$$

В силу первого из уравнений (7.78) поле $\mathbf{E}$ является потенциальным:

$$\mathbf{E}(x, y) = -\operatorname{grad} v(x, y), \quad E_x = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{7.80}$$

причем на основании второго из уравнений (7.78) функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = -4\pi\rho(x, y). \tag{7.81}$$

Из (7.81) следует, что в области, свободной от зарядов, потенциальная функция $v(x, y)$ является гармонической. Поэтому в этой области можно построить аналитическую функцию комплексной переменной

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{7.82}$$

для которой потенциальная функция $v(x, y)$ данного электростатического поля является мнимой частью.

Функция (7.82) называется *комплексным потенциалом электростатического поля*. Линии уровня $v(x, y) = C$ называется эквипотенциальными линиями данного поля. Из формул (7.80) следует, что вектор напряженности $\mathbf{E}$ в каждой точке эквипотенциальной линии $v(x, y) = C$ направлен по нормали к этой линии. Так как линии $v(x, y) = C$ и $u(x, y) = C$ взаимно ортогональны, то направление вектора $\mathbf{E}$ совпадает с касательной к линии $u(x, y) = C$ в каждой точке этой кривой. Поэтому линии $u(x, y) = C$ являются силовыми линиями данного поля.

Сопоставим вектору $\mathbf{E}$ комплексное число $w = E_x + iE_y$. Тогда на основании (7.80) и условий Коши — Римана получим

$$w = E_x + iE_y = -\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\overline{if'(z)}. \tag{7.83}$$

Отсюда

$$|\mathbf{E}| = |f'(z)|. \tag{7.84}$$

Формулы (7.83) и (7.84) дают выражение компонент вектора напряженности электростатического поля в области, свободной от зарядов, через производную комплексного потенциала.

Пусть заряды, создающие данное электростатическое поле, сосредоточены в некоторой области, ограниченной замкнутой кривой C_0 *).

*) Это означает, что в пространстве заряды распределены внутри бесконечного цилиндра, контуром поперечного сечения которого является кривая C_0, причем плотность распределения зарядов не зависит от координаты z вдоль образующей цилиндра, а является лишь функцией координат x, y в поперечном сечении.

Тогда интеграл по любому замкнутому контуру C, содержащему C_0 внутри, от нормальной составляющей напряженности электрического поля, согласно теореме Гаусса *), равен суммарному заряду (отнесенному к единице длины цилиндра, в котором распределены заряды в пространстве):

$$\int_C E_n\,ds = 4\pi e. \tag{7.85}$$

На основании формул (7.80), (7.37), (7.38), учитывая соотношения Коши — Римана, получим

$$\int_C E_n\,ds = \int_C \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy.$$

Так как электростатическое поле всюду потенциально, то циркуляция этого поля по любому замкнутому контуру равна нулю, т. е.

$$\int_C E_s\,ds = -\int_C \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 0.$$

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру C от производной комплексного потенциала:

$$\int_C f'(z)\,dz = \int_C \frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + i\int_C \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy. \tag{7.86}$$

Сравнение приведенных выше формул дает

$$\int_C f'(z)\,dz = \int_C E_n\,ds = 4\pi e, \tag{7.87}$$

т. е. *заряд, заключенный внутри области, ограниченной контуром C, определяется интегралом по этому контуру от производной комплексного потенциала электростатического поля, создаваемого данным распределением заряда.* Если C_0 представляет собой контур поперечного сечения идеально проводящего цилиндра, то весь заряд сосредоточен на его поверхности с поверхностной плотностью $\sigma(s)$, причем

$$\int_{C_0} \sigma(s)\,ds = e. \tag{7.88}$$

Как известно **), имеет место соотношение

$$\sigma(s) = \frac{1}{4\pi}E_n\Big|_{C_0} = -\frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad} v)_n\Big|_{C_0}. \tag{7.89}$$

С другой стороны, из (7.83) и (7.89) получим

$$\sigma(s) = \pm\frac{1}{4\pi}|f'(z)|_{C_0}. \tag{7.90}$$

*) См. сноску на стр. 203.
**) См. сноску на стр. 203.

Аналогично легко показать, что изображением периодической функции

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & 2n\tau \leqslant t < (2n+1)\tau, \\ -f_0, & (2n+1)\tau \leqslant t < (2n+2)\tau \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8.28}$$

является функция

$$f(t) \doteqdot F(p) = \frac{f_0}{p}\operatorname{th}\frac{p\tau}{2}. \tag{8.29}$$

Теорема запаздывания позволяет получить и довольно общую формулу для изображения периодической функции. Предварительно рассмотрим тот случай, когда функция $f(t)$ действительной переменной t имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leqslant t < \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t. \end{cases} \tag{8.30}$$

Обозначим изображения функций $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$ и $\varphi(t+\tau) \doteqdot \Phi_\tau(p)$. Перепишем (8.30) в виде

$$f(t) = \varphi(t) + \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau, \\ -\varphi(t+\tau-\tau), & t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Воспользовавшись линейностью изображения и теоремой запаздывания, получим

$$f(t) \doteqdot F(p) = \Phi(p) - e^{-p\tau}\Phi_\tau(p). \tag{8.31}$$

Пусть теперь функция $\varphi(t)$ является периодической функцией t с периодом τ, т. е.

$$\varphi(t+\tau) = \varphi(t). \tag{8.32}$$

Тогда $\Phi_\tau(p) = \Phi(p)$, и формула (8.31) позволяет выразить изображение $\Phi(p)$ периодической функции $\varphi(t)$ через изображение $F(p)$ функции $f(t)$, равной функции $\varphi(t)$ на первом периоде $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и нулю вне его при $t \geqslant \tau$:

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-p\tau}}. \tag{8.33}$$

В качестве примера найдем изображение функции

$$\varphi(t) = |\sin\omega t|, \quad \omega > 0. \tag{8.34}$$

Эта функция является периодической при $t > 0$ с периодом $\frac{\pi}{\omega}$. Предварительно найдем изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} \sin\omega t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{\omega}, \\ 0, & \frac{\pi}{\omega} < t. \end{cases} \tag{8.35}$$

С помощью формул (8.31), (8.22) и равенства $\sin\omega\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) = -\sin\omega t$ получим

$$f(t) \doteqdot F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}p}\right).$$

Отсюда по формуле (8.33) получим

$$|\sin\omega t| \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}{1-e^{-\frac{\pi}{\omega}p}} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\operatorname{cth}\frac{p\pi}{2\omega}. \tag{8.36}$$

г) Изображение производной. Сейчас будет доказано одно из основных свойств изображения, позволяющее заменить дифференцирование оригинала умножением изображения на независимую переменную.

Свойство 4. *Если $f'(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения при* $\operatorname{Re} p > a$ *и* $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, *то*

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.37}$$

Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}f'(t)\,dt = e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = pF(p) - f(0),$$

что и доказывает данное свойство.

Аналогично может быть доказано

Свойство 4'. *Если $f^{(n)}(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения при* $\operatorname{Re} p > a$ *и* $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, *то*

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n\left\{F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right\}, \quad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.38}$$

Формула (8.38) особенно упрощается в том случае, когда $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$:

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p). \tag{8.39}$$

Полученный результат находит многочисленные применения.

Рассмотрим, например, решение следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, линейного с постоянными коэффициентами:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny(t) = f(t), \tag{8.40}$$

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0, \tag{8.41}$$

где $f(t)$ — заданная при $t \geqslant 0$ функция t. Положив, что $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, мы в том случае, если $f(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения, можем построить изображение $F(p)$ функции $f(t)$. Предположим, что функция $y(t)$, являющаяся решением задачи (8.40), (8.41), и все ее производные до n-го порядка удовлетворяют условиям существования изображения. Тогда, умножив обе части уравнения (8.40) на e^{-pt} и проинтегрировав по t от 0 до ∞, в силу линейности изображения и начальных условий (8.40) получим

$$Y(p)\{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n\} = F(p),$$

где через $Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt}y(t)\,dt$ обозначено изображение искомого решения задачи (8.40), (8.41). Обозначив $P_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$, получим

$$Y(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)}. \tag{8.42}$$

где C — постоянная, подлежащая определению. Из условия на бесконечности (7.92) получим $C = 2e$. Тогда формула (7.90) дает очевидный результат

$$\sigma(s) = \frac{e}{2\pi}.$$

Если контур поперечного сечения проводника представляет собой произвольную замкнутую кривую C, то осуществив с помощью функции $\zeta = \varphi(z)$ конформное отображение области вне контура C на внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ так, чтобы удовлетворялось условие $\varphi(\infty) = \infty$, мы сведем задачу к только что решенной. Тем самым комплексный потенциал будет иметь вид

$$f(z) = -i2e\ln\varphi(z), \tag{7.94}$$

а для плотности поверхностных зарядов согласно (7.90) получим выражение

$$\sigma(s) = \frac{1}{4\pi}|f'(z)|_C = \frac{e}{2\pi}\left|\frac{1}{\varphi(z)}\cdot\frac{d\zeta}{dz}\right|_C = \frac{e}{2\pi}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_C = \frac{e}{2\pi}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^{-1}_{|\zeta|=1}. \tag{7.95}$$

В качестве примера рассмотрим задачу об определении плотности заряда на полосе ширины $2a$. Пусть данная полоса пересекает плоскость x, y по отрезку $-a < x < a$. Функция

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

производит конформное отображение внешности единичного круга плоскости ζ на плоскость z, разрезанную по отрезку действительной оси $-a < x < a$. Поэтому формула (7.95) дает

$$\sigma(x) = \frac{e}{2\pi}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^{-1}_{|\zeta|=1} = \frac{e}{a\pi}\frac{1}{|\zeta^2-1|_{|\zeta|=1}}. \tag{7.96}$$

Так как

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2-a^2}}{a}$$

и

$$\zeta^2 - 1 = \frac{2}{a^2}\left(z^2 - a^2 + z\sqrt{z^2-a^2}\right) = \frac{2\sqrt{z^2-a^2}}{a^2}\left(z + \sqrt{z^2-a^2}\right),$$

то формула (7.96) дает

$$\sigma(x) = \frac{ea}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{1}{|x+i\sqrt{a^2-x^2}|_{-a<x<a}} = \frac{e}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{7.97}$$

Заметим, что плотность заряда неограниченно возрастает при приближении к краю пластины. Этот факт имеет простой физический смысл. Край пластины имеет бесконечную кривизну, и для того, чтобы зарядить его до некоторого потенциала, надо поместить на него бесконечный заряд.

б) *Определение поля бесконечного плоского конденсатора.* Пусть требуется найти электростатическое поле между двумя заряженными до некоторого потенциала идеально проводящими непересекающимися цилиндрическими поверхностями, образующие которых параллельны между собой, а направляющие проходят через бесконечно удаленную точку плоскости z (рис. 7.3). В этом случае задача состоит в определении в криволинейной полосе $\mathscr{G}$ комплексного потенциала $f(z)$, представляющего собой аналитическую функцию, мнимая часть которой принимает постоянные значения v_1 и v_2 на кривых C_1 и C_2. Очевидно, аналитическая функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение данной криволинейной полосы плоскости z на полосу плоскости w, ограниченную прямыми $\operatorname{Im} w = v_1$, $\operatorname{Im} w = v_2$. Тем самым для решения данной задачи достаточно построить указанное конформное отображение.

