

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

---

**ПРАКТИЧЕСКИЕ  
ЗАНЯТИЯ  
ПО ФИЗИКЕ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-  
МАТЕМАТИКОВ**

*Под редакцией  
профессора В.А. Макарова*

**ЧАСТЬ III**

**Н.В. Нетребко, И.П. Николаев,  
М.С. Полякова, В.И. Шмальгаузен**

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО  
И МАГНЕТИЗМ**

**МОСКВА  
2006**

УДК 530.1 (075.8)

ББК 22.2

Н62

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
Факультета вычислительной математики и кибернетики  
Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова*

Рецензенты:

заведующий кафедрой общей физики  
физического факультета МГУ профессор *А.М. Салецкий*,  
заведующий кафедрой физики и прикладной математики  
Владимирского государственного университета профессор *С.М. Аракелян*

Под редакцией профессора *В.А. Макарова*

**Нетребко Н.В., Николаев И.П., Полякова М.С., Шмальгаузен В.И.**

Н62 **Электродинамика:** Учебно-методическое пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД №05899 от 24.09.2001 г.), 2006. – 327 с.: ил. (Практические занятия по физике для студентов-математиков. Под ред. В.А. Макарова. Часть III)  
ISBN 5-89407-263-8

Пособие составлено в соответствии с программой раздела "Электричество и магнетизм" курса физики по специальности "Прикладная математика". В начале каждого параграфа даются краткие теоретические сведения по рассматриваемой теме. Затем приводятся решения и подробный анализ шести – десяти типовых задач, достаточно полно раскрывающих тему. В конце параграфов предлагаются задачи для самостоятельного решения. Все задачи тщательно отобраны с целью обеспечения сведений и навыков, которые необходимо приобрести студентам при самостоятельном изучении электромагнитных явлений. Всего в пособие включено около 400 задач, из которых свыше 100 снабжено решениями и анализом.

Пособие предназначено для студентов математических специальностей классических университетов. Оно может оказаться также полезным преподавателям высших учебных заведений при подготовке и проведении практических занятий по физике со студентами различных специальностей. Отдельные задания можно использовать в курсах теоретической электротехники и теории волн.

Ил. 183.

УДК 530.1(075.8)

ББК 22.2

**ISBN 5-89407-263-8**

© Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006

© Нетребко Н.В., Николаев И.П., Полякова М.С., Шмальгаузен В.И., 2006

**Оглавление**

Предисловие редактора . . . . .	4
§1 Электрическое поле . . . . .	5
§2 Потенциал электрического поля . . . . .	25
§3 Проводники и диэлектрики в электрическом поле. Теорема Гаусса	41
§4 Уравнения электростатики . . . . .	59
§5 Емкость. Энергия электрического поля . . . . .	84
§6 Квазистационарные токи. Закон Ома. ЭДС . . . . .	105
§7 Магнитное поле квазистационарных токов . . . . .	122
§8 Магнитное поле в веществе . . . . .	143
§9 Магнитный поток. Индуктивность. Энергия магнитного поля. . .	159
§10 Закон электромагнитной индукции. . . . .	174
§11 Уравнения Максвелла . . . . .	192
§12 Электрические цепи. Правила Кирхгофа. . . . .	214
§13 Электромагнитные волны. . . . .	239
§14 Задачи повышенной трудности. . . . .	258
§15 Ответы . . . . .	283
ПРИЛОЖЕНИЕ . . . . .	314
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	322

### Предисловие редактора

Настоящий том является третьим, в состоящей из пяти томов серии учебных пособий («Механика», «Молекулярная физика и термодинамика», «Электродинамика», «Волновые процессы и оптика», «Квантовая механика»), написанных на основе более чем тридцатилетнего опыта преподавания физики студентам факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ им. М.В. Ломоносова.

В начале каждого раздела дается краткое изложение теории в объеме, необходимом для решения задач, далее приводится подробное решение и анализ нескольких типовых задач, затем сформулированы задания для самостоятельной работы. К ним даны ответы и необходимые указания. Сложность задач соответствует математической подготовке студентов-математиков, которой они обладают на момент начала изучения курса. Читателю должно быть ясно, что глубокое изучение физики должно базироваться на проверенных временем классических учебниках, и помещенные в пособия краткие теоретические сведения носят справочный характер и не могут их заменить.

Хочется отметить большое внимание, уделяющееся руководством факультета ВМК МГУ преподаванию физики. Усилиями деканов (академика А.Н.Тихонова, член-корреспондента Д.П.Костомарова, академика Е.И.Моисеева), а также профессоров М.М.Хапаева, Е.В.Шикина и доцентов В.Г.Сушко, Б.И.Березина, занимавшихся в разные годы организацией учебного процесса на этом факультете, сформировался высокий уровень требований к обучению физике. Это способствовало формированию педагогических традиций преподавания физики студентам-математикам, которые бережно сохраняются и развиваются на кафедре общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ. От лица авторов пособия выражаю глубокую благодарность всем преподавателям и научным сотрудникам кафедры, ведущим занятия на факультете ВМК и способствовавшим становлению этого курса. Глубоко признателен также профессорам А.М.Салецкому и С.М.Аракеляну за рецензирование пособия и ценные критические замечания.

Учебное пособие написано в рамках инновационного проекта в 2006 г.

*В.А. Макаров*

## §1. Электрическое поле

### *Краткие теоретические сведения*

Электрические заряды. Все атомы и молекулы включают в свой состав частицы, обладающие свойством притягивать или отталкивать другие подобные частицы. Количественная мера такого взаимодействия частиц называется *электрическим зарядом*. Различают два типа зарядов: положительные и отрицательные. Носителем отрицательного заряда является электрон, а положительного - протон. Заряд электрона по абсолютной величине равен заряду протона и составляет *элементарный* (наименьший возможный) электрический заряд  $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ . В системе СИ заряд измеряется в кулонах:  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$ , где ампер (А) - единица измерения силы тока (см. параграф 7). О наличии зарядов можно судить по их взаимодействию. В природе существует *закон сохранения заряда*: суммарный заряд, находящийся на изолированной системе тел остается неизменным.

Закон Кулона. Два точечных заряда (заряженных тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними) взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной величинам зарядов  $q_1, q_2$  и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$\vec{F} = k q_1 q_2 \vec{r} / r^3. \quad (1.1)$$

Эта сила направлена по прямой, соединяющей заряды, и является силой притяжения для разноименных зарядов и отталкивания для одноименных (вектор  $\vec{r}$  направлен в сторону того заряда, для которого рассчитывается сила). Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от выбора единиц измерения и в системе СИ равен  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$ . Часто его записывают в виде  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2)$  -

электрическая постоянная. Размерность  $\epsilon_0$  можно записать по-другому:  $\text{Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2) = \Phi / \text{м}$ , где  $\Phi$  – фарад, единица измерения емкости (см. параграф 5).

Если при внесении в некоторую точку пространства заряженного тела на него действует сила, пропорциональная его заряду (например, со стороны других зарядов), то говорят, что в этой точке существует *электрическое поле*.

Напряженность электрического поля. Векторную величину, равную отношению силы, действующей на точечный заряд, к величине этого заряда называют *напряженностью* электрического поля

$$\vec{E} = \vec{F} / q. \quad (1.2)$$

Напряженность не зависит от величины заряда  $q$ , а определяется величиной и расположением зарядов, действующих на него.

Пусть в начале координат находится заряд  $Q$ . Тогда согласно (1.1) и (1.2) напряженность электрического поля, создаваемого зарядом  $Q$  в произвольной точке  $M$ , характеризуемой радиус-вектором  $\vec{r}$ , равна

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (1.3)$$

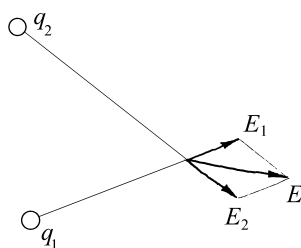


Рис. 1.1

Принцип суперпозиции.

Напряженность электрического поля, создаваемого в любой точке пространства системой зарядов (см. рис.1.1), равна сумме напряженностей полей, создаваемых различными зарядами по отдельности (в отсутствие всех остальных).

*Силовой линией* называют линию, касательная к которой в каждой точке пространства совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$  в этой точке. Примеры картин силовых линий для простейших систем точечных зарядов показаны на рис.1.2.

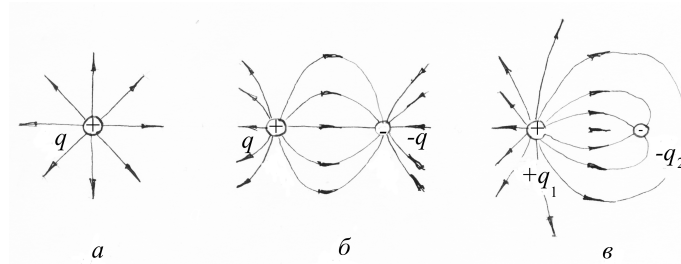


Рис.1.2

Важный частный случай такой системы – диполь (см. рис.1.2б). Диполь состоит из двух равных по величине зарядов противоположного знака, находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга. Диполь характеризуется *дипольным моментом* (электрическим моментом)

$$\vec{p}_e = ql \vec{l}, \quad (1.4)$$

где вектор  $\vec{l}$  проводится от отрицательного заряда к положительному. Поле, создаваемое диполем, во многих случаях рассматривается на расстояниях, много больших, чем  $l$ . Тогда диполь называют *точечным*, а его поле однозначно определяется дипольным моментом  $\vec{p}_e$ .

### Примеры решения задач

**Пример 1. 1.** В трех вершинах правильного тетраэдра с длиной ребра  $a$  находятся заряды  $q$ , а в четвертой – заряд  $Q$ . Найдите силу, действующую на каждый из зарядов.

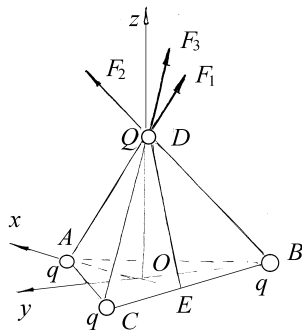


рис.1.3

По принципу суперпозиции, результирующая сила равна  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ . Ось  $Oz$  направим по высоте тетраэдра  $OD$ , а плоскость  $xOy$  совместим с плоскостью основания тетраэдра  $ABC$ . В силу симметрии проекции сил  $\vec{F}_i$  на плоскость  $xOy$  равны по модулю, а углы между ними составляют  $120^\circ$ . Их сумма равна нулю, или

$$F_{xy} = 0. \text{ Для определения проекции } \vec{F}_i \text{ на}$$

ось  $Oz$  рассмотрим сечение  $ADE$  тетраэдра (см. рис.1.4). Из подобия заштрихованных треугольников следует, что  $\frac{F_{1z}}{F_1} = \frac{DO}{DA}$ . Треугольник  $ADE$

равнобедренный, где  $AE=DE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$  -- высота равностороннего треугольника. Высоту  $OD$  в треугольнике  $ADE$  найдем, записав его площадь  $S$  через высоту  $OD$  и через высоту  $EP$ :

$$S = \frac{1}{2} AE \cdot OD = \frac{1}{2} AD \cdot EP,$$

или

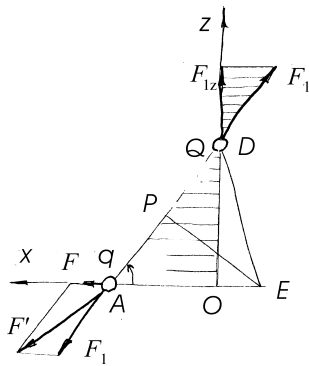


Рис.1.4



$$OD = \frac{a\sqrt{AE^2 - a^2/4}}{AE} = a\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2AE}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Согласно (1.5),  $F_1 = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ , откуда  $F_{1z} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Окончательно сила, действующая на заряд  $Q$ , направлена вдоль оси  $Oz$  и равна  $F_z = 3F_{1z} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{6}$ .

Найдем силы, действующие на заряды  $q_i$ . В силу симметрии можно рассмотреть только заряд, находящийся в вершине  $A$ . На него со стороны зарядов, находящихся в вершинах  $B$  и  $C$ , согласно закону Кулона действуют равные по модулю силы  $F_3 = F_4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ . Они направлены вдоль отрезков  $AB$  и  $AC$ , а их результирующая -- вдоль оси  $Ox$  и равна  $F_x = 2F_4 \cos 30^\circ = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{3}$ . На заряд  $q$ , находящийся в вершине  $A$ , действует также сила  $\vec{F}_1$  со стороны заряда  $Q$  (см. рис.1.4). Результирующая сил  $F_x$  и  $F_1$ , согласно теореме косинусов, равна  $F' = \sqrt{F_x^2 + F_1^2 - 2F_x F_1 \cos(\pi - \alpha)}$ . Из рассмотрения треугольника  $ADO$  следует, что

$$\cos \alpha = \frac{AO}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{OD}{a}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подставив найденное значение в выражение для  $F'$ , окончательно получим

$$F' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{3q^2 + Q^2 + 2qQ}.$$

**Пример 1.2.** Два одинаковых положительных заряда  $q$  находятся в точках  $A$  и  $B$  на расстоянии  $2a$  друг от друга. Найдите напряженность электрического поля в произвольной точке на прямой, соединяющей эти точки, а также на оси, перпендикулярной к отрезку  $AB$  и проходящей через его середину (точка  $O$ ).

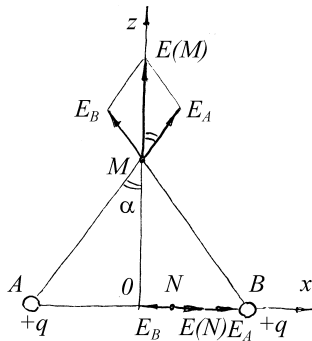


Рис.1.5

**Решение.** Направим ось  $Ox$  по прямой, соединяющей заряды, а ось  $Oz$  проведем из середины отрезка  $AB$  (точка  $O$ ), как показано на рис.1.5. Напряженность электрического поля в точке  $M(0,0,z)$  складывается из напряженностей, создаваемых зарядами, находящимися в точках  $A$  и  $B$ :

$$E_A = E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{AM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + z^2}$$

. Сумма  $\vec{E}_A + \vec{E}_B$  направлена вдоль оси  $Oz$  и равна

$$E_z = 2E_{Az} = 2E_A \cos \alpha = 2E_A \frac{MO}{AM}.$$

Подставляя  $E_A$ , окончательно получим

$$E_z(M) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1.6)$$

При  $z \gg a$   $E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{z^2}$ , то есть два заряда как бы «сливаются» в

один величиной  $2q$  и напряженность поля на достаточном удалении от зарядов задается законом Кулона.

Напряженность поля в точке  $N(x,0,0)$  также равна сумме  $\vec{E}_A + \vec{E}_B$ , где обе напряженности направлены вдоль оси  $Ox$  в одну сторону, если  $|x| > a$ , и в разные стороны в противном случае. Их модули согласно (1.3)

равны  $E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x+a)^2}$  и  $E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x-a)^2}$ , откуда окончательно

напряженность в точке  $N$  равна

$$E_x(N) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 + a^2)x}{(x^2 - a^2)^2 |x|}, \quad \text{если } |x| > a, \quad (1.7)$$

$$E_x(N) = -\frac{q}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{xa}{(x^2 - a^2)^2}, \quad \text{если } |x| < a.$$

При  $x \gg a$  поле  $E_x \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{x^2}$ , то есть совпадает с полем заряда

$2q$ .

**Пример 1.3.** Как изменится поле в точках  $M$  и  $N$  примера 2, если заряд в точке  $B$  заменить равным, но противоположным по знаку зарядом?

**Решение.** При изменении знака заряда в точке  $B$  направление вектора напряженности  $\vec{E}_B$  изменится на противоположное (рис.1.6). В этом случае поле в точке  $M$  направлено вдоль оси  $Ox$  и равно

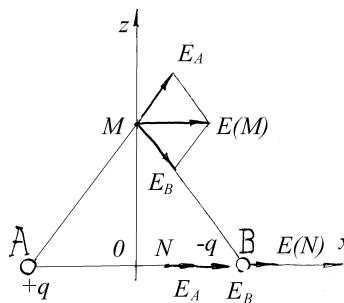


Рис.1.6

$$E_x(M) = 2E_A \sin \alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + z^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

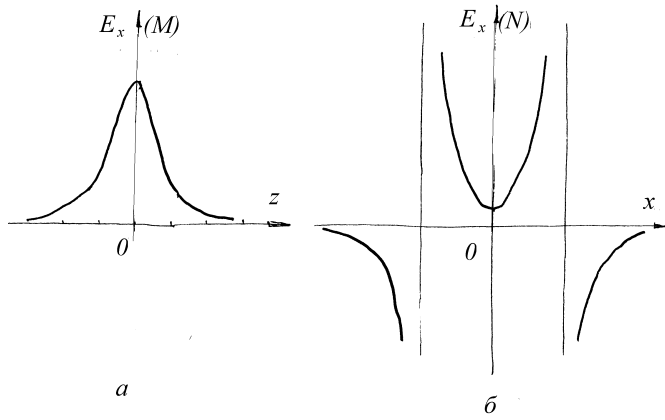


Рис.1.7

На рис.1.7а показана зависимость  $E_x(z)$ . При  $z \gg a$  поле  $E_x \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qa}{z^3}$ , то есть совпадает с полем точечного диполя (2.8), с дипольным моментом  $p_e = 2qa$ , которое спадает с расстоянием как  $\frac{1}{r^3}$ .

В точке  $N(x,0,0)$  напряженность поля также направлена вдоль оси  $Ox$  и равна

$$E_x(N) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(x-a)^2} + \frac{q}{(x+a)^2} \right] = -\frac{q}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ax}{(x^2 - a^2)^2}, \quad \text{если } |x| > a,$$

$$E_x(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(x-a)^2} + \frac{q}{(x+a)^2} \right] = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2}, \quad \text{если } |x| < a.$$

Зависимость  $E_x(N)$  от координаты  $x$  иллюстрирует рис.1.7б. При  $x \gg a$  поле  $E_x(N) \approx -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qa}{x^3}$ , что также совпадает с полем диполя с тем же дипольным моментом.

**Пример 1.4.** Заряд  $Q$  равномерно распределен по кольцу с радиусом  $a$ . Найдите напряженность электрического поля в произвольной точке на перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его центра.

**Решение.** Совместим плоскость  $xOy$  с плоскостью кольца, а ось  $Oz$  – с его осью симметрии. Выберем на кольце произвольную точку  $N$  (см. рис.1.8), определяемую углом  $\psi$ , отсчитываемым от оси  $Ox$  в плоскости кольца. Дадим углу  $\psi$  малое приращение  $d\psi$ . Полученный отрезок кольца несет заряд  $dq = \frac{Q}{2\pi} d\psi$ . Заряд  $dq$  создает в точке  $M(0,0,z)$  напряженность

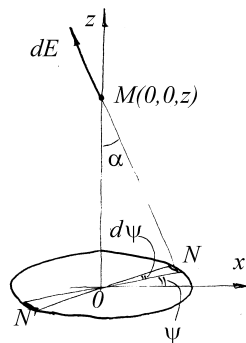


Рис.1.8

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{a^2 + z^2} = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{Qd\psi}{a^2 + z^2}. \quad (1.8)$$

Вектор  $\vec{dE}$  направлен вдоль отрезка  $NM$  и его проекции на оси  $Ox, Oy, Oz$  будут равны

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \sin \alpha \cos(\pi + \psi) = -\frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{Qa \cos \psi d\psi}{(a^2 + z^2)^{3/2}}, \\ dE_y &= dE \sin \alpha \sin(\pi + \psi) = -\frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{Qa \sin \psi d\psi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.9) \\ dE_z &= dE \cos \alpha = \frac{zdE}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{Qzd\psi}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Интегрируя выражения (1.9) по  $\psi$  от 0 до  $2\pi$ , находим проекции поля, создаваемого в точке  $M$  зарядом  $q$ , распределенным по всему кольцу:

$$E_z = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon_0} \cdot \frac{Qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$E_y = -\frac{1}{8\pi^2 \epsilon_0} \cdot \frac{Qa}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \psi d\psi = 0, \quad (1.10)$$

$$E_x = -\frac{1}{8\pi^2 \epsilon_0} \cdot \frac{Qa}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi = 0.$$

При решении задачи можно было бы воспользоваться симметрией распределения заряда. Для этого выберем на кольце две точки  $N$  и  $N'$  на противоположных концах диаметра. Точка  $N$  характеризуется углом  $\psi$ , отсчитываемым от оси  $Ox$ . Дадим углу  $\psi$  малое приращение  $d\psi$ . Получим два одинаковых заряда  $dq$ . Поле, создаваемое ими, было найдено в примере 2, оно направлено по оси  $Oz$  и его модуль задается выражением (1.6), в котором заряд  $q$  следует заменить на  $dq = \frac{Q}{2\pi} d\psi$ . Интегрируя далее по углу  $\psi$  от 0 до  $\pi$ , находим поле, создаваемое всеми зарядами на кольце, то есть опять приходим к выражению для  $E_z$  (1.10).

Поле в центре кольца ( $z=0$ ) равно нулю. При  $z \gg a$  поле совпадает с полем точечного заряда  $Q$  и равно  $E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{z^2}$ . Поле

принимает максимальное значение при  $z = z_{\max} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , определяемым

условием  $\frac{dE_z}{dz} = 0$ . Максимальное значение напряженности поля при этом

$$E_z(z_{\max}) = \frac{1}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{a^2}.$$

**Пример 1.5.** На сфере радиусом  $a$  равномерно распределен заряд  $Q$ . Найдите напряженность электрического поля в произвольной точке пространства  $M$ .

**Решение.** Проведем ось  $Oz$  из центра сферы через выбранную точку  $M$  (см. рис.1.9). Разобьем сферу на кольца. В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ , кольцо на сфере задается углом  $\theta$ , а его ширина - приращением угла  $d\theta$ . На нем находится заряд

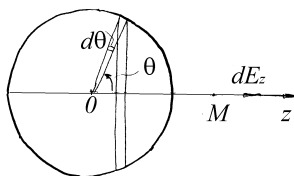


Рис.1.9

$$dq = \frac{Q}{4\pi a^2} 2\pi a \sin \theta a d\theta = \frac{Q}{2} \sin \theta d\theta.$$

Расчет поля проведем для трех случаев:

1) поле вне сферы  $z > a$ .

Согласно (1.10) поле, создаваемое в точке  $M$  этим зарядом, равно

$$dE_z = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \sin \theta (z - a \cos \theta) d\theta}{([z - a \cos \theta]^2 + a^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

Поле от всей сферы получим, проинтегрировав по углу  $\theta$  от 0 до  $\pi$ . Применяя замену переменной  $t = \cos \theta$ , находим

$$E_z = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} \frac{(z - at) dt}{(a^2 + z^2 - 2azt)^{3/2}} = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 z} \int_{-1}^{+1} \frac{[2z^2 - 2azt + a^2] - a^2}{(a^2 + z^2 - 2azt)^{3/2}} dt = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 z} [I(1) + (z^2 - a^2)I(3)] \quad (1.11a)$$

где 
$$I(n) = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(a^2 + z^2 - 2azt)^{n/2}} = \frac{1}{az(n-2)} [ |a-z|^{2-n} - |a+z|^{2-n} ].$$

Откуда окончательно

$$E_z = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 az^2} \left\{ (a+z) - (z-a) + (z^2 - a^2) \left[ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right] \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}.$$

Здесь учтено, что  $z > a$ .

Иными словами, поле вне сферы совпадает с полем, создаваемым точечным зарядом  $Q$ , помещенным в центр сферы.

2) поле внутри сферы  $z < a$ .

Для поля внутри сферы согласно (1.11а) :

$$E_z = \frac{kQ}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{(at - z)dt}{(a^2 + z^2 - 2azt)^{3/2}} = \frac{kQ}{4z} \{ -I(1) + (a^2 - z^2)I(3) \}. \quad (1.11б)$$

Изменяются также значения интеграла  $I(n)$ , причем

$$I(1) = \frac{2}{a}, \quad I(3) = \frac{2}{a(a^2 - z^2)}.$$

Подставляя эти значения в (1.11б), получаем  $E_z = 0$ . Видим, что поле внутри сферы отсутствует.

3) поле на поверхности сферы  $z = a$ .

Подставляя в (1.11а)  $z = a$ , находим

$$E_z = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0\sqrt{2}a^2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1/2}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}. \quad (1.11в)$$

Поле на поверхности сферы вдвое меньше поля в точках, находящихся вне сферы вблизи ее поверхности.

Разрывный характер поля в точках заряженной поверхности связан с пренебрежением ее реальной толщиной. Если рассмотреть заряженный сферический слой малой, но конечной толщины, то напряженность электрического поля внутри слоя будет непрерывно изменяться от нуля до максимального значения. Величина (1.11в) при этом соответствует среднему значению напряженности внутри слоя.

**Пример 1.6.** Шар радиусом  $R$  равномерно заряжен по объему с объемной плотностью заряда  $\rho$   $\left( \rho = \frac{dq}{dV} \right)$ . Найдите напряженность электрического поля в произвольной точке  $M$  вне и внутри шара.



**Решение.** При решении воспользуемся результатом, полученным в предыдущем примере и принципом суперпозиции. Разобьем шар на сферы. Произвольная сфера имеет радиус  $r$  и толщину  $dr$ , при этом на ней равномерно распределен заряд  $dq = \rho 4\pi r^2 dr$ . Для  $r > R$  поле от каждой сферы, как было показано в примере 5, равно  $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  и направлено по радиусу от центра сферы. Поле всего шара будет равно сумме полей отдельных сфер. Так как напряженности от различных сфер в каждой точке направлены по одной прямой, то векторная сумма сведется к алгебраической и будет равна

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}. \quad (1.12)$$

Здесь  $Q$  - заряд всего шара.

Для  $r < R$  вклад в поле будут давать только заряды на сферах, радиус которых не превышает  $r$ , или

$$E = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

Здесь заряд  $Q'$  заключен внутри шара радиусом  $r$ . В этом случае  $E$  – непрерывная на границе шара функция.

**Пример 1.7.** Тонкая палочка длины  $l$  заряжена равномерно с линейной плотностью  $\kappa$ . Найдите напряженность электрического поля, создаваемого зарядом на палочке, в произвольной точке пространства  $M$ .

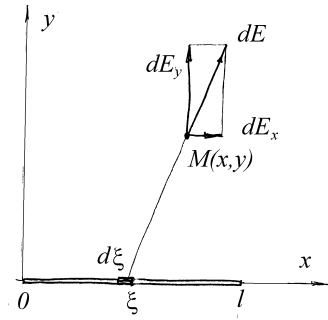


Рис.1.10

**Решение.** Совместим начало координат с одним из концов палочки, ось  $Ox$  направим вдоль палочки, а ось  $Oy$  направим так, чтобы плоскость  $z = 0$  содержала точку  $M(x, y)$ , в которой вычисляется поле (рис.1.10). Таким образом, используя симметрию поля относительно оси  $Ox$ , сведем задачу к двумерной. Выделим на палочке малый элемент  $d\xi$  на расстоянии  $\xi$  от начала координат. Вклад элемента с зарядом

$dq = \kappa d\xi$  в поле согласно закону Кулона равен

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\kappa d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} \cdot \frac{(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}, \quad (1.14)$$

$$dE_y = dE \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\kappa d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}. \quad (1.15)$$

Поле от всего заряда, распределенного по палочке, получим, проинтегрировав (1.14) и (1.15) по  $\xi$  от 0 до  $l$ :

$$E_x = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right] \quad (1.16)$$

и

$$E_y = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 y} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x-l}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right]. \quad (1.17)$$

Заметим, что последние формулы можно представить в виде:

$$E_x = \frac{\kappa}{4\pi \epsilon_0 a} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \quad (1.16a)$$

$$E_y = \frac{\kappa}{4\pi \epsilon_0 a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (1.17a)$$

В этих формулах углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  образованы положительным направлением оси  $Ox$  и прямыми, соединяющими концы палочки с точкой  $M$ .

Отметим, что выражение (1.17) для  $E_y$  при  $y \rightarrow 0$  ( $x > l$ ) приводит к неопределенности типа  $\frac{0}{0}$ . При малых  $y$  формулу (1.17) следует преобразовать, например, взяв лишь первый отличный от нуля член разложения  $E_y$  в ряд Тейлора около значения  $y = 0$ :

$$E_y \approx \frac{\kappa y}{8\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{(x-l)^2} - \frac{1}{x^2} \right]. \quad (1.18)$$

Бесконечности, возникающие в выражениях (1.16)-(1.18) на концах палочки, связаны с тем, что при расчете полей толщина палочки считалась равной нулю. Поэтому поле в непосредственной близости от поверхности палочки на самом деле будет отличаться от поля, задаваемого выражениями (1.16)-(1.18). Тот факт, что напряженность поля минимальна в середине палочки и растет к ее концам, связан с тем, что для точек, лежащих на равном расстоянии от концов палочки, вклад в поле зарядов, находящихся симметрично на разных половинах палочки, максимально компенсируется при сложении полей.

