Часть I. Теория вероятностей.

Условная вероятность: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(B)\neq 0$

Формула полной вероятности: $P(A)=\sum_k (P(H_k)*P(A|H_k))$

Формула Байеса: $P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_i P(H_i)P(A|H_i)}$

Случайная величина – измеримая функция $\xi:\Omega\to R$, причём на R задана σ-алгебра

Пусть даны два пространства: $(\Omega, A) u (\Lambda, l)$. Отображение $f:\Omega\to\Lambda$ называется **измеримым**, если $\forall B\in l \Rightarrow f^{-1}(B)\in A; f^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega: f(\omega)\in B\}$

Функция распределения: $F_\xi(y)$ такая, что $F_\xi(y)=P(\xi\le y)$

Точка роста функции распределения: $x_0 :\forall\varepsilon>0\Rightarrow F_\xi(x_0+\varepsilon)-F_\xi(x_0-\varepsilon)>0$

1. $F_\xi(x)$ называется **дискретной**, если она имеет не более чем счётное число точек роста.
2. $F_\xi(x)$ называется **абсолютно непрерывной**, если её можно представить в виде $F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$, где $p_\xi(t)$ - **плотность распределения**.
3. $F_\xi(x)$ называется **сингулярной**, если она непрерывна и множество точек её роста имеет нулевую меру Лебега.

Теорема Лебега: Пусть ξ-случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Тогда существуют и единственны три функции $F_{ac}(x), F_s(x), F_d(x)$ - соответственно абсолютно непрерывная, сингулярная и дискретная функции распределения, а также три числа $p_1, p_2, p_3\ge 0, p_1+p_2+p_3=1$ такие, что $F_\xi(x)=p_1F_{ac}(x)+p_2F_s(x)+p_3F_d(x)$.

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется $\mathrm{M}\xi=\int_\Omega \xi(\omega)\mathrm{P}(d\omega)$; если $\mathrm{M}\xi<\infty$, то говорят, что математическое ожидание существует.

Моментом порядка k случайной величины называется $M\xi^k$, **центральным моментом порядка k** – $M(\xi-M\xi)^k$.

Момент порядка 2 называется **дисперсией**: $D[\xi]=Var[\xi]=M[(\xi-M[\xi])^2]$.

Свойства математического ожидания:

- $M(a\xi+b\eta)=aM\xi+bM\eta$
- $\xi\ge 0\Rightarrow M\xi\ge 0$
- $\xi\le\eta\Rightarrow M\xi\le M\eta$
- $|M\xi|\le M|\xi|$
- $\mathrm{M}C=C$
- $\mathrm{M}\xi\eta=\mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta, если\, \xi\perp\eta$

Свойства дисперсии

- $D(a\xi)=a^2D\xi$
- $D(\xi+C)=D\xi$

Ковариация: $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)(\eta-\mathrm{M}\eta)$, **корреляция** $cor(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Свойства ковариации:

- Если ξ и η независимы, то $\text{cov}(\xi,\eta)0, D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$
- $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2\text{cov}(\xi,\eta)$
- $\left|\text{cov}(\xi,\eta)\right|\le\dfrac{D\xi+D\eta}{2}$
- $\left|\text{cov}(\xi,\eta)\right|\le\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}$

Неравенство Коши-Буняковского: $\left|\text{M}\xi\eta\right|\le\sqrt{\text{M}\xi^2 * \text{M}\eta^2}$

Неравенство Йенсена: Если функция g(x) выпукла, то для любой случайной величины ξ $\text{M}g(\xi)\ge g(M\xi)$

Неравенстно Маркова: Если $\xi \ge 0$, тогда $\forall\varepsilon:\text{P}(\xi>\varepsilon)<\dfrac{\text{M}\xi}{\varepsilon}$. Если дополнительно $\xi \le C$, то дополнительно $\forall\varepsilon:\text{P}(\xi\ge\varepsilon)\ge\dfrac{\text{M}\xi-\varepsilon}{C}$

Неравенство Чебышёва: Пусть у случайной величины ξ существует дисперсия, тогда $P(|\xi-M\xi|\ge\varepsilon)\le\dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$. Если дополнительно $|\xi|$<C, то $P(|\xi-M\xi|\ge\varepsilon)\ge\dfrac{D\xi-\varepsilon^2}{4C^2}$

Биномиальное распределение Bi(n,p)

<u>Смысл:</u> описывает серию последовательных одинаковых испытаний Бернулли

<u>Распределение, свойства:</u> $\left\|\begin{matrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k}\end{matrix}\right\|; M\xi=np; D\xi=npq; g_\xi(z)=(1+p(z-1))^n$

<u>Теорема Пуассона</u>:

<u>Смысл:</u> Если число испытаний Бернулли очень велико, а вероятность успеха очень мала, причем так, что $np\to 1$, то такая случайная величина имеет распределение, близкое к распределению Пуассона.