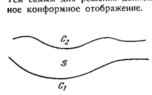


Рис. 7.3.

Рис. 7.4.

В качестве примера найдем поле конденсатора, изображенного на рис. 7.4, если значения потенциала на кривых C_1 и C_2 соответственно равны 0 и 1. Предварительно найдем функцию $z = \varphi(\zeta)$, осуществляющую конформное отображение верхней полуплоскости ζ, $\operatorname{Im}\zeta > 0$, на данную криволинейную полосу $\mathscr{G}$ плоскости z. Так как область $\mathscr{G}$ представляет собой треугольник *) $A_1A_2A_3$, то искомое отображение можно получить при помощи интеграла Шварца — Кристоффеля (см. гл. 5, § 4). Установим следующее соответствие точек действительной оси плоскости ζ и вершин треугольника:

$$A_1 \to \zeta = 0,$$
$$A_2 \to \zeta = \infty,$$
$$A_3 \to \zeta = -1.$$

Так как углы при вершинах треугольника соответственно равны $\pi\alpha_1 = 0$, $\pi\alpha_2 = -\pi\alpha$ и $\pi\alpha_3 = \pi(1+\alpha)$, то искомый интеграл должен иметь вид

$$z = C\int_{\zeta_0}^{\zeta}\zeta^{-1}(1+\zeta)^\alpha\,d\zeta + C_1. \tag{7.98}$$

*) Заметим, что вершины A_1 и A_2 находятся в бесконечности.

Ранее мы нашли (см. формулы (8.21) и (8.22)), что

$$\frac{p}{p^2+\omega^2} \doteqdot \cos\omega t, \quad \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \doteqdot \sin\omega t.$$

Поэтому

$$F(p) \doteqdot \int_0^t \sin\omega\tau\cdot\cos\omega(t-\tau)\,d\tau = \frac{t}{2}\sin\omega t.$$

Рассмотрим еще ряд общих свойств изображений.

ж) Дифференцирование изображения.

Свойство 7. Пусть $F(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда

$$F'(p) \doteqdot -tf(t), \quad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.48}$$

Действительно, выше мы отмечали, что производную аналитической функции $F(p)$ в области ее определения $\operatorname{Re} p > a$ можно вычислять, дифференцируя подынтегральную функцию в несобственном интеграле (8.2) по параметру. Проделав это, получим

$$F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt}tf(t)\,dt \doteqdot -tf(t),$$

что и доказывает свойство 7. Заметив, что умножение функции $f(t)$ на любую степенную функцию t^n не меняет ее степени роста, получим

Свойство 7'. Если $F(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^nt^nf(t), \quad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.49}$$

Формулы (8.48) и (8.49) могут быть применены для вычисления изображения от произведения t^n на функцию $f(t)$, для которой изображение известно. В дальнейшем мы получим общую формулу, выражающую изображение произведения через изображения сомножителей, а сейчас рассмотрим еще одно свойство изображений.

з) Интегрирование изображения.

Свойство 8. Если функция $\frac{f(t)}{t}$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_p^\infty F(q)\,dq, \quad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.50}$$

Обозначим

$$I(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\,dt. \tag{8.51}$$

По теореме 8.2 функция $I(p)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p > a$, причем в силу замечания на стр. 215 $I(\infty) = 0$. Найдем

производную функции $I(p)$, дифференцируя интеграл (8.51) по параметру:

$$I'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = -F(p).$$

Отсюда, учитывая условие $I(\infty) = 0$, получаем

$$I(p) = I(\infty) - \int_\infty^p F(q)\,dq = \int_p^\infty F(q)\,dq,$$

что и доказывает свойство 8.

В качестве примера найдем изображение функции $\frac{1}{t}\sin\omega t$.

Так как $\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, то

$$\frac{1}{t}\sin\omega t \doteqdot \int_p^\infty \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,dp = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}. \tag{8.52}$$

С помощью свойства 5 из выражения (8.52) получаем

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right). \tag{8.53}$$

Функция $\operatorname{si} t$ носит название интегрального синуса.

и) Последнее свойство изображений, которое будет рассмотрено в данном параграфе, носит название теоремы смещения.

Свойство 9. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то для любого комплексного числа λ

$$F(p+\lambda) \doteqdot e^{-\lambda t}f(t), \quad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re}\lambda. \tag{8.54}$$

Действительно, функция $\varphi(t) = e^{-\lambda t}f(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям существования изображения, которое по формуле (8.2) определено в области $\operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re}\lambda$, но

$$\int_0^\infty e^{-pt}e^{-\lambda t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t}f(t)\,dt = F(p+\lambda),$$

что и доказывает теорему смещения.

Формула (8.54) может быть применена для определения изображения произведения функции $e^{-\lambda t}$ на функцию $f(t)$, для которой изображение известно. Так, с помощью этой формулы и уже полученных изображений можно найти

$$te^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{(p-\alpha)^2}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha, \tag{8.55}$$

$$t^ne^{\alpha t} \doteqdot \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha, \tag{8.56}$$

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega| - \operatorname{Re}\alpha. \tag{8.57}$$

и т. д.

ГЛАВА 8

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методы операционного исчисления представляют собой своеобразный способ решения различных математических задач, в первую очередь дифференциальных уравнений, получивший довольно широкое распространение. В основе этих методов лежит идея интегральных преобразований, связанная с сопоставлением решению исходной задачи, функции $f(t)$ действительной переменной, некоторой функции $F(p)$ комплексной переменной так, что обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(t)$ переходит в алгебраическое уравнение для $F(p)$. Аналогично уравнению в частных производных для функции двух действительных переменных может быть сопоставлено обыкновенное дифференциальное уравнение и т. д. Это позволяет облегчить технику вычислений. Основную роль в операционном исчислении играет преобразование Лапласа, с изучения свойств которого мы и начнем изложение.

§ 1. Определение и основные свойства преобразования Лапласа

1. Определение преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа ставит в соответствие функции $f(t)$ действительной переменной t функцию $F(p)$ комплексной переменной p с помощью соотношения

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Естественно, что не для всякой функции $f(t)$ этот интеграл имеет смысл. Поэтому мы начнем с определения класса функций $f(t)$, для которых данное преобразование заведомо реализуемо. Будем рассматривать функции $f(t)$, определенные для всех значений действительной переменной $-\infty < t < \infty$ и удовлетворяющие следующим условиям:

1. При $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.
2. При $t \geqslant 0$ функция $f(t)$ на любом конечном участке оси t имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода.

3. При $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. для каждой функции рассматриваемого класса существуют такие положительные постоянные M и a, что для всех $t > 0$

$$|f(t)| \leqslant Me^{at}. \tag{8.1}$$

Точная нижняя грань тех значений a, для которых имеет место неравенство (8.1), называется *показателем степени роста* функции $f(t)$. Легко, в частности, видеть, что показатель степени роста степенной функции $f(t) = t^n$ равен нулю.

Отметим, что функция $f(t)$ может быть комплексной функцией действительной переменной t: $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — действительные функции.

Введем основное определение.

Преобразованием Лапласа заданной функции $f(t)$ действительной переменной t называется преобразование, ставящее в соответствие функции $f(t)$ функцию $F(p)$ комплексной переменной p, определенную с помощью интеграла

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{8.2}$$

Заметим, что интеграл (8.2) является несобственным интегралом, зависящим от переменной p как от параметра. Очевидно, интеграл (8.2), вообще говоря, сходится не при всех значениях параметра p. Действительно, если функция $f(t)$ стремится при $t \to \infty$ к отличному от нуля пределу, а $\operatorname{Re} p < 0$, то интеграл заведомо расходится. Поэтому естественно поставить вопрос об области сходимости интеграла (8.2), а тем самым об области определения функции $F(p)$.

Теорема 8.1. *Интеграл* (8.2) *сходится в области* $\operatorname{Re} p > a$, *где a — показатель степени роста функции $f(t)$, причем для любого $x_0 > a$ интеграл* (8.2) *при* $\operatorname{Re} p \geqslant x_0 > a$ *сходится равномерно.*

Доказательство. Для любого $p = x + iy$ при $x > a$ можно указать *) такое $\varepsilon > 0$, что $x > a_1 = a + \varepsilon$, причем $|f(t)| < Me^{a_1t}$. Тогда, воспользовавшись признаком сравнения сходимости несобственных интегралов **), получим

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt\right| \leqslant M\int_0^\infty e^{-xt}e^{a_1t}\,dt = \frac{M}{x-a_1}, \quad x > a_1, \tag{8.3}$$

*) Это позволяет рассматривать и неограниченные функции, показатель степени роста которых равен нулю.
**) См. вып. 2, стр. 367.

менной p является изображением функции $f(t)$ действительной переменной t.

Во-первых, отметим, что имеются различные таблицы изображений наиболее часто встречающихся в приложениях функций, так что при решении конкретных задач часто удается найти в соответствующем справочнике *) выражение оригинала для полученного изображения.

Во-вторых, приведенные в предыдущем параграфе свойства изображений 1) — 9) во многих случаях позволяют решить и обратную задачу построения оригинала по заданному изображению. В первую очередь это относится к теореме смещения, интегрированию и дифференцированию изображения и изображению свертки функций. Ряд примеров был уже рассмотрен в § 1, некоторые примеры будут приведены в дальнейшем.

Однако все эти методы, по существу, являются методами подбора. Основной целью данного параграфа является изложение общего метода построения оригинала по изображению.

1. Формула Меллина. Начнем с того случая, когда по условиям задачи известно, что заданная функция $F(p)$ комплексной переменной p является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ с органиченной степенью роста $|f(t)| < Me^{at}$, причем значение постоянной a заданно. Требуется по заданной функции $F(p)$ построить искомую функцию $f(t)$. Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 8.3. *Пусть известно, что заданная функция $F(p)$ в области* $\operatorname{Re} p > a$ *является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ действительной переменной t, обладающей степенью роста a. Тогда*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \quad x > a. \tag{8.58}$$

Доказательство. По условию теоремы функция $f(t)$ существует и нам известна ее степень роста. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(t) = e^{-xt}f(t)$, $x > a$. Эта функция является кусочно-гладкой, на любом ограниченном участке оси t имеет конечное число точек разрыва первого рода и экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$. Она может быть представлена с помощью интеграла Фурье **)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta)e^{i\xi(t-\eta)}\,d\eta. \tag{8.59}$$

*) Достаточно подробные таблицы читатель может найти в книге В. А. Диткина и А. П. Прудникова «Интегральные преобразования и операционное исчисление», Физматгиз, 1961. Там же приведен и подробный список справочной литературы по операционному исчислению.
**) Определение интеграла Фурье и обоснование интегральной формулы (8.59) см. вып. 2, стр. 510.