Аналогичная компенсация имеет место и для палочки конечной толщины. Поэтому поле равномерно заряженной палочки максимально вблизи ее концов.

**Пример 1.8.** Тонкая палочка длины  $l$  заряжена так, что линейная плотность заряда  $\kappa$  линейно зависит от расстояния до центра палочки. Полный заряд палочки равен нулю. Половина палочки несет заряд  $q$ . Вычислите дипольный момент палочки  $p_e$ .

**Решение.** Направим ось  $Ox$  вдоль палочки, совместив при этом ее начало с серединой палочки. Выделим на палочке два маленьких кусочка длиной  $dx$  с координатами  $x$  и  $-x$ . На них располагаются равные по величине и различные по знаку заряды  $dq$  и  $-dq$ , причем  $dq = \kappa dx$ . По условию задачи  $\kappa = \alpha x$ . Значение постоянной  $\alpha$  выразим через заряд половины палочки  $q$

$$q = \int_0^{l/2} \kappa dx = \frac{\alpha l^2}{8}, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{8q}{l^2}.$$

Заряды  $dq$  и  $-dq$  образуют диполь с дипольным моментом  $dp_e = 2xdq = \frac{16q}{l^2} x^2 dx$ . Полный дипольный момент палочки найдем, просуммировав дипольный момент по всей палочке

$$p_e = \frac{16q}{l^2} \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{2ql}{3}.$$

Направлен дипольный момент вдоль палочки, от отрицательно заряженного конца к положительному.

#### **Задание для самостоятельной работы**

**1.1.** Три одинаковых точечных заряда  $q$  расположены в вершинах равностороннего треугольника, а точечный заряд  $q'$  -- в центре треугольника. Каким должен быть заряд  $q'$ , чтобы сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

**1.2.** Найдите модуль и направление напряженности поля  $\vec{E}$  в центре кольца радиуса  $a$ , в котором сделана прорезь ширины  $b \ll a$ . По кольцу равномерно распределен заряд  $q > 0$ .

**1.3.** Найдите отношение силы электростатического отталкивания двух электронов к силе их гравитационного притяжения. Масса электрона

$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ , заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ .

**1.4.** Вычислите ускорение  $a$ , сообщаемое одним электроном другому, находящемуся от первого на расстоянии  $r = 1 \text{ мм}$ . Масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ , заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

**1.5.** Две бесконечно длинные параллельные нити, заряженные с одинаковой линейной плотностью  $\kappa = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}$ , находятся на расстоянии  $b = 20 \text{ мм}$  друг от друга. Какая сила  $F$  действует на единицу длины каждой нити?

**1.6.** Бесконечная прямая нить, равномерно заряженная с линейной плотностью  $\kappa_1$ , и отрезок длины  $l$ , равномерно заряженный с линейной плотностью  $\kappa_2$ , расположены в одной плоскости перпендикулярно друг другу. Расстояние между нитью и ближайшим к ней концом отрезка равно  $r_0$ . Найдите силу, с которой нить действует на отрезок.

**1.7.** В вершинах правильного шестиугольника со стороной  $a$  помещаются точечные заряды одинаковой величины  $q$ . Найдите напряженность поля в центре шестиугольника при условии, что а) знак всех зарядов одинаков, б) знаки соседних зарядов противоположны.

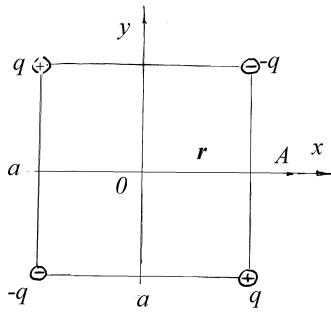


Рис.1.11

**1.8.** Электрический квадруполь состоит из двух положительных и двух отрицательных одинаковых по величине точечных зарядов  $q$ , расположенных в вершинах квадрата со стороной  $a$ , как показано на рис.1.11. Найдите электрическое поле такого квадруполя в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $x \gg a$  от его центра  $O$ , если линия  $OA$  параллельна одной из сторон квадрата.

**1.9.** По круглой очень тонкой пластинке радиуса  $a$  равномерно распределен заряд  $Q$ . Найдите напряженность поля на оси, перпендикулярной к плоскости пластинки, как функцию расстояния  $z$  от ее центра. Исследуйте полученное выражение для  $z \ll a$  и  $z \gg a$ .

**1.10.** Найдите напряженность поля, создаваемого плоским равномерно заряженным кольцом, на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр. Поверхностная плотность заряда равна  $\sigma$ , внутренний радиус кольца равен  $R_1$ , его внешний радиус -  $R_2$ .

**1.11.** На плоскости распределен положительный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . На другой, параллельной ей плоскости, отстоящей от первой на расстоянии  $d$ , распределен отрицательный заряд с вдвое большей плотностью. Нарисуйте картину силовых линий поля, создаваемого зарядами на плоскостях.

**1.12.** Полусфера радиуса  $R$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Найдите напряженность электрического поля в центре полусферы.

**1.13.** Внутри шара радиуса  $R$ , заряженного с постоянной объемной плотностью  $\rho$ , имеется сферическая полость радиусом  $r$ , в которой заряды отсутствуют. Центр полости смещен относительно центра шара на расстояние  $a$  ( $a+r < R$ ). Найдите напряженность электрического поля внутри полости.

**1.14.** В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд  $e$  распределен внутри шара радиусом  $R = 10^{-8}$  см. Как должна зависеть от радиуса плотность положительного заряда, чтобы электрон (точечная частица с отрицательным зарядом  $e$ ), помещенный внутри шара, совершал гармонические колебания? Найдите частоту колебаний электрона. Заряды механически друг на друга не действуют. Магнитным полем движущегося заряда пренебречь. Масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

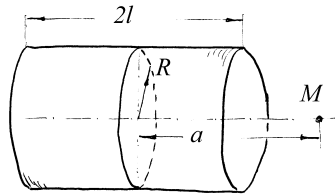


Рис.1.12

**1.15.** Цилиндр с радиусом основания  $R$  и высотой  $2l$  заряжен по поверхности с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$  (см. рис.1.12). Считая, что основания цилиндра не несут заряда, определите напряженность электростатического поля в точке  $M$  на оси цилиндра на расстоянии  $a$  от его центра.

**1.16.** Бесконечная прямолинейная полоса шириной  $2l$  заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найдите напряженность электрического поля в точке, отстоящей от полосы на расстояние  $h$ . Точка находится на перпендикуляре, восстановленном из середины полосы.

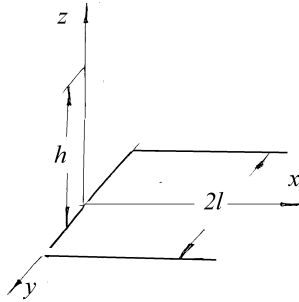


Рис.1.13

**1.17.** Полубесконечная полоса шириной  $2l$  заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найдите напряженность электрического поля в точке  $M$ , находящейся на расстоянии  $h$  от полосы на перпендикуляре, восстановленном в начале полосы из точки, лежащей на ее средней линии (см. рис.1.13).

**1.18.** Из четырех тонких заряженных палочек составлен квадрат со стороной  $l$ .

Две соседние стороны квадрата несут общий заряд  $+q$ , равномерно распределенный по их длине. Две другие стороны имеют общий заряд  $-q$ . Определите напряженность электростатического поля в центре квадрата.

**1.19.** Две нити, совпадающие с положительными полуосями декартовой системы координат  $xOy$ , равномерно заряжены с линейной плотностью  $k$ . Найдите напряженность электрического поля в точке  $M(a,a)$   $a>0$ .

**1.20.** Три нити, совпадающие с положительными полуосями декартовой системы координат, равномерно заряжены с постоянной линейной плотностью  $K$ . Найдите напряженность электрического поля в точке  $M(a,a,a)$   $a>0$ .

**1.21.** Две полубесконечные нити, равномерно заряженные с линейной плотностью  $K$ , сложены так, что образуют прямой угол. Найдите величину напряженности электрического поля во всех точках прямой  $Oz$ , проходящей через вершину угла перпендикулярно плоскости, в которой лежат нити.



## §2. Потенциал электрического поля

### *Краткие теоретические сведения*

Сила называется потенциальной, если ее работа вдоль любой замкнутой траектории равна нулю. Кулоновские силы удовлетворяют этому условию, поэтому  $\oint \vec{F} d\vec{r} = q' \oint \vec{E} d\vec{r} = 0$ , где  $\vec{F}$  – сила, действующая на пробный заряд  $q'$  со стороны кулоновского поля с напряженностью  $\vec{E}$ . Условие потенциальности электростатического поля можно записать в виде:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2.1)$$

Из этого равенства, на основании теоремы Стокса, следует

$$\text{rot} \vec{E} = 0. \quad (2.2)$$

*Потенциалом  $\varphi$  электрического поля* в точке  $M$  называют работу, которую совершает поле при перемещении единичного заряда из этой точки в точку  $O$ , где договорились считать потенциал равным нулю:

$$\varphi = \int_M^O \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (2.3)$$

В силу потенциальности электростатического поля, значение этого интеграла не зависит от выбора траектории интегрирования. Выбор точки  $O$  произволен и диктуется соображениями удобства. Обычно за нуль принимают потенциал бесконечно удаленной точки.

Как следует из (1.3) и (2.3), потенциал в точке  $M$ , удаленной на расстояние  $r$  от точечного заряда  $q$ , равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.4)$$

Для потенциальной силы можно ввести потенциальную энергию  $W_p = q' \cdot \varphi$ , где функция  $\varphi$  не зависит от величины пробного заряда.

Для потенциала, как и для напряженности, справедлив принцип суперпозиции: потенциал поля, создаваемого несколькими зарядами, равен сумме потенциалов, создаваемых каждым из них в предположении, что остальные отсутствуют.

Потенциал диполя на расстояниях, много больших его собственного размера, (потенциал *точечного диполя*) однозначно выражается через его дипольный момент  $\vec{p}_e$  (см. Пример 2):

$$\varphi(M) = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p}_e)}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2.5)$$

где  $\vec{r}$  – вектор, соединяющий центр диполя с точкой  $M$ .

Если в некотором объеме  $V$  распределен заряд с объемной плотностью  $\rho(\vec{r})$ , то потенциал, создаваемый этим зарядом в произвольной точке пространства  $M$ , определяется как

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (2.6)$$

Напряженность электростатического поля однозначно связана с его потенциалом. При этом соотношение, обратное (2.3), имеет вид:

$$\vec{E} = -grad\varphi. \quad (2.7)$$

Применяя эту формулу к (2.5) можно найти напряженность поля точечного диполя:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\vec{p}_e \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{p}_e}{r^3}, \quad (2.8)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный вдоль  $\vec{r}$ .

Эквипотенциальными поверхностями называют поверхности равного потенциала. Так как компонента вектора  $\text{grad}\varphi$ , касательная к эквипотенциальной поверхности, всегда равна нулю, силовые линии поля в каждой точке направлены по нормали к соответствующей эквипотенциальной поверхности (см. Рис 2.4).

**Пример 2.1.** Найдите работу, совершаемую силами однородного поля напряженности  $\vec{E}$  над зарядом  $q$  при его перемещении из точки 1 с радиус-вектором  $\vec{r}_1$  в точку 2 с радиус-вектором  $\vec{r}_2$  по произвольной траектории.

**Решение.** По определению работы  $dA = \vec{F} \cdot \vec{dr}$ . Для однородного поля  $\vec{F} = q\vec{E}$ , откуда

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dr} = q\vec{E} \int_1^2 d\vec{r} = q\vec{E}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (2.9)$$

**Пример 2.2.** Найдите потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого точечным диполем с дипольным моментом  $\vec{p}_e$ .

**Решение.** Направим ось  $Ox$  из середины отрезка, соединяющего заряды диполя, от отрицательного заряда к положительному. Положение точки  $M$  пространства будем описывать радиус-вектором  $\vec{r}$ . Используя обозначения, приведенные на рис.2.1, получим

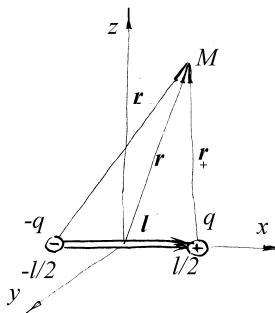


Рис.2.1

$$\varphi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}, \quad (2.10)$$

где  $r_+ = \sqrt{r^2 - 2(\vec{r} \cdot \vec{l}/2) + l^2/4}$  и  $r_- = \sqrt{r^2 + 2(\vec{r} \cdot \vec{l}/2) + l^2/4}$ .

При  $r \gg l$  выражение (2.10) упрощается, так как  $r_+ \approx r - (\vec{r} \cdot \vec{l})/(2r)$  и  $r_- \approx r + (\vec{r} \cdot \vec{l})/(2r)$ :

$$\varphi(M) = \frac{q(\vec{r} \cdot \vec{l})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p}_e)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.11)$$

Здесь  $\vec{p}_e = q \cdot \vec{l}$  дипольный момент диполя.

Напряженность поля по известному потенциалу найдем согласно (2.7). Применяя к (2.11) формулы векторного анализа (см. Приложение ) получим:

$$\vec{E} = \frac{3p_e x}{4\pi\epsilon_0 r^4} \vec{n} - \frac{\vec{p}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\vec{p}_e \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{p}_e}{r^3}. \quad (2.12)$$

**Пример 2.3.** Определите силу, действующую на точечный диполь с дипольным моментом  $\vec{p}_e$  в неоднородном электрическом поле  $\vec{E}(\vec{r})$ .

**Решение.** Рассмотрим диполь малого, но конечного размера (см. рис.2.1). Проекция силы, действующей на диполь, на ось  $Ox$  равна  $F_x = q[E_x(l/2, 0, 0) - E_x(-l/2, 0, 0)]$ . Раскладывая в ряд Тейлора напряженность поля в окрестности начала координат, получим

$$F_x = q \frac{\partial E_x}{\partial x} l = q(\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) E_x = (\vec{p}_e \cdot \vec{\nabla}) E_x, \quad \text{где} \quad \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Аналогично выводятся соотношения для  $F_y = (\vec{p}_e \cdot \vec{\nabla}) E_y$  и  $F_z = (\vec{p}_e \cdot \vec{\nabla}) E_z$ .

Полученные скалярные равенства можно объединить в одно векторное

$$\vec{F} = (\vec{p}_e \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}. \quad (2.13)$$

**Пример 2.4.** Найдите энергию взаимодействия  $W$  двух диполей, находящихся на расстоянии  $r \gg l_i$  ( $l_i$  – размер  $i$ -го диполя) друг от друга. Дипольные моменты диполей  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ .

**Решение.** Энергия взаимодействия двух диполей - это дополнительная энергия, которая появляется у диполя в поле, создаваемом другим диполем. Для диполя  $\vec{p}_2$  она равна (рис.2.2)

$$W_2 = q_2(\varphi_A - \varphi_B),$$

где потенциал  $\varphi$ , создаваемый диполем  $\vec{p}_1$ , задается выражением (2.11). Подставляя его в  $W_2$ , получаем

$$W_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{r}_+ \cdot \vec{p}_1)}{r_+^3} - \frac{(\vec{r}_- \cdot \vec{p}_1)}{r_-^3} \right\}.$$

Учтем, что  $\vec{r}_+ = \vec{r} + \frac{\vec{l}_2}{2}$  и  $\vec{r}_- = \vec{r} - \frac{\vec{l}_2}{2}$ , и разложим  $W_2$  в ряд по малому параметру  $\frac{l_2}{r}$ . Отбрасывая в разложении члены порядка  $\left(\frac{l_2}{r}\right)^3$ , получаем

$$W_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \cdot \vec{p}_1}{r^3} - \frac{3q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p}_1)(\vec{r} \cdot \vec{l}_2)}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{p}_1)(\vec{r} \cdot \vec{p}_2)}{r^5} \right] \quad (2.14)$$

**Пример 2.5.** В условии примера 4 из первого параграфа определите потенциал в произвольной точке  $M$  на перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его центра. Используя найденное выражение для потенциала, найдите напряженность электрического поля в точке  $M$ .

**Решение.** Так же как и в примере 4 из первого параграфа введем координаты точки  $M(0,0,z)$  и точечный заряд на кольце (точка  $N$  на кольце характеризуется углом  $\psi$ , отсчитываемым от оси  $Ox$ , которому даем приращение  $d\psi$ ) (см. рис.1.8). Потенциал заряда  $dq$  в точке  $M$  равен

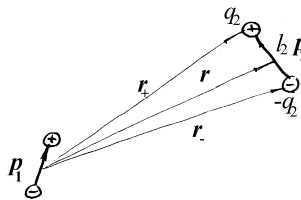


Рис.2.2

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{(Q/2\pi)d\psi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}.$$

Интегрируя по  $\psi$  от 0 до  $2\pi$ , окончательно получаем

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}. \quad (2.15)$$

Используя (2.7), находим напряженность на оси кольца

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}},$$

что совпадает с выражением (1.10), полученным ранее в параграфе 1.

**Пример 2.6.** Диск радиусом  $a$  заряжен с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найдите потенциал в произвольной точке на оси диска, перпендикулярной к его плоскости.

**Решение.** Разобьем диск на кольца радиусом  $\rho$  и толщиной  $d\rho$ . На таком кольце находится заряд  $dq = \sigma 2\pi\rho \cdot d\rho$ . Потенциал на оси такого кольца найден ранее в примере 5 данного параграфа и задается выражением (2.15)

$$d\varphi(z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\sqrt{\rho^2+z^2}} \rho \cdot d\rho.$$

Интегрируя это выражение по  $\rho$  от 0 до  $a$  получим

$$\varphi(z) = \int_0^a \frac{\sigma}{2\epsilon_0\sqrt{\rho^2+z^2}} \rho d\rho = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{a^2+z^2} - z \right). \quad (2.16)$$

При  $z \rightarrow \infty$  выражение (2.16) принимает вид  $\varphi(z) \rightarrow \frac{\sigma a^2}{4\epsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$ , то есть

совпадает с полем точечного заряда  $Q = \pi\sigma a^2$ .

**Пример 2.7.** Шар радиусом  $R$  равномерно заряжен по объему с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Определите потенциал в произвольной точке вне и внутри шара.

**Решение.** Для определения потенциала воспользуемся соотношением (2.3), в котором потенциал бесконечно удаленной точки примем равным нулю. Напряженность поля определяется соотношениями (1.12) и (1.13), полученными в примере 6 первого параграфа:

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{при } r > R,$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_r^R r dr = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \quad \text{при } r \leq R.$$

Здесь  $r$  – расстояние от рассматриваемой точки пространства до центра шара, а  $Q$  – заряд, заключенный в шаре.

**Пример 2.8.** На рис.2.3 приведена картина силовых линий некоторого поля. Нарисуйте несколько эквипотенциальных поверхностей и укажите, в каком направлении потенциал возрастает.

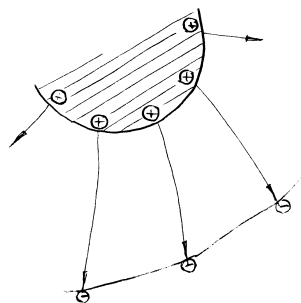


Рис.2.3

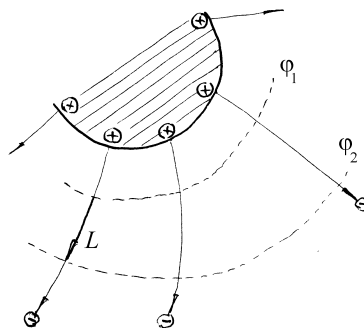


Рис.2.4

**Решение.** Силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Две из них показаны на рис.2.4. Определим, какой из потенциалов  $\varphi_1$  или  $\varphi_2$  больше. Согласно

$$(2.3) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{r}, \text{ где траекторию } L \text{ выберем совпадающей с одной из}$$

силовых линий. Если  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  мало отличаются, то расстояние между эквипотенциальными поверхностями мало и кривую  $L$  с хорошей точностью можно заменить прямой, а поле однородным, получим  $\varphi_1 - \varphi_2 = El > 0$ .

**Пример 2.9.** Два разноименных точечных заряда, величины которых равны  $q_1$  и  $-q_2$ , расположены на расстоянии  $d$  друг от друга. Докажите, что поверхность нулевого потенциала есть сфера. Определите радиус  $R$  этой сферы и расстояние  $b$  от ее центра до меньшего по абсолютной величине заряда.

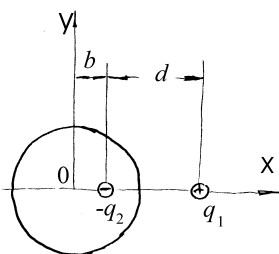


Рис.2.5а

**Решение.** Пусть для определенности  $|q_2| < q_1$ .

Согласно условию задачи направление вдоль прямой, соединяющей заряды, является выделенным. Направим ось  $Ox$  вдоль нее. В силу симметрии оси  $Oy$  и  $Oz$  равноправны: любая эквипотенциальная поверхность есть поверхность вращения вокруг оси  $Ox$ , поэтому достаточно найти линию пересечения эквипотенциальной поверхности с плоскостью  $xOy$  (см. рис.2.5а). Выберем произвольную точку  $M(x, y)$  на этой плоскости. Потенциал в этой точке согласно принципу суперпозиции равен

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-b-d)^2 + y^2}} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-b)^2 + y^2}}.$$

Поверхность нулевого потенциала  $\varphi = 0$  удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{(x-b-d)^2 + y^2} = \frac{q_1}{q_2}\sqrt{(x-b)^2 + y^2}.$$



Возведя это равенство в квадрат, получим

$$\left[ \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 - 1 \right] y^2 + \left[ \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 - 1 \right] (x-b)^2 + 2d(x-b) = d^2.$$

Поделив это уравнение слева и справа на  $\left[ \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 - 1 \right]$  и введя обозначения

$$f = \frac{d^2}{\left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 - 1}, \quad c = \frac{d}{\left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 - 1},$$

получим

$$y^2 + (x-b)^2 + 2c(x-b) = f.$$

Прибавив справа и слева  $c^2$ , окончательно найдем искомое уравнение окружности

$$y^2 + (x-b+c)^2 = R^2.$$

Здесь радиус окружности

$$R = \frac{dq_2q_2}{q_1^2 - q_2^2}. \quad (2.17)$$

А так как центр окружности совпадает с точкой  $O$ , то

$$b = c = \frac{d}{\left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 - 1}. \quad (2.18)$$

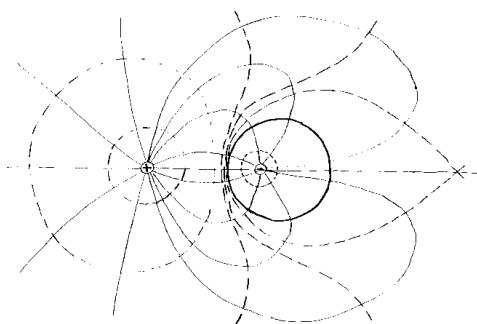


Рис.2.56

На рис.2.56 показана картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для двух неравных по модулю разноименных зарядов.

Таким образом, поверхность нулевого потенциала является сферой, охватывающей меньший по величине заряд. Центр сферы лежит вне отрезка,

соединяющего заряды.

**Пример 2.10.** На сфере радиусом  $R$  распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , где  $\theta$  - угол, составляемый радиусом-вектором, проведенным в произвольную точку сферы с осью  $Oz$ . Найдите напряженность в произвольной точке вне и внутри сферы.

**Решение.** Распределение заряда по поверхности сферы с заданной в условии задачи поверхностной плотностью можно получить, заменив сферу двумя

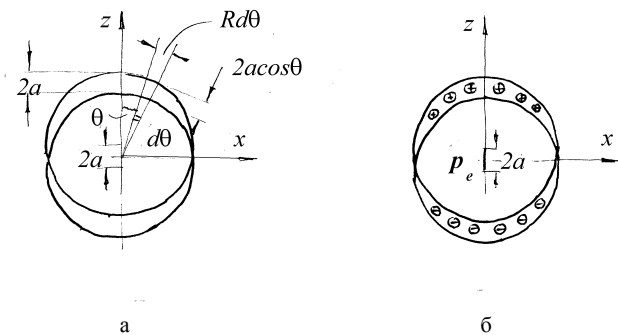


Рис.2.6

шарами радиусом  $R$ , заряженными с однородной объемной плотностью  $+\rho$  и  $-\rho$  и сдвинутыми относительно заданной сферы вдоль оси  $Oz$  на очень малое расстояние  $a$  ( $a \ll R$ ) вверх и вниз соответственно, как показано на рис.2.6. Действительно, в объеме, задаваемом углами  $\theta \div \theta + d\theta$ , между этими шарами находится заряд (см. рис.2.6а)  $dq = \rho \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta \cdot 2a \cos \theta$ . Этот заряд будет распределен по поверхности площади  $dS = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta$ , откуда  $\sigma = 2a\rho \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta$ . Здесь обозначено  $\sigma_0 = 2a\rho$ .

Поле вне сферы, создаваемое двумя шарами, будет совпадать с полем диполя, имеющего дипольный момент  $p_e = 2a\rho \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0$  и помещенного в центр сферы, как показано на рис.2.6б. Поле диполя подробно рассмотрено в примере 2 настоящего параграфа.

На рис.2.7 показана произвольная точка  $M$  внутри сферы, описываемая координатами  $r$  и  $\psi$ .

Поле  $\vec{E}_+$ , создаваемое положительными зарядами шара с центром в точке  $A$ , будет направлено по радиусу этого шара и определяться только зарядами внутри сферы радиусом  $r_+$ . Соответственно поле  $\vec{E}_-$ , создаваемое отрицательными зарядами шара с центром в точке  $B$ , будет направлено по радиусу этого шара и определяться только зарядами внутри сферы радиусом  $r_-$  (см.(1.13)):

$$\vec{E}_+ = \frac{q_+}{4\pi\epsilon_0 r_+^2} = \frac{\rho r_+}{3\epsilon_0},$$

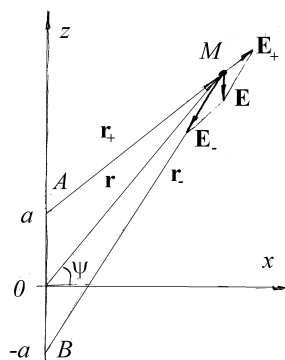


Рис.2.7

$$\vec{E}_- = \frac{q_-}{4\pi\epsilon_0 r_-^2} = \frac{\rho \vec{r}_-}{3\epsilon_0}.$$

Найдем векторную сумму этих полей, для чего просуммируем их проекции:

$$E_x = E_{+x} + E_{-x} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \cos \psi - \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \cos \psi = 0,$$

$$E_z = E_{+z} + E_{-z} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r \sin \psi - a) - \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r \sin \psi + a) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot 2a.$$

Учитывая, что  $\sigma_0 = 2\rho a$ , окончательно получим, что поле внутри сферы однородно, направлено противоположно оси  $Oz$ , а его напряженность равна по абсолютной величине

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}. \quad (2.19)$$

### *Задание для самостоятельной работы*

**2.1.** Определите работу силы электрического поля, создаваемого зарядом  $q$ , над зарядом  $q'$  при перемещении заряда  $q'$  из точки 1 с радиус-вектором  $\vec{r}_1$  в точку 2 с радиус-вектором  $\vec{r}_2$  по траекториям, изображенным на рис.2.8 а - 2.8в.

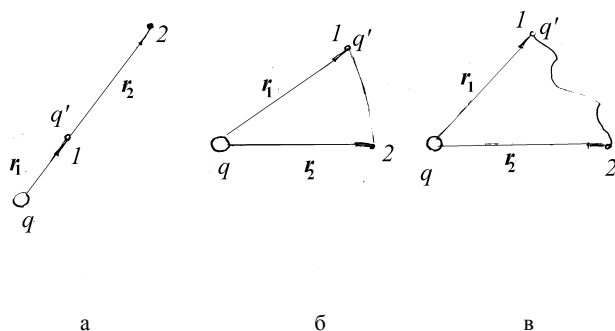


Рис.2.8

**2.2.** Одномерная модель ионного кристалла представляет собой бесконечную линейную цепочку чередующихся по знаку и одинаковых по модулю зарядов (ионов). Расстояние между соседними зарядами одинаково вдоль всей цепочки и равно  $a$ , модуль заряда равен  $q$ . Найдите потенциал  $\varphi$ , создаваемый всеми остальными зарядами в точке, где находится положительный заряд.

**2.3.** Два точечных заряда  $+q$  и  $-q$  расположены в точках  $N(a/2, 0, 0)$ ,  $M(-a/2, 0, 0)$  соответственно. Какую работу совершат силы поля, создаваемого этими зарядами, при удалении заряда  $q'$  из начала координат на бесконечность? Как изменится ответ, если оба заряда одинаковы и равны  $+q$ ?