<u>Формулировка:</u> $\sum_{k=1}^{n}\xi_k \cong B(p)\xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ np\to\lambda}]{d} Pois(\lambda)$ $\left(\text{P}\{\mu=m\}=C_n^m p^m q^{n-m}\to\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}\right)$

Геометрическое распределение G(p)

<u>Смысл:</u> описывает число успехов до первой неудачи (либо наоборот; эти случайные величины отличаются на 1)

<u>Распределение, свойства:</u> $\left\|\begin{matrix} k \\ q*p^k\end{matrix}\right\|(k=0,1,2,...); M\xi=\dfrac{p}{q}; D\xi=\dfrac{p}{q^2}; g_\xi(z)=\dfrac{1-p}{1-pz}$

<u>Примечание:</u> Непрерывный аналог геометрического распределения – экспоненциальное

Экспоненциальное (показательное) распределение

<u>Смысл:</u> описывает время между появлениями двух событий в потоке.

<u>Распределение, свойства:</u> $\exp(\lambda)=1-e^{\lambda x}; M\xi=\dfrac{1}{\lambda}; D\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}; \varphi(s)=\dfrac{\lambda}{\lambda+s}$

<u>Примечание:</u> экспоненциальное распределение является непрерывным аналогом геометрического.

Локальная теорема Муавра-Лапласа: Если в схеме Бернулли $\sigma=\sqrt{npq}\to\infty$, то для любого C>0 равномерно по всем |x|≤C вида $x=\dfrac{m-np}{\sigma}$, где m-целые неотрицательные числа, $\text{P}\left\{\dfrac{\mu-np}{\sqrt{npq}}=x\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+o(1)\right)$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа: При $\sigma = \sqrt{npq} \to \infty$ равномерно по $-\infty \le a < b \le \infty$: $\mathrm{P}\left\{a \le \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx \to 0$

Закон больших чисел:

<u>Смысл:</u> среднее арифметическое большого количества одинаково распределённых случайных величин перестаёт быть случайной и стремится к постоянной.

Рассмотрим последовательность н.о.р.с.в. $\xi_1,...,\xi_n,...; S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

1. Пусть $\forall i \exists D\xi_i < C$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $\mathrm{P}\left(\dfrac{|S_n - \mathrm{M}S_n|}{n} \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   (ЗБЧ в форме Чебышева)

2. Пусть у $\forall \xi_i \; \exists \mathrm{M}\xi_i = a$. Тогда $\dfrac{S_n - \mathrm{M}S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ (ЗБЧ в форме Хинчина)

3. Пусть $\mathrm{M}\xi_i = 0, D\xi_n = \sigma_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$. Тогда $\dfrac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow{п.н.} 0$ (усиленный ЗБЧ)

Виды сходимости случайных величин:

- Сходимость почти наверное: $\xi_n \xrightarrow{почти\ наверное} \xi \Leftrightarrow P(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi) = 1$
- Сходимость по вероятности: $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon : \lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$
- Сходимость в среднем порядка l: $\xi_n \xrightarrow{l} \xi \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} M|\xi_n - \xi|^l = 0$
- Сходимость по распределению: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n}(x) \to F_{\xi}(x)$ поточечно, и $F_{\xi}(x)$ непрерывна для $\forall x$
- Слабая сходимость: $\xi_n \xrightarrow{w} \xi \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} M\varphi(\xi_n) = M\varphi(\xi) \; \forall \varphi(x)$ - непрерывной и ограниченной

Взаимосвязь между видами сходимости:

Формула свёртки: если случайные величины $\xi_1 \, u \, \xi_2$ независимы и имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностями $f_{\xi_1}(x_1) \, u \, f_{\xi_2}(x_2)$, то плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ равна $f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u) f_{\xi_2}(t-u)du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(u) f_{\xi_1}(t-u)du$

