

## ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

**Вероятностное пространство** – это тройка  $(\Omega, A, P)$ , где

$\Omega$  -пространство элементарных исходов, конечное или бесконечное, которое описывает все возможные исходы эксперимента;

$A$  –  $\sigma$ -алгебра событий, событие есть подмножество  $\Omega$ ,  $\sigma$ -алгебра – это класс, такой что  
1.  $\Omega \in A$  2.  $a \in A \Rightarrow \bar{a} \in A$  3. для любой счётной последовательности  $a_n : \bigcup_n a_n \in A$

$P$  – вероятность – мера, являющаяся неотрицательной, нормированной 1 и  $\sigma$ -аддитивной

**Условной вероятностью**  $A$  при условии  $B$  называется  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ,  $P(B) \neq 0$

События  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если  $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

**Формула полной вероятности**  $P(A) = \sum_k (P(H_k) * P(A|H_k))$  позволяет найти

вероятность события, разбив его на части некоторой группой событий (гипотез). Требуется, чтобы все гипотезы были несовместными (не пересекались) и в сумме покрывали полностью событие  $A$ .

**Формула Байеса**  $P(H_k | A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_i P(H_i)P(A|H_i)}$  позволяет узнать вероятность гипотезы  $a$

posteriori.

## ЧАСТЬ II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

**Случайная величина** – измеримая функция  $\xi: \Omega \rightarrow R$ , причём на  $R$  задана  $\sigma$ -алгебра, и полный прообраз любого элемента этой  $\sigma$ -алгебры есть событие. Как правило, берётся борелевская  $\sigma$ -алгебра, то есть  $\sigma$ -алгебра, порождённая всеми открытыми интервалами.

Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  называются **независимыми**, если  $\forall \Delta_1, \Delta_2 P(\xi \in \Delta_1, \eta \in \Delta_2) = P(\xi \in \Delta_1) * P(\eta \in \Delta_2)$

**Распределение (з-н распределения) вероятностей значений с. в.** – правило, по которому для любого Борелевского множества ставится в соответствие вероятность, то есть функция  $B \rightarrow R$  такая, что  $\forall \Delta \in B: P(\Delta) = P(\omega: \xi(\omega) \in \Delta)$  Чаще всего пользуются

**функцией распределения:**  $F_\xi(y)$ , что  $F_\xi(y) = P(\xi \leq y)$ . Свойства  $F_\xi(y)$ : она не убывает, односторонне непрерывна,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Случайная величина  $F_\xi(x)$  называется **дискретной**, если существует не более чем счётное множество  $X$  такое, что  $P(X)=1$ . Дискретная случайная величина имеет не более чем счётное число точек роста.

Случайная величина  $F_\xi(x)$  называется **непрерывной**, если существует неотрицательная

функция  $p_\xi(t)$  такая, что  $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$ . Функция  $p_\xi(t)$  называется плотностью

распределения.

**Характеристическая функция** (преобразование Фурье):  $f_{\xi}(t) = Me^{it\xi}$

Основное свойство характеристической функции:  $f_{\xi+\eta}(t) = f_{\xi}(t) * f_{\eta}(t)$

**Производящая функция:**  $g_{\xi}(z) = Mz^{\xi}$  (для дискретных целочисленных случайных величин)

**Преобразование Лапласа – Стильбеса:**  $\varphi(s) = Me^{-s\xi}$  (для неотрицательных случайных величин)

**Математическое ожидание** – показатель центра распределения –  $M_{\xi} = \int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega)$

Математическое ожидание для дискретной случайной величины –  $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k * p_k$ , для

непрерывной –  $M_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x * p_{\xi}(x)dx$ . Если ряд или интеграл не сходятся абсолютно, то

говорят, что математического ожидания не существует.

**Мода** – наиболее часто встречающееся значение случайной величины, **медиана** – такая точка  $M$ , что  $P(\xi \leq M) \geq \frac{1}{2} \cup P(\xi \geq M) \geq \frac{1}{2}$

**Дисперсия с. в.** –  $D[\xi] = Var[\xi] = M[(\xi - M[\xi])^2]$  - показатель разброса значений вокруг центра. **Среднеквадратичное отклонение** –  $\sigma = \sqrt{D\xi}$