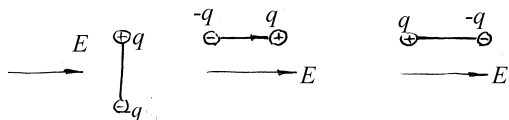


Рис.2.9

**2.4.** Диполь с дипольным моментом  $\vec{p}_e$  помещен в однородное электрическое поле напряженности  $\vec{E}$ . Найдите потенциальную

энергию диполя  $W$ , момент сил  $\vec{M}$  и силу  $\vec{F}$ , действующие на диполь в случае его ориентации, показанной на рис.2.9.

2.5. Найдите энергию  $W$  взаимодействия двух диполей с дипольными моментами  $p_1$  и  $p_2$  при их взаимном расположении, показанном на рис.2.10.

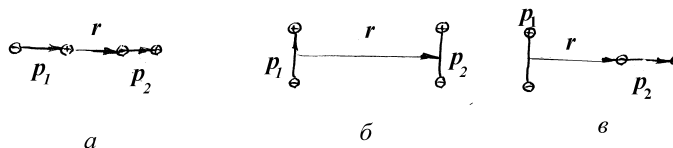


Рис.2.10

2.6. Диполь с дипольным моментом  $\vec{p}_e$  находится в однородном электрическом поле с напряженностью  $E$ . Диполь отпускают без начальной скорости из положения, показанного на рис.2.9а. Найдите угловую скорость диполя  $\omega$  при прохождении им положения, показанного на рис.2.9б, и его угловое ускорение  $\vec{\beta}$  в начальный момент времени. Масса каждого заряда  $m$ , расстояние между зарядами  $l$ .

2.7. Точечный положительный заряд  $q$  находится в начале координат. Диполь с моментом  $\vec{p}_e$  находится в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$ . При какой ориентации диполя энергия его взаимодействия с зарядом: а) максимальна, б) минимальна, в) равна нулю.

2.8. Найдите распределение модуля напряженности электрического поля точечного диполя на сфере радиусом  $R$  с центром в точке, где находится диполь. Дипольный момент диполя равен  $p_e$ .

**2.9.** Найдите потенциал и напряженность поля в центре полусферы радиуса  $R$ , заряженной с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Указание: для расчета напряженности воспользоваться формулой (2.7).

**2.10.** Шарик радиусом  $r = 1 \text{ см}$  заряжен до потенциала  $\varphi = 3000 \text{ В}$ . Сколько электронов  $n$  нужно отнять от шарика для такой электризации? На сколько при этом уменьшится масса шарика?

Масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ , заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

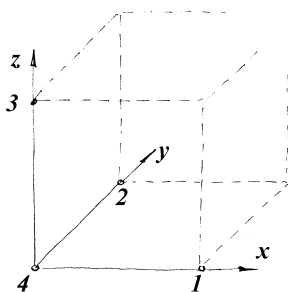


рис.2.11

**2.11.** Даны потенциалы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi_4$  в четырех смежных вершинах малого кубика с ребром  $a$  (рис 2.11). Как можно приближенно определить напряженность поля в точке 4?

**2.12.** Найдите силу взаимодействия  $F$  между точечным зарядом  $q$  и точечным диполем, если расстояние между зарядом и диполем равно  $d$ , а дипольный момент  $\vec{p}_e$  направлен вдоль соединяющей их прямой.

**2.13.** Два тонких бесконечно длинных проводника, разноименно заряженных с одинаковой линейной плотностью заряда, расположены параллельно на некотором расстоянии друг от друга. Докажите, что эквипотенциальные поверхности такой системы проводников суть круговые цилиндры и определите расстояние  $l$  между проводниками, если расстояние между осями двух таких цилиндров равно  $2a$ , а их радиусы одинаковы и равны  $R$ .

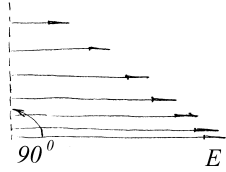


Рис.2.12

**2.14.** Может ли существовать в вакууме электростатическое поле, вектор напряженности которого  $\vec{E}$  во всем объеме поля одинаково направлен, но по величине изменяется, например, по линейному закону, если переходить от точки к точке по нормальному к полю направлению (рис.2.12).

**2.15.** Диэлектрический диск радиусом  $R$  заряжен равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Найдите потенциал на краю диска.



### §3. Проводники и диэлектрики в электрическом поле . Теорема Гаусса

#### *Краткие теоретические сведения*

Поле в веществе. *Проводниками* называют такие тела, которые содержат *свободные заряды*, то есть заряды, способные передвигаться по всему объему проводника. При внесении проводника в электрическое поле свободные заряды под его воздействием перемещаются (протекают электрические токи) до тех пор, пока не установится новая стационарная конфигурация зарядов. Это приводит к следующим свойствам проводников в электростатическом поле:

- проводник *электризуется* - на его поверхности появляются положительные и отрицательные заряды,
- напряженность электрического поля и объемная плотность заряда внутри проводника равны нулю,
- весь объем проводника является эквипотенциальным объемом, что позволяет говорить о *потенциале проводника*,
- силовые линии электрического поля вне проводника вблизи его поверхности перпендикулярны к ней.

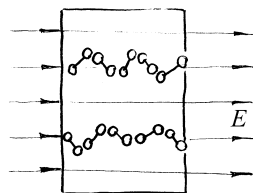


Рис.3.1

*Диэлектрики* не содержат свободных зарядов. В электрическом поле заряды внутри диэлектрика смещаются лишь на молекулярных масштабах, при этом молекулы могут быть представлены как диполи. В электростатическом поле они ориентируются (см. рис.3.1), что приводит к появлению на поверхности диэлектрика *связанных зарядов*. Последние приводят к уменьшению напряженности электрического поля внутри диэлектрика по сравнению с вакуумом.

Явление ориентации молекул диэлектрика во внешнем электрическом поле называют *поляризацией диэлектрика*. Для его

количественной характеристики вводят *вектор поляризации*  $\vec{P}$ . В случае одинаковых диполей

$$\vec{P} = n \vec{p}_e, \quad (3.1)$$

где  $n$  - число диполей-молекул в единице объема вещества, а  $\vec{p}_e$  - дипольный момент одного диполя. В не очень сильных электрических полях для большинства материальных сред вектор поляризации пропорционален напряженности поля  $\vec{E}$  (такие среды относят к *линейным*)

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}. \quad (3.2)$$

Постоянная  $\chi$  называется *диэлектрической восприимчивостью* диэлектрика.

Существуют, однако, среды (например *сегнетоэлектрики*), в которых связь между  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  существенно *нелинейна*. В сильных полях поляризация этих сред насыщается и перестает зависеть от внешнего поля. В некоторых случаях для таких диэлектриков вектор  $\vec{P}$  можно считать постоянным независимо от поля («замороженная» поляризация).

Кроме вектора напряженности  $\vec{E}$  в теории электричества вводят *вектор индукции* электрического поля  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (3.3)$$

Безразмерная постоянная  $\epsilon > 1$  называется *диэлектрической проницаемостью* вещества.

Теорема Гаусса. В электростатическом поле поток вектора индукции через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, заключенных внутри этой поверхности:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i, \quad (3.4)$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.5)$$

Здесь  $\rho$  - объемная плотность заряда.

**Пример 3.1.** Сравните качественно поток вектора индукции  $\vec{D}$  через поверхности, показанные на рис.3.2. В каких случаях поток равен нулю?

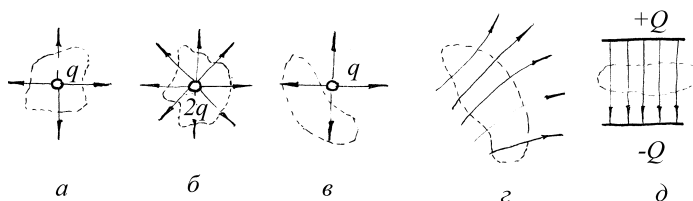


Рис.3.2

**Решение.** На языке силовых линий поток вектора  $\vec{D}$  через поверхность пропорционален разности входящих в ограниченную поверхностью область и выходящих через нее силовых линий. Согласно вышесказанному поток через поверхность, показанную на рис.3.2б вдвое превышает поток через поверхность, показанную на рис.3.2а. Поток через поверхности, показанные на рис.3.2в-3.2д, равен нулю.

**Пример 3.2.** Используя теорему Гаусса, найдите напряженность поля, создаваемого в вакууме бесконечной плоскостью, несущей на единице площади заряд  $\sigma$ .

**Решение.** Прежде всего отметим, что в силу симметрии распределения заряда на плоскости поле также обладает элементами симметрии, а именно

- вектор напряженности поля направлен по нормали к плоскости,
- модуль напряженности поля одинаков на одном и том же расстоянии от плоскости.

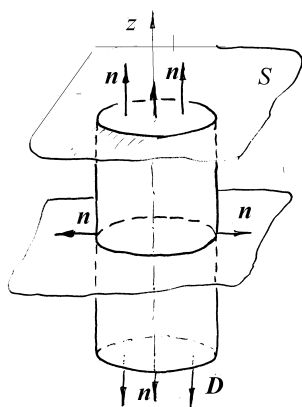


Рис.3.3

Воспользуемся этими свойствами симметрии поля при выборе замкнутой поверхности, к которой применим теорему Гаусса. Выберем прямой цилиндр, основания которого параллельны плоскости и находятся на одинаковом расстоянии  $z$  от нее (рис.3.3). При вычислении потока вектора индукции следует выбирать нормаль к поверхности, выходящую из объема наружу. Поток через весь цилиндр складывается из трех потоков: через доньшки  $\Phi_1 = \Phi_2 = SD$ , и через боковую поверхность. Последний равен нулю, так как в любой точке боковой

поверхности нормаль к ней перпендикулярна к вектору  $\vec{D}$ . Суммарный поток через цилиндрическую поверхность равен  $\Phi = 2SD$ . Внутри цилиндрической поверхности находится заряд  $q = S\sigma$ , поэтому  $2SD = S\sigma$ .

Откуда  $D = \frac{\sigma}{2}$ . Используя (3.3), находим напряженность поля в любой точке в окрестности заряженной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.6)$$

Представленное в условии задачи распределение заряда невозможно создать практически. Его следует рассматривать как модель, позволяющую рассчитать поле вблизи заряженной пластинки.

**Пример 3.3.** Найдите напряженность электрического поля между обкладками плоского конденсатора. На пластинах находятся заряды  $Q$  и  $-Q$ , площадь пластин конденсатора -  $S$ .

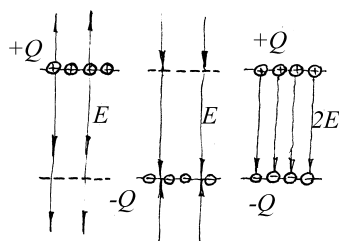


Рис.3.4

**Решение.** На рис.3.4 показано поле от каждой из пластин конденсатора. Между пластинами поле складывается и становится вдвое больше, чем поле от одной пластины (см. (3.6)):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}. \quad (3.7)$$

За пределами пластин поля от зарядов на пластинах направлены в противоположные стороны, поэтому суммарная напряженность равна нулю.

Полученный результат относится к полю вдали от краев пластин конденсатора.

**Пример 3.4.** Диэлектрический шар радиусом  $R$  равномерно заряжен по объему. Объемная плотность заряда равна  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость материала шара -  $\epsilon$ . Найдите потенциал поля, создаваемого шаром.

**Решени.** Напряженность электрического поля, создаваемого распределением заряда, указанного в условии задачи, рассчитана в примере 6 первого параграфа. Приведем другое решение той же задачи с использованием теоремы Гаусса. В силу симметрии распределения заряда индукция (и напряженность) поля будет направлена вдоль радиуса шара, а величина вектора индукции будет одинаковой на любой сфере, концентрической с шаром. Для определения поля в произвольной точке  $M$  проведем через эту точку сферу, концентрическую с шаром. Поток вектора индукции  $\vec{D}$  через эту сферу

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \oint D dS = D(r) \oint ds = D(r) 4\pi r^2, \quad (3.8)$$

где интегрирование ведется по поверхности сферы радиусом  $r$ .

Согласно теореме Гаусса этот поток равен заряду, заключенному внутри выбранной сферы. Этот заряд различен, если точка  $M$  находится внутри или вне сферы:

$$q = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho r^3, & \text{если } r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi\rho R^3, & \text{если } r > R \end{cases}.$$

Применяя теорему Гаусса, находим индукцию электрического поля

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3} \vec{r}, & \text{если } r \leq R, \\ \frac{\rho R^3}{3r^3} \vec{r}, & \text{если } r > R \end{cases}.$$

Поскольку  $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ , то напряженность поля будет равна

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0} \vec{r}, & \text{если } r \leq R, \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3} \vec{r}, & \text{если } r > R \end{cases}. \quad (3.9)$$

Напряженность и потенциал поля связаны соотношением (2.3), то есть

$\varphi = -\int_{\infty}^r E dr$ . Потенциал бесконечно удаленной точки примем равным нулю.

Проведя интегрирование, получим

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0}(R^2 - r^2), & \text{если } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}, & \text{если } r > R \end{cases}.$$

При интегрировании учтено, что при  $r = R$  потенциал непрерывен.

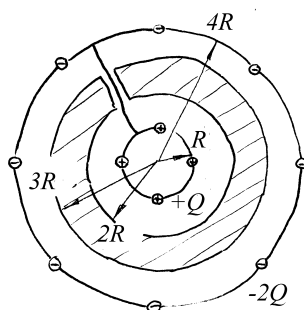


Рис.3.5

**Пример 3.5.** На проводящей сфере радиусом  $R$  находится заряд  $+Q$ , а на проводящей сфере радиусом  $4R$ , concentric с первой - заряд  $-2Q$ . Между заряженными сферами находится не заряженный слой проводящей среды, ограниченный сферами с радиусами  $2R$  и  $3R$  соответственно (см. рис.3.5). Найдите напряженность электрического поля во всем пространстве. Постройте картину силовых линий вектора  $\vec{E}$ , а также

найдите индукционные заряды на поверхностях проводника. Как изменятся заряды на сферах, если их соединить проводником?

**Решение.** Как и в предыдущем примере, поле обладает сферической симметрией. Для применения теоремы Гаусса выберем сферу радиусом  $r$ , concentric с данными. Поток через нее подсчитан в предыдущем примере и задается формулой (3.8). Найдём заряд внутри сферы радиусом  $r$ :

$$q = \begin{cases} 0 & r < R \\ +Q & R < r < 2R \\ Q - q', & \text{если } 2R < r < 3R \\ Q & 3R < r < 4R \\ -Q & 4R < r \end{cases}$$

Здесь  $q'$  - индукционный заряд на сфере радиусом  $3R$ , а так как проводник не несет заряда, то на его внутренней поверхности радиусом  $2R$  находится заряд  $-q'$ . Применим теорему Гаусса и учтем, что внутри проводника поле равно нулю ( $q' = Q$ ), получим

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 0, & r < R, & 2R < r < 3R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r}, & \text{если } R < r < 2R, & 3R < r < 4R. \\ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r}, & 4R < r \end{cases}$$

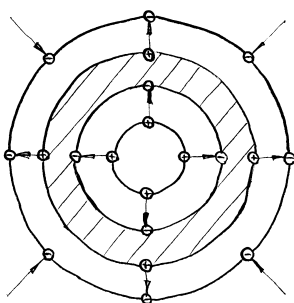


Рис.3.6

Картина силовых линий вектора  $\vec{E}$  показана на рис.3.6.

После соединения внешней сферы с внутренней заряды перераспределяются по ним так, чтобы потенциалы этих сфер стали одинаковыми. Обозначим заряд на сфере радиусом  $R$  через  $Q_1$ , а на сфере радиусом  $4R$  -  $Q_2$ . В силу закона сохранения заряда  $Q_1 + Q_2 = Q - 2Q = -Q$ .

Используя теорему Гаусса, найдем поле в пространстве между сферами с радиусами  $R$  и  $4R$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r} & R < r < 2R \\ \frac{Q_1 - Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r} = 0, & \text{если } 2R < r < 3R. \\ \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r} & 3R < r < 4R \end{cases}$$

Разность потенциалов между ними

$$\Delta\varphi = \int_R^{4R} E(r) dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} - \frac{1}{4R} \right) = \frac{7Q_1}{48\pi\varepsilon_0 R} = 0.$$

Видим, что заряд  $Q_1$  на внутренней сфере будет равен нулю, а заряд на внешней сфере радиусом  $4R$  станет равен  $Q_1 + Q_2 = -Q$ .



**Пример 3.6.** Проводящая сфера радиусом  $R$  несет заряд  $Q$ . Сфера окружена сферическим слоем диэлектрика, простирающимся до сферы радиусом  $2R$ . Используя теорему Гаусса, найдите индукцию электрического поля и его напряженность во всех точках пространства. Постройте картину силовых линий для векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ . Найдите связанный заряд  $q$ , появляющийся на границах диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\varepsilon = 2$ .

**Решение.** Проведем произвольную сферическую поверхность радиусом  $r$ , концентрическую с заданной в условии задачи. Электрическое поле вокруг сферы обладает сферической симметрией, или вектор индукции электрического поля  $\vec{D}$  направлен по радиусу сферы. Поток этого вектора через выбранную поверхность определяется выражением (3.8). Согласно теореме Гаусса этот поток равен заряду внутри поверхности. Приравнявая, получаем

$$D = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R \\ \frac{Q}{4\pi r^2} & \text{при } r > R \end{cases}.$$

Вектор напряженности  $\vec{E}$  вне диэлектрика равен  $\vec{E} = \vec{D} / \epsilon_0$ , а внутри диэлектрика –  $\vec{E} = \vec{D} / \epsilon \epsilon_0$ . Иными словами, вектор напряженности электрического поля определяется как свободными, так и связанными зарядами. Сказанное хорошо иллюстрируют картины силовых линий

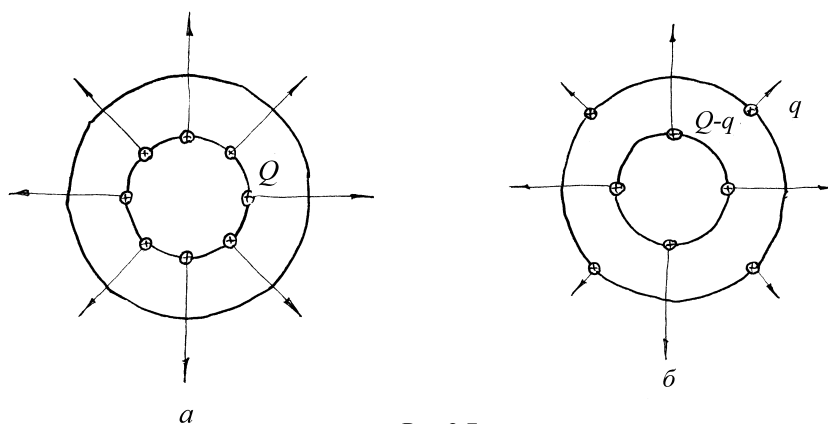


Рис.3.7

векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ , представленные на рис.3.7а и рис.3.7б соответственно. Силовые линии вектора  $\vec{D}$  начинаются и оканчиваются на свободных зарядах или в бесконечности. Воспользуемся картиной силовых линий для оценки связанного заряда  $q$ . Поток вектора  $\vec{E}$  через сферу с радиусом  $R < r < 2R$  в  $\epsilon = 2$  раза меньше потока через сферу с радиусом  $r > 2R$ . Поток пропорционален числу силовых линий, а они начинаются на свободных и связанных зарядах, поэтому  $Q - q = q$ . Откуда  $q = Q/2$ .

В общем случае при определении связанных зарядов можно применить следующий прием. Напряженность электрического поля в произвольной точке внутри диэлектрика равна  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$ . Представим,

что диэлектрика нет, но заменим связанные заряды свободными, и найдем напряженность электрического поля, создаваемого всеми зарядами, получим

$E = \frac{Q - q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Приравнявая найденные выражения для напряженности, получим  $\frac{Q}{\epsilon} = Q - q$ , откуда  $q = Q\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)$ , что для  $\epsilon = 2$  совпадает с выражением, полученным выше, исходя из анализа силовых линий.

**Пример 3.7.** Незаряженная проводящая сфера радиусом  $R$  помещена в однородное электрическое поле напряженностью  $E_0$ . Найдите поверхностную плотность зарядов, появляющихся на сфере, а также суммарный дипольный момент сферы.

**Решение.** Заряды по сфере распределятся так, чтобы напряженность поля внутри проводника (сферы) была бы равна нулю. Эта напряженность складывается из напряженности внешнего однородного поля и поля, создаваемого зарядами, появляющимися на поверхности проводника. В примере 10 предыдущего параграфа было показано, что если заряд на поверхности сферы будет распределен с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , где угол  $\theta$  - это угол, который составляет радиус, проведенный в данную точку сферы, с осью  $Oz$ , то поле внутри сферы однородно и направлено вдоль оси  $Oz$ , а его величина определяется выражением (2.19):  $E_0 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$ . Направляя ось  $Oz$  вдоль внешнего поля

и выбирая  $\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0$ , получим, что суммарное поле внутри сферы будет равно нулю, если на поверхности сферы появится наведенный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ .

Дипольный момент двух зарядов  $dq$  и  $-dq$ , находящихся на поверхностях сферы, определяемых углами  $\theta \div \theta + d\theta$ ,  $\varphi \div \varphi + d\varphi$  и  $(\pi - \theta) \div (\pi - \theta - d\theta)$ ,  $\varphi \div \varphi + d\varphi$  согласно определению (1.4) равен  $dp_e = \sigma(\theta)R^2 d\theta \sin \theta d\varphi 2R \cos \theta$  и направлен вдоль оси  $Oz$ . Интегрируя  $dp_e$

по углу  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$  и углу  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , получаем дипольный момент всей сферы:

$$p_e = 2R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sigma(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta = 12\pi R^3 \varepsilon_0 E_0 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = 4\pi \varepsilon_0 E_0 R^3.$$

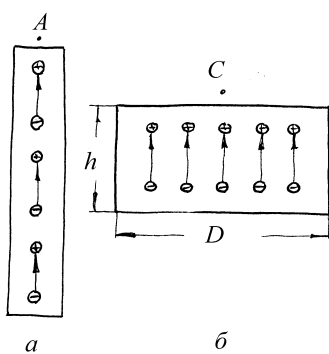


Рис.3.8

**Пример 3.8.** Длинный цилиндр изготовлен из диэлектрика с «замороженной» однородной поляризацией, направленной по его оси. Поле в точке  $A$  (рис.3.8а) оказалось равным  $E_A = 3\text{кВ/м}$ . Найдите (приближенно) поле  $E_C$  вблизи торца короткого цилиндра (в точке  $C$ ), сделанного из того же материала, если  $h = 2 \cdot 10^{-2} D$ , где  $D$  - диаметр цилиндра (см. рис.3.8б).

**Решение.** Поле, создаваемое цилиндрами с «замороженной»

поляризацией, определяется связанными зарядами, существующими на их торцах, причем поверхностная плотность связанных зарядов  $\sigma$  на торцах обоих цилиндров одинакова. На торцах, ближайших к точкам  $A$  и  $C$ , связанные заряды положительны, а на противоположных торцах - отрицательные.

Так как по условию задачи первый цилиндр достаточно длинный, то основной вклад в поле в точке  $A$  вносят положительные заряды. Величина напряженности, создаваемой ими в точке  $A$ , может быть с хорошей точностью аппроксимирована полем в непосредственной близости от равномерно заряженной плоскости (см. решение примера 2 настоящего

параграфа):  $E_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ .

Для точки  $C$  кроме поля положительных зарядов, которое совпадает с полем в точке  $A$ , заметный вклад в суммарную напряженность

внесут отрицательные заряды, находящиеся на дальнем от точки  $C$  торце цилиндра. Поле  $E'$ , создаваемое ими, направлено в противоположную  $E_A$  сторону и его величину нетрудно подсчитать, используя решение примера 4 параграфа 1, что мы предоставляем читателю сделать самостоятельно:

$$E' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{D^2/4 + h^2}} \right). \quad (3.10)$$

Суммарное поле положительных и отрицательных связанных зарядов в точке  $C$  будет равно

$$E_C = E_A - E' = E_A \frac{h}{\sqrt{D^2/4 + h^2}};$$

для  $h/D \ll 1$  приближенно получим

$$E_C = E_A \frac{2h}{D} = 120 \text{ В/м}.$$

### *Задание для самостоятельной работы*

**3.1.** На вертикальной пластине достаточно больших размеров равномерно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . На прикрепленной к пластине нити подвешен маленький шарик массы  $m$ , несущий заряд того же знака, что и пластина. Найдите его заряд  $q$ , если нить образует с вертикалью угол  $\alpha$ .

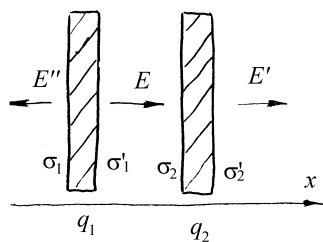


Рис.3.9

**3.2.** Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластинки помещены в вакууме параллельно друг другу (рис.3.9). Полный заряд на единицу площади (то есть сумма зарядов на обеих поверхностях пластинки) равен  $q_1$  для первой и  $q_2$  - для второй. Определите поверхностные плотности электрических зарядов на пластинках, а также напряженность электрического поля между ними и во внешнем пространстве.

внешнем пространстве.

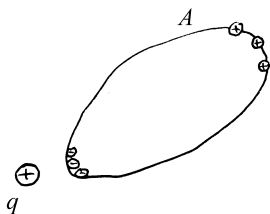


Рис.3.10

**3.3.** Докажите, что заряды каждого знака, индуцированные на проводнике  $A$  поднесенным к нему зарядом  $+q$  (рис.3.10) всегда меньше  $q$ .

**3.4.** Имеется заряженный до некоторого положительного потенциала проводник. Что произойдет с потенциалом этого проводника,

если приблизить к нему на конечное расстояние проводящую плоскость, соединенную с землей?

**3.5.** Заряженный проводник находится внутри замкнутой металлической оболочки. 1) Изменится ли электрическое поле внутри оболочки, если извне поднести к ней заряженный проводник? 2) Будет ли изменяться поле внутри и вне оболочки, если внутренний проводник перемещать внутри оболочки?

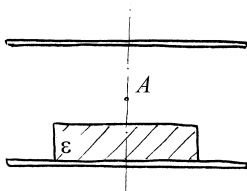


Рис.3.11

**3.6.** Между двумя круглыми параллельными проводящими пластинками, заряженными равными разноименными зарядами, помещают симметрично круглую диэлектрическую пластинку, как указано на рис.3.11. Изменится ли напряженность поля в точке А после внесения пластинки?

**3.7.** Из трех concentric бесконечно тонких металлических сфер с радиусами  $R_1 < R_2 < R_3$ , находящихся в вакууме, крайние заземлены, а средней сообщен электрический заряд  $Q$ . Найдите напряженность электрического поля во всем пространстве.

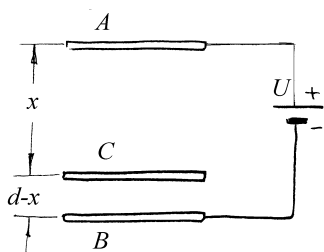


Рис.3.12

**3.8.** Из трех параллельных металлических пластинок А, В и С (рис.3.12) крайние А и В неподвижны и соединены с гальванической батареей, поддерживающей разность потенциалов  $U$  между ними постоянной. Средняя пластинка С сначала находится в контакте с верхней пластиной А. Затем с помощью изолирующей ручки она

перемещается по направлению к нижней пластинке. Пренебрегая краевыми эффектами, найдите напряженности полей  $E_1$  и  $E_2$  в зазорах между пластинками в зависимости от переменного расстояния  $x$  между пластинками А и С, если сумма зазоров между пластинками равна  $d$ .

**3.9.** Три одинаковых изолированных незаряженных маленьких металлических шарика расположены в вершинах равностороннего треугольника. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух

шариках оказались равными  $q_1$  и  $q_2$ . Найдите заряд  $q_3$  на третьем шарике.

**3.10.** Как изменится разность потенциалов между двумя изолированными заряженными проводниками, если между ними ввести металлическую пластину, толщиной которой нельзя пренебречь по сравнению с расстоянием между проводниками?

**3.11.** Найдите напряженность электрического поля внутри и вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса  $R$ . Объемная плотность заряда в цилиндре –  $\rho$ .

**3.12.** Два длинных провода, расположенных параллельно на расстоянии  $d$  друг от друга, равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью  $+k$  и  $-k$ . Определите напряженность поля  $E$  на расстоянии  $h$  от плоскости, в которой лежат провода, в точке, лежащей в плоскости симметрии. *Указание:* воспользоваться теоремой Гаусса.