Характеристическая функция случайной величины ξ - функция, определённая $\forall t \in R$ как $\varphi_{\xi}(t) = \mathrm{M}e^{it\xi}$. Свойства характеристической функции:

- $\varphi_{\xi}(0) = 1, \left|\varphi_{\xi}(1)\right| \le 1 \forall t$
- $\varphi_{\xi}(t)$ равномерно непрерывна на всей числовой оси.
- Эти утверждения эквивалентны: 1) $\varphi_{\xi}(t)$ принимает только действительные значения; 2) $\varphi_{\xi}(t)$ -чётная функция; 3) ξ имеет симметричное распределение

- Функция $\varphi_\xi(t)$ является характеристической функцией случайной величины ξ тогда и только тогда, когда $\varphi_\xi(0)=1$, $\varphi_\xi(t)$ положительно определена.
- $\varphi_\xi(t)\equiv\varphi_\eta(t)\Leftrightarrow F_\xi(x)\equiv F_\eta(x)$

Центральная предельная теорема:

Пусть $\xi_1,...,\xi_n,...$ - последовательность н.о.р.с.в. Тогда

$$P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - M\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\sqrt{D\sum_{k=1}^{n}\xi_k}}<x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{d}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{t^2}{2}}dt\cong N(0,1)$$

Смысл: Сумма независимых одинаково распределенных случайных величин ведет себя приблизительно как нормально распределенная случайная величина.

Условное распределение, условное МО.

Предположим, что $B_l=\{\eta=y_l\}, l=1,...,m$ образуют разбиение, порождённое случайной величиной η .*Условный закон распределения* η при заданном $\xi=x_k$ - набор условных вероятностей $\mathrm{P}\{\eta=y_l\mid\xi=x_k\}=\frac{\mathrm{P}\{\eta=y_l,\xi=x_k\}}{\mathrm{P}\{\xi=x_k\}}, l=1,...,m$.

1) Условное МО случайной величины ξ *относительно события B* (имеющего ненулевую вероятность) определяется как интеграл $\mathrm{M}(\xi\mid\mathrm{B})=\int\limits_\Omega\xi(\omega)\mathrm{P_B}(d\omega)$.

2) Пусть имеется (Ω,A,P), ξ- случайная величина на этом вероятностном пространстве, $\mathrm{M}\xi<\infty, A_1\subset A, A_1-\sigma-$*алгебра*. *Условное МО случайной величины* ξ *относительно* σ*-алгебры* A_1 – случайная величина, которая удовлетворяет двум условиям:

- $\mathrm{M}(\xi\mid A_1)$ измерима относительно A_1.
- $\forall A\in A_1$ выполняется: $\int\limits_{\mathrm{A}}\mathrm{M}(\xi\mid A_1)\mathrm{P}(d\omega)=\int\limits_{\mathrm{A}}\xi(\omega)\mathrm{P}(d\omega)$

3) Пусть ξ и η - случайные величины, $\mathrm{M}\xi<\infty$. *Условное МО случайной величины* ξ *относительно сл. в.* η - $\mathrm{M}(\xi\mid\eta)=\mathrm{M}(\xi\mid\sigma(\eta)),\sigma(\eta)=(\eta^{-1}(\mathrm{B}),\mathrm{B}\in B)$

Свойства условного МО:

- ξ измерима относительно $\mathrm{A}_1\Rightarrow\mathrm{M}(\xi\mid\mathrm{A}_1)=\xi$
- Если ξ и η независимы, то $\mathrm{M}(\xi\mid\eta)=\mathrm{M}\xi$
- $\mathrm{MM}(\xi\mid\eta)=\mathrm{M}\xi$
- Если ξ и η - сл. в., причём $\mathrm{M}\xi<\infty$, то существует измеримая функция $\varphi:\mathrm{M}(\xi\mid\eta)=\varphi(\xi)$

Производящая функция: $\varphi_\xi(s)=\mathrm{M}s^\xi$. Её свойства:

1. Если $\xi_1,...,\xi_n$ - независимые целочисленные случайные величины, $\varphi_{\xi_k}(s)$, k=1,…,n - их производящие функции, то $\varphi_{\xi_1+...+\xi_n}(s)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(s)$.