Подставляя в (8.59) выражение функции $\varphi(t)$ через искомую функцию $f(t)$, получаем

$$e^{-xt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x\eta}f(\eta)e^{i\xi(t-\eta)}\,d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi t}\,d\xi\int_0^\infty e^{-(x+i\xi)\eta}f(\eta)\,d\eta, \tag{8.60}$$

так как $f(\eta) \equiv 0$ при $\eta < 0$.

Обозначим $p = x + i\xi$ и заметим, что внутренний интеграл в (8.60) представляет собой заданное изображение $F(p)$ искомой функции $f(t)$. Тогда выражение (8.60) принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(x+i\xi)t}F(p)\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp,$$

что и доказывает теорему. Заметим, что в формуле (8.58) интегрирование производится на комплексной плоскости p по прямой, параллельной мнимой оси и проходящей правее прямой $\operatorname{Re} p = a$. Значение интеграла (8.58), очевидно, не зависит от величины x при условии, что прямая интегрирования лежит правее прямой $\operatorname{Re} p = a$.

Формула (8.58) часто называется *формулой Меллина*, она является в определенном смысле обратной преобразованию Лапласа (формула (8.2)), так как выражает оригинал через заданное изображение. Отметим, что поскольку мы в процессе вывода формулы Меллина от самой неизвестной функции $f(t)$ перешли к ее интегралу Фурье, сходящемуся к функции $f(t)$ лишь в точках непрерывности этой функции, то и интеграл (8.58) совпадает с функцией $f(t)$ лишь в точках ее непрерывности.

В качестве примера применения доказанной теоремы рассмотрим вопрос об определении изображения произведения по известным изображениям сомножителей.

Теорема 8.4. *Пусть* $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$ *и* $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$. *Тогда*

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \doteqdot F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}F_1(q)F_2(p-q)\,dq = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}F_1(p-q)F_2(q)\,dq, \tag{8.61}$$

причем функция $F(p)$ определена и аналитична в области $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$, *а интегрирование производится по любой прямой, параллельной мнимой оси, удовлетворяющей в первом случае условию* $a_1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_2$, *а во втором — условию* $a_2 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_1$.

Как мы видели, наиболее важным классом функций комплексной переменной являются аналитические функции. Выясним, является ли функция $F(p)$ аналитической.

Теорема 8.2. *Изображение Лапласа* (8.2) *функции $f(t)$ является аналитической функцией комплексной переменной p в области* $\operatorname{Re} p > a$, *где a — показатель степени роста функции $f(t)$.*

Доказательство. В силу теоремы 8.1 несобственный интеграл (8.2) сходится в области $\operatorname{Re} p > a$. Разобьем интервал интегрирования на отрезки $[t_i, t_{i+1}]$ произвольной конечной длины, причем $t_0 = 0$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ представляет собой сумму сходящегося ряда

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-pt}f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}u_n(p). \tag{8.9}$$

Заметим, что поскольку n-й остаток ряда (8.9) равен $\int_{t_{n+1}}^{\infty}e^{-pt}f(t)\,dt$, то согласно теореме 8.1 ряд (8.9) сходится равномерно в области $\operatorname{Re} p \geqslant x_0 > a$. Каждая из функций

$$u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{-pt}f(t)\,dt$$

определена как интеграл, зависящий от параметра p, по отрезку конечной длины на комплексной плоскости t. На основании общих свойств интегралов от функций двух комплексных переменных, зависящих от параметра *), функции $u_n(p)$ являются целыми функциями p. Из проведенных рассуждений следует, что ряд (8.9) в области $\operatorname{Re} p > a$ удовлетворяет всем условиям теоремы Вейерштрасса **), а значит, функция $F(p)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p > a$ и ее производные можно вычислять, дифференцируя подынтегральную функцию в (8.2) по парамегру p.

2. Изображение элементарных функций. Пользуясь определением (8.2), найдем изображение ряда элементарных функций действительной переменной.

а) Единичная функция Хевисайда. Пусть

$$f(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{8.10}$$

Тогда

$$f(t) \doteqdot F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p},$$

*) См. гл. 1 стр. 52.
**) См. гл. 2 стр. 62.

причем функция $F(p)$, очевидно, определена в области $\operatorname{Re} p > 0$. Итак,

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases} \doteqdot \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{8.11}$$

Отметим, что если вместо преобразования Лапласа (8.2) пользоваться преобразованием Хевисайда (8.8), то изображением единичной функции $\sigma_0(t)$ будет функция $\tilde{F}(p) \equiv 1$. Этим объясняется достаточно широкое применение преобразования Хевисайда. Однако в случае преобразования Хевисайда (8.8) усложняется ряд других формул, в частности формула обратного преобразования, формула изображения свертки (см. ниже стр. 223).

Условимся всюду в дальнейшем, если это не оговорено особо, под функцией $f(t)$ понимать произведение $f(t)\cdot\sigma_0(t)$, т. е. функцию, тождественно равную нулю при $t < 0$, не отмечая это специально в соответствующих формулах.

б) Показательная функция

$$f(t) = e^{\alpha t}. \tag{8.12}$$

Вычисляя интеграл (8.2), получаем:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha;$$

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha. \tag{8.13}$$

в) Степенная функция

$$f(t) = t^\nu, \quad \nu > -1. \tag{8.14}$$

В этом случае интеграл (8.2) имеет вид

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}t^\nu\,dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{8.15}$$

Заметим, что при $\nu < 0$ функция (8.14) уже не удовлетворяет условию 2 стр. 212 (точка $t = 0$ является точкой разрыва второго рода этой функции) и тем самым не принадлежит основному рассматриваемому классу функции действительной переменной, для которых существует изображение Лапласа. Однако, как легко видеть, при $\nu > -1$ эта функция принадлежит расширенному классу, введенному на стр. 214 (интеграл (8.15) сходится при $\operatorname{Re} p > 0$ и $\nu > -1$). Поэтому и в случае $-1 < \nu < 0$ изображение Лапласа функции (8.14) в области $\operatorname{Re} p > 0$ существует и определяется формулой (8.15).

Перейдем к вычислению интеграла (8.15). Начнем со случая, когда переменная p принимает действительное значение $p = x > 0$. Сделав

откуда и следует сходимость интеграла (8.67) при любом $x > a$. Отметим для дальнейшего, что из оценки (8.68) следует равномерная сходимость интеграла (8.67) по параметру t на любом конечном промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для того чтобы доказать, что интеграл (8.67) является оригиналом заданной функции $F(p)$, следует установить, что:

1° Интеграл (8.67) не зависит от x и определяет функцию $f(t)$ лишь одной переменной t, причем эта функция обладает ограниченной степенью роста.

2° При $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.

3° Изображением Лапласа функции $f(t)$ является заданная функция $F(p)$.

Докажем каждое из высказанных утверждений.

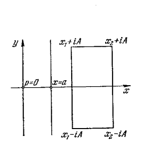


Рис. 8.1.

Рис. 8.2.

1° Рассмотрим в области $\operatorname{Re} p > a$ замкнутый контур Γ, состоящий из отрезков прямых $[x_1 - iA, x_1 + iA]$ и $[x_2 - iA, x_2 + iA]$, параллельных мнимой оси, и соединяющих их отрезков прямых $[x_1 - iA, x_2 - iA]$, $[x_1 + iA, x_2 + iA]$, параллельных действительной оси (рис. 8.1). Здесь $A > 0$, x_1, x_2 — произвольные числа, большие a. Так как функция $F(p)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p > a$, то в силу теоремы Коши интеграл от функции $e^{pt}F(p)$ по контуру Γ равен нулю. Устремим A к бесконечности, оставляя фиксированными x_1, x_2. Тогда по условию б) теоремы интегралы по горизонтальным отрезкам пути интегрирования дадут в пределе нуль. В то же время интегралы по вертикальным прямым переходят в интеграл (8.67). Отсюда

$$\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp,$$

что в силу произвольности x_1 и x_2 доказывает утверждение 1°. Итак, интеграл (8.67) является функцией лишь одной переменной t. Отметим, что при этом из оценки (8.68) сразу следует, что интеграл (8.67) представляет собой функцию ограниченной степени роста по t, причем показатель степени роста этой функции равен a.

2° Рассмотрим значение интеграла (8.67) при $t < 0$. Для этого в области $\operatorname{Re} p > a$ рассмотрим замкнутый контур C, состоящий из отрезка прямой $[x - iR, x + iR]$, $x > a$, и замыкающей его дуги C'_R полуокружности $|p - x| = R$ (рис. 8.2). По теореме Коши интеграл от функции $e^{pt}F(p)$ по данному контуру равен нулю. В силу замечания к лемме Жордана (см. гл. 5, стр. 133) при $R \to \infty$ интеграл по дуге C'_R стремится к нулю при $t < 0$. Поэтому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp \equiv 0, \quad t < 0, \quad \operatorname{Re} p > a, \tag{8.69}$$

и утверждение 2° доказано.

3° Построим изображение Лапласа функции (8.67) и рассмотрим его значение при некотором произвольном p_0, где $\operatorname{Re} p_0 > a$:

$$\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-p_0t}\,dt\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp. \tag{8.70}$$

Внутренний интеграл в (8.70) не зависит от x. Выберем значение x, удовлетворяющее условию $a < x < \operatorname{Re} p_0$, и изменим порядок интегрирования, что возможно в силу равномерной сходимости соответствующих интегралов; получим

$$\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}F(p)\,dp\int_0^\infty e^{-(p_0-p)t}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}F(p)\frac{dp}{p_0-p}. \tag{8.71}$$

Интеграл (8.71) может быть вычислен с помощью вычетов, так как в силу условия б) теоремы подынтегральная функция стремится к нулю при $|p| \to \infty$ быстрее, чем функция $\frac{1}{p}$. Поэтому, учтя, что единственной особой точкой подынтегральной функции — полюсом первого порядка — является точка $p = p_0$ и при замыкании (8.71) в правой полуплоскости интегрирование производится в отрицательном направлении, получим

$$f(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)\,dt = F(p_0). \tag{8.72}$$

Поскольку p_0 — произвольная точка в области $\operatorname{Re} p > a$, теорема доказана. Естественно, что интеграл (8.67) совпадает с формулой Мелли-

Формула (8.42) дает достаточно простое выражение изображения искомого решения $y(t)$ через известные функции-полином $P_n(p)$, коэффициенты которого определяются уравнением (8.40), и изображение $F(p)$ заданной правой части уравнения. Тем самым, если мы сможем определить неизвестный оригинал $y(t)$ по его известному изображению $Y(p)$, то задача (8.40), (8.41) будет решена. Ниже мы рассмотрим различные способы определения оригинала по заданному изображению, а сейчас продолжим рассмотрение еще ряда общих свойств изображения.

д) Изображение интеграла.

Свойство 5. Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{1}{p} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.43}$$

Действительно, легко проверить, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям существования изображения, причем $\varphi(t)$ имеет тот же показатель степени роста, что и $f(t)$. Вычислив изображение функции $\varphi(t)$ по формуле (8.2), получим

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования *), получаем

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{p} F(p),$$

что и доказывает формулу (8.43).

Аналогичным образом может быть доказано

Свойство 5'. Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$; тогда

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n \doteqdot \frac{1}{p^n} F(p), \quad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.44}$$

Свойства 5 и 5' находят многочисленные применения при вычислении изображений различных функций.