**3.13.** Определите напряженность поля  $E$  внутри и вне безграничного плоского слоя толщиной  $2d$ , в котором равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью  $\rho$ . *Указание:* воспользоваться теоремой Гаусса.

**3.14.** Внутри полой проводящей сферы радиусом  $R$  помещен проводящий шар радиусом  $r$ . Пространство между шаром и сферой заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . На сферу поместили заряд  $Q$ , а внутренний шар заземлили. Определите заряд шара.

**3.15.** С какой объемной плотностью  $\rho(r)$  следует распределить электрический заряд в шаре, чтобы поле  $E_0$  внутри него было направлено вдоль радиуса и всюду имело одинаковую величину?



**3.16.** Найдите величину и направление силы взаимодействия между двумя незаряженными проводящими сферами радиусом  $a$ , помещенными в однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$ , направленное параллельно линии, соединяющей центры сфер. Расстояние между центрами сфер  $r \gg a$ .

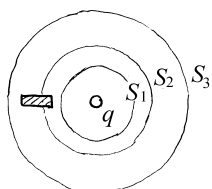


Рис.3.13

**3.17.** В поле точечного заряда  $q > 0$  находится палочка из диэлектрика. Выделим три сферические поверхности  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , в центре которых находится заряд  $q$  (рис.3.13).

а) Сравните потоки вектора  $\vec{E}$  через эти поверхности; б) сравните потоки вектора  $\vec{D}$  через эти поверхности. Можно ли найти  $\vec{D}(r)$ ,

используя теорему Гаусса в интегральной форме?

**3.18.** Диэлектрическая пластина ширины  $2a$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  помещена в однородное электрическое поле напряженности  $\vec{E}$ , линии которого перпендикулярны пластине. а) Найдите зависимость потенциала  $\varphi$  от  $x$  (ось  $Ox$  перпендикулярна пластине, вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $Ox$ , точка  $x=0$  находится посередине пластины); б) определите поверхностную плотность связанных зарядов на той стороне пластины, в которую входят линии поля  $\vec{E}$  из вакуума; в) определите вектор поляризации диэлектрика.

**3.19.** Найдите напряженность электрического поля внутри и вне однородно поляризованного незаряженного плоского диэлектрического слоя. Вектор поляризации  $\vec{P}$  составляет угол  $\alpha$  с вектором нормали  $\vec{n}$  одной из внешних поверхностей слоя.

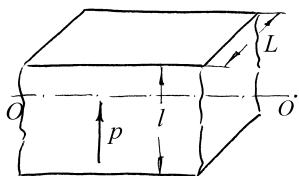


Рис.3.14

**3.20.** Имеется бесконечная полоса диэлектрика толщиной  $l$  и шириной  $L$ . Материал пластины поляризован. Вектор поляризации  $\vec{P}$  постоянен и перпендикулярен бесконечной границе полосы, как показано на рис.3.14. Найдите напряженность  $\vec{E}$  и индукцию  $\vec{D}$  поля на средней линии  $OO'$  в двух случаях: а) считая  $l \ll L$ , б) считая  $l \gg L$ .

**3.21.** В диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  создано однородное поле напряженностью  $\vec{E}$ . Внутри среды имеется сферическая полость. Найдите напряженность  $\vec{E}'$  поля, создаваемого в центре сферы поляризационными зарядами, индуцированными на её поверхности, считая, что вектор поляризации  $\vec{P}$  всюду (за исключением полости) имеет постоянное значение.

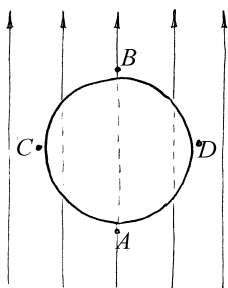


Рис.3.15

**3.22.** Во внешнее однородное электрическое поле  $\vec{E}$  (рис.3.15) внесен металлический шарик. Как в результате этого изменится напряженность электрического поля вблизи поверхности шарика в точках А и В, С и D?

## §4. Уравнения электростатики

### Краткие теоретические сведения

Уравнение Пуассона. Основные законы электростатики, записанные в дифференциальном виде, представляют частный случай системы уравнений Максвелла (см. раздел 11), и включают дифференциальную форму теоремы Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (4.1)$$

и свойство потенциальности электростатического поля

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (4.2)$$

В уравнениях (4.1), (4.2) векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не являются независимыми, а однозначно связаны так называемым *материальным уравнением*, которое для изотропного диэлектрика имеет вид

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (4.3)$$

где  $\epsilon$  - его диэлектрическая проницаемость. Свойство потенциальности поля (4.2) позволяет ввести потенциал  $\varphi$ :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (4.4)$$

Подставляя  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \operatorname{grad} \varphi$  в (4.1) и считая среду однородной ( $\epsilon$  не зависит от координат), получаем *уравнение Пуассона* для потенциала:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (4.5)$$

Это уравнение позволяет вычислить потенциал в произвольной точке некоторой области  $V$ , если в этой области задано распределение объемной плотности заряда  $\rho(\vec{r})$ , а также заданы граничные условия, например

значение потенциала на поверхности  $S$ , ограничивающей рассматриваемую область.

Условия на границах раздела двух сред. Как следует из уравнений (4.1), (4.2), на границе двух сред векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  удовлетворяют условиям:

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma, \quad E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (4.6)$$

Здесь индекс  $n$  означает проекцию вектора на нормаль к границе раздела,  $\tau$  – проекцию на любое касательное направление, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй средам соответственно. Нормаль  $\vec{n}$  к границе раздела проводится из второй среды в первую,  $\sigma$  обозначает поверхностную плотность свободных зарядов, находящихся на границе.

Если заменить второй диэлектрик проводником, в котором поле  $\vec{E}_2 = 0$ , граничные условия (4.6) преобразуются к виду

$$D_n = \sigma, \quad E_\tau = 0. \quad (4.7)$$

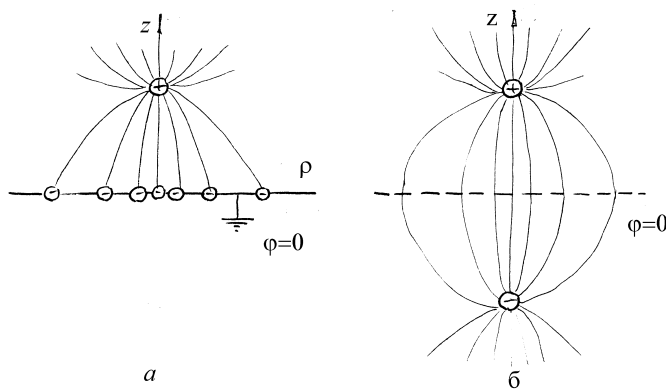


Рис.4.1

Метод изображений. Суть метода состоит в замене источников поля более удобными для расчета и обеспечивающими в заданной области  $V$  такое же поле, что и в исходной задаче. Внутри области  $V$  распределение

зарядов должно остаться прежним, также неизменным должен быть потенциал на границе  $S$  области  $V$ . Тогда независимо от распределения зарядов вне области  $V$ , поле  $\vec{E}$  внутри нее будет тем же в силу единственности решения задачи о потенциале (рис.4.1) и однозначной связи между  $\vec{E}$  и  $\varphi$ .

**Пример 4.1.** Воспользовавшись первой формулой Грина, докажите возможность приведенной в методе изображений замены поля одной совокупности зарядов полем другой.

**Решение.** Пусть  $u(M)$  и  $v(M)$  дважды дифференцируемые в области  $V$  функции. Формулу Грина представим в виде

$$\int_V (u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dV = \oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} ds, \quad (4.8)$$

где  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

Положим  $u = v = \varphi$  ( $\varphi$  - потенциал электростатического поля) и рассмотрим сначала простейший случай, когда объемная плотность заряда в области  $V$  равна нулю. Тогда  $\Delta\varphi = 0$  и, так как  $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ , из (4.8) получим

$$\int_V \vec{E}^2 dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \oint_S \varphi \vec{E} \vec{n} ds. \quad (4.9)$$

Припишем индекс 1 величинам  $\vec{E}$  и  $\varphi$ , относящимся к исходной задаче, а 2 - величинам задачи с измененными источниками. Положив в (4.8)  $u = v = \varphi_1 - \varphi_2$ , с помощью приведенных выше рассуждений получим

$$\int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)^2 dV = \oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) ds.$$

Из этого соотношения видно, что замена исходной задачи возможна ( $\vec{E}_1 \equiv \vec{E}_2$  в  $V$ ), если удастся изменить заряды вне области  $V$  так, чтобы выполнялось условие

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (4.10)$$

При выборе в качестве поверхности  $S$  эквипотенциальной поверхности, имеющей для обеих совокупностей зарядов один и тот же потенциал, условие (4.10) выполняется автоматически.

Если область  $V$  содержит заряженные проводники, то объемы, ограниченные ими, должны быть исключены из  $V$ , поскольку на поверхности проводников нормальная проекция вектора  $\vec{D}$  терпит разрыв (см.(4.7)). В этом случае интеграл в правой части (4.9) вычисляется по поверхностям  $S$  и  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), где  $S_i$  - поверхность  $i$ -го проводника. Учитывая, что на поверхности проводников потенциал остается постоянным, или  $\varphi|_{S_i} = \varphi_i$ , имеем

$$\oint_{S_i} \varphi \vec{E} ds = \varphi_i \left( -\frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \oint_{S_i} D_{n1} ds \right) = -\frac{\varphi_i}{\epsilon \epsilon_0} \oint \alpha ds = -\frac{\varphi_i}{\epsilon \epsilon_0} q_i.$$

С учетом сказанного условие (4.10) принимает вид

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sum_{i=1} (q_{1i} - q_{2i}) (\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) = 0. \quad (4.11)$$

Так как в области  $V$  конфигурации заряженных проводников в обеих задачах одинаковы, второе слагаемое в (4.11) также обращается в ноль.

**Пример 4.2.** Найдите распределение пространственных зарядов, создающее в вакууме поле с потенциалом

$$\varphi(r) = \begin{cases} a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) - b(R^2 - r^2), & \text{если } r \leq R \\ 0 & \text{если } r > R \end{cases} \quad (4.12)$$

**Решение.** Потенциал поля обладает сферической симметрией, поэтому целесообразно выбрать сферическую систему координат, поместив начало отсчета в точку  $r = 0$ . При  $r \rightarrow 0$  потенциал имеет особенность:  $\varphi(r) \rightarrow \frac{a}{r}$ .

Для того чтобы вычленить ее из потенциала, представим  $\varphi(r)$  в виде

$\varphi(r) = \frac{a}{r} + \varphi_1(r)$ , где  $\varphi_1(r)$  - всюду непрерывная функция

$$\varphi_1(r) = \begin{cases} -\frac{a}{R} - b(R^2 - r^2) & \text{если } r \leq R \\ -\frac{a}{r} & \text{если } r > R \end{cases} \quad (4.13)$$

Особенность потенциала (4.12) в окрестности  $r = 0$  того же типа, что и особенность поля точечного заряда, помещенного в эту точку. Из формулы

для потенциала точечного заряда имеем  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{a}{r}$ . Откуда

$$q = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (4.14)$$

Согласно (4.7) на заряженных поверхностях нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  терпит разрыв. Используя соотношения (4.3) и

(4.4), а также симметрию задачи, находим  $\vec{E}_1 = -\vec{n}_r \frac{d\varphi_1}{dr}$ ,  $\vec{D}_1 = \vec{n}_r D_1$ , где

$\vec{n}_r = \vec{r}/r$  и

$$D_1 = \begin{cases} -2b\epsilon_0 r & r < R \\ -\frac{a\epsilon_0}{r^2} & r > R \end{cases} \quad (4.15)$$

Откуда

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R_+} D(r) - \lim_{r \rightarrow R_-} D(r) = \left( -\frac{a}{R^2} + 2bR \right) \varepsilon_0. \quad (4.16)$$

Объемную плотность заряда можно найти, используя уравнение (4.5), которое в сферической системе координат для поля, зависящего только от  $r$ , принимает вид

$$\Delta \varphi_1 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Подставляя сюда  $\varphi_1$  из (4.13), получаем выражение для объемной плотности заряда:

$$\rho = \begin{cases} -6b\varepsilon_0, & \text{если } r < R \\ 0, & \text{если } r > R \end{cases}. \quad (4.17)$$

Итак, потенциал (4.12) создается следующей конфигурацией зарядов:

- а) точечным зарядом  $q$  (4.14), расположенным в точке  $r = 0$ ;
- б) равномерно заряженной сферой радиусом  $R$  с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  (4.16);
- в) равномерно заряженным по объему шаром радиусом  $R$  с объемной плотностью  $\rho$  (4.17).

Распределение потенциала (4.12) позволяет утверждать, что полный заряд системы равен нулю. Действительно, при  $r > R$  согласно (4.4) поле отсутствует и  $\vec{D} = 0$ . Используя теорему Гаусса для сферы радиуса  $r > R$  с центром в точке  $r = 0$ , получим, что заряд внутри сферы равен нулю.

Если  $b = \frac{a}{2R^3}$ , то, как видно из (4.16), плотность поверхностного заряда равна нулю, и точечный заряд  $q$  компенсируется объемным зарядом шара.



**Пример 4.3.** Точечный заряд  $q$  расположен на расстоянии  $h$  от бесконечной проводящей заземленной плоскости. Найдите силу  $\vec{F}$ , действующую на заряд, и поверхностную плотность  $\sigma$  индуцированного на плоскости заряда.

**Решение.** Воспользуемся методом электростатических изображений. В качестве области  $V$ , в которой поля заданной и модельной конфигураций зарядов будут совпадать, выберем полупространство  $z > 0$ , где ось  $Oz$  направим перпендикулярно плоскости проводника через заряд  $q$  (см. рис.4.1а), а на плоскости выберем полярную систему координат  $(\rho, \psi)$ . Так как поле точечного заряда убывает с возрастанием расстояния от него, то модуль плотности заряда, индуцированного им на плоскости, будет убывать с ростом  $\rho$ .

Уберем плоскость с наведенным на ней зарядом и подберем вне  $V$  (в полупространстве  $z < 0$ ) систему зарядов такую, чтобы потенциал плоскости был равен нулю. Нетрудно убедиться в том, что поместив заряд  $-q$  в точку на оси  $Oz$  с координатой  $z = -h$  (отражение заряда  $q$  плоскостью  $z = 0$ ), получим, что потенциал плоскости симметрии  $z = 0$  равен нулю (см. рис.4.1б). Следовательно, поле  $\vec{E}_1$  исходной задачи для  $z > 0$  эквивалентно полю  $\vec{E}_2$ , создаваемому зарядом  $q$  и отраженным зарядом  $-q$ .

С учетом сказанного сила взаимодействия заряда  $q$  с плоскостью равна силе взаимодействия между зарядом  $q$  и его «отражением»  $-q$ :

$F = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}$  и является силой притяжения, а потенциал поля в

произвольной точке области  $V$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + (h-z)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + (h+z)^2}}.$$

Для определения поверхностной плотности наведенного на плоскости заряда воспользуемся граничными условиями (4.7) и связью между потенциалом и напряженностью поля (4.4):

$$\sigma(\rho) = D_n = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{qh}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Для определения суммарного заряда, индуцированного на плоскости, следует подсчитать интеграл

$$Q = \int_0^{\infty} \sigma(\rho) \cdot 2\pi\rho d\rho = -\frac{qh}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\rho^2}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = -q.$$

**Пример 4.4.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $a$  ( $a > R$ ) от центра проводящей сферы радиусом  $R$ . Заряд сферы равен  $Q$ . Найдите силу, действующую на заряд  $q$ .

**Решение.** Воспользуемся методом электростатических изображений. В качестве области  $V$  выберем пространство вне сферы, содержащее заряд  $q$ . Внутри проводящей сферы  $\vec{E} = 0$ , а потенциал остается постоянным и равным потенциалу центра сферы  $\varphi_0$ , который согласно принципу суперпозиции равен

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \oint \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{a} + \frac{1}{R} \oint \sigma ds \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{a} + \frac{Q}{R} \right).$$

Здесь  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда  $Q$ , неравномерно распределенного по сфере.

Уберем теперь заряженную сферу и подберем систему зарядов вне  $V$  (внутри сферы) так, чтобы потенциал на ее поверхности сохранил прежнее значение. Эту задачу решим в два этапа. На первом этапе выберем заряд  $q'$  так, чтобы потенциал сферы стал равен нулю. Для этого можно воспользоваться решением примера 9

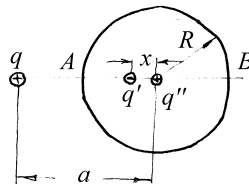


Рис.4.2

параграфа 2: для двух точечных зарядов  $q$  и  $q'$  поверхностью нулевого потенциала является сфера, центр которой лежит на прямой, соединяющей заряды. Допустим, что искомый заряд  $q'$  находится на расстоянии  $x$  от центра сферы, тогда из условия  $\varphi_A = \varphi_B = 0$  (см. рис.4.2) имеем

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{a-R} + \frac{q'}{R-x} \right) = 0 \quad \text{и} \\ \varphi_B &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{a+R} + \frac{q'}{R+x} \right) = 0.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Решая систему уравнений (4.18), определяем  $q'$  и  $x$

$$q' = -q \frac{R}{a}, \quad x = \frac{R^2}{a}.\quad (4.19)$$

На втором этапе подберем заряд  $q''$  так, чтобы потенциал сферы принял значение потенциала исходной задачи. Очевидно, что заряд  $q''$  следует поместить в центр сферы. Учитывая, что суммарный вклад в потенциал сферы зарядов  $q$  и  $q'$  равен нулю, получим

$$\varphi_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{a} + \frac{Q}{R} \right).$$

Откуда 
$$q'' = Q + q \frac{R}{a}.\quad (4.20)$$

Таким образом поле  $\vec{E}$  исходной задачи в области  $V$  эквивалентно полю, создаваемому зарядами  $q, q'$  и  $q''$ . Сила, действующая на заряд  $q$ , согласно

принципу суперпозиции равна 
$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{(a-x)^2} + \frac{q''}{a^2} \right).$$

Подставляя выражения для  $x, q'$  и  $q''$ , полученные выше, окончательно находим

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[ \frac{Q}{q} - \frac{R^3(2a^2 - R^2)}{a(a^2 - R^2)^2} \right]. \quad (4.21)$$

Анализ полученного результата удобнее провести, представив (4.21) в виде

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[ \frac{Q}{q} - f(\xi) \right].$$

Здесь  $\xi = \frac{R}{a}$  и  $f(\xi) = \xi^3 \frac{2 - \xi^2}{(1 - \xi^2)^2}$ .

Так как  $0 < \xi < 1$ , то  $f(\xi) > 0$  и функция  $f(\xi)$  монотонно возрастает, причем  $0 < f(\xi) < \infty$ .

Если заряды  $q$  и  $Q$  разноименные, то  $F < 0$  при любом  $\xi$ , то есть заряд  $q$  притягивается к сфере.

Если заряды  $q$  и  $Q$  одноименные, то уравнение  $f(\xi) = \frac{Q}{q}$  имеет единственное решение  $\xi_0$ , определяющее положение  $a = a_0$  заряда  $q$  ( $a_0 = \frac{R}{\xi_0}$ ), при котором  $F = 0$ . Если  $a > a_0$  ( $\xi < \xi_0$ ), то  $F > 0$ , то есть заряд  $q$  отталкивается от сферы; при  $a < a_0$  ( $\xi > \xi_0$ )  $F < 0$  и заряд  $q_1$  притягивается к одноименно заряженной проводящей сфере. Таким образом, положение равновесия заряда  $a = a_0$  является неустойчивым.

В частном случае, когда заряды  $q$  и  $Q$  одинаковы, корень уравнения  $\xi^3 \frac{2 - \xi^2}{(1 - \xi^2)^2} = 1$  совпадает с соответствующим корнем уравнения  $(\xi^2 + \xi - 1)(\xi^3 - \xi - 1) = 0$ . Откуда  $\xi_0 = (\sqrt{5} - 1)/2$  и  $a_0 = \frac{R}{\xi_0} = R(1 + \xi_0) \approx 1,618R$ .

**Пример 4.5.** Два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  граничат друг с другом вдоль плоскости. В некоторой точке первого диэлектрика помещен заряд  $q$ . Найдите электрическое поле в каждом из диэлектриков.

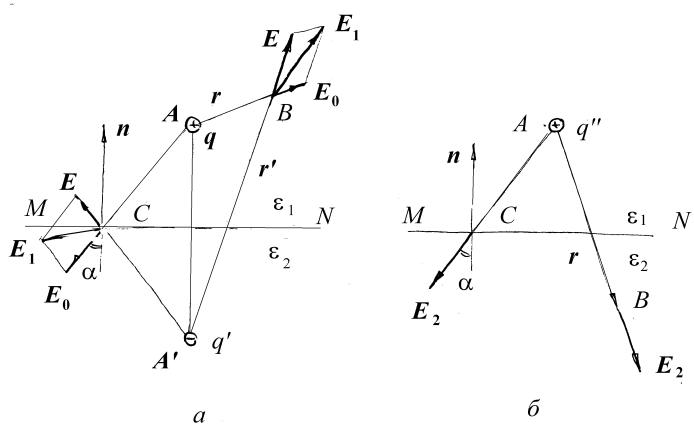


Рис.4.3

**Решение.** Поле в среде с  $\epsilon_1$  определяется зарядом  $q$  и связанными зарядами, возникающими на границе диэлектриков. Покажем, что поле связанных зарядов в первом диэлектрике эквивалентно полю точечного заряда  $q'$ , помещенного в точку  $A'$ , симметричную  $A$  относительно плоскости раздела диэлектриков  $MN$ . Представим полное поле как суперпозицию полей, создаваемых зарядами  $q$  и  $q'$  (см. рис.4.3а)

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left( \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{q'\vec{r}'}{r'^3} \right),$$

где  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  - векторы, проведенные от зарядов  $q$  и  $q'$  в произвольную точку  $B$  первого диэлектрика.

Поле в среде с  $\varepsilon_2$  создают заряд  $q$  и связанные заряды на границе раздела диэлектриков. Заменяем последние зарядом, помещенным в точку  $A$ . Тогда поле во втором диэлектрике будет полем точечного заряда  $q''$ , помещенного в точку  $A$  (рис.4.3б):

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} \frac{q''\vec{r}}{r^3}.$$

Для определения величин зарядов  $q'$  и  $q''$  воспользуемся граничными условиями (4.6) для произвольной точки  $C$  на границе двух диэлектриков:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad \text{или} \quad \frac{q}{\varepsilon_1} \sin \alpha + \frac{q'}{\varepsilon_1} \sin \alpha = \frac{q''}{\varepsilon_2} \sin \alpha,$$

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad \text{или} \quad q \cos \alpha - q' \cos \alpha = q'' \cos \alpha.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q.$$

Видим, что угол  $\alpha$  не входит в выражение для зарядов  $q'$  и  $q''$ , что означает выполнение граничных условий в каждой точке плоскости  $MN$ . Подставив  $q'$  и  $q''$  в выражения для полей, окончательно получим

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right), \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

**Пример 4.6.** Стеклопластиковая пластинка с проницаемостью  $\varepsilon_2 = 6$  внесена в однородное электрическое поле с напряженностью  $E_1 = 10 \text{ В/м}$  и расположена так, что угол  $\alpha_1$  между нормалью к пластинке и направлением внешнего поля равен  $30^\circ$ . Найдите напряженность  $E_2$  поля в пластинке, угол  $\alpha_2$ , который это поле образует с нормалью к ней, а также плотность  $\sigma$  связанных зарядов, возникших на поверхностях пластинки. Диэлектрическая проницаемость среды вне пластинки  $\varepsilon_1 = 1$ .

**Решение.** Для тонкой пластинки в точках, достаточно удаленных от ее краев, поле можно заменить полем в бесконечном диэлектрическом слое, имеющем ту же толщину, как и пластинка. В силу симметрии оно остается однородным (см. рис.4.4). Записав граничные условия (4.6) на границе  $MN$

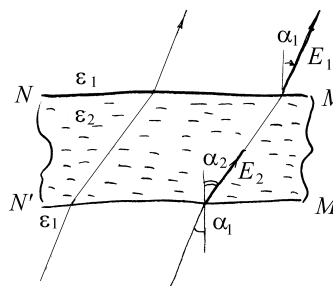


Рис.4.4

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2,$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \alpha_2, \quad (4.22)$$

находим  $E_2$  и  $\alpha_2$

$$\alpha_2 = \arctg \left[ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \right] \approx 74^\circ,$$

$$E_2 = \frac{E_1}{\varepsilon_2} \sqrt{\varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha_1} = 5,2 \text{ В/м}.$$

Для определения плотности связанных зарядов, возникающих на поверхностях  $MN$  и  $M'N'$  пластинки, заменим пластинку другой, с  $\varepsilon_2 = 1$ , а связанные заряды заменим на свободные с той же поверхностной плотностью  $\sigma$ . При этом поле в пространстве между плоскостями  $MN$  и

$M'N'$  не изменится. Плотность зарядов  $\sigma$  найдем, записав граничные условия (4.6) для полученной системы распределения зарядов

$$\varepsilon_0(E_1 \cos \alpha_1 - E_2 \cos \alpha_2) = \sigma,$$

или с учетом (4.22),

$$\sigma = \varepsilon_0 E_1 \cos \alpha_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \approx 63,9 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2.$$

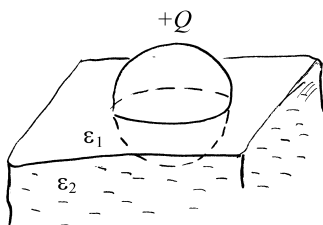


Рис.4.5

**Пример 4.7.** Проводящий шар с радиусом  $R$ , несущий заряд  $Q$ , находится на границе раздела двух диэлектриков, совпадающей с одной из плоскостей симметрии шара (см. рис.4.5). Диэлектрические проницаемости диэлектриков равны  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  соответственно. Определите

напряженность электрического поля в произвольной точке пространства вокруг шара.

**Решение.** Напряженность электрического поля определяется как свободными зарядами, находящимися на поверхности шара, так и связанными, находящимися вокруг него на его поверхности и, возможно, на границе раздела диэлектриков. Шар по условию задачи является проводящим, поэтому заряд  $Q$  распределен по его поверхности и поле внутри него отсутствует, то есть  $E = 0$ . Такое поле создает заряд, равномерно распределенный по поверхности сферы. В силу теоремы существования и единственности решения уравнения Пуассона (4.5) можно утверждать, что совокупность свободных и связанных зарядов будет распределена по сфере радиусом  $R$  равномерно, а поле вне шара будет совпадать с полем точечного заряда  $Q'$ , помещенного в его центр (см. пример 5 из параграфа 1). Следовательно поле  $\vec{E}$  в произвольной точке вне сферы будет направлено по ее радиусу.



Воспользуемся этим фактом и граничными условиями (4.7) для двух точек на поверхности шара, одна из которых находится в первом диэлектрике, в другая -- во втором

$$\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0 = \sigma_1, \quad \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_0 = \sigma_2. \quad (4.23)$$

Здесь  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  -- плотности распределения свободных зарядов на верхней, находящейся в среде с  $\varepsilon_1$ , и нижней полусферах соответственно,  $E_0$  -- поле на поверхности сферы. Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков при этом выполняются автоматически. Заметим, что последнее возможно в силу того, что граница раздела делит шар на две полусферы, при этом силовые линии поля лежат в плоскости раздела сред.

Из (4.23) следует, что заряд  $Q$  распределится по полусферам в следующей пропорции

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad Q_1 + Q_2 = Q,$$

или

$$Q_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q.$$

Поле в произвольной точке на поверхности шара, с одной стороны, равно  $E_0 = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ , где  $Q'$  -- сумма заряда  $Q$  и связанных зарядов на всей поверхности шара, а с другой, согласно (4.23)

$$E_0 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{Q_1}{2\pi R^2 \varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi R^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \varepsilon_0}.$$

Сравнивая выражения для  $E_0$ , находим  $Q' = \frac{2Q}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$  и поле в произвольной точке вокруг шара

$$E = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2}, \quad (4.24)$$

где  $r$  – расстояние от центра шара до точки, в которой ищется напряженность поля.

**Пример 4.8.** Шар радиусом  $R$ , вырезанный из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , помещают в однородное электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$ . Найдите распределение напряженности и потенциала в пространстве внутри и вокруг шара.

**Решение.** Все пространство разделим на две области:  $V_1$  -- внутри шара,  $V_2$  -- вне шара. Потенциал и напряженность поля в области  $V_1$  будем обозначать индексом 1, а в области  $V_2$  -- индексом 2. Так как свободных зарядов ни внутри, ни вне шара нет, то потенциал как внутри, так и снаружи шара подчиняется уравнению Лапласа  $\Delta\varphi_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ), которое следует из уравнения Пуассона (4.5), если  $\rho \equiv 0$ .