2. Пусть $\xi_1,\xi_2,...$ - последовательность целочисленных н.о.р.с.в. с производящей функцией $\varphi_\xi(s)$ и ν - независимая от них случайная величина с производящей функцией $\varphi_\nu(s)$. Пусть далее $\varsigma_\nu=\xi_1+...+\xi_\nu(\nu\ge1,\varsigma_0=0)$. Тогда $\varphi_{\varsigma_\nu}(s)=\varphi_\nu(\varphi_\xi(s))$

Ветвящиеся процессы.

Пусть p_n-вероятность того, что одна частица превращается в n частиц, $\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n s^n$ - производящая функция распределения вероятностей $\{p_n\}$. Если А-среднее число непосредственных потомков одной частицы, то

$$\begin{cases} A<1 \Rightarrow A(t)\to 0, \textit{процесс докритический} \\ A>1 \Rightarrow A(t)\to\infty, \textit{процесс надкритический} \\ A=1 \Rightarrow A(t)\equiv 1, \textit{процесс критический} \end{cases}$$

q-вероятность вырождения. Для того чтобы q<1 необходимо и достаточно, чтобы процесс был надкритическим. q-корень уравнения $q=\varphi(q)$.

Часть II. Математическая статистика.

Статистическая структура - (Ω, A, P) (множество элементарных исходов, σ-алгебра событий, семейство вероятностных мер, определённых на А).

Выборка – совокупность $X_1,...,X_n$ н.о.р.с.в.

Статистика T($X_1,...,X_n$) – любая измеримая функция от выборки.

Выборочный момент порядка k – следующая статистика: $\mathrm{A}_{kn}(X_1,...,X_n)=\mathrm{A}_{nk}=\mathrm{A}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$, при этом $\mathrm{A}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$ - **выборочное среднее**, или среднее ожидание.

Центральный выборочный момент порядка k – статистика $M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k$. Ц.в.м. порядка 2 – выборочная дисперсия.

Если $X_1,...,X_n$ - н.о.р.с.в., то $\mathrm{M}_\theta X_i^k=\alpha_k(\theta)$ - **теоретический момент** порядка k.

Эмпирическая функция распределения (при фиксированном $x\in R$) -

$$F_n(x)=\begin{cases} 0, x\le X_{(1)}, \\ \frac{1}{n}, X_{(1)}<x\le X_{(2)}, \\ \vdots \\ 1-\frac{1}{n}, X_{(n-1)}<x\le X_{(n)}, \\ 1, \mathbf{x}>X_{(n)}. \end{cases}$$

Статистика размерности k - $T(X)=\left(T_1(X),...,T_k(X)\right), \textit{где}\, T_i(X)-\textit{статистика}$

Точечная оценка параметра $\theta=(\theta_1,...,\theta_m)$ - m-мерная статистика $T(X)=\left(T_1(X),...,T_m(X)\right)$. При этом $T_i(X)-\textit{оценка}\,\theta_i$.

Оценка $T(X)=\left(T_1(X),...,T_k(X)\right)$ - **несмещённая оценка** функции $\tau(\theta)=(\tau_1(\theta),...,\tau_k(\theta))$, если для любого θ выполняется $\mathrm{M}_\theta T_i(X)=\tau_i(\theta), i=1,...,k$.

Оценка $T(X)=\left(T_1(X),...,T_k(X)\right)$ - **асимптотически несмещённая оценка** функции $\tau(\theta)=(\tau_1(\theta),...,\tau_k(\theta))$, если $\mathrm{M}_\theta T_i(X)=\tau_i(\theta)+\alpha_{ni}(\theta), i=1,...,k\, \textit{и}\, \alpha_{ni}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Оценка T(X) – **состоятельная оценка** функции $\tau(\theta)$, если $T(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\tau(\theta)\,\forall\theta$ по вероятности.

Оценка T(X) – **оптимальная оценка** функции $\tau(\theta)$, если она 1) несмещённая и 2) имеет равномерно минимальную дисперсию, то есть $\forall T_1(X): D_\theta T(X) \le D_\theta T_1(X)$. Если оптимальная оценка существует, то она единственна.

Функция $p_X(x)$ - **обобщённая плотность распределения сл.в. X относительно меры** ν, если $p_X(B) = \int_B p_X(x)\nu(dx)$, ν-не обязательно мера Лебега.