Например, найдем изображение пилообразной функции $f(t)$, представляющей собой периодически повторяющийся равнобедренный треугольник с основанием 2τ и высотой $f_0\tau$. Как легко видеть, эта функция представляет собой интеграл от 0 до t от функции (8.28), изображение которой дается формулой (8.29). Поэтому

$$f(t) \doteqdot \frac{f_0}{p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}. \tag{8.45}$$

*) Возможность изменения порядка интегрирования следует из теоремы 10.9, вып. 2, выполнение условий которой в данном случае легко проверяется.

е) Изображение свертки. Сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $\varphi(t)$, определенная соотношением

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau. \tag{8.46}$$

В справедливости последнего равенства легко убедиться, сделав в первом интеграле замену переменной интегрирования $t - \tau = t'$. Имеет место следующее

Свойство 6. Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$, то

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \doteqdot F_1(p) F_2(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{a_1, a_2\}. \tag{8.47}$$

Свертка функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ с ограниченной степенью роста также является функцией с ограниченной степенью роста. Действительно,

$$\left|\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau\right| \leqslant M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1\tau} e^{a_2(t-\tau)}\,d\tau = \frac{M_1 M_2}{a_1 - a_2}\{e^{a_1 t} - e^{a_2 t}\} \leqslant \frac{M_1 M_2}{|a_1 - a_2|} e^{at}, \quad a = \max\{a_1, a_2\}.$$

Аналогичным образом легко проверить, что свертка функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ с ограниченной степенью роста и при $a_1 = a_2$ также является функцией с ограниченной степенью роста. Степень роста свертки, очевидно, равна наибольшей степени роста функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Легко видеть, что $\varphi(t)$ удовлетворяет и остальным условиям существования изображения. Для вычисления изображения свертки воспользуемся формулой (8.2) и изменим порядок интегрирования *):

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^\infty f_1(t)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt.$$

Сделав замену переменной $t - \tau = t'$ во внутреннем интеграле, окончательно получим

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\,d\tau \int_0^\infty e^{-pt'} f_2(t')\,dt' = F_1(p) F_2(p),$$

что и доказывает свойство 6.

В приложениях формула (8.47) часто используется для определения оригинала по заданному изображению, когда заданное изображение удается разбить на сомножители, для которых оригиналы известны.

Например, пусть требуется найти оригинал функции $F(p) = p\omega/(p^2+\omega^2)^2$.

*) О возможности изменения порядка интегрирования см. ссылку на стр. 222.

Знак в формуле (7.90) определяется знаком суммарного заряда e, распределенного на поверхности данного идеально проводящего проводника. Формула (7.90) находит многочисленные приложения при решении различных задач электростатики.

Заметим, наконец, что, так же как и в задачах гидродинамики, производная комплексного потенциала $f'(z)$ на основании (7.83) является однозначной аналитической функцией z. Если напряженность данного электростатического поля ограничена на бесконечности, то разложение $f'(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид

$$f'(z) = w_\infty + \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{z^n}.$$

Отсюда для самого комплексного потенциала получим разложение

$$f(z) = w_\infty z + c_0 + b_1 \ln z + \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{z^n}. \tag{7.91}$$

Так как

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f'(z)\,dz,$$

где контур C_R содержит все заряды, создающие данное поле, внутри, то из (7.87) получим окончательное разложение комплексного потенциала в окрестности точки $z = \infty$ в виде

$$f(z) = w_\infty z - i2e \ln z + \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{z^n}. \tag{7.92}$$

Как мы видим, комплексный потенциал электростатического поля имеет чрезвычайно много общего с комплексным гидродинамическим потенциалом *). Поэтому исследование плоского электростатического поля с помощью комплексного потенциала может быть проведено теми же методами, что и решение соответствующих гидродинамических задач. Так, все примеры течений, рассмотренные на стр. 194—196, допускают простую электростатическую интерпретацию.

Например, рассмотрим электростатическое поле, описываемое комплексным потенциалом

$$f(z) = -i2e \ln z, \qquad e > 0. \tag{7.93}$$

*) Очевидно, то, что потенциальная функция в электростатике является мнимой частью комплексного потенциала, а в гидродинамике потенциал скорости является действительной частью комплексного потециала, представляет собой несущественное различие, которое может быть устранено введением дополнительного множителя, равного $-i$. Однако мы придерживаемся установившейся терминологии, при которой имеет место указанное различие.

Введя полярные координаты r, φ и учтя, что $z = re^{i\varphi}$, получим

$$v(r, \varphi) = -2e \ln|z| = 2e \ln\frac{1}{r}, \qquad u(r, \varphi) = 2e \arg z = 2e\varphi.$$

Отсюда следует, что эквипотенциальными поверхностями данного поля являются концентрические окружности с центром в начале координат, а силовыми линиями — лучи $\varphi = \text{const}$. Вектор $\mathbf{E}$ в каждой точке $z \neq 0$ направлен по лучу $\varphi = \text{const}$, а по абсолютной величине в силу формулы (7.84) равен

$$|\mathbf{E}| = |f'(z)| = \frac{2e}{r}.$$

Так как интеграл по любой окружности $|z| = r$ от нормальной составляющей напряженности данного поля имеет постоянное значение, равное $4\pi e$, то, очевидно, это поле создается точечным зарядом величины e, находящимся в начале координат (в пространстве заряды, создающие данное поле, распределены с постоянной плотностью e вдоль прямой, перпендикулярной плоскости x, y и проходящей через начало координат).

Рассмотрим некоторые типичные задачи электростатики, которые могут быть решены с помощью комплексного потенциала.

а) *Определение плотности распределения заряда на идеально проводящем проводнике.* Пусть боковая поверхность идеально проводящего проводника представляет собой бесконечный цилиндр, поперечное сечение которого ограничено контуром C. Предположим, что плотность распределения заряда постоянна вдоль образующих цилиндра и на единицу длины цилиндра приходится заряд e. Требуется определить поверхностную плотность заряда $\sigma(s)$ на контуре C поперечного сечения. Очевидно, решение данной задачи дается формулой (7.90) при нормировочном условии (7.88). Тем самым задача сводится к построению комплексного потенциала $f(z)$, являющегося аналитической функцией вне контура C, при условии, что мнимая часть $f(z)$ имеет постоянное значение на контуре C и в окрестности точки $z = \infty$ разложение $f(z)$ дается формулой (7.92), где $w_\infty = 0$, а коэффициент e равен заряду, приходящемуся на единицу длины проводника.

Начнем с простейшего случая, когда проводник представляет собой круговой цилиндр единичного радиуса. Выше было показано (см. стр. 206), что эквипотенциальные линии комплексного потенциала (7.93) представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат. Поэтому, чтобы удовлетворить условию на границе проводника, естественно искать потенциал данного поля в виде

$$f(z) = -iC \ln z,$$

В заключение данного параграфа приведем таблицу рассмотренных свойств изображений и таблицу изображений ряда элементарных и специальных функций, наиболее часто используемых в приложениях.

4. Таблица свойств изображений. Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$. Тогда

1) $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \doteqdot \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p)$, $\quad \alpha_i = \text{const}$;

2) $f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\quad \alpha = \text{const}$, $\alpha > 0$;

3) $f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & \tau > t, \\ f(t-\tau), & \tau \leqslant t, \end{cases}$ $\quad f_\tau(t) \doteqdot e^{-p\tau} F(p)$;

4) $f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \left\{F(p) - \frac{f(0)}{p} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right\}$;

5) $\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{1}{p} F(p)$;

6) $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau \doteqdot F_1(p) F_2(p)$;

7) $F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t)$;

8) $\int_p^\infty F(p)\,dp \doteqdot \frac{f(t)}{t}$;

9) $F(p+\lambda) \doteqdot e^{-\lambda t} f(t)$.

5. Таблица изображений.

1) $1 \doteqdot \frac{1}{p}$, $\quad \operatorname{Re} p > 0$;

2) $t^\nu \doteqdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, $\nu > -1$, $\quad \operatorname{Re} p > 0$;

3) $t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}$, n — натуральное, $\quad \operatorname{Re} p > 0$;

4) $e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}$, $\quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$;

5) $\sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;

6) $\cos \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;

7) $\operatorname{sh} \lambda t \doteqdot \frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|$;

8) $\operatorname{ch} \lambda t \doteqdot \frac{p}{p^2-\lambda^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \lambda|$;

9) $t^n e^{\alpha t} \doteqdot \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $\quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$;

10) $t \sin \omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;

11) $t \cos \omega t \doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;

12) $e^{\lambda t} \sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|)$;

13) $e^{\lambda t} \cos \omega t \doteqdot \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$, $\quad \operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|)$;

14) $\frac{\sin \omega t}{t} \doteqdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}$, $\quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;

15) $\begin{cases} 1, & 2k\tau \leqslant t < (2k+1)\tau \\ -1, & (2k+1)\tau \leqslant t < (2k+2)\tau \end{cases} \doteqdot \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}$, $\quad \operatorname{Re} p > 0$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$;

16) $|\sin \omega t| \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega}$, $\quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;

17) $e^{-\alpha^2 t^2} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4\alpha^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{p}{2\alpha}\right)\right)$;

18) $\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$;

19) $\frac{e^{-2\alpha\sqrt{t}}}{\sqrt{\pi t}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{\alpha^2}{p}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{p}}\right)\right)$;

20) $J_0(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+p^2}}$;

21) $J_0(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$;

22) $J_n(t) \doteqdot \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$;

23) $\operatorname{si} t \doteqdot \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right)$;

24) $\Phi(\sqrt{\alpha t}) \doteqdot \frac{\sqrt{\alpha}}{p\sqrt{p+\alpha}}$;

25) $1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$.

При действительных значениях параметров, входящих в функции $f(t)$ в формулах 17) — 25), изображения соответствующих функций заведомо определены в области $\operatorname{Re} p > 0$.