Так как граница шара - сфера, то удобно воспользоваться сферической системой координат. Запишем уравнение Лапласа в этой системе координат:

$$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right\} = 0. \quad (4.25)$$

Отметим, что в силу симметрии потенциалы  $\varphi_i$  не зависят от угла  $\psi$ .

Простейшими решениями уравнения (4.25), не зависящими от угла  $\psi$ , являются функции  $A r \cos \theta$  и  $B \frac{\cos \theta}{r^2}$  (см.[1]), где  $A$  и  $B$  -- постоянные.

Для потенциала электростатического поля получаем выражение

$$\varphi_i(r, \theta) = \cos \theta \left( A_i r + \frac{B_i}{r^2} \right). \quad (4.26)$$

Внутри шара свободные заряды отсутствуют и поле во всех точках внутри шара ограничено и поэтому  $B_1 = 0$ . Используя соотношение (4.4) в сферической системе координат (единичные вектора  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\psi$  показаны на рис.4.6)

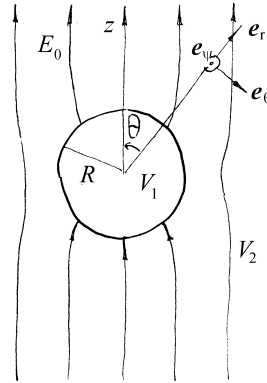


Рис.4.6

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad E_\psi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi},$$

найдем напряженность электрического поля внутри и вне шара:

в области  $V_1$ :

$$E_{1r} = -A_1 \cos \theta, \quad E_{1\theta} = \sin \theta A_1, \quad E_{1\psi} = 0, \quad (4.27)$$

и в области  $V_2$ :

$$E_{2r} = \left( -A_2 + \frac{2B_2}{r^3} \right) \cos \theta, \quad E_{2\theta} = \left( A_2 + \frac{B_2}{r^3} \right) \sin \theta, \quad E_{2\psi} = 0. \quad (4.28)$$

Из условия, что на бесконечности поле однородно и равно  $\vec{E}_0$  следует, что

$$E_{2r}(r \rightarrow \infty) = -A_2 \cos \theta = E_0 \cos \theta,$$

или  $A_2 = -E_0$ .

Постоянные  $A_1$  и  $B_2$  найдем, записав граничные условия (4.6) на границе шара

$$\varepsilon E_{1r}(R, \theta) = E_{2r}(R, \theta), \quad E_{1\theta}(R, \theta) = E_{2\theta}(R, \theta),$$

откуда следует

$$E_0 + \frac{2B_2}{R^3} = -\varepsilon A_1, \quad A_1 = -E_0 + \frac{B_2}{R^3}. \quad (4.29)$$

Решение системы уравнений (4.29) имеет вид

$$A_1 = -\frac{3}{2+\varepsilon} E_0, \quad B_2 = \frac{\varepsilon-1}{2+\varepsilon} R^3 E_0. \quad (4.30)$$

Поэтому окончательно потенциал в области  $V_1$  равен

$$\varphi_1 = -\frac{3}{2+\varepsilon} E_0 r \cos \vartheta, \quad (4.31)$$

и напряженность поля

$$E_{1r} = \frac{3}{2+\varepsilon} E_0 \cos \theta, \quad E_{1\theta} = -\frac{3}{2+\varepsilon} E_0 \sin \theta, \quad E_{1\psi} = 0. \quad (4.32)$$

Видим, что поле внутри шара является однородным, направлено вдоль  $\vec{E}_0$ , и равно по абсолютной величине

$$\vec{E} = \frac{3\vec{E}_0}{\varepsilon+2}, \quad \vec{D} = \frac{3\varepsilon\vec{D}_0}{\varepsilon+2}. \quad (4.33)$$

В области  $V_2$  потенциал равен

$$\varphi_2 = E_0 \left( \frac{\varepsilon-1}{2+\varepsilon} \frac{R^3}{r^2} - r \right) \cos \theta, \quad (4.34)$$

и представляется суммой потенциала внешнего поля и потенциала точечного диполя с моментом

$$\vec{p}_e = 4\pi \varepsilon_0 R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0, \quad (4.35)$$

помещенного в центре шара.

Вне шара напряженность поля равна

$$E_{2r} = E_0 \left( 1 + 2 \frac{\varepsilon - 1}{2 + \varepsilon} \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad E_{2\theta} = E_0 \left( \frac{\varepsilon - 1}{2 + \varepsilon} \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \sin \theta, \quad E_{2\varphi} = 0,$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \vec{E}_0 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \left( \frac{3(\vec{E}_0 \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{E}_0}{r^3} \right) R^3, \\ \vec{D}_2 &= \vec{D}_0 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \left( \frac{3(\vec{D}_0 \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{D}_0}{r^3} \right) R^3 \end{aligned} \quad (4.36)$$

**Пример 4.9.** Найдите распределение потенциала и напряженности электрического поля вокруг проводящей сферы радиусом  $R$ , внесенной в однородное электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$ .

**Решение.** Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем примере, видим, что потенциал в области  $V_2$  (вне сферы) также задается выражением (4.26), а напряженность поля -- выражением (4.28). Константа  $A_2$  определяется из условия однородности поля на бесконечности:  $A_2 = -E_0$ . Для определения постоянной  $B_2$  воспользуемся вместо граничных условий на границе диэлектрика (4.6), граничными условиями (4.7) на границе проводника

$$E_{2\theta}(R, \theta) = 0, \quad \text{или} \quad B_2 = E_0 R^3.$$

Подставляя найденные значения  $A_2$  и  $B_2$  в (4.26) и (4.28), окончательно получаем

$$\varphi_2(r, \theta) = E_0 \cos \theta \left[ \frac{R^3}{r^2} - r \right]. \quad (4.37)$$

Как видим, потенциал поля в окрестности шара представляется в виде суммы потенциала внешнего поля и диполя с моментом

$$p_e = 4\pi \varepsilon_0 R^3 E_0, \quad (4.38)$$

помещенного в центр сферы.

Компоненты поля в этой области будут:

$$E_{2r} = E_0 \cos \theta \left( 1 + \frac{2R^3}{r^3} \right), \quad E_{2\theta} = E_0 \sin \theta \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right), \quad E_{2\psi} = 0. \quad (4.39)$$

Первое граничное условие (4.7) позволяет определить плотность зарядов, индуцированных на поверхности сферы  $\sigma = \varepsilon_0 E_{2r}(R, \theta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$ , что совпадает с выражением, найденным другим способом в примере 7 параграфа 3.

### *Задание для самостоятельной работы*

**4.1.** Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки радиусом  $R$  помещен точечный заряд  $q$ . Расстояние от заряда до центра оболочки равно  $a$ . Найдите силу  $\vec{F}$ , действующую на заряд.

**4.2.** Два одинаковых точечных заряда  $q$  находятся на расстоянии  $a$  друг от друга. Посередине между ними расположен заземленный металлический шар радиусом  $R$ . Найдите силу, действующую на каждый из этих зарядов.

**4.3.** На расстоянии  $a$  от бесконечной проводящей заземленной плоскости расположен точечный диполь. Найдите силу, действующую на диполь. Дипольный момент  $\vec{p}_e$  а) параллелен плоскости; б) перпендикулярен к плоскости.

**4.4.** Проводящая незаряженная сфера радиусом  $R$  помещена в поле точечного заряда  $q$ , расположенного на расстоянии  $a$  от центра сферы. Найдите поверхностную плотность заряда, индуцированного на сфере.

**4.5.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $a$  от центра металлического шара радиусом  $R$ . Найдите работу  $A$ , которую надо затратить, чтобы точечный заряд удалить в бесконечность. Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен; 2) шар изолирован, а полный заряд его равен нулю.

**4.6.** Найти силу, действующую на точечный заряд  $q$ , помещенный на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя заземленными проводящими полуплоскостями (см. рис.4.7). Расстояние между зарядом  $q$  и вершиной двугранного угла  $O$  равно  $d$ .

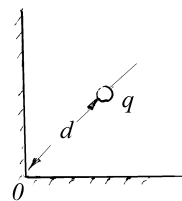


Рис.4.7

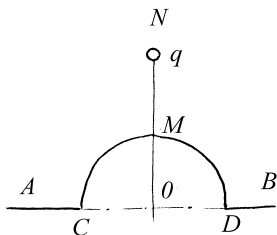


Рис.4.8

**4.7.** На бесконечной плоской поверхности проводника имеется сферический бугор  $CMD$  радиусом  $R$ , центр которого лежит на той же плоскости (см. рис.4.8). На оси симметрии системы на перпендикуляре к поверхности  $MN$  вне проводника на расстоянии  $a$  от центра сферы расположен точечный заряд  $q$ . Найдите потенциал во всем пространстве.

**4.8.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $d$  от центра незаряженного проводящего шара радиуса  $R$ . Шар заземляют с помощью проволоки. Какой заряд  $q'$  протечет по проволоке?

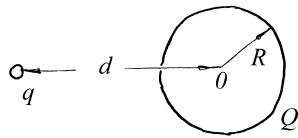


Рис.4.9

**4.9.** Проводящая сфера радиусом  $R$  имеет заряд  $Q$ . В сфере имеется малое отверстие (см. рис.4.9). Как будет меняться потенциал сферы, если точечный заряд  $q$  перемещать из бесконечности через отверстие внутрь шара?

**4.10.** Потенциал электрического поля в некоторой области зависит только

от координаты  $x$ : 
$$\varphi = -\frac{\alpha x^2}{2} + C.$$

Какова будет напряженность поля в этой области? При каком распределении зарядов получится такое поле?

**4.11.** Какая сила действует на точечный заряд  $q$ , находящийся вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков на расстоянии  $d$  от границы раздела? Заряд находится в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ . Диэлектрическая проницаемость второй среды  $\epsilon_2$ .



**4.12.** Бесконечная пластина из изотропного диэлектрика помещена в перпендикулярное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$  (см. рис.4.10). Толщина пластины  $a$ , диэлектрическая проницаемость изменяется линейно от значения  $\varepsilon_1$  на левой границе до  $\varepsilon_2$  на правой границе. Вне пластины  $\varepsilon = 1$ . Найдите объемную плотность  $\rho$  связанных зарядов как функцию  $x$ . Определите численное значение  $\rho$  в середине пластины, если  $\varepsilon_1 = 2$ ,  $\varepsilon_2 = 4$ ,  $a = 1\text{см}$ ,  $E_0 = 3\text{кВ/м}$ .

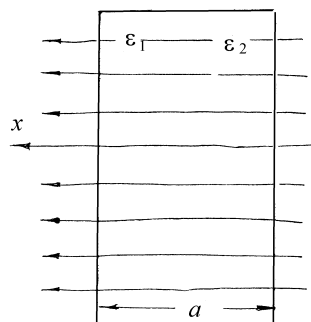


Рис.4.10

**4.13.** Внутри шара радиусом  $R=10\text{см}$  из однородного изотропного диэлектрика с  $\varepsilon=5$  создано однородное электрическое поле с напряженностью  $E=100\text{В/м}$ . Найдите максимальную поверхностную плотность  $\sigma_{\text{max}}$  связанных зарядов и суммарный положительный связанный заряд, распределенный по поверхности полусферы.

**4.14.** Палочка из сегнетоэлектрика, обладающая остаточной поляризацией  $P$ , направленной вдоль оси палочки, подвешена за середину в горизонтальном положении на тонкой неупругой нити. Определите частоту  $\omega$  малых колебаний, которые палочка будет совершать в однородном горизонтально направленном поле с напряженностью  $E$ , настолько слабым, что оно не оказывает существенного влияния на поляризацию палочки. Длина палочки  $l$ , а ее плотность  $\rho$ .

**4.15.** Определите силу, действующую на единицу длины заряженной с линейной плотностью  $\kappa$  нити со стороны поверхностных зарядов, индуцированных ею на границе раздела двух диэлектриков с

проницаемостью  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Нить параллельна границе раздела и находится от нее на расстоянии  $d$ . Диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится нить,  $\varepsilon_1$ .

**4.16.** Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  заполняет полупространство. На расстоянии  $L$  от плоской границы диэлектрика в вакууме находится точечный заряд  $q$ . Найдите распределение связанного заряда  $\sigma$  по поверхности диэлектрика, суммарный поверхностный заряд  $Q$  и силу  $F$ , действующую на заряд  $q$ .

**4.17.** В области, ограниченной заземленной металлической оболочкой, находится заряд. Определить а) есть ли электрическое поле вне оболочки; б) будет ли действовать электрическая сила на другой заряд, помещенный вблизи наружной поверхности оболочки.

**4.18.** Найдите распределение зарядов, создающих в вакууме следующее распределение потенциала:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{a}{r} & \text{если } r \geq R \\ -ar^2 + \frac{3a}{2R} & \text{если } r < R \end{cases} .$$

Здесь  $r$  – расстояние от начала координат.

**4.19.** Найдите распределение зарядов, создающих в вакууме следующее распределение потенциала:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{если } r \geq R \\ a \left( \frac{1}{r} + \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} \right) & \text{если } r < R \end{cases} .$$

Здесь  $r$  – расстояние от начала координат.

**4.20.** Найдите распределение зарядов, создающих в вакууме следующее распределение потенциала:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{если } r \geq R \\ a(R^3 - r^3) & \text{если } r < R \end{cases} .$$

Здесь  $r$  – расстояние от начала координат.

**4.21.** Найдите распределение зарядов, создающих в вакууме следующее распределение потенциала:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{если } r \geq R \\ a\left(\frac{1}{r} - \frac{r^2}{R^3}\right) & \text{если } r < R \end{cases} .$$

Здесь  $r$  – расстояние от начала координат.

**4.22.** Найдите распределение зарядов, создающих в вакууме следующее распределение потенциала:

$$\varphi(r) = \frac{b}{r} \exp(-ar) .$$

Здесь  $r$  – расстояние от начала координат.

**4.23.** Найдите напряженность электрического поля в пространстве между двумя проводящими сферами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), заполненным двумя однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (рис.4.11). Диэлектрики граничат между собой вдоль поверхности конуса с вершиной в центре  $O$ . Телесный угол конуса, заполненного первым диэлектриком, равен  $\Omega_1$ , а заполненным вторым диэлектриком –  $\Omega_2$  ( $\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$ ). Заряд на внутренней сфере равен  $Q$ , а на внешней  $-Q$ .

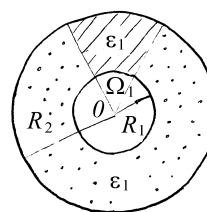


Рис.4.11

## §5. Электроемкость. Энергия электрического поля

### *Краткие теоретические сведения*

Электроемкость. Потенциал проводника, удаленного от других проводников на расстояние, значительно большее его собственных размеров (такой проводник называют уединенным), пропорционален его заряду  $Q$  и может быть представлен как

$$\varphi = \frac{Q}{C}. \quad (5.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  называют *емкостью уединенного проводника*. Она зависит от формы проводника, его размера и свойств окружающей среды. Например, емкость шара радиуса  $R$ , погруженного в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , равна

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (5.2)$$

*Конденсатором* называют пару проводников, расстояние между которыми много меньше расстояния до остальных тел. При этом проводники называют *обкладками* конденсатора. Если на одну обкладку поместить заряд  $+Q$ , а на другую обкладку заряд  $-Q$ , то между ними будет существовать разность потенциалов, или напряжение,  $U$ , пропорциональное заряду каждой из обкладок:

$$U = \frac{Q}{C}. \quad (5.3)$$

Коэффициент  $C$  в этой формуле называют *емкостью конденсатора*. Емкость конденсатора не зависит ни от  $U$ , ни от  $Q$ , а определяется формой и расположением проводников, составляющих конденсатор, и свойствами среды между ними. В случаях, когда влиянием окружающих тел нельзя пренебречь, систему проводников нельзя рассматривать как конденсатор,

однако ее можно свести к системе конденсаторов, соединенных определенным образом.

Плоским называют конденсатор, состоящий из двух параллельных одинаковых проводящих пластин площадью  $S$ , разделенных диэлектриком. Расстояние между пластинами  $d$  считается много меньше линейного размера пластины. Емкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}, \quad (5.4)$$

где  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды, находящейся между обкладками.

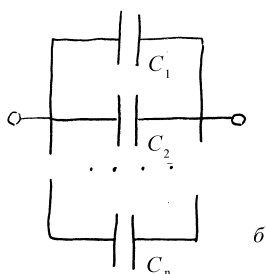
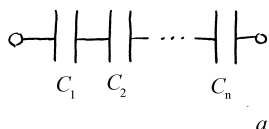


Рис.5.1

Последовательное и параллельное соединения конденсаторов показано на рис.5.1. Емкость параллельно соединенных конденсаторов равна

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (5.5)$$

Эквивалентная емкость последовательно соединенных конденсаторов находится по правилу:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (5.6)$$

Энергия электрического поля. Для того, чтобы зарядить конденсатор, его обкладки присоединяют к источнику напряжения. Каждый такой источник характеризуется *электродвижущей силой* или сокращенно *ЭДС*, равной работе источника по перемещению единичного заряда с одной обкладки конденсатора на другую. Соответственно, в процессе зарядки конденсатора источник совершает работу

$$A = \mathcal{E} \Delta Q, \quad (5.7)$$

где  $\mathcal{E}$  - ЭДС источника, а  $\Delta Q$  - изменение зарядов обкладок. При этом разность потенциалов между обкладками становится равной ЭДС источника, то есть  $U = \mathcal{E}$ . В процессе зарядки конденсатора заряды перемещаются в направлении, противоположном полю, силы которого совершают отрицательную работу (энергия поля увеличивается).

Если отключить конденсатор от источника напряжения и соединить обкладки проводником, то конденсатор будет разряжаться, направление перемещения зарядов между обкладками изменится на противоположное и работа электростатических сил станет положительной. По определению, энергия  $W$  заряженного конденсатора равна работе, которую совершают электростатические силы при полном переносе заряда с одной обкладки на другую в процессе разрядки конденсатора, и равна

$$W = \frac{UQ}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (5.8)$$

Энергия конденсатора заключена в его электрическом поле.

Энергия произвольной системы заряженных тел также может быть интерпретирована как энергия создаваемого ими электрического поля.

Объемная плотность энергии электрического поля  $w = \frac{dW}{dV}$  при этом равна

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}, \quad (5.9)$$

или в силу (4.3)

$$w = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2. \quad (5.10)$$

Энергия системы заряженных проводников может быть найдена путем интегрирования выражения (5.9) по всему объему, занимаемому полем. В результате для энергии системы  $N$  заряженных проводящих тел получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i, \quad (5.11)$$

где  $Q_i$  -- заряд  $i$ -го проводника и  $\varphi_i$  -- его потенциал.

Выражение (5.11) обобщает формулу (5.8) на случай произвольного числа тел.

**Пример 5.1.** Плоский конденсатор имеет ёмкость  $C_0 = 600 \text{ нФ}$ . Насколько она изменится, если ввести между обкладками параллельно им медный лист, толщина которого равна  $\alpha = 1/4$  расстояния между обкладками? Будет ли влиять на результат положение листа?

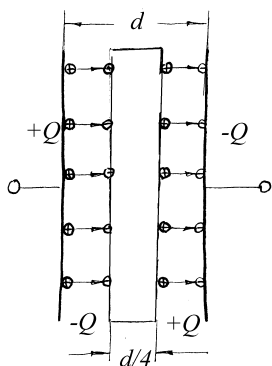


Рис.5.2

**Решение.** На проводнике появляются наведенные заряды  $+Q$  и  $-Q$  (см. рис.5.2) такие, что поле внутри проводника обращается в ноль. При этом напряженность поля между обкладками конденсатора, но вне медного листа, не изменяется и остается равной

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ . Разность потенциалов между обкладками конденсатора уменьшится:  $U = E(d - \alpha d) = \frac{(1 - \alpha)Qd}{\epsilon_0 S}$ .

Откуда согласно (5.3) ёмкость конденсатора увеличивается:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{(1 - \alpha)d} = \frac{C_0}{1 - \alpha} = 800 \text{ нФ}. \quad (5.12)$$

Величина ёмкости не зависит от положения пластинки внутри конденсатора.

Полученный результат можно использовать при расчете ёмкости конденсатора, частично заполненного диэлектриком, как показано на рис.5.3а. Введем в конденсатор по границе диэлектрика металлическую пластинку пренебрежимо малой по сравнению с расстоянием между обкладками толщины. Согласно (5.11) ёмкость конденсатора не изменится. Расслаивая введенную пластинку на две, получим батарею из двух последовательно соединенных конденсаторов (рис.5.3б), ёмкость которой находится по формуле (5.6).

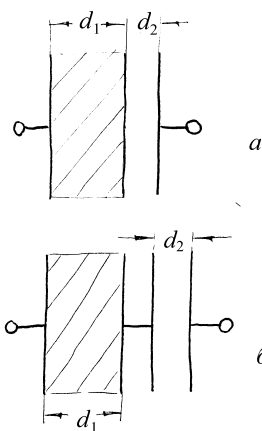


рис.5.3

**Пример 5.2.** Металлический шар радиусом  $R_1$  окружен шаровым слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  толщиной  $d$  и помещен concentрично в металлической сфере с внутренним радиусом  $R_2$ . Определите ёмкость  $C$  такого конденсатора.

**Решение.** Поместим на внутреннюю сферу заряд  $+Q$ , а на внешнюю -- ( $-Q$ ) и найдем разность потенциалов между обкладками. По теореме Гаусса напряженность в произвольной точке между обкладками:

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} & \text{если } R_1 < r < R_1 + d \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 + d < r < R_2 \end{cases}$$

Разность потенциалов между обкладками согласно (2.3) найдем интегрированием:



$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{R_1}^{R_1+d} \frac{dr}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1+d}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1+d} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon R_1} - \frac{1}{\epsilon(R_1+d)} \right]$$

Емкость  $C$  согласно (5.3) будет равна

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2 (R_1 + d)}{[\epsilon R_1 (R_2 - R_1 - d) + d R_2]} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 (R_1 + d)}{\left[ \epsilon R_1 \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} - \frac{d}{R_2} \right) + d \right]}. \quad (5.13)$$

Устремляя  $R_2 \rightarrow \infty$ , от (5.13) переходим к емкости шара радиусом  $R_1$ , окруженного сферическим слоем диэлектрика толщиной  $d$ .

Полагая в (5.13)  $d = R_2 - R_1$ , получим выражение для емкости сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}. \quad (5.14)$$

Устремляя  $R_2 \rightarrow \infty$ , от (5.14) перейдем к емкости уединенной сферы, задаваемой (5.2).

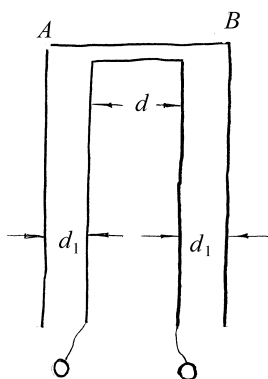


Рис.5.4

**Пример 5.3.** Плоский конденсатор состоит из двух пластин, находящихся друг от друга на расстоянии  $d = 0,5\text{мм}$ . Как изменится емкость конденсатора, если его поместить в изолированную металлическую коробку, стенки которой находятся на расстоянии  $d_1 = 0,25\text{мм}$  от пластин (см. рис.5.4). Неоднородностью поля у краев конденсатора при расчетах пренебречь.

**Решение.** На стенках коробки появятся наведенные заряды, так как кусок  $AB$  коробки попадает в краевое поле конденсатора. Коробка в целом не несет заряда, поэтому наведенные заряды равны по величине и противоположны по знаку (см. рис.5.5). Напряженность поля, создаваемая зарядами  $Q'$  и  $-Q'$ , а также  $Q$  и  $-Q$ , равна

$$E' = \frac{Q'}{\varepsilon_0 S},$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

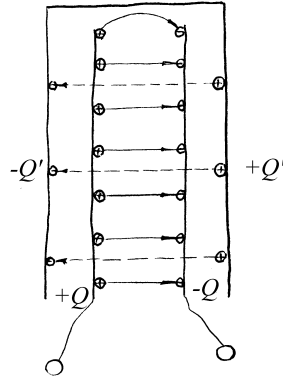


Рис.5.5

Величина наведенных зарядов должна быть такой, чтобы разность потенциалов между пластинами  $AC$  и  $BD$  равнялась нулю

$$\varphi_{AC} - \varphi_{BD} = Ed - E'(d + 2d_1) = \frac{1}{\varepsilon_0 S} [Qd - Q'd - 2Q'd_1] = 0,$$

откуда  $Q' = Q \frac{d}{d + 2d_1}$ . Найдем измененную разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$U = \frac{Q - Q'}{\varepsilon_0 S} d = \frac{Q 2d_1 d}{\varepsilon_0 S (d + 2d_1)}$$

и измененную емкость

$$C = \frac{\varepsilon_0 S (d + 2d_1)}{2dd_1} = C_0 \frac{d + 2d_1}{2d_1} = 2C_0. \quad (5.15)$$

Если  $d_1 \rightarrow \infty$ , то (5.15) переходит в (5.4).

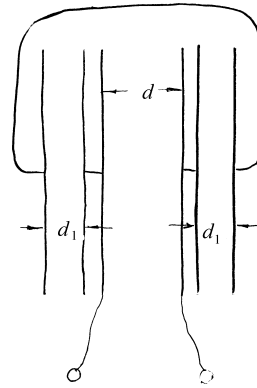


Рис.5.6

Заметим, что конденсатор с учетом влияния коробки может быть представлен эквивалентной схемой, показанной на рис. 5.6. Исходя из этой схемы, можно решить задачу, пользуясь правилами вычисления емкости параллельного и последовательного соединений конденсаторов.

**Пример 5.4.** Определите приближенно емкость конденсатора, образованного двумя одинаковыми шарами радиусом  $R$ , находящимися на большом (по сравнению с  $R$ ) расстоянии  $a$ . Все остальные тела далеки от шаров.

**Решение.** Потенциал каждого шара определяется его собственным зарядом, распределенным по его поверхности, и зарядом второго шара, который в силу его удаленности можно считать сосредоточенным в центре. Так как потенциал проводящего шара совпадает с потенциалом его центра, то шар, заряженный зарядом  $+Q$ , имеет потенциал  $\varphi_+ \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ , а второй соответственно  $\varphi_- \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ . Разность потенциалов между шарами равна

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}.$$

Откуда согласно (5.3)

$$C = 2\pi\epsilon_0 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)^{-1}.$$

При  $a \rightarrow \infty$  емкость приближенно будет равна  $2\pi\epsilon_0 R$ .

**Пример 5.5.** Два конденсатора  $C_1$  и  $C_2$ , показанные на рис.5.7, заряжаются следующим образом. Сначала замыкают и размыкают ключ  $K_1$ , затем замыкают ключ  $K_2$ . Определите разность потенциалов  $U_1$  и  $U_2$  на конденсаторах, если ЭДС батарей  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ .

**Решение.** При замыкании ключа  $K_1$  заряжается только конденсатор  $C_1$ , причем напряжение на нем совпадает с ЭДС первой батареи  $\mathcal{E}_1$ . Размыкание ключа  $K_1$  ничего не изменит в схеме.

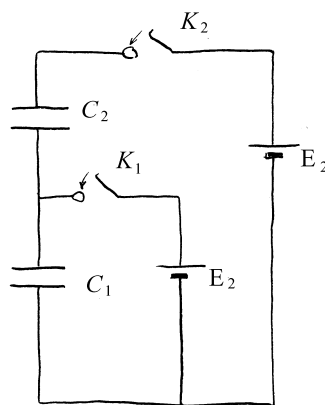


Рис.5.7

После замыкания ключа  $K_2$  на конденсаторах появятся заряды  $q_1$  и  $q_2$  (см. рис.5.8). При этом так как заряд на проводнике  $B$  измениться не может, то

$$q_1 - q_2 = \mathcal{E}_1 C_1,$$

а разность потенциалов между проводниками  $A$  и  $D$  равна  $\mathcal{E}_2$ :

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \mathcal{E}_2.$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений, находим заряды на конденсаторах

$$q_1 = C_1 \frac{\mathcal{E}_2 C_2 + \mathcal{E}_1 C_1}{C_1 + C_2},$$

$$q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1).$$

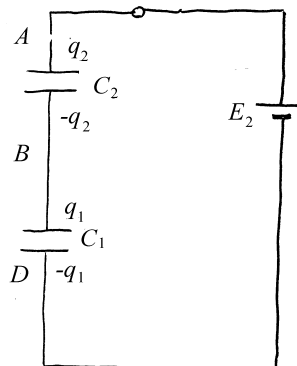


Рис.5.8

Искомые напряжения на них находим согласно (5.3):

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}_2 C_2 + \mathcal{E}_1 C_1}{C_1 + C_2}, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1).$$

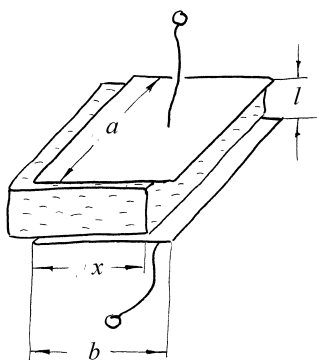


Рис.5.9

**Пример 5.6.** Между обкладками плоского конденсатора с размером пластин  $a \times b$  находится диэлектрическая пластинка, толщина которой практически равна расстоянию между пластинами  $l$ , заполняющая пространство между пластинами лишь частично, как показано на рис.5.9. Разность потенциалов между пластинами конденсатора равна  $U$ . Диэлектрическая проницаемость материала, из которого изготовлена пластинка, равна  $\varepsilon$ . Найдите силу, которая

будет действовать на пластинку и втягивать ее в конденсатор.