Функция правдоподобия выборки $X_1,...,X_n$ - функция $L(X,\theta) = p(X_1,\theta)\cdots p(X_n,\theta)$

Статистика $T(X) = (T_1(X),...,T_k(X))$ является **достаточной**, если $\mathrm{P}_\theta(X \in A \mid T(X)) \forall A \subset R^n$ не зависит от θ.

Достаточная статистика называется **тривиальной**, если $k = k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$: $T(X) = (T_1(X),...,T_{k(n)}(X))$ с неограниченной размерностью.

Статистика T(X) является **полной**, если из $\mathrm{M}_\theta \varphi(T(X)) = 0 \,\forall \theta$ следует равенство $\varphi(u) = 0$ почти всюду по распределению T(X).

Критерий факторизации: Пусть $L(X,\theta)$ - функция правдоподобия выборки X, $T(X) = (T_1(X),...,T_k(X))$ - некоторая статистика. Тогда T(X) – достаточная статистика тогда и только тогда, когда функцию правдоподобия можно представить в виде $L(X,\theta) = g(T(X),\theta) * h(x)$

Неравенство Рао-Крамера.

Пусть $X_1,...,X_n$ - некоторая выборка с функцией правдоподобия $L(X,\theta)$ относительно некоторой меры μ. Введём функцию $\varphi(\theta) = \int_{R^n} T(x)L(x,\theta)\mu(dx) < \infty$.

Говорят, что функция $L(X,\theta)$ *удовлетворяет условиям регулярности для m-ой производной*, если существует $\frac{d^m \varphi(\theta)}{d\theta^m} = \int_{R^n} T(x)\frac{\partial^m L(x,\theta)}{\partial \theta^m}\mu(dx)$, причём множество (x: $L(x,\theta)$ >0) не зависит от θ.

Th Рао-Крамера: Пусть $X_1,...,X_n$-выборка, причём $L(X,\theta)$ удовлетворяет условиям регулярности для первой производной и $\tau(\theta)$ - дифференцируемая функция θ. Тогда: 1) Для любой несмещённой оценки T(X) функции $\tau(\theta)$ справедливо неравенство $D_\theta T(X) \ge \frac{[\tau'(\theta)]^2}{\mathrm{M}_\theta U^2(X,\theta)} \forall \theta$, где $U(X,\theta) = \frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}$-функция вклада;

2)В неравенстве равенство достигается тогда и только тогда, когда $\exists a_n(\theta): T(X) - \tau(\theta) = a_n(\theta) * U(X,\theta)$

Оценка называется **эффективной**, если для неё в неравенстве Рао-Крамера достигается равенство (если она существует, то она оптимальна).

Th Рао-Блэкуелла-Колмогорова: Пусть T(X) – достаточная статистика выборки $X_1,...,X_n$. Тогда если существует оптимальная оценка $\mathrm{T}_1(X)$ для функции $\tau(\theta)$, то $\mathrm{T}_1(X) = \varphi(T(X))$.

Распределение χ^2

χ^2-статистика Пирсона: $\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{r}\frac{(\nu_k - np_k)^2}{np_k}$

Th: распределение χ_n^2 при $n \to \infty$ слабо сходится к χ^2-распределению с (r-1) степенью свободы с функцией распределения $\mathrm{K}_{r-1}(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{r-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{r-1}{2}\right)}\displaystyle\int_0^x u^{\frac{r-1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du, x \ge 0$

Лемма Неймана-Пирсона.

Пусть выборка $X_1,...,X_n$ имеет функцию распределения $F(X,\theta), где \theta \in \Theta \subset R$ и функцию правдоподобия $L(X,\theta)$. Введём класс Φ критических функций: относительно двух простых гипотез $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta = \theta_1 \ne \theta_0, 0 < \alpha < 1$, где α - заданный размер критерия, K_α-некоторое значение. $\Phi = \left\{ \varphi : \varphi(X) = \begin{cases} 1, \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} > \mathrm{K}_\alpha, \\ 0, \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} < \mathrm{K}_\alpha \end{cases} \right\}$. Тогда

1) $\forall 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \exists \varphi \in \Phi : \mathrm{M}_{\theta_0}\varphi(X) = \alpha$ (существует критерий любого размера)

2) Если $\varphi \in \Phi\, и\, \mathrm{M}_{\theta_0}\varphi(X) = \alpha$, то φ - наиболее мощный критерий.

3)Если φ-наиболее мощный критерий размера α, то $\varphi \in \Phi$ (необходимость)