§ 2. Определение оригинала по изображению

В этом параграфе мы рассмотрим методы определения оригинала по заданному изображению, а также приведем некоторые достаточные условия, при которых заданная функция $F(p)$ комплексной пере-

Из соответствия точек A_3 $(z = ih)$ и $\zeta = -1$ следует, что при $\zeta_0 = -1$ получим

$$z = C\int_{-1}^{\zeta} \frac{(1+\zeta)^\alpha}{\zeta}\,d\zeta + ih. \tag{7.99}$$

Чтобы определить постоянную C, заметим, что обходу точки $\zeta = 0$ в верхней полуплоскости по дуге полуокружности бесконечно малого радиуса ρ в направлении против часовой стрелки соответствует переход со стороны A_2A_1 на сторону A_1A_3. При этом приращение z равно

$$\Delta z = ih.$$

С другой стороны, из (7.99), положив $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ и перейдя к пределу при $\rho \to 0$, получим

$$\Delta z = iC \lim_{\rho \to 0} \int_0^\pi (1 + \rho e^{i\varphi})^\alpha\,d\varphi = i\pi C.$$

Отсюда $C = \frac{h}{\pi}$, и окончательное выражение для интеграла (7.99) имеет вид

$$z = \frac{h}{\pi}\int_{-1}^{\zeta} \frac{(1+\zeta)^\alpha}{\zeta}\,d\zeta + ih.$$

Функция $\zeta = e^{\pi w}$ осуществляет конформное отображение полосы $0 < \operatorname{Im} w < 1$ плоскости w на верхнюю полуплоскость ζ. Поэтому функция

$$z = \frac{h}{\pi}\int_{-1}^{e^{\pi w}} \frac{(1+\zeta)^\alpha}{\zeta}\,d\zeta + ih \tag{7.100}$$

осуществляет конформное отображение полосы $0 < \operatorname{Im} w < 1$ плоскости w на данную криволинейную полосу $\mathscr{G}$ плоскости z. При этом прямая $\operatorname{Im} w = 0$ переходит в нижнюю обкладку конденсатора A_1A_2, а прямая $\operatorname{Im} w = 1$ — в верхнюю обкладку, представляющую собой ломаную $A_2A_3A_1$. Из формулы (7.100) при $v = \operatorname{Im} w = \text{const}$ получим параметрические уравнения потенциальных кривых данного электростатического поля. Например, в частном случае при $\alpha = 1$ интеграл (7.100) вычисляется в элементарных функциях:

$$z = \frac{h}{\pi}(1 + \pi w + e^{\pi w}).$$

Тогда параметрические уравнения эквипотенциальной кривой $v = v_0 = \text{const}$ $(0 \leqslant v_0 \leqslant 1)$ принимают вид

$$x = \frac{h}{\pi}(1 + \pi u + \cos \pi v_0 \cdot e^{\pi u}), \quad y = \frac{h}{\pi}(\pi v_0 + \sin \pi v_0 \cdot e^{\pi u}), \qquad -\infty < u < \infty.$$

В частности, уравнение средней эквипотенциальной линии $\left(v_0 = \frac{1}{2}\right)$ имеет вид

$$y = \frac{h}{2} + \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi}{h}x - 1}.$$

Эквипотенциальные линии, соответствующие различным значениям v, приведены на рис. 7.5. При $v_0 > \frac{1}{2}$ легко определяется значение $x_{\max}$ по формуле

$$x_{\max} = \frac{h}{\pi} \ln\left(-\frac{1}{\cos \pi v_0}\right).$$

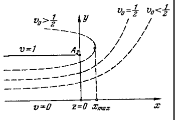


Рис. 7.5.

Полученные результаты легко позволяют определить то расстояние от края конденсатора, изображенного на рис. 7.5, на котором поле конденсатора с заданной степенью точности можно считать плоским.

Вообще, методы конформных отображений широко используются при расчете плоских электростатических и магнитостатических линз, применяемых для фокусировки электронных пучков, что необходимо для работы многих физических устройств.

Доказательство. Так как функция $f(t)$ удовлетворяет всем условиям существования изображения, то для нее имеет место преобразование Лапласа

$$f(t) \doteqdot F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t) f_2(t)\,dt. \tag{8.62}$$

Представляя в (8.62) функцию $f_1(t)$ в виде ее интеграла Меллина (8.58) и меняя порядок интегрирования, что возможно в силу равномерной сходимости данных несобственных интегралов, зависящих от параметра, получаем

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-pt} f_2(t)\,dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F_1(q)\,dq = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)\,dq \int_0^\infty e^{-(p-q)t} f_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(p-q)\,dq. \tag{8.63}$$

Заметим, что в (8.63) $\operatorname{Re} q = x > a_1$, а функция $F_2(p-q)$ определена при $\operatorname{Re}(p-q) > a_2$, откуда $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$. Заменив в (8.62) функцию $f_2(t)$ по формуле обращения, можно получить второе равенство в (8.61). Теорема доказана. Отметим, что доказанная теорема в известном смысле обратна свойству 6.

Пример 1. Пусть $f_1(t) = \cos \omega t$, $f_2(t) = t$. Найдем изображение функции $f(t) = t\cos \omega t$.

Так как $\cos \omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $t \doteqdot \frac{1}{p^2}$, то

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{q\,dq}{(q^2+\omega^2)(p-q)^2}, \tag{8.64}$$

где $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$, а интегрирование производится по любой прямой, параллельной мнимой оси и лежащей правее прямой $\operatorname{Re} q = |\operatorname{Im} \omega|$. В качестве такой прямой интегрирования выберем прямую, проходящую левее точки $q = p$, и рассмотрим на комплексной плоскости q замкнутый контур Γ, состоящий из отрезка $[x - iR, x + iR]$ данной прямой и замыкающей его в правой полуплоскости дуги полуокружности $|q - x| = R$. Внутри данного контура подынтегральная функция из (8.64) является всюду аналитической, кроме точки $q = p$, которая есть полюс второго порядка данной функции. Точка $q = \infty$ является нулем третьего порядка этой функции. Поэтому в силу леммы 1 гл. 5 значение интеграла (8.64) определяется вычетом в особой точке подынтегральной функции. Заметив, что обход

контура Γ совершается в отрицательном направлении, получим

$$F(p) = -\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{(q^2+\omega^2)}\right]_{q=p} = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Итак,

$$t\cos \omega t \doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}. \tag{8.65}$$

2. Условия существования оригинала. В настоящем пункте мы рассмотрим некоторые достаточные условия, при которых заданная функция $F(p)$ комплексной переменной p является изображением некоторой функции $f(t)$ действительной переменной t, и покажем, как найти последнюю.

Теорема 8.5. *Пусть функция $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$ удовлетворяет следующим условиям:*

а) $F(p)$ — аналитическая функция в области $\operatorname{Re}(p) > a$;

б) в области $\operatorname{Re} p > a$ функция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$;

в) для всех $\operatorname{Re} p = x > a$ сходится интеграл)*

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\,dy < M, \quad x > a. \tag{8.66}$$

Тогда функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ является изображением функции $f(t)$ действительной переменной t, которая определяется выражением

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp, \quad x > a. \tag{8.67}$$

Доказательство. Итак, надо доказать, что интеграл (8.67) является оригиналом функции $F(p)$. Первым делом возникает вопрос о существовании этого несобственного интеграла**). Очевидно,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left|e^{pt} F(p)\right| \cdot |dp| = \frac{e^{xt}}{2\pi}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\,dy \leqslant \frac{M}{2\pi} e^{xt}, \tag{8.68}$$

*) Интеграл (8.66) представляет собой несобственный интеграл первого рода по прямой $\operatorname{Re} p = x$ от действительной функции $|F(p)|$.

**) Несобственный интеграл (8.67) вычисляется вдоль прямой $\operatorname{Re} p = x$ и понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp = \lim_{A \to \infty}\int_{x-iA}^{x+iA} e^{pt} F(p)\,dp.$$

что и дает основание сделать заключение о сходимости интеграла (8.2) при $x > a$. Если $x \geqslant x_0 > a$, то аналогичная оценка дает

$$|F(p)| \leqslant M\int_0^\infty e^{-(x_0 - a_1)t}\,dt = \frac{M}{x_0 - a_1}, \tag{8.4}$$

что и доказывает в силу признака Вейерштрасса *) равномерную сходимость интеграла (8.2) по параметру p в области $\operatorname{Re} p \geqslant x_0 > a$.

Приведенное доказательство существенно опиралось на условия 2 и 3 определения рассматриваемого класса функций $f(t)$ действительной переменной t. Однако можно расширить класс функций $f(t)$, допускающих преобразование Лапласа. Для этого предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть функция $f(t)$ действительной переменной t определена для всех $t \geqslant 0$, и пусть существует такое комплексное число p_0, что сходится интеграл*

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\,dt. \tag{8.5}$$

Тогда для всех p, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$, сходится интеграл

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt. \tag{8.6}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = e^{-p_0 t} f(t)$ и введем вспомогательную функцию $F(t) = -\int_t^\infty \varphi(\tau)\,d\tau$. Заметим, что $F'(t) = \varphi(t)$. Кроме того, в силу сходимости интеграла (8.5), очевидно, для заданного $\varepsilon' > 0$ можно указать такое T_0, что $|F(t)| < \varepsilon'$ при $t \geqslant T_0$.

Рассмотрим теперь интеграл $\int_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t)\,dt$, где T_1 и T_2 — произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $T_2 > T_1$, и представим его в виде

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t)\,dt = \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} \varphi(t)\,dt = \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F'(t)\,dt.$$

Вычисляя последний интеграл по частям, получаем

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F'(t)\,dt = e^{-(p-p_0)T_2} F(T_2) - e^{-(p-p_0)T_1} F(T_1) + (p - p_0)\int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F(t)\,dt.$$

*) См. вып. 2, стр. 424.

Отсюда при T_1, $T_2 > T_0$ и $\operatorname{Re}(p - p_0) > 0$ получим

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t)\,dt\right| \leqslant \left(e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_2} + e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_1}\right)\varepsilon' + \varepsilon'\frac{|p-p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)}\left(e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_1} - e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_2}\right) < \varepsilon'\left[2 + \frac{|p-p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)}\right] e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_0}.$$

Очевидно, всегда можно так выбрать значение T_0, чтобы полученное выражение было меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Это на основании признака Коши *) и доказывает сходимость интеграла (8.6).

Можно доказать и равномерную по параметру p сходимость интеграла (8.6) при $\operatorname{Re} p \geqslant \operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re} p_0$.

На основании доказанной леммы можно в качестве основного класса функций $f(t)$ действительной переменной t, для которых строится преобразование Лапласа (8.2), рассматривать функции, удовлетворяющие условию (8.5). Функции, удовлетворяющие данному условию, будем называть принадлежащими классу $A(p_0)$.

Итак, с помощью преобразования (8.2) функция $F(p)$ комплексной переменной p определена в полуплоскости комплексной плоскости p правее прямой $\operatorname{Re} p = a$, параллельной мнимой оси.

Заметим, что из формулы (8.3) следует, что $|F(p)| \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to \infty$.

Функция $F(p)$, определенная через функцию $f(t)$ с помощью преобразования (8.2), называется *изображением Лапласа* функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется *оригиналом* функции $F(p)$. Связь функций $f(t)$ и $F(p)$ будем символически обозначать следующим образом **):

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \doteqdot f(t). \tag{8.7}$$

Отметим, что в практических приложениях часто пользуются так называемым *преобразованием Хевисайда*:

$$\tilde{F}(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \tag{8.8}$$

отличающимся от преобразования Лапласа дополнительным множителем p. Очевидно, область определения функции $\tilde{F}(p)$ та же, что и для функции $F(p)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только преобразование Лапласа (8.2). Свойства преобразования Хевисайда (8.8) легко могут быть получены на основании рассматриваемых ниже свойств преобразования Лапласа.

*) Признак Коши сходимости несобственных интегралов см. вып. 2, стр. 364.

**) В литературе встречаются и другие символические обозначения, например: $F(p) \to f(t)$, $F(p) \div f(t)$, $F(p) \parallel f(t)$ и т. д.

на (8.58), выведенный в предположении существования оригинала. Итак, нами установлены некоторые достаточные условия, при которых заданная функция $F(p)$ комплексной переменной p является изображением.