**Решение.** Провести детальное исследование силы очень трудно, так как она связана с неоднородностями поля вблизи концов диэлектрика и пластин. Однако ее можно найти, используя энергетические соображения. Для этого найдем сначала зависимость емкости конденсатора от длины помещенной в него части пластины. Конденсатор, показанный на рис.5.9, можно представить как параллельное соединение двух конденсаторов: первый с площадью пластин  $S_1 = ax$ , заполненный диэлектриком, и второй с площадью пластин  $S_2 = a(b-x)$  без диэлектрика. При параллельном соединении емкости складываются, поэтому с учетом (5.5) находим

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 a}{l} (\varepsilon x + b - x) = C_0 + \frac{\varepsilon_0 a}{l} x(\varepsilon - 1) \quad (5.16)$$

где  $C_0$  – емкость пустого конденсатора.

Допустим пластинка диэлектрика переместилась внутрь конденсатора на расстояние  $dx$ , при этом искомая сила электрического поля совершила работу  $A = Fdx$ . За счет каких источников энергии

совершена эта работа? Возможны два различных варианта расчета работы. В первом случае конденсатор отключен от источника. При этом сохраняется заряд конденсатора, а разность потенциалов изменяется. Работа совершается только за счет энергии конденсатора, то есть

$$Fdx = -dW = -\frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)dC = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\epsilon_0 a}{l} (\epsilon - 1) dx = \frac{U^2}{2} \frac{\epsilon_0 a}{l} (\epsilon - 1) dx, \quad (5.17)$$

откуда находим силу, действующую на пластинку:

$$F = \frac{\epsilon_0 a U^2}{2l} (\epsilon - 1). \quad (5.18)$$

При продолжении процесса напряжение на конденсаторе, а вместе с ним и действующая на пластинку сила будут изменяться, однако соотношение (5.18) остается в силе.

При другом подходе напряжение на обкладках конденсатора, который постоянно подключен к источнику, поддерживается постоянным. При смещении пластины в цепи источника протекает ток, и он совершает работу  $A_1 = UdQ = U^2 dC$ . Одновременно энергия конденсатора возрастает (а не убывает, как в предыдущем случае) на величину  $A_2 = \frac{1}{2} U^2 dC$ . Таким образом,  $Fdx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2} U^2 dC$ , откуда, поскольку по-прежнему

$$dC = \frac{\epsilon_0 a}{l} (\epsilon - 1) dx, \quad \text{получим выражение (5.18) для силы, втягивающей}$$

пластинку в зазор между обкладками конденсатора. Теперь, однако, эта сила не изменяется при перемещении пластины.

**Пример 5.7.** Вычислите энергию поля заряженного шара радиусом  $R$  в вакууме, если заряд шара  $Q$  равномерно распределен по его объему. Как изменится результат, если заряд будет равномерно распределен по поверхности шара? Диэлектрическая проницаемость материала шара -  $\epsilon$ .

**Решение.** Так как поле вне шара не зависит от того, распределен заряд равномерно по объему шара, или по его поверхности, то начнем с нахождения энергии этой части поля. Используя выражение (5.10) для плотности энергии поля, получим

$$W_0 = \int_R^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(r) 4\pi r^2 dr.$$

Напряженность электрического поля для заданного в условии задачи распределения зарядов задается формулой (3.9). Подставляя ее в предыдущую формулу, получим

$$W_0 = \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0}.$$

Напомним, что заряд шара  $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ , поэтому энергию поля вне шара

можно переписать в виде 
$$W_0 = \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 \pi R}.$$

Заряженный по объему шар будет иметь дополнительную энергию, заключенную в поле внутри шара. Используя полученное ранее выражение для поля внутри шара, имеем

$$W = \int_0^R \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2(r) 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{W_0}{5\varepsilon}.$$

Полная энергия шара, равномерно заряженного по объему, равна

$$W_1 = W_0 \left( 1 + \frac{1}{5\varepsilon} \right).$$

**Пример 5.8.** Два проводящие шара с радиусами  $R$  и  $r$  расположены так, что расстояние между их центрами равно  $a$ . На них находятся заряды  $Q$  и  $q$  соответственно (см. рис.5.10). В предположении, что  $r \ll R$ , оцените энергию взаимодействия между ними.

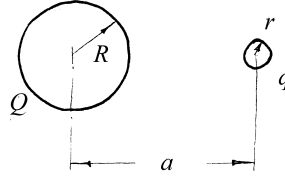


Рис.5.10

**Решение.** Энергия взаимодействия между заряженными проводниками равна разности между энергиями поля для шаров, находящихся на расстоянии  $a$ , и шаров, удаленных друг от друга на очень большое по сравнению с радиусами шаров расстояние. Последняя энергия равна энергии поля двух уединенных шаров

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C} + \frac{q^2}{2C_1} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q^2}{R} + \frac{q^2}{r} \right). \quad (5.19)$$

Энергия шаров, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга, равна

$$W = \frac{Q\varphi_Q}{2} + \frac{q\varphi_q}{2}, \quad (5.20)$$

где  $\varphi_Q$  и  $\varphi_q$  -- потенциалы шаров радиусом  $R$  и  $r$  соответственно. По условию задачи  $r \ll R$ , поэтому при определении  $\varphi_Q$  малый шар радиусом  $r$  можно заменить точечным зарядом  $q$ , помещенным в его центр. Внутри проводящего шара  $\vec{E} = 0$  и его потенциал равен потенциалу центра, который согласно принципу суперпозиции равен

$$\varphi_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{a} + \frac{Q}{R} \right). \quad (5.21)$$

Потенциал малого шара  $\varphi_q$  определяется распределенным на нем зарядом  $q$ , а также зарядом на поверхности большой сферы. Последний в



присутствии малого заряженного шара распределен по поверхности неравномерно. В примере 4 четвертого параграфа было показано, что поле, создаваемое неравномерно распределенным по поверхности большого шара зарядом  $Q$ , эквивалентно полю двух точечных зарядов  $q'$  и  $q''$ , расположенных на прямой, соединяющей центры сфер: заряд  $q'$  в центре сферы радиуса  $R$ , а  $q''$  -- на расстоянии  $R^2/a$  от центра большого шара. Итак, потенциал  $\varphi_q$  определяется тремя зарядами:  $q, q'$  и  $q''$  и равен

$$\varphi_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{q'}{a - R^2/a} + \frac{q''}{a} \right).$$

Заряды  $q'$  и  $q''$  были найдены ранее и задаются выражениями (4.19) и (4.20). Подставляя их в  $\varphi_q$ , получаем

$$\varphi_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{a} - \frac{qR^3}{a^2(a^2 - R^2)} \right). \quad (5.22)$$

Подставляя выражения (5.21) и (5.22) в (5.20), находим  $W$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q^2}{2R} + \frac{q^2}{2r} + \frac{Qq}{a} - \frac{q^2 R^3}{2a^2(a^2 - R^2)} \right). \quad (5.23)$$

Энергию взаимодействия  $W_{вз} = W - W_0$  получим, вычитая из (5.23) выражение (5.19)

$$W_{вз} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2Q}{a} - q \frac{R^3}{a^2(a^2 - R^2)} \right]. \quad (5.24)$$

**Пример 5.9.** Два проводящие шара с радиусами  $R$  и  $r$  расположены так, что расстояние между их центрами равно  $a$ . На первом находится заряд  $Q$ , а второй не заряжен. В предположении, что  $r \ll R$  оцените энергию взаимодействия между ними.

**Решение.** Энергия взаимодействия между описанными в условии задачи, но заряженными шарами была найдена в предыдущем примере и задается выражением (5.24). Видим, что если заряд  $q$  равен нулю, то она также равна нулю. Однако при выводе выражения (5.24) не учитывалось, что заряд  $q$  на шаре радиусом  $r$  также, как и на второй сфере, распределен неравномерно. Учет неравномерности распределения зарядов по сферам дает малую поправку в (5.24), которая не обращается в ноль при  $q = 0$ . Найдем ее.

Будем предполагать, что в пределах малого шара поле, создаваемое большим, можно считать однородным. В примере 7 из параграфа 3 было показано, что на проводящем шаре в однородном электрическом поле напряженностью  $E$  появляется наведенный заряд, поле которого за пределами этого шара эквивалентно полю диполя с дипольным моментом  $\vec{p}_e = 4\pi\epsilon_0 r^3 \vec{E}$ , помещенного в центр шара, и определяется выражением (2.8). В центре большого шара этот диполь создает дополнительный потенциал  $\Delta\varphi = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{Er^3}{a^2}$ , где  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$  -- напряженность поля, создаваемого зарядом  $Q$  в центре шара радиусом  $r$ . Окончательно

$$\Delta\varphi \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{r}{a}\right)^3.$$

Это малое изменение потенциала большого шара, обусловленное зарядами, наведенными на малом шаре радиусом  $r$ , и определяет энергию взаимодействия заряженного и незаряженного шаров

$$W_{ca} = \frac{\Delta\varphi Q}{2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{r}{a}\right)^3. \quad (5.25)$$

*Задачи для самостоятельной работы*

- 5.1.** Определите емкость уединенного шарового проводника радиусом  $R_1$ , окруженного прилегающим к нему шаровым слоем однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Внешний радиус слоя –  $R_2$ .
- 5.2.** Сферический конденсатор, состоящий из двух concentрических проводящих сфер с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), заряжен до напряжения  $U$ . Насколько изменится энергия электрического поля, если заземлить внутреннюю сферу?
- 5.3.** Как изменится емкость помещенного в коробку конденсатора (см. Пример 3), если коробку соединить с одной из пластин?
- 5.4.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого линейно меняется в перпендикулярном обкладкам направлении от значения  $\epsilon_1$  у одной пластины до значения  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  у другой. Расстояние между пластинами  $d$ , площадь каждой из них равна  $S$ . Найдите емкость конденсатора.
- 5.5.** Радиусы внутренней и внешней обкладок цилиндрического конденсатора увеличили вдвое, сохранив заряды на обкладках. Изменились ли: а) напряжение на конденсаторе; б) напряженность электрического поля вблизи внутренней обкладки конденсатора?
- 5.6.** Сферический конденсатор с радиусами обкладок  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ) заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от расстояния  $r$  до центра конденсатора по закону  $\epsilon = \frac{\epsilon_a a}{r}$ . Найдите емкость конденсатора и энергию, запасенную в нем, если разность потенциалов обкладок равна  $U$ .

**5.7.** Радиусы проводов, образующих двупроводную линию, равны  $r$ . Расстояние между осями симметрии проводников --  $a$ . Найдите емкость единицы длины линии  $C_0$  при условии  $a \gg r$ .

**5.8.** Найдите напряженность электрического поля в длинном цилиндрическом конденсаторе, пространство между обкладками которого заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (см. рис.5.11). Диэлектрики граничат между собой вдоль плоскостей, пересекающихся на оси цилиндра  $O$ . Двугранные углы, образуемые ими в диэлектриках, равны соответственно  $\psi_1$  и  $\psi_2$  ( $\psi_1 + \psi_2 = 2\pi$ ). Длина конденсатора равна  $l$ , а заряд на внутренней обкладке  $Q$ . Найдите также емкость конденсатора, если радиусы цилиндрических обкладок равны  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

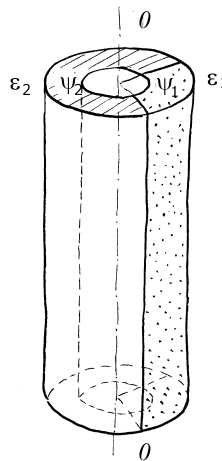


Рис.5.11

**5.9.** Батарея, состоящая из  $n$  последовательно соединенных одинаковых конденсаторов, заряжена и отключена от источника постоянной ЭДС. Один конденсатор в результате утечки разрядился. Как изменились: а) электроемкость батареи; б) напряжение на ней?

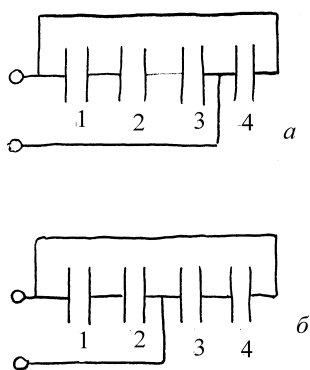


Рис.5.12

**5.10.** Батарея из четырех конденсаторов включена один раз по схеме а), а другой раз по схеме б) (рис.5.12). 1) В каком случае емкость батареи будет больше, если все конденсаторы имеют одинаковую емкость? 2) Если емкости конденсаторов различны, то какому соотношению они должны удовлетворять, чтобы при переключении со схемы а) на схему б) емкость батареи не менялась?

**5.11.** Сравните электроемкости системы одинаковых конденсаторов, изображенной на рис.5.13 при а) разомкнутом; б) замкнутом ключе К.

**5.12.** Батарея из трех последовательно соединенных конденсаторов присоединена к источнику постоянной ЭДС. Какой конденсатор обладает наибольшей электрической энергией, если  $C_1 = C$ ,  $C_2 = 2C$  и  $C_3 = 3C$  ?

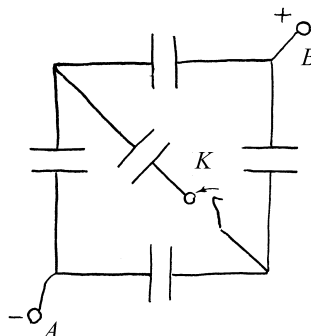


Рис.5.13

**5.13.** Конденсатор, заполненный жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , зарядили, затратив на это энергию  $W_1$ . Затем конденсатор отсоединили от источника, слили из него диэлектрик и разрядили. Какая энергия  $W_2$  выделилась при разрядке?

**5.14.** Три проводящих шара с радиусами  $R_1 = 10\text{см}$ ,  $R_2 = 20\text{см}$  и  $R_3 = 30\text{см}$  и потенциалами  $\varphi_1 = 450\text{В}$ ,  $\varphi_2 = 300\text{В}$  и  $\varphi_3 = 150\text{В}$  соответственно находятся далеко друг от друга. Какое количество тепла  $Q$  выделится, если их соединить тонкими проволочками? Ёмкостью проволочек пренебречь.

**5.15.** Внутри плоского конденсатора с площадью пластин  $S$  и расстоянием между ними  $d$  находится пластина из диэлектрика, целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Диэлектрическая проницаемость пластины равна  $\varepsilon$ . На какую величину  $\Delta W$  изменится энергия конденсатора, если удалить пластину? Какую механическую работу  $A$  нужно при этом затратить? Решите задачу при двух условиях: 1) конденсатор все время подсоединен к батарее с ЭДС, равной  $\varepsilon$ ; 2) конденсатор был первоначально подсоединен к той же батарее, а затем отключен, и только после этого пластина была удалена.

**5.16.** На обкладках плоского конденсатора находятся заряды  $+q$  и  $-q$ . Площадь обкладок  $S$ . Какая работа  $A$  будет совершена силами поля при сближении обкладок с расстояния  $d_0$  до расстояния  $d$ ?

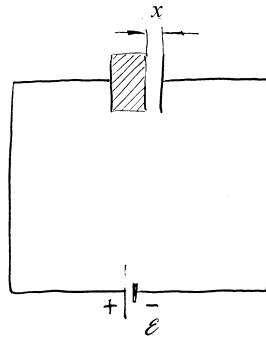


Рис.5.14

**5.17.** Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь  $S$  и расположены на расстоянии  $d$  друг от друга, заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (рис.5.14). Конденсатор подсоединен к батарее с ЭДС равной  $\varepsilon$ . Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор. На какое расстояние  $x$  была отодвинута пластина, если при этом произведена работа  $A$ ?

**5.18.** Точечный заряд  $q$  находится в диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Найдите энергию поля, заключенного внутри концентрического с зарядом шарового слоя, радиусы внешней и внутренней поверхностей которого равны  $b$  и  $a$  соответственно.

**5.19.** Заряд  $q$  распределен по металлической сфере радиусом  $R$ . Сфера окружена шаровым слоем диэлектрика толщиной  $R$ . Чему равна полная энергия электрического поля, создаваемого зарядом во всем пространстве, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика равна  $\epsilon$ ?

**5.20.** Первоначально заряд  $q = 10^{-10} \text{ Кл}$  распределяется равномерно по объему, ограниченному проводящей сферой радиуса  $r = 1 \text{ см}$ . Затем вследствие взаимного отталкивания заряды переходят на поверхность сферы. Какую работу  $A$  совершают при этом электрические силы?

**5.21.** Одна обкладка плоского воздушного конденсатора приближается к другой, проходя путь  $s$ . Считая, что начальные расстояния  $d$  между обкладками и начальные заряды конденсатора одинаковы, найдите отношение работы силы притяжения обкладок в двух случаях: 1) конденсатор все время подсоединен к источнику постоянной ЭДС; 2) конденсатор заряжен и от источника ЭДС отключен.

**5.22.** Цилиндрический конденсатор с радиусами обкладок  $R$  и  $4R$  заполнен однородным диэлектриком. Конденсатор заряжен. Мысленно разделим пространство между обкладками конденсатора на две области цилиндрической поверхностью радиуса  $2R$ , коаксиальной с поверхностями цилиндрического конденсатора. Найдите отношение  $\alpha$  энергий электрического поля в двух областях.

**5.23.** Найдите емкость сферического конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (см. рис.4.11) Диэлектрики

граничат между собой вдоль поверхности конуса с вершиной в центре  $O$ . Телесный угол конуса, заполненного первым диэлектриком, равен  $\Omega_1$ , а заполненным вторым диэлектриком -  $\Omega_2$  ( $\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$ ). Радиусы шаровых обкладок равны  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

**5.24.** Конденсатор переменной ёмкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис.5.15). Все пластины имеют форму полукруга радиуса  $R$ , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с  $d$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент сил  $M$ , действующих на диэлектрическую пластину. Напряжение на конденсаторе поддерживается равным  $U$ , диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна  $\epsilon$ .

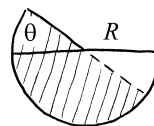


Рис.5.15



## §6. Квазистационарные токи

### Краткие теоретические сведения

Токи проводимости. При помещении проводника в электрическое поле в нем возникает направленное движение заряженных частиц (*свободных зарядов*), которое называют *током проводимости*. Эти токи создаются, вообще говоря, как отрицательными, так и положительно заряженными частицами, скорости движения которых  $v^-$  и  $v^+$  различны. Распределение токов в проводнике описывается вектором *плотности тока* проводимости:  $\vec{j} = e(n^+v^+ - n^-v^-)$ , где  $n^+$  и  $n^-$  – концентрации положительных и отрицательных подвижных носителей заряда. Для каждого типа носителей скорость их упорядоченного движения  $\vec{v}$  может быть записана в виде  $\vec{v} = \alpha \vec{E}$ , где  $\alpha$  – *подвижность* носителей, а  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля в проводнике. Если концентрации носителей не зависят от напряженности поля (что справедливо в большинстве проводников), то справедлив *закон Ома* :

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}, \quad (6.1)$$

где  $\lambda$  – *удельная проводимость* среды. Для описания проводящих сред часто используют также *удельное сопротивление*  $\rho = 1/\lambda$ . Протекание токов ведет к перераспределению зарядов (*релаксации зарядов*) в среде, и, в конечном счете, к исчезновению поля и прекращению токов. Поэтому за счет кулоновского взаимодействия зарядов протекание *стационарных* (не зависящих от времени) токов невозможно. Характерное время установления стационарного распределения зарядов  $\tau = \epsilon\epsilon_0/\lambda$  для хорошо проводящих сред очень мало. Токи, мало изменяющиеся на масштабе времени релаксации зарядов называют *квазистационарными*.

Стационарные токи могут протекать только при наличии *сторонних* сил (сил не кулоновского происхождения), действующих на заряженные частицы. Эти силы описывают *полем сторонних сил*, напряженность которого принято обозначать как  $\vec{E}_c$ . В таком случае закон Ома принимает вид:

$$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}_c), \quad (6.2)$$

где под  $\vec{E}$  по-прежнему понимается напряженность электрического поля, создаваемого зарядами.

Сторонние силы не потенциальны и их работа при перемещении заряда по замкнутому контуру отлична от нуля. В присутствии сторонних сил заряды на поверхности проводника перераспределяются, и поэтому поле в проводнике не равно, вообще говоря, нулю даже в тех его областях, где сторонние силы не действуют. В поле сторонних сил вводится понятие *электродвижущей силы* (ЭДС)

$$\mathcal{E} = \int \vec{E}_c d\vec{l}, \quad (6.3)$$

определяемой для произвольного контура или его участка.

Непрерывность токов. В силу закона сохранения заряда текущие в проводниках токи всегда удовлетворяют уравнению непрерывности:

$$d\rho/dt + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (6.4)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда. В случае стационарных токов

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (6.5)$$

Квазистационарные токи удовлетворяют такому же условию.

Сила тока. Для проводника вводится понятие *силы тока*

$$I = \int \vec{j} d\vec{S}, \quad (6.6)$$

где интегрирование проводится по сечению проводника.

Заряженное тело в проводящей среде разряжается, причем

$$dQ/dt = -I, \quad (6.7)$$

а ток  $I$  вычисляется через любую окружающую тело поверхность.

В большинстве задач рассматривают токи, текущие по тонким проводам, толщина которых много меньше длины. В квазистационарном случае сила тока во всех сечениях провода одинакова. Закон Ома позволяет

связать силу тока, текущего по проводу с разностью потенциалов  $U$  на его концах:

$$U = IR, \quad (6.8)$$

где коэффициент  $R$  называют *сопротивлением* проводника.

В частности, для замкнутого контура, содержащего Э.Д.С. из (6.3) и (6.8) следует:

$$I = \mathcal{E}/R \quad (6.9)$$

Величину, обратную сопротивлению проводника называют его *проводимостью*. Для отрезка тонкого провода неизменного сечения  $R = \frac{l}{\lambda S}$  ( $l$  - длина проводника, а  $S$  - площадь его сечения).

При протекании распределенных токов в среде между хорошо проводящими электродами, поверхности которых можно считать эквипотенциальными, аналогично можно ввести сопротивление участка проводника:  $R = U/I$ , где  $I$  – ток каждого электрода, а  $U$  -- разность потенциалов между ними. Для расчета такого сопротивления необходимо знать распределение токов в среде.

При протекании токов в среде выделяется тепло, объемная плотность мощности источников которого, согласно *закону Джоуля-Ленца*, равна:

$$v = (j \overline{E}) = \lambda E^2 \quad (6.10)$$

Нетрудно заметить, что плотность тепловых источников в проводящей среде пропорциональна плотности энергии электрического поля  $w_E$ :

$$v = (2\lambda/\epsilon\epsilon_0)w_E, \quad \text{где } w_E = 1/2 \epsilon\epsilon_0 E^2 \quad (6.11)$$

Количество тепла, выделяющегося в проводнике в единицу времени

$$N = UI = I^2 R \quad (6.12)$$

равно работе сил поля по перемещению зарядов вдоль проводника в единицу времени.

При вычислении сопротивления участка проводящей среды часто полезно представить его в виде последовательного или параллельного соединения участков более простой формы. При этом следует помнить, что при последовательном соединении сопротивления участков складываются, а при параллельном – складываются их проводимости.

Для более сложных расчетов используют теорию электрических цепей.

**Пример 6.1.** Найдите сопротивление слоя слабо проводящей среды с проводимостью  $\lambda$ , расположенной между двумя хорошо проводящими концентрическими сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$ .

**Решение.** Создадим между сферами разность потенциалов  $U$ . Распределение проводников обладает сферической симметрией, поэтому плотность тока  $\vec{j}$  направлена по радиусу и зависит только от  $r$ . Рассмотрим сферу произвольного радиуса  $r$  и найдем ток, протекающий через нее

$$I = \oint \vec{j} d\vec{S} = 4\pi r^2 j(r).$$

По закону Ома  $\vec{E} = \frac{1}{\lambda} \vec{j}$ . Выражая плотность тока через  $I$ , находим

$E = \frac{I}{4\pi r^2 \lambda}$ . Теперь нетрудно выразить через параметры задачи разность потенциалов между сферами

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{I}{4\pi \lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Откуда сопротивление слоя

$$R = \frac{U}{I} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi \lambda R_1 R_2}.$$

В случае тонкого слоя толщиной  $d = R_2 - R_1 \ll R_{1,2}$  его сопротивление будет равно

$$R \approx \frac{d}{\lambda S},$$

где  $S = 4\pi R_1^2$  -- площадь слоя.

В случае  $R_2 \gg R_1$  сопротивление среды становится равным

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda R_1}$$

и зависит только от размеров внутреннего тела.

**Пример 6.2.** Найдите соотношение, связывающее сопротивление среды между двумя хорошо проводящими телами, погруженными в слабо проводящую среду, и емкостью конденсатора, образованного этими телами.

**Решение.** Окружим одно из тел замкнутой поверхностью  $S$  и найдем ток,

протекающий через нее 
$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \oint_S \lambda \frac{\vec{D}}{\epsilon\epsilon_0} d\vec{S} = \frac{\lambda}{\epsilon\epsilon_0} Q_1 .$$

Аналогично ток, протекающий через второе тело равен

$$I = \frac{\lambda}{\epsilon\epsilon_0} Q_2 . \quad (6.12)$$

Так как токи равны и направлены в разные стороны, то  $Q_1 = -Q_2$  и тела можно рассматривать как конденсатор, емкость которого обозначим  $C$ . Она связана с разностью потенциалов между проводниками известным соотношением  $\varphi_2 - \varphi_1 = U = \frac{Q}{C}$ . Та же разность потенциалов связана с током

законом Ома  $U = IR$ . Приравнивая выражения для разности потенциалов,

находим  $IR = \frac{Q}{C}$ , или, с учетом (6.12):

$$R = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\lambda C} . \quad (6.13)$$

**Пример 6.3.** Заземление осуществляется с помощью идеально проводящего шара радиусом  $a$ , наполовину утопленного в землю (проводимость земли  $\lambda = \text{const}$ ). Найдите сопротивление  $R$  такого заземлителя.

**Решение.** Разобьем задачу на две. Допустим, что шар полностью утоплен в землю. Сопротивление такого заземления задается формулой (6.12), полученной в предыдущем примере, если в неё вместо  $C$  подставить  $4\pi\epsilon\epsilon_0 a$  -- емкость уединенного шара радиусом  $a$ :

$$R' = \frac{1}{4\pi\lambda a}.$$

Шар, наполовину утопленный в землю, находится на границе раздела двух сред. В силу того, что граница раздела совпадает с плоскостью симметрии шара, напряженность на границе раздела направлена вдоль границы (см. решение примера 7 из параграфа 4), а силовые линии электрического поля в земле для полусферы совпадают с силовыми линиями для шара, полностью погруженного в однородную среду. Однако при том же потенциале ток, текущий через полусферу вдвое меньше, чем через сферу. Из проведенных рассуждений следует, что искомое сопротивление

$$R = 2R' = \frac{1}{2\pi\lambda a}.$$

**Пример 6.4.** В качестве заземления электрических цепей часто используется шар радиусом  $a$ , зарытый в грунт с проводимостью  $\lambda$ , много меньшей, чем проводимость материала шара. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в окрестности заземления, при подаче на него напряжения  $U$  (относительно удаленных тел).

**Решение.** Тепловая мощность, выделяющаяся в проводнике, определяется законом Джоуля-Ленца

$$N = \frac{U^2}{R},$$

где  $R$  -- сопротивление среды, окружающей шар. Его связь с емкостью шара была получена в примере 2 и задается выражением (6.13). Подставим его в  $N$ , получим

$$N = \frac{\lambda C}{\epsilon \epsilon_0} U^2 .$$

Емкость уединенного шара задается выражением (5.2), откуда окончательно

$$N = 4\pi\lambda a U^2 .$$

**Пример 6.5.** Два одинаковых тела зарыты в землю на большом расстоянии друг от друга. Разность потенциалов между ними известна и равна  $U$ . Грунт в окрестности тел имеет проводимость  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Найдите потенциалы тел.