**Основные свойства мат. ожидания и дисперсии:**

$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$

$M(\xi\eta) = M\xi * M\eta$ , если  $\xi$  и  $\eta$  независимы

$D(a\xi + b\eta) = a^2 D\xi + b^2 D\eta$ , если  $\xi$  и  $\eta$  независимы

$D\xi = M\xi^2 + (M\xi)^2$

**k-м моментом случайной величины** называется  $M\xi^k$ , **k-м центральным моментом** –  $M(\xi - M\xi)^k$

**Виды сходимости случайных величин.**

- Сходимость почти наверное:  $\xi_n \xrightarrow{\text{почти наверное}} \xi \Leftrightarrow P(\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi) = 1$
- Сходимость по вероятности:  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon : \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$
- Сходимость в среднем порядка l:  $\xi_n \xrightarrow{l} \xi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M|\xi_n - \xi|^l = 0$
- Сходимость по распределению:  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_{\xi}(x)$  поточечно, и  $F_{\xi}(x)$  непрерывна для  $\forall x$
- Слабая сходимость:  $\xi_n \xrightarrow{w} \xi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M\varphi(\xi_n) = M\varphi(\xi) \forall \varphi(x)$  - непрерывной и ограниченной

Взаимосвязь между видами сходимости:



### Предельные теоремы:

- **Закон больших чисел**

Смысл: среднее арифметическое большого количества одинаково распределённых случайных величин перестаёт быть случайной и стремится к постоянной.

Формулировка: 
$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} M\xi$$

Замечание: требуя существование и/или ограниченность дисперсии (а также накладывая на нее некие ограничения), можно доказать, что имеет место сходимости почти наверное (усиленный закон больших чисел).

- **Центральная предельная теорема**

Смысл: Сумма независимых одинаково распределённых случайных величин ведет себя приблизительно как нормально распределённая случайная величина.

Формулировка: 
$$P \left( \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - M \sum_{k=1}^n \xi_k}{\sqrt{D \sum_{k=1}^n \xi_k}} < x \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cong N(0,1)$$

- **Теорема Пуассона**

Смысл: Если число испытаний Бернулли очень велико, а вероятность успеха очень мала, причем так, что  $np \rightarrow \lambda$ , то такая случайная величина имеет распределение, близкое к распределению Пуассона.

Формулировка: 
$$\sum_{k=1}^n \xi_k \cong B(p) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{np \rightarrow \lambda} Pois(\lambda)$$

- **Неравенство Чебышева**

Смысл: неравенство Чебышева дает оценку для отклонения случайной величины от ее центра.

Формулировка: 
$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

## ЧАСТЬ III. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Дискретные случайные величины.

1. **Распределение Бернулли  $B(p)$**

Смысл: описывает одиночный эксперимент, результатом которого может быть успех либо неудача.

Распределение, свойства: 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}; M\xi = p; D\xi = q; g_\xi(z) = q + pz$$

2. **Биномиальное распределение  $Bi(n,p)$**

Смысл: описывает серию последовательных одинаковых испытаний Бернулли

Распределение, свойства: 
$$\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}; M\xi = np; D\xi = npq; g_\xi(z) = (1 + p(z-1))^n$$

3. **Геометрическое распределение  $G(p)$**

Смысл: описывает число успехов до первой неудачи (либо наоборот; эти случайные величины отличаются на 1)

Распределение, свойства:  $\left\| \begin{matrix} k \\ q * p^k \end{matrix} \right\| (k = 0, 1, 2, \dots); M\xi = \frac{p}{q}; D\xi = \frac{p}{q^2}; g_\xi(z) = \frac{1-p}{1-pz}$

Примечание: Непрерывный аналог геометрического распределения – экспоненциальное

#### 4. Равномерное распределение

Смысл: является моделью для экспериментов, в которых все исходы равноправны

Распределение, свойства:  $\left\| \begin{matrix} k \\ 1 \\ n \end{matrix} \right\| (k = 1..n); M\xi = \frac{n+1}{2}; D\xi = \frac{n^2-1}{12}$

#### 5. Распределение Пуассона

Смысл: описывает число событий, произошедших за единицу времени в пуассоновском потоке.

Распределение, свойства:  $\left\| \begin{matrix} k \\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{matrix} \right\|; M\xi = D\xi = \lambda; g_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)}$

Примечание: в силу теоремы Пуассона пуассоновское распределение связано с биномиальным.

Непрерывные случайные величины.

#### 1. Равномерное распределение

Смысл: выбор случайной точки на отрезке

Распределение, свойства:  $p_\xi(x) \equiv \frac{1}{b-a} (a < x < b); M\xi = a + \frac{b}{2}; D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$

#### 2. Экспоненциальное распределение

Смысл: описывает время между появлениями двух событий в потоке.

Распределение, свойства:  $\exp(-\lambda x) = 1 - e^{-\lambda x}; M\xi = \frac{1}{\lambda}; D\xi = \frac{1}{\lambda^2}; \varphi(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$

Примечание: экспоненциальное распределение является непрерывным аналогом геометрического.

#### 3. Нормальное распределение

Смысл: описывает попадание в цель; является предельным распределением сумм случайных величин

Распределение, свойства:

$N(a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt; M\xi = a; D\xi = \sigma^2; f_\xi(t) = e^{-\frac{it a - \sigma^2 t^2}{2}}$