3. Вычисление интеграла Меллина. Во многих практически важных случаях интеграл (8.58), (8.67), дающий выражение оригинала по заданной функции $F(p)$ комплексной переменной, может быть вычислен с помощью рассмотренных выше (см. гл. 5) методов вычисления контурных интегралов от функции комплексной переменной. Пусть функция $F(p)$, первоначально заданная в области $\operatorname{Re} p > a$, может быть аналитически продолжена на всю плоскость p, за исключением конечного числа особых точек и разрезов. Пусть ее аналитическое продолжение удовлетворяет при $\operatorname{Re} p < a$ условиям леммы Жордана. Тогда при $t > 0$

$$\int_{C_R''} e^{pt} F(p)\,dp \to 0, \qquad R \to \infty, \tag{8.73}$$

где C_R'' — дуга полуокружности $|p - x| = R$ в левой полуплоскости. В этом случае интеграл (8.67) может быть вычислен с помощью теории вычетов. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 2. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\omega^2 > 0$. Так как условия теоремы 8.5 выполнены, то

$$F(p) \doteqdot f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,dp, \qquad x > 0.$$

Аналитическое продолжение функции $F(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$, функция $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, удовлетворяет условиям леммы Жордана и имеет две особые точки — полюсы первого порядка при $p_{1,2} = \pm i\omega$. Поэтому при $t \geqslant 0$

$$f(t) = \sum_{k=1}^2 \text{Выч}\left[e^{pt}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}, p_k\right] = \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \sin \omega t, \quad t \geqslant 0.$$

Условия теоремы 8.5, в частности условие в), являются достаточными условиями существования оригинала аналитической в области $\operatorname{Re} p > a$ функции $F(p)$. Нетрудно привести примеры, показывающие, что, если это условие не имеет места, функция $F(p)$ может все же быть изображением некоторой функции действительной переменной.

Пример 3. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}}$, $-1 < \alpha < 0$, $\operatorname{Re} p > 0$. Эта функция является многозначной в рассматриваемой области. Мы будем понимать под функцией $F(p)$ ту ветвь данной многозначной функции, которая является непосредственным аналитическим

продолжением в область $\operatorname{Re} p > 0$ действительной функции $\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ действительной переменной $x > 0$. При этом мы, очевидно, должны считать $\arg p = 0$ при $p = x$, $x > 0$. Функция $F(p)$ не удовлетворяет условию в) теоремы 8.5. Покажем, однако, что функция

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{1}{p^{\alpha+1}}\,dp, \quad x > 0, \tag{8.74}$$

является оригиналом заданной функции $F(p)$.

Аналитическое продолжение функции $F(p)$ на левую полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$ является многозначной функцией, имеющей точками разветвления точки $p = 0$ и $p = \infty$. Будем рассматривать в области $\mathscr{G}$, представляющей собой комплексную плоскость p с разрезом по отрицательной части действительной оси, ту ветвь многозначной функции $\frac{1}{p^{\alpha+1}}$, которая является непосредственным аналитическим продолжением функции $F(p)$, первоначально заданной в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. В области $\mathscr{G}$ рассмотрим замкнутый контур Γ, состоящий из отрезка прямой $[x - iR', x + iR']$, $x > 0$, отрезков $-R < x < -\rho$ на берегах разреза и замыкающих их дуги окружности C_ρ', $|p| = \rho$, и дуг окружности C_R'', $|p - x| = R'$, соединяющих берега разреза с вертикальным отрезком $[x - iR', x + iR']$ (рис. 8.3). Так как функция $e^{pt}\frac{1}{p^{\alpha+1}}$ в области $\mathscr{G}$ особых точек не имеет, то по теореме Коши интеграл от этой функции по контуру Γ равен нулю. Устремим R' к бесконечности, а ρ к нулю. В силу леммы Жордана интегралы по кривым $C_{R'}''$ дадут в пределе нуль. Оценим интеграл по окружности C_ρ', положив $p = \rho e^{i\varphi}$:

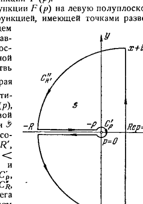


Рис. 8.3.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho'} e^{pt}\frac{dp}{p^{\alpha+1}}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi\rho^\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t\rho\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Так как $-1 < \alpha < 0$, то интеграл по C_ρ' также стремится к нулю при $\rho \to 0$. Тем самым остаются лишь интегралы по прямолинейным участкам контура интегрирования. Заметим, что на нижнем берегу

в интеграле (8.15) замену переменной интегрирования $xt = s$, получим

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} t^\nu\,dt = \frac{1}{x^{\nu+1}}\int_0^\infty e^{-s} s^\nu\,ds = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}, \tag{8.16}$$

где $\Gamma(\nu+1)$ — гамма-функция *) Эйлера. Так как функция $F(p)$, определенная формулой (8.15), является аналитической в области $\operatorname{Re} p > 0$, имеющей на положительной части действительной оси $x > 0$ значение (8.16), то в силу единственности аналитического продолжения для функции $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > 0$ получим выражение

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^\nu\,dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}. \tag{8.17}$$

При этом в случае дробных ν следует выбирать ту ветвь многозначной функции $\frac{1}{p^{\nu+1}}$, которая является непосредственным аналитическим продолжением в область $\operatorname{Re} p > 0$ действительной функции $\frac{1}{x^{\nu+1}}$ действительной переменной $x > 0$. Итак,

$$t^\nu \doteqdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \qquad \nu > -1, \qquad \operatorname{Re} p > 0. \tag{8.18}$$

Для целых $\nu = n$ из формулы (8.18) получим

$$t^n \doteqdot \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0. \tag{8.19}$$

Вычисляя интеграл (8.2), можно получить изображение еще ряда функций действительной переменной, однако во многих случаях для вычисления изображения заданной функции удобнее, оказывается, пользоваться общими свойствами изображения Лапласа, к рассмотрению которых мы и перейдем.

3. Свойства изображения.

а) Линейность изображения. В силу известных свойств определенных интегралов, имеет место

Свойство 1. Если $F_i(p) \doteqdot f_i(t)$, $\operatorname{Re} p > a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \doteqdot \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t), \qquad \operatorname{Re} p > \max a_i, \tag{8.20}$$

где α_i — заданные постоянные числа (действительные или комплексные), a_i — показатели степени роста функций $f_i(t)$.

Данное свойство позволяет по найденным изображениям функций (8.13), (8.18), (8.19) найти изображения многочлена, тригонометрических и гиперболических функций.

*) Определение и свойства гамма-функции см. вып. 2, стр. 434.

Например, с помощью (8.13) получим

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \tag{8.21}$$

Аналогично

$$\sin \omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \tag{8.22}$$

б) Свойство 2. Пусть $F(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, тогда

$$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \doteqdot f(\alpha t), \qquad \alpha > 0, \qquad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.23}$$

Действительно,

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

в) Свойство 3 (теорема запаздывания). Пусть $F(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$ и задана функция

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \quad \tau > 0, \\ f(t-\tau), & t \geqslant \tau. \end{cases} \tag{8.24}$$

Тогда

$$f_\tau(t) \doteqdot F_\tau(p) = e^{-p\tau} F(p) \qquad \operatorname{Re} p > a. \tag{8.25}$$

Действительно,

$$F_\tau(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_\tau(t)\,dt = \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)\,dt.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной, положив $t - \tau = t'$. Тогда

$$F_\tau(p) = \int_0^\infty e^{-p(t'+\tau)} f(t')\,dt' = e^{-p\tau} F(p),$$

что и доказывает свойство 3.

В качестве первого примера рассмотрим изображение ступенчатой функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ nf_0, & n\tau \leqslant t < (n+1)\tau, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{8.26}$$

Представим $f(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда σ_0:

$$f(t) = f_0[\sigma_0(t-\tau) + \sigma_0(t-2\tau) + \ldots].$$

Использовав свойство линейности и теорему запаздывания, получим

$$f(t) \doteqdot F(p) = f_0 e^{-p\tau}\frac{1}{p} + f_0 e^{-2p\tau}\frac{1}{p} + \ldots = \frac{f_0}{p}\frac{e^{-p\tau}}{1 - e^{-p\tau}}. \tag{8.27}$$

разреза $\arg p = -\pi$, на верхнем $\arg p = \pi$. Поэтому получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{dp}{p^{\alpha+1}} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{xt}\frac{dx}{(-x)^{\alpha+1}e^{i\pi\alpha}} + \int_{0}^{-\infty} e^{xt}\frac{dx}{(-x)^{\alpha+1}e^{-i\pi\alpha}}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{e^{-i\pi\alpha}\int_0^\infty e^{-xt}x^{-\alpha-1}\,dx - e^{i\pi\alpha}\int_0^\infty e^{-xt}x^{-\alpha-1}\,dx\right\} =$$
$$= \frac{\sin(-\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt}x^{-\alpha-1}\,dx. \qquad (8.75)$$

Сделав в интеграле (8.75) замену переменной интегрирования $xt = s$, получим

$$f(t) = t^\alpha\frac{\sin(-\pi\alpha)}{\pi}\Gamma(-\alpha).$$

Воспользовавшись равенством *)

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha) = \frac{\pi}{\sin(-\pi\alpha)},$$

окончательно получим формулу

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \doteqdot f(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \qquad (8.76)$$

являющуюся обращением формулы (8.18), что и доказывает наше утверждение.

Пример 4. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$, $\alpha > 0$, $\operatorname{Re} p > 0$. При этом, так же как и в предыдущем примере, мы рассматриваем ту ветвь многозначной функции $\sqrt{p}$, которая является непосредственным аналитическим продолжением в область $\operatorname{Re} p > 0$ действительной функции $\sqrt{x}$ действительной переменной $x > 0$. Напомним, что в этом случае мы должны положить $\arg p = 0$ при $p = x > 0$. Аналитическое продолжение функции $F(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$ опять имеет точками разветвления точки $p = 0$ и $p = \infty$. Будем рассматривать область $\mathscr{G}$ — плоскость p с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. В этой области определена однозначная аналитическая функция $\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$, являющаяся непосредственным аналитическим продолжением функции $F(p)$. Отметим, что функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > 0$ удовлетворяет условиям теоремы 8.5, а ее аналитическое продолжение в области $\mathscr{G}$ в левой полуплоскости

*) См. вып. 2, стр. 441.