**Решение.** В примере 2 данного параграфа было показано, что ток, текущий между телами связан с зарядами на них соотношением (6.12)

$$I = \lambda_1 Q_1 = \lambda_2 Q_2 .$$

С другой стороны заряды на проводниках связаны с напряжением на них соотношениями

$$Q_1 = C U_1, \quad Q_2 = C U_2 .$$

Здесь учтено, что проводники одинаковы и их емкости равны.

Из приведенных соотношений легко находится отношение  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ,

а по условию задачи разность напряжений  $U_1 - U_2 = U$ . Решая полученную систему уравнений, окончательно находим

$$U_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} U, \quad U_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} U .$$

Если проводимости грунтов равны  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то  $U_1 = -U_2 = \frac{1}{2} U$ . Если одна из проводимостей становится очень малой, например  $\lambda_1 \rightarrow 0$ , то  $U_2 \rightarrow 0$  и  $U_1 \rightarrow U$ .

**Пример 6.6.** Три проводника с круглым сечением одного и того же радиуса  $r$  соединены последовательно, образуя замкнутое кольцо. Длины проводников  $l_0, l_1, l_2 \gg r$ , проводимости  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ . По объему проводника с проводимостью  $\lambda_0$  равномерно распределена Э.Д.С.  $U_0$ , не зависящая от времени. Найдите кулоновское и полное поля  $E$  в проводниках.

**Решение.** Ток, текущий по всем участкам цепи одинаков, а так как одинакова площадь сечения разных участков цепи, то и плотность тока на всех участках одинакова, или

$$\vec{j} = \lambda_0(\vec{E}_c + \vec{E}_0) = \lambda_1 \vec{E}_1 = \lambda_2 \vec{E}_2. \quad (6.14)$$

Проектируя соотношения (6.14) на  $\vec{j}$ , получаем

$$\lambda_1 E_1 = \lambda_2 E_2 = \lambda_0 (E_c - E_0). \quad (6.15)$$

Работа сторонних сил согласно (6.3) равна  $U_0 = E_0 l_0$ , а работа кулоновских сил вдоль всего замкнутого контура равна нулю

$$-E_0 l_0 + E_1 l_1 + E_2 l_2 = 0. \quad (6.16)$$

Решая систему уравнений (6.15) и (6.16), находим кулоновское поле на всех трех участках цепи

$$E_0 = k \lambda_1 \lambda_2 U_0, \quad E_1 = k \lambda_0 \lambda_2 U_0, \quad E_2 = k \lambda_0 \lambda_1 U_0,$$

где 
$$k = \frac{1}{l_0 \lambda_1 \lambda_2 + l_1 \lambda_0 \lambda_2 + l_2 \lambda_0 \lambda_1}.$$

Полное электрическое поле на участке длиной  $l_0$  складывается из поля сторонних сил и кулоновского поля:

$$E = E_c - E_0 = \frac{U_0}{l_0} - k \lambda_1 \lambda_2 U_0 = \frac{U_0 \lambda_0 (l_1 \lambda_2 + l_2 \lambda_1)}{l_0 (l_0 \lambda_1 \lambda_2 + l_1 \lambda_0 \lambda_2 + l_2 \lambda_0 \lambda_1)}.$$



**Пример 6.7.** Определите сопротивление изоляции коаксиального кабеля длиной  $l = 10\text{ м}$ , если диаметр внутреннего проводника  $d = 1\text{ мм}$ , диаметр наружной проводящей оболочки равен  $D = 4\text{ мм}$ , а удельное сопротивление изоляции  $\rho = \frac{1}{\lambda} = 10^{13}\text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

**Решение.** Рассмотрим отрезок кабеля с изоляцией длиной  $l$ . Пусть  $U_0$  - напряжение между внутренним проводником и наружной оболочкой. Так как поле обладает цилиндрической симметрией и объемный заряд внутри диэлектрика отсутствует, то по теореме Гаусса

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{\alpha}{r}.$$

Согласно (2.7)  $E_r = -\frac{dU(r)}{dr}$ , или  $U(r) = -\alpha \ln r + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  - пока неизвестные постоянные. Учитывая, что  $U\left(\frac{d}{2}\right) = U_0$ , а  $U\left(\frac{D}{2}\right) = 0$ , находим

$$E_r(r) = -\frac{U_0}{\ln(D/d)} \cdot \frac{1}{r}.$$

Окончательно закон Ома (6.1) примет вид

$$|\vec{j}| = \frac{U_0}{\rho \ln(D/d)} \cdot \frac{1}{r}.$$

Полный ток, протекающий по цилиндрическому слою изоляции длиной  $l$ , равен  $I = jS = j \cdot 2\pi r l = \frac{2\pi l U_0}{\rho \ln(D/d)}$ , откуда по закону Ома сопротивление изоляции  $R$  равно

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{\rho \ln(D/d)}{2\pi l}.$$

После подстановки числовых данных получим  $R = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ Ом}$ .

**Пример 6.8.** К большому металлическому листу толщиной  $a$  приварен цилиндрический проводник радиусом  $r_0$  (см. рис.6.1). Найдите сопротивление  $R$  листа между проводником и кольцевым электродом радиусом  $b$  с центром в точке прикрепления проводника, если  $a \ll r_0$ . Считать, что удельная проводимость  $\lambda_1$  проводника и кольцевого электрода значительно больше удельной проводимости  $\lambda$  материала листа.

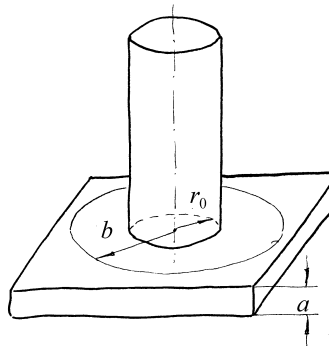


Рис.6.1

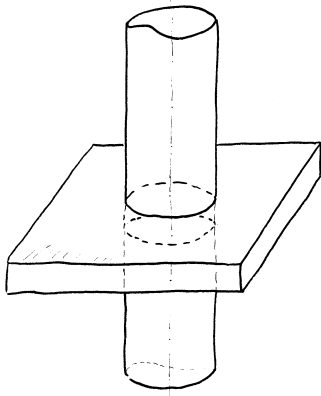


Рис.6.2

**Решение.** Так как  $\lambda_1 \gg \lambda$ , то потенциал всех точек проводника, приваренного к листу, можно считать постоянным. Так как толщина листа  $a$  много меньше размеров проводника, ток, текущий по листу, можно считать распределенным равномерно по толщине листа. В силу симметрии он направлен по радиусу от точки крепления подводящего проводника и его плотность одинакова по всем направлениям. В силу закона Ома так же будет распределена напряженность электрического поля, при этом поле будет обладать цилиндрической

симметрией. Такое поле создает бесконечный цилиндр, заряженный с некоторой постоянной погонной плотностью заряда  $\kappa$ . Иными словами, распределение напряженности электрического поля будет таким же, как если бы ток к листу подводился бесконечным прямым проводом, как показано на рис.6.2. Напряженность электрического поля в точке, отстоящей от оси проводника на расстоянии  $r$ , найдем по теореме Гаусса

$$E = \frac{\mathcal{K}}{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi r}, \quad (6.17)$$

а плотность тока в листе – по закону Ома  $j = \lambda E = \frac{\kappa\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ .

Уместно отметить, что полученный результат не зависит от формы и расположения подводящего ток проводника.

Найдем полный ток, текущий через боковую поверхность цилиндра радиусом  $r$ , коаксиального с проводником

$$I = \oint \vec{j} d\vec{S} = \frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0} \kappa a.$$

Выразим из полученного соотношения  $\mathcal{K}$  и подставим его в (6.17), получим

$$E = \frac{I}{2\pi\lambda a} \cdot \frac{1}{r}. \quad (6.18)$$

В силу симметрии потенциал всех точек боковой поверхности выделенного цилиндра одинаков. Разность потенциалов между проводником, подводящим ток к листу, и этой поверхностью найдем, используя связь разности потенциалов с напряженностью поля

$$\Delta\varphi = \int_{r_0}^r \vec{E} d\vec{r} = \int_{r_0}^r \frac{I}{2\pi\lambda a} \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi\lambda a} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (6.19)$$

Сопротивление  $R$  листа между проводником и цилиндром радиусом  $b$  с центром в точке прикрепления проводника находим по закону Ома:

$$R = \frac{\Delta\varphi(r=b)}{I} = \frac{1}{2\pi\lambda a} \ln \frac{b}{r_0}.$$

**Пример 6.9.** К большому металлическому листу толщиной  $a$  приварены на расстоянии  $b$  друг от друга два цилиндрических проводника радиусом  $r_0$  (см. рис.6.3). Найдите сопротивление  $R$  между проводниками, если  $a \ll r_0 \ll b$ . Считать, что удельная проводимость  $\lambda_1$  проводников значительно больше удельной проводимости  $\lambda$  материала листа.

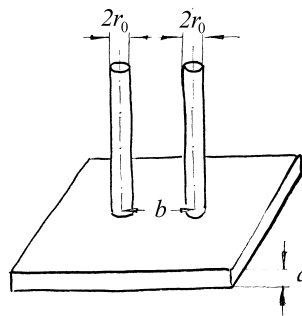


Рис.6.3

**Решение.** Воспользуемся принципом суперпозиции и решением предыдущего примера. Напряженность электрического поля, создаваемого внутри листа первым электродом, согласно (6.18) равна

$$E_1 = \frac{I}{2\pi\lambda a} \cdot \frac{1}{r}.$$

Так как ток, текущий через второй цилиндр, равен току, текущему через первый, но направлен в другую сторону, то на прямой, соединяющей центры электродов, напряженность, создаваемая вторым электродом -

$$E_2 = \frac{I}{2\pi\lambda a(b-r)}.$$

Разность потенциалов между цилиндрами найдем, используя связь разности потенциалов с напряженностью поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_0}^{b-r_0} \frac{I}{2\pi\lambda a} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr = \frac{I}{\pi\lambda a} \ln \frac{b-r_0}{r_0}.$$

Сравнивая с законом Ома в форме  $\varphi_1 - \varphi_2 = RI$ , окончательно находим сопротивление

$$R = \frac{1}{\pi\lambda a} \ln \left( \frac{b}{r_0} - 1 \right).$$

## Задание для самостоятельной работы

**6.1.** Два проводящих шара с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  зарыты в землю на расстоянии, значительно превышающем их размеры. Между шарами создается (с помощью внешнего источника) разность потенциалов  $U$ . Найдите потенциалы шаров.

**6.2.** Найдите закон преломления линий тока на плоской границе раздела двух сред с проводимостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

**6.3.** Заземление осуществляется с помощью идеально проводящего шара радиусом  $a$ , наполовину утопленного в землю (проводимость земли  $\lambda_1 = const$ ). Слой земли радиуса  $b$ , концентрический с шаром и прилегающий к нему, имеет искусственно повышенную проводимость  $\lambda_2$ . Найдите сопротивление  $R$  такого заземлителя.

**6.4.** Концы некоторой цепи заземлены с помощью двух идеально проводящих сфер (радиусы  $a_1$  и  $a_2$ ), наполовину утопленных в землю, служащую вторым проводом. Расстояние между сферами  $l \gg a_1, a_2$ , проводимость земли  $\lambda$ . Найдите сопротивление  $R$  между заземлителями.

**6.5.** В одном коаксиальном кабеле пространство между внутренним проводом и наружной цилиндрической оболочкой заполнено изолятором с удельной проводимостью  $\lambda_1 = 10^{-13} (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ , а в другом - с удельной проводимостью  $\lambda_2 = 10^{-14} (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ . Найдите отношение тепловых потерь в изоляции кабелей, если их геометрические параметры и поданные на них напряжения одинаковы?

**6.6.** Пространство между пластинами плоского конденсатора, который подсоединен к источнику ЭДС  $\mathcal{E}_0$ , заполнено наполовину материалом с удельным сопротивлением  $\rho_1$

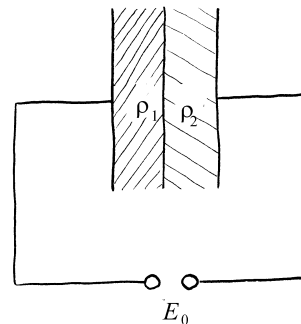


Рис.6.4

(см. рис.6.4), а наполовину - материалом с удельным сопротивлением  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ). Каковы будут тепловые мощности, выделяющиеся в каждом слое? Расстояние между пластинами конденсатора  $d$ , площадь пластин  $S$ .

**6.7.** В условии предыдущей задачи найдите плотность поверхностных свободных зарядов  $\sigma$  на границе между диэлектриками.

**6.8.** Два одинаковых проводящих шара с радиусами  $r$  погружены в однородную среду с проводимостью  $\lambda$ . Чему равно сопротивление среды  $R$  между шарами? Считать, что расстояние между шарами намного больше их радиусов.

**6.9.** Решить предыдущую задачу в предположении, что шары заменены двумя телами с известными емкостями  $C_1$  и  $C_2$ , размеры которых много меньше расстояния  $d$  между ними. Диэлектрическая проницаемость среды, находящейся между телами, равна  $\epsilon$ .

**6.10.** Между двумя проводящими сферическими оболочками с радиусами  $r_1$  и  $r_3$  ( $r_1 < r_3$ ) находятся два сферических слоя диэлектрика с проводимостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и радиусами  $r_1, r_2$  и  $r_2, r_3$  соответственно. Определите тепловые мощности, выделяющиеся в каждом из слоев, если между проводящими оболочками поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ .

**6.11.** Между двумя проводящими цилиндрическими оболочками с радиусами  $r_1$  и  $r_3$  ( $r_1 < r_3$ ) находятся два цилиндрических слоя диэлектрика с проводимостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и радиусами  $r_1, r_2$  и  $r_2, r_3$  соответственно. Определите тепловые мощности в каждом из слоев, если между проводящими оболочками поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ . Высота цилиндров  $l$ .

**6.12.** Провод, по которому протекал ток силой  $I$ , оборвался и упал на землю, при этом на земле оказался прямолинейный кусок провода длиной  $L$ . После падения провода ток в нем не изменился. Определите «шаговое напряжение», под которым окажется человек с длиной шага  $l$ , приближающийся к проводу в перпендикулярном направлении на значительном расстоянии от концов провода. Расстояние до ближайшей к проводу ноги человека равно  $r_0$ . Найдите величину шагового напряжения при следующих значениях параметров: проводимость земли  $\lambda = 2 \cdot 10^{-4} (\text{Ом} \cdot \text{см})^{-1}$ ,  $r_0 = 1 \text{ м}$ ,  $l = 0,75 \text{ м}$ ,  $L = 300 \text{ м}$ ,  $I = 500 \text{ А}$ .

**6.13.** К центрам противоположных торцов тонкостенной цилиндрической банки диаметром  $D$  и высотой  $l$  припаяны провода диаметром  $d$  (см. рис.6.5). Определите сопротивление  $R$  банки, если она сделана из фольги толщиной  $\delta \ll d$  с удельной проводимостью  $\lambda$ .

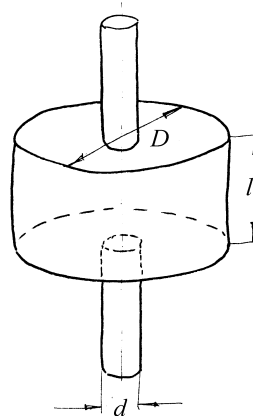


Рис.6.5

**6.14.** К диаметрально противоположным точкам  $A$  и  $B$  слабо проводящей однородной полый сферы подведены цилиндрические провода, между концами  $A$  и  $B$  которых поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ . Найдите распределение потенциала  $\varphi$  как функцию угла  $\theta$  (см. рис.6.6). Угол, под которым из центра сферы  $O$  виден диаметр основания каждого из проводов, равен  $2\theta_0$ .

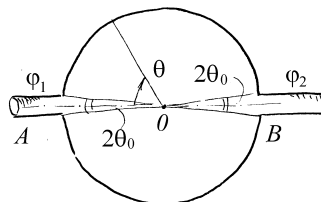


Рис.6.6

**6.15.** В условии предыдущей задачи найдите сопротивление  $R$  сферы. Проводимость материала, из которого она изготовлена равна  $\lambda$ . Толщина сферы  $\delta$ .

**6.16.** На цилиндрический конденсатор с радиусами обкладок  $R_1$  и  $R_2$  подано напряжение  $U_0$ . Конденсатор заполнен слабопроводящей средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 1$  и удельной проводимостью  $\lambda = k/r^2$ , где  $k$  – константа, а  $r$  – расстояние от оси конденсатора. Найдите распределение заряда и напряженности поля внутри конденсатора.

**6.17.** Пространство между двумя концентрическими сферами заполнено диэлектриком, проводимость которого зависит только от расстояния до сфер. Найдите закон изменения удельной проводимости  $\lambda(r)$ , если объемная плотность мощности тепловых потерь при прохождении тока одинакова во всех точках.

**6.18.** Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено диэлектриком, обладающим некоторой проводимостью. Найдите закон изменения удельной проводимости  $\lambda(r)$ , если при наличии некоторой разности потенциалов поле между цилиндрами везде одинаково.

**6.19.** По цилиндрическому стержню течет ток плотности  $j$ . Удельная проводимость на участке  $AB$  длиной  $l$  изменяется по линейному закону от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ . Найдите объемную плотность зарядов  $\rho$  на участке  $AB$ .

**6.20.** Имеется  $n$  идеально проводящих тел в вакууме. Известно, что при зарядах  $q_1, q_2, \dots, q_n$  их потенциалы равны  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Какое количество теплоты  $N$  будет выделяться в единицу времени, когда пространство между рассматриваемыми телами будет заполнено однородной проводящей жидкостью с удельной проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической проводимостью  $\varepsilon$ , если потенциалы тел поддерживаются при прежних значениях  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ?



**6.21.** Шаровой слой образован концентрическими сферами из идеального проводника, между которыми находится вещество с проводимостью  $\lambda$ . Какое количество тепла выделяется в единицу времени внутри этого слоя, если сферы подключены к источнику постоянного напряжения  $U_0$ ? Внутренний радиус слоя равен  $R_1$ , внешний –  $R_2$ .

**6.22.** Заряженный цилиндрический конденсатор заполнен средой с проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Длина конденсатора –  $l$ , радиусы обкладок –  $R_1$  и  $R_2 > R_1$ . Найдите зависимость тока утечки от времени, если известно, что в момент  $t=0$  разность потенциалов между обкладками равна  $U_0$ .

**6.23.** Пластины плоского воздушного конденсатора, соединенного с источником постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$ , медленно раздвигают с постоянной скоростью  $v$ . Как изменяется со временем сила тока в цепи? Площадь пластин конденсатора  $S$ , а расстояние между ними в момент времени  $t = 0$  равно  $d_0$ .

**6.24.** Конденсатор переменной емкости состоит из двух прямоугольных металлических пластин, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, площадь перекрытия которых можно изменять по закону  $S = \sqrt{t^2}$ , перемещая одну из пластин. При этом зазор между пластинами остается неизменным. Конденсатор соединен с источником постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$ . Найдите ток в цепи.

**6.25.** К диаметрально противоположным точкам шара радиусом  $a$ , сделанного из плохо проводящего материала с удельным сопротивлением  $\rho$ , подключены цилиндрические подводящие провода радиусом  $r \ll a$ . Найдите сопротивление шара.

## §7. Магнитное поле квазистационарных токов

### *Краткие теоретические сведения*

Магнитное поле. Магнитная индукция. Сила Лоренца. Опыт показывает, что движущиеся заряды (например, свободные заряды в проводниках, по которым течет электрический ток) взаимодействуют друг с другом совсем не так, как неподвижные. Посредником такого взаимодействия является *магнитное поле*, то есть поле, создаваемое движущимися зарядами и действующее на другие движущиеся заряды.

Если частица с зарядом  $q$  движется со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле, то на эту частицу действует сила, носящая название *силы Лоренца*:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (7.1)$$

где  $\vec{B}$  – силовая характеристика окружающего частицу магнитного поля, которая называется *вектором индукции магнитного поля* или просто *вектором магнитной индукции*. Фактически, выражение (7.1) можно считать неявным определением вектора магнитной индукции. Единица измерения магнитной индукции в системе СИ называется *тесла* (Тл).

Для магнитного поля верен *принцип суперпозиции*: вектор магнитной индукции поля, созданного системой движущихся заряженных частиц (или проводников с токами), равен сумме векторов магнитной индукции полей, созданных каждой из движущихся частиц (или каждым из проводников) в отсутствие остальных.

Так как сила Лоренца (7.1) в каждый момент времени перпендикулярна скорости заряда, на который она действует, то ее работа при любом перемещении заряда равна нулю. Поэтому *магнитное поле не изменяет модуль скорости заряда, но изменяет ее направление*.

Закон Ампера. Если проводник с током находится в магнитном поле, то на каждый заряд, образующий этот ток, действует сила Лоренца.

При этом, совокупная сила, действующая со стороны магнитного поля на элемент  $d\vec{l}$  проводника, определяется *законом Ампера*:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (7.2)$$

где  $I$  – сила тока в проводнике,  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля в точке расположения рассматриваемого элемента проводника, а направление вектора  $d\vec{l}$  совпадает с направлением тока. Чтобы найти силу, действующую со стороны магнитного поля на проводник конечной длины, необходимо проинтегрировать (7.2) по всей длине  $L$  проводника:

$$\vec{F} = I \int_L [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (7.3)$$

Сила, определяемая выражением (7.3), называется *силой Ампера*.

Закон Био-Савара-Лапласа. Чтобы рассчитать силовое взаимодействие проводников с током на основе закона Ампера (7.2), необходимо знать выражение для индукции магнитного поля, создаваемого таким проводником. Для *стационарных* (не изменяющихся со временем) токов это выражение задается *законом Био-Савара-Лапласа*, который гласит, что вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  поля, создаваемого в точке  $M$  проводящим контуром  $L$  с током  $I$  в вакууме, равен

$$\vec{B}(M) = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (7.4)$$

где  $d\vec{B}$  – вклад элемента  $d\vec{l}$  контура в результирующее магнитное поле,  $\vec{r}$  – вектор, проведенный из элемента  $d\vec{l}$  в точку  $M$ , а  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/А<sup>2</sup> – размерный коэффициент системы СИ, называемый *магнитной постоянной*. Выражение (7.4) не учитывает запаздывания поля при его распространении от источника до точки наблюдения. В случае достаточно медленно изменяющихся (*квазистационарных*) токов запаздыванием поля можно пренебречь и применять формулу (7.4) к токам, меняющимся во времени.

В частности, в окрестности бесконечно длинного прямолинейного провода с током  $I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad (7.5)$$

где  $a$  – расстояние от провода до точки наблюдения.

Из закона Ампера (7.2) и формулы (7.5) следует, что на отрезок прямолинейного проводника длиной  $dl$  с током  $I_1$  со стороны магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного тонкого провода с током  $I_2$ , расположенного параллельно первому на расстоянии  $a$  от него, действует

$$\text{сила, равная} \quad dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} dl.$$

Проводники с одинаково направленными токами притягиваются, с противоположно направленными – отталкиваются.

На основе эффекта магнитного взаимодействия токов в системе СИ вводится единица измерения силы тока – *ампер*. Ампер – сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1 метр один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

Магнитный момент. Ориентирующее действие магнитного поля. На замкнутый контур  $L$  с током  $I$ , помещенный во внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , согласно закону Ампера (7.2) действует вращающий момент

$$\vec{M} = I \oint_L [\vec{r} [d\vec{l}, \vec{B}]], \quad (7.6)$$

где  $\vec{r}$  – вектор, проведенный из точки, относительно которой рассчитывается момент, к элементу контура  $d\vec{l}$ .

В однородном поле эта формула по правилам векторного анализа преобразуется к виду

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (7.7)$$

где  $\vec{p}_m$  – *магнитный момент* контура:

$$\vec{p}_m = I \int_{(S)} d\vec{S}, \quad (7.8)$$

Здесь элемент  $d\vec{S}$  принадлежит произвольной поверхности  $S$ , натянутой на контур, и направлен по правилу буравчика относительно направления протекания тока. Результат интегрирования не зависит от формы поверхности, и потому служит характеристикой контура. Для плоского контура

$$\vec{p}_m = I\vec{S}, \quad (7.9)$$

где  $S$  - площадь контура.

Под действием момента сил рамка с током стремится занять устойчивое положение, т.е. повернуться так, чтобы момент стал равным нулю. При этом вектор  $\vec{p}_m$  становится сонаправленным с вектором индукции  $\vec{B}$ .

Результирующая сила, действующая на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле, равна нулю. В неоднородном магнитном поле на контур, помимо момента  $\vec{M}$ , действует отличная от нуля результирующая сила. На контур малых по сравнению с масштабом неоднородности поля размеров действует сила

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p}_m, \vec{B}), \quad (7.10)$$

однозначно определяемая величиной и ориентацией магнитного момента контура. Контур втягивается в область более сильного поля (если  $(\vec{p}_m, \vec{B}) > 0$ ), либо выталкивается в область менее сильного поля (если  $(\vec{p}_m, \vec{B}) < 0$ ).

Векторный потенциал. Для удобства вычисления магнитных полей вводится понятие *векторного потенциала*. Согласно правилам векторного

анализа выражение (7.4) может быть преобразовано к виду  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{rot} \int_L \frac{d\vec{l}}{r}$ .

Поэтому можно ввести векторное поле

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{l}}{r}, \quad (7.11)$$

такое, что

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (7.12)$$

Всякое векторное поле  $\vec{A}$ , удовлетворяющее условию (7.12), называют *векторным потенциалом* магнитного поля. Его можно определить с точностью до градиента произвольной скалярной функции координат.

Из (7.12), в частности, следует, что

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (7.13)$$

то есть магнитное поле *соленоидально*, причем это свойство остается справедливым и для *нестационарных* магнитных полей. Силовые линии магнитного поля, как и любого соленоидального, всегда замкнуты.

Векторный потенциал и индукция магнитного поля, создаваемого малым контуром с током, ( т.е. на расстояниях, больших по сравнению с размерами самого контура) так же как и действующие на контур моменты и силы, выражаются (см. Пример 10) через магнитный момент контура и радиус-вектор точки наблюдения, проведенный из центра контура:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3}, \quad (7.14)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(p_m, \vec{r})\vec{r} - \vec{p}_m r^2}{r^5}. \quad (7.15)$$

Магнитное поле, создаваемое малым контуром, (элементарным магнитным моментом) во многом аналогично полю точечного диполя в электростатике. Поэтому такой контур называют *магнитным диполем*.

**Пример 7.1.** Найдите вклад отрезка прямого проводника с током  $I$  в магнитную индукцию в точке, отстоящей на расстояние  $a$  от проводника,

если прямые, соединяющие эту точку с концами отрезка, составляют с направлением тока углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

**Решение.** Выделим на проводнике элемент  $d\vec{l}$ , и пусть радиус-вектор  $\vec{r}$ , проведенный в точку наблюдения  $M$  из начала этого элемента, образует с направлением тока угол  $\alpha$ , а радиус-вектор, проведенный из конца этого элемента – угол  $\alpha + d\alpha$  (см.рис.7.1). Тогда из точки наблюдения элемент виден под углом  $d\alpha$ . Вклад  $d\vec{B}$  элемента  $d\vec{l}$ , согласно формуле Био-Савара-Лапласа, можно записать в виде  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \vec{r}]$ . Вклады  $d\vec{B}$  от

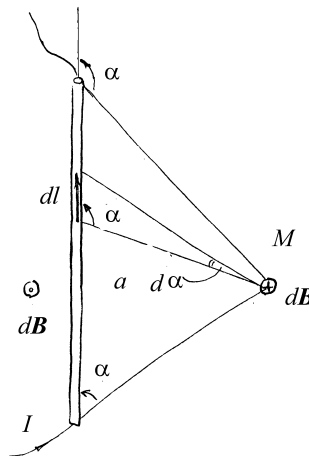


Рис.7.1

различных элементов перпендикулярны плоскости рисунка, а направления  $d\vec{B}$  одинаковы в полуплоскостях, разделяемых прямой, содержащей проводник. На рисунке слева от этой прямой  $d\vec{B}$  направлены к нам, что обозначено на рис. 7.1 кружком с точкой, а справа – от нас (обозначено символом  $\oplus$ ). Отсюда следует, что суммарное поле  $\Delta\vec{B}$  в точке  $M$  перпендикулярно плоскости рисунка. Величина вклада  $dB$  определяется соотношением

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \tag{7.16}$$

Выразим переменные  $r$  и  $dl$  через постоянную  $a$  и переменную  $\alpha$  (см. рис. 7.1):  $r = a / \sin \alpha$ ,  $dl \sin \alpha = rd\alpha = \frac{a}{\sin \alpha} d\alpha$ . Тогда  $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha$ , и следовательно,

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (7.17)$$

В частности, для бесконечного прямолинейного проводника  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$  и

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad (7.18)$$

вектор  $\vec{B}$  в каждой точке пространства лежит в плоскости, перпендикулярной направлению тока; силовые линии представляют собой окружности в этой плоскости с центром на прямой, содержащей проводник.