$\operatorname{Re} p < 0$ при $t > 0$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Поэтому, выбрав тот же контур интегрирования Г, что и в предыдущем примере, и заметив, что на верхнем берегу разреза $\arg p = \pi$, что дает $p = \xi e^{i\pi} = -\xi$, $\sqrt{p} = \sqrt{\xi}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{\xi}$, а на нижнем берегу разреза $\arg p = -\pi$, что дает $p = \xi e^{-i\pi} = -\xi$, $\sqrt{p} = \sqrt{\xi}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{\xi}$ $(\xi > 0)$, получим

$$F(p) \doteqdot f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}\,dp =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^\infty e^{-\xi t}\frac{e^{-i\alpha\sqrt{\xi}}}{\xi}\,d\xi - \int_0^\infty e^{-\xi t}\frac{e^{i\alpha\sqrt{\xi}}}{\xi}\,d\xi\right\} + \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_\rho} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}\,dp.$$

Так как

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\rho t e^{i\varphi}}\frac{e^{-\alpha\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}}}{\rho e^{i\varphi}}\,i\rho e^{i\varphi}\,d\varphi = 1,$$

то

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi t}\frac{\sin\alpha\sqrt{\xi}}{\xi}\,d\xi + 1.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной, положив $\sqrt{\xi} = x$, учтем, что

$$\frac{\sin\alpha x}{x} = \int_0^\alpha \cos\beta x\,d\beta,$$

и изменим порядок интегрирования. Получим

$$\int_0^\infty e^{-\xi t}\frac{\sin\alpha\sqrt{\xi}}{\xi}\,d\xi = 2\int_0^\alpha d\beta\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos\beta x\,dx. \qquad (8.77)$$

Внутренний интеграл в (8.77) легко может быть вычислен *). Он равен

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4t}}.$$

Отсюда

$$f(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{4t}}\int_0^\alpha e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\,d\beta.$$

*) Например, дифференцированием по параметру. См. вып. 2.

Очевидно, решением задачи является функция $\psi_3(t)$, которая может быть найдена по формуле (8.96):

$$y(t) = \psi_3(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\frac{dp}{p^4+2p^2+1}. \qquad (8.103)$$

Подынтегральная функция в (8.103) имеет две особые точки $p_{1,2} = \pm i$, являющиеся полюсами второго порядка. Поэтому

$$y(t) = \frac{d}{dp}\left[e^{pt}\frac{1}{(p+i)^2}\right]_{p=i} + \frac{d}{dp}\left[e^{pt}\frac{1}{(p-i)^2}\right]_{p=-i} = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t). \qquad (8.104)$$

Перейдем теперь к решению задачи Коши с нулевыми начальными условиями для неоднородного уравнения (8.88):

$$L[y(t)] = f(t).$$

В силу нулевых начальных условий, перейдя к изображениям *) $Y(p) \doteqdot y(t)$, $F(p) \doteqdot f(t)$, получим

$$Y(p)P_n(p) = F(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)}. \qquad (8.105)$$

Так как функция $Y(p)$ является изображением, то ее оригинал в силу теоремы 8.3 может быть найден с помощью интеграла Меллина. Однако в данном случае можно обойтись без вычисления этого интеграла. Действительно, согласно (8.95) функция $\frac{a_0}{P_n(p)}$ представляет собой изображение функции $\psi_{n-1}(t)$ — решения задачи Коши для однородного уравнения (8.90) с начальными условиями специального вида:

$$\psi_{n-1}^{(j)}(0) = \delta_{n-1,j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Поэтому по теореме о свертке из (8.105) получим

$$Y(p) \doteqdot y(t) = \frac{1}{a_0}\int_0^t \psi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

*) Заметим, что для существования изображения $F(p)$ правой части уравнения (8.88), функции $f(t)$, во многих случаях несущественно поведение этой функции при $t \to \infty$. Действительно, нас часто интересует решение уравнения (8.88) лишь на ограниченном отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T$, которое полностью определяется заданием функции $f(t)$ на этом отрезке и не зависит от поведения функции $f(t)$ при $t > T$. Поэтому мы можем изменять значения функции $f(t)$ при $t > T$ как угодно, лишь бы условия существования изображения $F(p)$ функции $f(t)$ были выполнены. Например, можно положить $f(t) \equiv 0$ при $t > T$. (Подчеркнем, что для определения изображения $F(p)$ функция $f(t)$ должна быть задана на всем бесконечном промежутке $0 \leqslant t < \infty$.) При этом мы, конечно, будем получать различные изображения, однако их оригиналы, естественно, совпадают при $t \leqslant T$. Следует иметь в виду, что указанное положение относится не только к случаю уравнения (8.88), но и ко многим другим физическим задачам, в которых решение ищется на ограниченном промежутке изменения времени.

Функция $\psi_{n-1}(t)$ часто называется функцией единичного точечного источника для уравнения (8.90) и обозначается $g(t)$. Приняв это обозначение, перепишем решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями для уравнения (8.88) в виде

$$y(t) = \frac{1}{a_0}\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)\,d\tau. \qquad (8.106)$$

Формула (8.106) носит название интеграла Дюгамеля *).

Пример 2. Решить задачу Коши

$$y'' + y = \sin t, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Найдем функцию $g(t)$:

$$g'' + g = 0, \qquad g(0) = 0, \qquad g'(0) = 1.$$

Для ее изображения $G(p)$ по формуле (8.95) получим

$$G(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Отсюда с помощью таблицы изображений находим $G(p) \doteqdot \sin t$ и тем самым

$$y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

2. Уравнение теплопроводности. Рассмотрим применение операционного метода при решении краевых задач для уравнения теплопроводности на примере распространения краевого режима по полубесконечному стержню.

Пусть требуется найти распределение температуры в полубесконечном стержне $0 < x < \infty$, если начиная с момента времени $t = 0$ на его левом конце $x = 0$ поддерживается заданный температурный режим. Начальная температура стержня равна нулю. Математическая задача заключается в определении ограниченного для $0 \leqslant x < \infty$, $t \geqslant 0$ решения $u(x, t)$ уравнения

$$u_t = a^2u_{xx}, \qquad x > 0,\ t > 0, \qquad (8.107)$$

с дополнительными условиями

$$u(x, 0) = 0, \qquad u(0, t) = q(t), \qquad (8.108)$$

где $q(t)$ — заданная функция времени, которую мы будем предполагать удовлетворяющей условиям существования преобразования Лапласа. Предположим, что искомое решение $u(x, t)$, а также его про-

*) О применении интеграла Дюгамеля в задачах математической физики см. также А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

может быть разложена в ряд Лорана:

$$F(p) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{1}{p^{2k+1}}.$$

Поэтому формула (8.83) дает

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \doteqdot \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}. \qquad (8.85)$$

Ряд, стоящий справа в (8.85), представляет собой разложение весьма важной специальной функции — так называемой функции Бесселя*) нулевого порядка

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \doteqdot J_0(t). \qquad (8.86)$$

Заметим, что, представив

$$\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$$

и воспользовавшись изображением функции $\sin t$ (см. формулу (8.22)), на основании теоремы о свертке получим

$$\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)\,d\tau = \sin t.$$

Пример 6. Пусть

$$F(p) = \frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}.$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 8.6, причем

$$F(p) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!\,p^n}.$$

Тогда

$$\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = J_0(2\sqrt{t}). \qquad (8.87)$$

*) Определение и свойства функции Бесселя см. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

§ 3. Решение задач для линейных дифференциальных уравнений операционным методом

В этом параграфе будут рассмотрены применения методов операционного исчисления к решению ряда задач для линейных дифференциальных уравнений.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. В § 1 мы уже видели, как с помощью операционных методов можно свести задачу Коши с нулевыми начальными условиями для линейного дифференциального уравнения к простейшей алгебраической задаче для изображения. Рассмотрим более общую задачу Коши:

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_ny(t) = f(t), \qquad (8.88)$$
$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \qquad (8.89)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ — заданные постоянные, $f(t)$ — заданная функция независимой переменной t, которую мы будем полагать удовлетворяющей всем условиям существования изображения *). Поскольку задача (8.88), (8.89) является линейной, можно отдельно рассматривать решение однородного уравнения с начальными условиями (8.89) и решение неоднородного уравнения (8.88) с нулевыми начальными условиями.

Начнем с решения первой задачи. Как известно **), для ее решения достаточно построить фундаментальную систему решений однородного уравнения (8.88). В качестве таковой выберем решения однородного уравнения

$$a_0\psi_k^{(n)}(t) + a_1\psi_k^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n\psi_k(t) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (8.90)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\psi_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}, \qquad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ j = 0, 1, \ldots, n-1, \end{matrix} \qquad (8.91)$$

где

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, функции $\psi_k(t)$ образуют фундаментальную систему, так как их определитель Вронского при $t = 0$ заведомо отличен от нуля. Решение задачи (8.88), (8.89) при $f(t) \equiv 0$ через эти функции выражается наиболее просто:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\psi_k(t).$$

*) Об условиях существования изображения см. стр. 212.
**) См. вып. 3, стр. 99.

и граничным условиям

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) + \beta_1u(a, t) = \psi_1(t), \quad \alpha_2\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) + \beta_2u(b, t) = \psi_2(t).$$

Будем предполагать, что начальные и граничные условия задачи, а также функция $f(x, t)$ таковы, что существуют изображения Лапласа по t функции $u(x, t)$ и всех ее производных, входящих в уравнение (8.116):

$$u(x, t) \doteqdot U(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt}u(x, t)\,dt, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,dt \qquad (8.117)$$

и т. д., причем предположим, что условия ограниченности степени роста по t функции $u(x, t)$ и ее производных не зависят от x. Тогда в силу равномерной сходимости по параметру x интеграла (8.117) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \doteqdot \frac{\partial U}{\partial x}(x, p), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \doteqdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, p)$$

и

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, t) \doteqdot p^kU(x, p) - p^{k-1}\varphi_0(x) - p^{k-2}\varphi_1(x) - \ldots - \varphi_{k-1}(x).$$

Кроме того, предположим, что существуют изображения по t функций $f(x, t)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$f(x, t) \doteqdot F(x, p), \quad \psi_1(t) \doteqdot \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \doteqdot \Psi_2(p).$$

Тогда, перейдя в уравнении (8.116) к изображениям, получим обыкновенное дифференциальное уравнение по независимой переменной x для функции $U(x, p)$:

$$-P_n(p)U(p) + L_2[U(x, p)] = -F(x, p) - F_0(x, p), \qquad (8.118)$$

где

$$F_0(x, p) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(p)\varphi_{n-k-1}(x),$$

а полиномы $P_k(p)$ определяются формулой (8.93).

Уравнение (8.118) надо решать с граничными условиями

$$\alpha_1U_x(a, p) + \beta_1U(a, p) = \Psi_1(p),$$
$$\alpha_2U_x(b, p) + \beta_2U(b, p) = \Psi_2(p). \qquad (8.119)$$

Краевая задача (8.118), (8.119), в которой p играет роль параметра, решается обычными методами решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений *). Обратный переход от изображения $U(x, p)$ к решению исходной задачи может быть произведен с помощью формулы обращения (8.67).

*) См. вып. 3, стр. 159.

изводные, входящие в уравнение (8.107), удовлетворяют условиям существования преобразования Лапласа по t, причем условия ограниченности степени роста по t функции $u(x, t)$ и ее производных не зависят от x. Тогда получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &\doteqdot U(x, p), \\ u_t(x, t) &\doteqdot pU(x, p), \\ u_{xx}(x, t) &\doteqdot U_{xx}(x, p). \end{aligned} \tag{8.109}$$

Вторая из формул (8.109) получена с учетом нулевого начального условия (8.108). Последняя из формул (8.109) имеет место в силу того, что сделанных предположений достаточно для вычисления производных несобственных интегралов, зависящих от параметра, путем дифференцирования по параметру подынтегральных функций *).

Переходя к изображениям, вместо задачи (8.107), (8.108) для функции $u(x, t)$ получаем краевую задачу для изображения $U(x, p)$:

$$U_{xx}(x, p) - \frac{p}{a^2} U(x, p) = 0, \tag{8.110}$$

$$U(0, p) = Q(p), \qquad |U(x, p)| < M. \tag{8.111}$$

Это — краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, в которой переменная p играет роль параметра. Как легко видеть, решение задачи (8.110), (8.111) имеет вид

$$U(x, p) = Q(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}. \tag{8.112}$$

Решение $u(x, t)$ исходной задачи может быть найдено по его изображению (8.112) с помощью формулы Меллина, однако в случае произвольной функции $Q(p)$ вычисление соответствующего интеграла может привести к значительным трудностям. Поэтому естественно попытаться обойти прямое вычисление интеграла Меллина для определения оригинала функции (8.112). Заметим, что выше мы нашли оригинал для функции (см. пример 4, стр. 236)

$$\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}} \doteqdot 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta. \tag{8.113}$$

Поэтому, представив $U(x, p) = Q(p) \cdot p \cdot e^{\left\{-\frac{\sqrt{p}}{a} x\right\}} \frac{1}{p}$ и учтя, что согласно (8.113)

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} \doteqdot 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = G(x, t), \tag{8.114}$$

*) См. вып. 2, стр. 416.

на основании теорем об изображении производной и свертки получим

$$U(x, p) \doteqdot u(x, t) = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} G(x, t-\tau) q(\tau) d\tau.$$

Подставив явное выражение (8.114) функции $G(x, t)$ и произведя дифференцирование, получим выражение решения задачи *) (8.107), (8.108) в виде

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{q(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \tag{8.115}$$

3. Краевая задача для уравнения в частных производных. Изложенный в предыдущем пункте метод может быть формально перенесен и на решение краевой задачи для уравнения в частных производных более общего вида.

Рассмотрим уравнение

$$P_n[u(x, t)] - L_2[u(x, t)] = f(x, t), \tag{8.116}$$

где $P_n[u]$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P_n[u] = a_0 \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial u}{\partial t};$$

$L_2[u]$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка **) вида

$$L_2[u] = b_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x) u(x, t),$$

коэффициенты $b_i(x)$ которого являются функциями лишь одной независимой переменной x; $f(x, t)$ — заданная функция переменных x, t, достаточно гладкая в области решения задачи. Будем искать решение $u(x, t)$ уравнения (8.116) в области ***) $t > 0$, $a < x < b$, удовлетворяющее начальным

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x), \ldots, \ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}(x, 0) = \varphi_{n-1}(x)$$

*) Заметим, что данное выражение получено в предположении существования решения, тем самым проведенные рассмотрения являются фактически доказательством единственности решения данной задачи в рассматриваемом классе функций. Если заранее не известно существование решения поставленной задачи, то необходимо показать, что формально полученное выражение (8.115) действительно представляет собой решение рассматриваемой задачи.

**) Рассматриваемый метод не зависит от порядка дифференциального оператора L, так же как и P, однако для большей наглядности изложения и ввиду особой важности для приложений мы ограничимся случаем оператора L второго порядка.

***) Рассматриваемый метод может быть применен и в том случае, когда $a = -\infty$ или $b = +\infty$ или одновременно $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Положив $\frac{\beta}{\sqrt{4t}} = \eta$, окончательно получим

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}} \doteqdot 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right), \quad \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{8.78}$$

где функция

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\eta^2} d\eta \tag{8.79}$$

есть так называемая функция ошибок *).

4. Случай регулярной на бесконечности функции. Рассмотрим еще один частный случай, когда определение оригинала для заданной функции $F(p)$ комплексной переменной производится особенно просто. Пусть аналитическое продолжение первоначально заданной в области $\operatorname{Re} p > a$ функции $F(p)$ является однозначной функцией на полной плоскости комплексной переменной p, причем точка $p = \infty$ — правильная точка функции $F(p)$. Это означает, что разложение функции $F(p)$ в ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}. \tag{8.80}$$

При рассмотрении свойств изображения было отмечено, что $|F(p)| \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$. Поэтому в разложении (8.80) коэффициент c_0 равен нулю и

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}. \tag{8.81}$$

Легко найти функцию $f(t)$ действительной переменной t, для которой функция (8.81) является изображением.

Теорема 8.6. *Если точка $p = \infty$ является правильной точкой функции $F(p)$ и $F(\infty) = 0$, то функция $F(p)$ представляет собой изображение Лапласа функции действительной переменной*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^n}{n!}, & t > 0, \end{cases} \tag{8.82}$$

где c_n суть коэффициенты разложения функции $F(p)$ в ряд Лорана (8.81) в окрестности точки $p = \infty$.

*) Определение и свойства функции $\Phi(z)$ см. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

Доказательство. Выше было показано, что коэффициенты азложения (8.81) определяются формулой *)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} F(p) p^{n-1} dp,$$

іе C_R — окружность $|p| = R$, вне которой нет особых точек функии $F(p)$. Так как точка $p = \infty$ является нулем функции $F(p)$, то $F(p)| < \frac{M}{R}$ при $|z| > R$. Поэтому формула для c_n дает

$$|c_n| < MR^{n-1}.$$

з этой оценки следует сходимость ряда (8.82). Действительно,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+1}| \frac{|t|^n}{n!} < M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n |t|^n}{n!} = Me^{R|t|}.$$

тсюда же следует, что в круге любого конечного радиуса ряд (8.82) ходится равномерно, тем самым определяя некоторую целую функию комплексной переменной t:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^n}{n!}.$$

Заметим, что функцию $f(t)$, определенную формулой (8.82), мы можем ассматривать как произведение функции $\tilde{f}(t)$ на единичную функцию евисайда $\sigma_0(t)$.)

Умножив функцию $f(t)$ на e^{-pt} и проинтегрировав по t равномерно ходящийся ряд (8.82) почленно, на основании соотношения **)

$$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}$$

олучим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^n}{n!} \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{1}{p^{n+1}} = \sum_{n'=1}^{\infty} c_{n'} p^{-n'} = F(p), \tag{8.83}$$

то и доказывает теорему.

Пример 5. Пусть

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{8.84}$$

та функция имеет две особые точки $p_{1,2} = \pm i$ и является однозначой аналитической функцией в окрестности точки $p = \infty$, причем окрестности этой точки, как было показано выше ***), функция $F(p)$

*) См. стр. 114.

**) См. формулу (8 19).

***) См. пример на стр. 121.

Для определения функций $\psi_k(t)$ применим операционный метод. Имея в виду, что функция $\psi_k(t)$ и все ее производные до n-го порядка удовлетворяют условиям существования изображения *), в силу (8.91) и формулы (8.38) получим

$$\psi_k(t) \doteqdot \Psi_k(p), \ \psi_k^{(j)}(t) \doteqdot p\left[\Psi_k(p) - \frac{\varepsilon_{kj}}{p^{k+1}}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\varepsilon_{kj} = \begin{cases} 0, & j \leqslant k, \\ 1, & j > k. \end{cases}$$

Умножив обе части уравнения (8.90) на e^{-pt} и проинтегрировав по t, получим

$$\Psi_k(p) \cdot P_n(p) = P_k(p), \tag{8.92}$$

где полиномы $P_n(p)$ и $P_k(p)$ соответственно равны

$$P_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$$

и

$$P_k(p) = a_0 p^{n-(k+1)} + a_1 p^{n-(k+2)} + \ldots + a_{n-(k+1)}. \tag{8.93}$$

Из (8.92)

$$\Psi_k(p) = \frac{P_k(p)}{P_n(p)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{8.94}$$

и, в частности,

$$\Psi_{n-1}(p) = \frac{P_{n-1}(p)}{P_n(p)} = \frac{a_0}{P_n(p)}. \tag{8.95}$$

Формула (8.95) будет использована в дальнейшем. Оригиналы функций $\Psi_k(p)$ могут быть найдены по формуле Меллина:

$$\Psi_k(p) \doteqdot \psi_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{P_k(p)}{P_n(p)} dp, \quad x > a, \tag{8.96}$$

где прямая $x = a$ проходит правее всех особых точек подынтегральной функции из (8.96). Так как функция (8.94) представляет собой отношение двух полиномов, то ее особыми точками могут быть лишь нули знаменателя $P_n(p)$, причем все они являются полюсами. Кроме того, при $t > 0$ подынтегральная функция из (8.96), очевидно, удовлетворяет условиям леммы Жордана в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < a$. Поэтому

$$\psi_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \text{Выч}\left[e^{pt} \frac{P_k(p)}{P_n(p)}, p_i\right], \tag{8.97}$$

где p_i — нули полинома $P_n(p)$.

*) Действительно, функции $\psi_k(t)$, как решения уравнения (8.90), являются гладкими функциями, растущими на бесконечности не быстрее, чем экспонента с линейным показателем. (Подробнее о свойствах решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами см. вып. 3.)

Если все нули p_i полинома $P_n(p)$ являются простыми, то, представив его в виде произведения $P_n(p) = a_0 \prod\limits_{j=1}^{n} (p - p_j)$, из формулы (8.97) получим

$$\psi_k(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} e^{p_i t}, \tag{8.98}$$

где

$$a_{ki} = \frac{P_k(p_i)}{a_0 \prod\limits_{j \neq i}^{1-n} (p_i - p_j)}. \tag{8.99}$$

Если нули p_i полинома $P_n(p)$ являются кратными, то разложение полинома имеет вид $P_n(p) = a_0 \prod\limits_{i=1}^{m} (p - p_i)^{\alpha_i}$, где α_i — кратность соответствующего нуля, причем $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = n$. В этом случае, пользуясь правилом вычисления вычета в полюсе порядка $k > 1$ и вычисляя производную от произведения по формуле Лейбница, получаем

$$\psi_k(t) = \sum_{i=1}^{m} q_{ki}(t) e^{p_i t}, \tag{8.100}$$

где полиномы $q_{ki}(t)$ имеют вид

$$q_{ki}(t) = b_{0,ki} t^{\alpha_i - 1} + b_{1,ki} t^{\alpha_i - 2} + \ldots + b_{\alpha_i - 1, ki}, \tag{8.101}$$

причем коэффициенты $b_{m,k,i}$ вычисляются по формуле

$$b_{m,k,i} = \frac{1}{m!(\alpha_i - m - 1)!} \frac{d^m}{dp^m} \left[\frac{P_k(p)}{a_0 \prod\limits_{j \neq i}^{1-m} (p - p_j)^{\alpha_j}}\right]_{p = p_i} \tag{8.102}$$

Отметим, что нули p_i полинома $P_n(p)$ совпадают с нулями характеристического многочлена для уравнения (8.90). Поэтому формулы (8.98) и (8.100) дают представление каждого из частных решений уравнения (8.90), удовлетворяющих начальным условиям (8.91), через частные решения уравнения (8.90), полученные с помощью характеристического уравнения *).

Пример 1. Решить задачу Коши

$$y^{(IV)} + 2y'' + y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 1.$$

*) О характеристическом уравнении см. вып. 3, стр. 107.