**Пример 7.2.** По контуру, представляющему собой квадрат со стороной  $a$ , течет ток  $I$ . Найдите индукцию магнитного поля на оси, проходящей через центр квадрата параллельно его стороне.

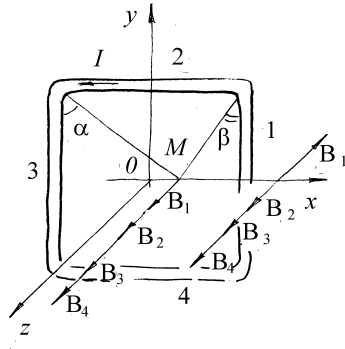


Рис.7.2

**Решение.** Существуют две равноправные оси – ось  $Ox$  и ось  $Oy$  системы координат, представленной на рис.7.2. Для определенности найдем вектор индукции  $\vec{B}$  в точке  $M$  с координатами  $(x, 0)$ .

Поле, создаваемое квадратным контуром, можно рассматривать как суперпозицию полей четырех отрезков прямолинейных токов. В силу симметрии относительно начала координат ограничимся случаем  $x \geq 0$ .

Вклады в результирующий вектор  $\vec{B}$  от каждой стороны квадрата направлены вдоль оси  $Oz$  (перпендикулярно плоскости контура) и, следовательно, величина  $B$  – есть алгебраическая



сумма этих вкладов. Положительной будем считать проекцию вектора, направленного по оси  $Oz$  (к нам).

Используя решение предыдущей задачи, можно найти индукцию магнитного поля, создаваемого каждой стороной рамки. При  $0 < x < a/2$  эти индукции равны:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a/2 - x)} \cos \beta,$$

$$B_2 = B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\sin \alpha + \sin \beta),$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a/2 + x)} \cos \alpha,$$

где углы  $\alpha$  и  $\beta$  показаны на рис.7.2.

После несложных преобразований получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left( \frac{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{x + \frac{a}{2}} - \frac{\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{x - \frac{a}{2}} \right).$$

Если  $x > a/2$  результат не изменится, хотя направление  $B_1$  изменится на противоположное (см. Рис.7.5).

При  $x \gg a$  последнее выражение можно преобразовать

$$\begin{aligned} B &\cong -\frac{\mu_0 I}{\pi a} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2x-a} \right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2x+a} \right)^2 \right] = \\ &= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{2x-a} \right)^2 - \left( \frac{1}{2x+a} \right)^2 \right] = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{8ax}{(4x^2 - a^2)^2} \cong \\ &\cong -\frac{\mu_0 I a^2}{4\pi x^3} = -\frac{\mu_0 P_m}{4\pi x^3}, \end{aligned}$$

где  $p_m = IS = Ia^2$ . То есть, при  $x \gg a$  поле убывает с ростом расстояния, как поле магнитного диполя с моментом  $p_m = Ia^2$ .

**Пример 7.3.** По кольцу радиуса  $R$  течет ток  $I$ . Найдите индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  в точке, расположенной на перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его центра.

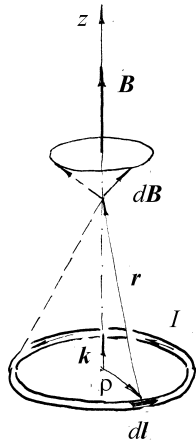


Рис.7.3

**Решение.** Воспользуемся формулой (7.4). При интегрировании по  $d\vec{l}$  учтем, что  $r = \sqrt{R^2 + z^2} = \text{const}$  (см. рис. 7.3). Введем вектор  $\rho$  так, что  $\vec{r} = \vec{k}z - \vec{\rho}$  ( $\vec{k}$  – орт оси  $Oz$ ). Подставив  $\vec{r}$  в (7.4), получим  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ \oint [d\vec{l}, \vec{k}z] + \oint [\vec{\rho}, d\vec{l}] \right\}$ . Поскольку вдоль пути интегрирования  $\vec{k}z = \text{const}$ , то  $\oint [d\vec{l}, \vec{k}z] = \left[ \oint d\vec{l}, \vec{k}z \right] = 0$ , так как  $\oint d\vec{l} = 0$ . Кроме того,  $\oint [\vec{\rho}, d\vec{l}] = 2\vec{S} = 2\vec{k}S = 2\vec{k}\pi R^2$ . Поэтому

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (7.19)$$

При  $z \gg R$  из последнего соотношения следует:

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{z^3}.$$

Следовательно, при  $z \gg R$  поле убывает с ростом  $z$  как поле магнитного диполя с моментом  $p_m = IS$ .

В центре кругового витка ( $z=0$ ) магнитная индукция равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{R^3}, \quad B = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

**Пример 7.4.** Найдите магнитную индукцию на оси соленоида, обмотка которого содержит  $n_0$  витков на единицу длины. Ток, протекающий по обмотке, равен  $I$ .

**Решение.** Соленоид – цилиндрическая катушка с током, состоящая из большого числа витков проволоки, которые образуют винтовую линию. При плотном расположении витков соленоид можно рассматривать как систему последовательно соединенных круговых витков одинакового радиуса с общей осью.

Найдем распределение поля вдоль оси соленоида  $B(z)$ . Если  $n_0$  достаточно велико, то можно заменить ток, текущий по виткам, током, равномерно распределенным по поверхности соленоида. Пусть радиус соленоида равен  $R$ , а его длина –  $l$ . Для вычисления поля в произвольной точке  $M$  на оси выделим колечко с током шириной  $dz$ , центр которого расположен на расстоянии  $z$  от  $M$  (рис. 7.4). Величина вклада  $dB$  этого колечка в  $B$  равна согласно (7.19)

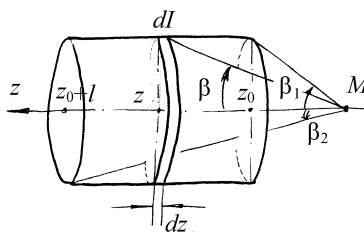


Рис.7.4

$$dB = \frac{\mu_0 dI R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (7.20)$$

Учитывая, что  $dI = In_0 dz$ , проинтегрируем (7.20):

$$B = \frac{\mu_0 In_0 R^2}{2} \int_{z_0}^{z_0+l} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Заменив переменную интегрирования  $z = R \operatorname{ctg} \beta$ ;  $dz = -\frac{R d\beta}{\sin^2 \beta}$ , найдем:

$$B = \frac{\mu_0 In_0}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (7.21)$$

где  $\cos \beta_2 = \frac{z_0 + l}{\sqrt{(z_0 + l)^2 + R^2}}$ ,  $\cos \beta_1 = \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + R^2}}$  косинусы углов, под

которыми видны из точки наблюдения концы соленоида. В частности, если точка  $M$  находится в центре соленоида, то

$$\cos \beta_1 = -\cos \beta_2 = \frac{l/2}{\sqrt{R^2 + l^2/4}} \text{ и } B = \mu_0 n_0 \frac{l/2}{\sqrt{R^2 + l^2/4}}.$$

В случае *длинного соленоида* ( $l \gg R$ ) поле вдали от его концов не зависит от  $z$ . Для поля на оси соленоида из последнего соотношения найдем

$$B \approx \mu_0 n_0 I. \quad (7.22)$$

**Пример 7.5.** Найдите силу взаимодействия между бесконечно длинным тонким прямолинейным проводником, по которому течет ток  $I_1$ , и отрезком прямого тонкого проводника длиной  $l$  с током  $I_2$ , лежащими в одной плоскости. Угол между проводниками равен  $\alpha$ , нижний конец отрезка проводника находится на расстоянии  $a$  от бесконечного проводника.

**Решение.** Выделим на отрезке проводника с током  $I_2$  малый элемент  $dx$  на расстоянии  $x$  от его нижнего края. Проводник с током  $I_1$  создает в месте расположения этого элемента магнитное поле с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a + x \sin \alpha)}, \text{ и это поле действует на элемент } dx \text{ с силой, равной}$$

$$dF = I_2 B dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(a + x \sin \alpha)} dx, \text{ направленной в плоскости токов}$$

перпендикулярно току  $I_2$ . Интегрируя по длине проводника, получаем:

$$F = \int_0^l \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(a + x \sin \alpha)} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \sin \alpha} \ln \left( 1 + \frac{l}{a} \sin \alpha \right).$$

В случае параллельных проводников  $\alpha = 0$  и  $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}$ .

**Пример 7.6.** Найдите закон движения электрона в постоянных магнитном и электрическом полях. Считать, что поля однородные и  $\vec{E} \perp \vec{B}$ . Начальная скорость электрона равна  $\vec{v}_0$ . Масса электрона -  $m$ , абсолютная величина его заряда -  $e$ .

**Решение.** На заряд  $q$ , движущийся в электрическом и магнитном полях, действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (7.23)$$

где  $\vec{v}$  - скорость заряда.

Выберем систему отсчета так, чтобы начало координат совпадало с положением электрона в начальный момент времени; ось  $Ox$  направим по вектору  $\vec{E}$ , а ось  $Oy$  - вдоль  $\vec{B}$ . В этой системе координат уравнение (7.23) в проекциях запишется следующим образом:

$$m\ddot{x} = -eE + eB\dot{z}, \quad (7.24)$$

$$m\ddot{y} = 0, \quad (7.25)$$

$$m\ddot{z} = -eB\dot{x}. \quad (7.26)$$

Интегрирование уравнения (7.25) при начальных условиях  $\dot{y}(0) = v_{0y}$  и  $y(0) = 0$  дает:

$$y = v_{0y}t. \quad (7.27)$$

Из уравнения (7.26) имеем  $z = -\frac{e}{m}Bx + C$  и так как  $x(0) = 0$  и  $\dot{z}(0) = v_{0z}$ , то

$C = v_{0z}$  и

$$\dot{z} = v_{0z} - \frac{e}{m}Bx. \quad (7.28)$$

Введем обозначение  $\frac{e}{m}B = \omega$ ; подставив (7.28) в (7.24), получим

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega v_{0z} - \frac{e}{m}E. \quad (7.29)$$

Решая уравнение (7.29) при начальных условиях  $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(0) = v_{0x}$ , получим

$$x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + \left( \frac{eE}{m\omega^2} - \frac{v_{0z}}{\omega} \right) (\cos \omega t - 1). \quad (7.30)$$

Подставив (7.30) в (7.28), учитывая (7.27) и (7.30), найдем закон движения электрона в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + \left( \frac{eE}{m\omega^2} - \frac{v_{0z}}{\omega} \right) (\cos \omega t - 1), \\ y &= v_{0y}t, \\ z &= \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1) - \left( \frac{eE}{m\omega^2} - \frac{v_{0z}}{\omega} \right) \sin \omega t + \frac{eE}{m\omega} t \end{aligned}$$

**Пример 7.7.** Квадратная рамка массы  $m$ , сделанная из тонкого провода, может без трения вращаться относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр перпендикулярно двум противоположным сторонам рамки. Рамка находится в горизонтальном однородном магнитном поле индукции  $B$ . По рамке течет постоянный ток  $I$ . Определите период малых колебаний рамки около положения ее равновесия.

**Решение.** Рамка находится в положении равновесия, когда плоскость рамки перпендикулярна к направлению внешнего поля. Причем положение равновесия устойчиво, если направление магнитного поля, создаваемого током, совпадает с направлением внешнего поля.

При отклонении рамки от ее устойчивого положения равновесия на угол  $\varphi$ , силы Ампера, действующие на параллельные оси стороны рамки, создают

пару сил с моментом, равным  $IBl^2 \sin \varphi$ , стремящимся вернуть рамку в положение равновесия. С учетом того, что момент инерции рамки относительно оси вращения равен  $\frac{ml^2}{6}$ , для малых отклонений ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) получаем уравнение колебаний  $\frac{ml^2}{6} \ddot{\varphi} + IBl^2 \varphi = 0$ . Откуда период колебаний равен  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{6IB}}$ .

**Пример 7.8.** Шар радиусом  $R$ , равномерно заряженный по объему зарядом  $q$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найдите магнитный момент шара.

**Решение.** Элементарный объем  $r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$  (в сферической системе координат) при его вращении задает круговой ток радиуса  $r \sin \vartheta$  величиной

$$dI = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{2\pi r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{3q\omega}{4\pi R^3} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta.$$

Этот ток создает магнитный момент, направленный вдоль оси вращения и численно

$$\pi^2 \sin^2 \vartheta dI = \pi^2 \sin^2 \vartheta \frac{3q\omega}{4\pi R^3} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta = \frac{3q\omega}{4R^3} r^4 \sin^3 \vartheta dr d\vartheta. \quad \text{Отсюда}$$

$$P_m = \int_0^R \int_0^\pi \frac{3q\omega}{4R^3} r^4 \sin^3 \vartheta dr d\vartheta = \frac{q\omega R^2}{5} \quad \text{и потому} \quad \vec{P}_m = \frac{qR^2}{5} \vec{\omega}$$

**Пример 7.9.** Найти индукцию магнитного поля в центре и в фокусе эллиптического контура, по которому течет ток  $I$ . Полуоси эллипса равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ).

**Решение.** Для любой точки, лежащей в плоскости контура  $d\vec{B} = \vec{n}dB$ , где  $\vec{n}$  - единичный вектор, перпендикулярный плоскости контура и направленный согласно правилу буравчика

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin(\vec{dl}, \vec{r})}{4\pi r^2}, \quad (7.31)$$

$\vec{r}$  - радиус-вектор, проведенный в точку наблюдения  $M$  из начала вектора  $d\vec{l}$ .

Для произвольного контура, как видно из рис.7.5,  $dl \sin(\vec{dl}, \vec{r}) = r d\alpha$ , где  $d\alpha$  - угол, под которым виден из точки наблюдения элемент тока  $d\vec{l}$ , и формулу (7.31) можно записать в виде

$$dB = \frac{\mu_0 I d\alpha}{4\pi r}. \quad (7.32)$$

Если контур задан в полярных координатах уравнением  $r = r(\varphi)$ , то для точек внутри контура из (7.32) имеем

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r(\varphi)}. \quad (7.33)$$

В декартовой прямоугольной системе координат  $xOy$  каноническое уравнение эллипса имеет вид

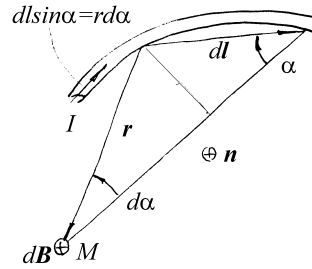
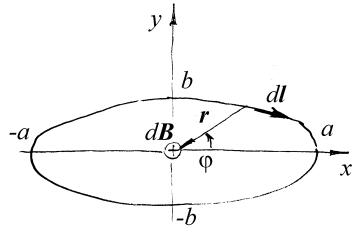


Рис.7.5





$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.34)$$

Рис.7.6

Совместим начало полярной системы координат с центром эллипса. Вклад в поле в точке  $M(0,0)$  элемента  $d\vec{l}$  направлен за плоскость рисунка (на рис.7.6 это обозначено символом  $\oplus$ ).

Так как  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , то, учитывая (7.34), получим

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \text{эксцентриситет эллипса}$$

( $0 \leq \varepsilon < 1$ ). С помощью замены  $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  формула (7.33) сводится к полному эллиптическому интегралу второго рода  $E(\varepsilon)$ :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\beta = \frac{\mu_0 I}{\pi b} E(\varepsilon). \quad \text{Для окружности}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi b} E(0) = \frac{\mu_0 I}{2b}.$$

Если поместить начало полярной системы координат в фокус эллипса, например в точку  $F_1$ , а полярную ось направить к ближайшей вершине, уравнение эллипса будет  $r = \frac{b^2}{a(1 + \varepsilon \cos \varphi)}$ . Используя (7.33),

$$\text{найдем} \quad B_{F_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a(1 + \varepsilon \cos \varphi)}{b^2} d\varphi = \frac{\mu_0 I a}{2b^2}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\vec{B}_{F_1} = \vec{B}_{F_2}, \quad \text{а в случае окружности} \quad (a=b) \quad B_0 = \frac{\mu_0 I}{2b}.$$

**Пример 7.10.** Найти векторный потенциал и индукцию магнитного поля, создаваемого контуром с током  $I$  в произвольной точке на расстоянии, много большем линейного размера контура.

**Решение.** По определению векторного потенциала и согласно формулам

$$(7.11) \text{ и } \int_C \varphi d\vec{l} = \iint_S [\vec{n}; \nabla \varphi] dS \text{ имеем, полагая } \varphi = \frac{1}{r} :$$

$$\begin{aligned} \vec{B} = \text{rot} \vec{A} &= \text{rot} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L)} \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{rot} \oint_{(S)} \left[ \vec{n}; \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{rot} \oint_{(S)} \frac{[\vec{n}; \vec{r}]}{r^3} dS = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \oint_{(S)} \frac{[I d\vec{S}; \vec{r}]}{r^3}. \end{aligned}$$

Дифференцирование под знаком градиента ведется по координатам начала вектора  $\vec{r}$ , поэтому  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = + \frac{\vec{r}}{r^3}$ . В последнем интеграле  $\vec{r}$  - радиус-вектор, проведенный из элемента  $dS$  натянутой на контур поверхности в точку наблюдения.

Если точка наблюдения находится на большом удалении от источника поля, можно приблизительно считать, что  $\vec{r}$  не зависит от положения элемента  $dS$ , и потому  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \frac{[\vec{p}_m; \vec{r}]}{r^3}$ , где  $\vec{p}_m = I \iint_{(S)} \vec{n} dS = I \iint_{(S)} d\vec{S}$  - магнитный

момент контура с током. Тогда по формулам векторного анализа (см.

Приложение)  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{p}_m; \vec{r})\vec{r} - \vec{p}_m r^2}{r^5}$ . Здесь  $\vec{r}$  - радиус-вектор,

проведенный в точку наблюдения из точки расположения контура.

### Задачи и вопросы для самостоятельного решения

**7.1.** Найдите индукцию магнитного поля прямоугольного контура с током  $I$  в центре этого контура. Стороны прямоугольника равны  $a$  и  $b$ .

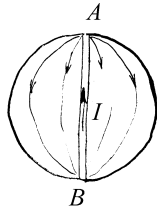
**7.2.** Определите индукцию магнитного поля поверхностного тока, распределенного равномерно по плоскости с линейной плотностью  $\vec{i}$ .

**7.3.** Определите индукцию магнитного поля поверхностных токов, распределенных равномерно по двум параллельным плоскостям с линейными плотностями  $\vec{i}$  и  $-\vec{i}$ .

**7.4.** По прямолинейному цилиндрическому проводу радиуса  $R$  течет ток  $I$ , равномерно распределенный по поверхности провода. Найдите индукцию магнитного поля как функцию расстояния от оси провода.

**7.5.** Ток  $I$  течет вдоль длинной тонкостенной цилиндрической трубки радиусом  $R$ , имеющей по всей длине щель ширины  $d$ ,  $d \ll R$ , параллельную оси трубки. Определите индукцию магнитного поля внутри трубки на расстоянии  $r$  от середины щели  $r \gg d$ .

**7.6.** Проводящая сфера радиуса  $R$  заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Сфера вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Найдите индукцию магнитного поля на оси вращения.



**7.7.** Внутри однородной проводящей сферы от точки А к точке В (см. рис.7.7) по диаметру большого круга проходит проводник. Ток силы  $I$  идет от В к А по проводнику, а затем по сфере к точке В. Определите индукцию магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого этими токами, внутри и вне сферы.

Рис.7.7

**7.8.** По бесконечной прямолинейной тонкой полосе ширины  $l$  течет ток  $I$ , равномерно распределенный по ширине полосы. Найдите индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии  $h$  от плоскости полосы над ее серединой.

**7.9.** На рис.7.8 показана схема симметричного разветвления стационарных токов. Все проводники прямолинейны, бесконечны и лежат в одной плоскости. Определите индукцию магнитного поля на линии, перпендикулярной к плоскости токов и проходящей через точку А, если сила тока в разветвленных проводниках равна  $I$ , а угол между ними равен  $2\alpha$ .

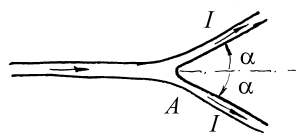


рис.7.8

**7.10.** Тонкий проводник, по которому течет ток  $I$ , имеет форму двух параллельных полубесконечных прямых, соединенных полуокружностью радиуса  $R$ . Найдите силу, действующую на проводник со стороны внешнего однородного магнитного поля, вектор индукции которого  $\vec{B}$  параллелен прямым проводам.

**7.11.** Кольцо радиусом  $R$  с током  $I_1$  лежит в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $I_2$ . Расстояние от центра кольца до провода равно  $a$  ( $a > R$ ). Найдите силу, действующую на кольцо.

**7.12.** Из некоторой точки объема, в котором создано однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , вылетают две частицы массами  $m$ , несущие заряды  $q$  и  $-q$  соответственно. Скорости частиц равны  $v$ , направлены под углом  $\alpha$  к линиям магнитной индукции, угол между векторами скоростей равен  $2\alpha$ . Определите траектории частиц. Через какое время и на каком расстоянии от точки вылета встретятся частицы? Каково будет максимальное расстояние между частицами в процессе движения? Кулоновским взаимодействием частиц пренебречь.

**7.13.** Точечный заряд  $q$  массой  $m$  влетает со скоростью  $v_0$  в область с постоянным однородным магнитным полем с индукцией  $\mathbf{B}$  перпендикулярно линиям магнитной индукции. На какой угол  $\alpha$  отклонится частица, если область, занимаемая магнитным полем, ограничена плоскостями, перпендикулярными вектору начальной скорости, расстояние между которыми  $L$ . Силу тяжести не учитывать.

**7.14.** По контуру, представляющему собой правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность радиусом  $R$  течет ток  $I$ . Найдите вектор индукции  $\vec{B}_0$  магнитного поля в центре окружности.

**7.15.** Из однородного провода изготовлен контур в виде квадрата. К двум соседним вершинам квадрата подсоединен источник Э.Д.С. Пренебрегая полем подводющих проводов, найдите вектор индукции магнитного поля  $B_0$  в центре квадрата.

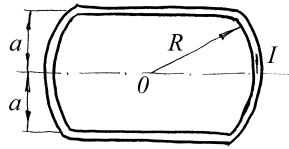


Рис. 7.9

**7.16.** Найдите вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}_0$  в центре плоского замкнутого контура, изображенного на рис. 7.9, по которому течет ток  $I$ . Контур состоит из двух дуг окружности радиусом  $R$  и двух прямых, отстоящих друг от друга на расстоянии  $2a$ .

**7.17.** Найдите индукцию магнитного поля  $\vec{B}_0$  в центре плоской спирали, по которой течет ток  $I$ . Спираль заключена между окружностями с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ). В полярных координатах  $\rho, \varphi$  расстояние от центра спирали  $\rho$  линейно зависит от угла  $\varphi$ . Число витков спирали равно  $N$ . Поле подводющих проводов не учитывать.

**7.18.** Электрон вылетает с малой скоростью из катода и движется к аноду, потенциал которого на  $U$  больше потенциала катода. Пройдя расстояние  $l$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , создаваемом электромагнитом, и двигаясь далее по инерции, электрон попадает на флуоресцентный экран, помещенный на расстоянии  $D$  от электромагнита (рис. 7.10). Найдите смещение  $\delta$  пятна на экране как функцию индукции магнитного поля.

**7.19.** Бесконечно длинный цилиндр радиусом  $R$ , заряженный равномерно по объему с плотностью  $\rho$ , вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Найдите индукцию магнитного поля внутри и вне цилиндра.

**7.20.** Проволочное кольцо радиусом  $R$  помещено в однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , перпендикулярное плоскости кольца. Какой максимальный ток можно пропустить по кольцу, если максимальное натяжение, которое выдерживает проволока, равно  $T$ ? Влиянием собственного поля кольца пренебречь.

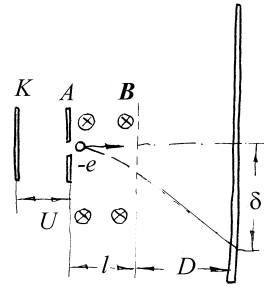


Рис.7.10

## §8. Магнитное поле в веществе

### *Краткие теоретические сведения*

Вектор намагниченности. Тело, помещенное во внешнее магнитное поле, намагничивается и создает собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее поле по принципу суперпозиции. Согласно гипотезе Ампера, частицы, из которых состоит тело, можно рассматривать как маленькие контуры, обтекаемые так называемыми *молекулярными (или амперовыми) токами*, связанными с орбитальным движением электронов. С такой точки зрения возникновение дополнительного магнитного поля можно объяснить ориентацией этих контуров во внешнем магнитном поле. Основные закономерности поведения намагничивающихся сред объясняются в рамках задачи «замкнутый контур с током в магнитном поле», рассмотренной в предыдущем параграфе.

Для макроскопического описания магнитного поля в веществе вводится усредненная по объему вещества его характеристика – *вектор намагниченности*

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{m_i}}{\Delta V}, \quad (8.1)$$

где  $\vec{p}_{m_i}$  – магнитные моменты всех амперовых токов, оказавшихся внутри бесконечно малого объема  $\Delta V$ . Величина вектора  $\vec{J}$  зависит от индукции внешнего поля и от свойств рассматриваемого вещества. Эта связь задается *материальным уравнением* и считается известной из опыта. Для удобства описания магнитного поля в материальных средах вводится *вектор напряженности* магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (8.2)$$

Для достаточно слабых полей и большинства встречающихся в природе веществ можно считать, что  $\vec{J} = \chi \vec{H}$  (коэффициент пропорциональности  $\chi$  называется *магнитной восприимчивостью* вещества); и материальное уравнение для магнитного поля, согласно (8.2) принимает вид

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (8.3)$$

где  $\mu = 1 + \chi$  – безразмерная константа, называемая *магнитной проницаемостью* вещества. Описание магнитного поля в терминах векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  позволяет не вводить явно плотность молекулярных (амперовых) токов, хотя в некоторых случаях рассмотрение этих токов упрощает решение задач.

По своим магнитным свойствам все вещества подразделяются на *диамагнетики* ( $\chi < 0$ ,  $\mu < 1$ ,  $\vec{J}$  и  $\vec{B}$  ориентированы противоположно), *парамагнетики* ( $\chi > 0$ ,  $\mu > 1$ ,  $\vec{J}$  и  $\vec{B}$  ориентированы в одном направлении) и *ферромагнетики*. В последних линейная зависимость между  $\vec{J}$  и  $\vec{B}$  нарушается даже в сравнительно слабых полях, и равенство (8.3) выполняется лишь приближенно, причем  $\mu \gg 1$  (в сплавах железа, то есть сталях, магнитная проницаемость может превышать  $10^3$ ). В некоторых средах (постоянных магнитах) намагниченность слабо зависит от внешнего поля и задается обычно условиями задачи. Уравнение (8.3) в этом случае неприменимо, и следует использовать непосредственно соотношение (8.2).

Закон полного тока. В произвольной намагниченной среде циркуляция вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме токов  $I$ , которые охватываются этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (8.4)$$

Это важнейшее интегральное соотношение магнитостатики называется *законом полного тока* или *теоремой о циркуляции напряженности магнитного поля*. При этом каждый ток, охватываемый контуром, считается



положительным (отрицательным), если из конца вектора плотности этого тока обход контура виден происходящим против часовой стрелки (по часовой стрелке). Если контур интегрирования  $N$  раз обходит ток  $I$  (с учетом направления), то в правую часть (8.4) следует подставить  $NI$ . Число  $N$  называют *кратностью сцепления* тока с контуром.

Дифференциальное соотношение, соответствующее интегральной теореме (8.4), имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (8.5)$$

где  $\vec{j}$  – плотность тока проводимости в рассматриваемой точке пространства.

Магнитное поле в однородной среде. Магнитная проницаемость вещества не входит явно в закон полного тока. Поэтому заданная конфигурация токов будет создавать одинаковое распределение поля  $\vec{H}$  в вакууме и в безграничной однородной среде. (Для неоднородной среды это, конечно, не справедливо). Соответственно, формулы (7.4) и (7.11) могут быть применены к полям в однородной намагничивающейся среде, если заменить в них  $\mu_0$  на  $\mu\mu_0$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (8.6)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l}}{r}. \quad (8.7)$$

Как следует из уравнений (8.3), (8.5) и определения векторного потенциала (7.12), для произвольного распределения токов с объемной плотностью  $\vec{j}$  в однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu$  векторный потенциал  $\vec{A}$  удовлетворяет *векторному уравнению Пуассона*:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \mu \vec{j}. \quad (8.8)$$

Граничные условия для магнитного поля. Из свойства соленоидальности магнитного поля следует, что на границе раздела двух

сред с различными значениями  $\mu$  нормальные компоненты вектора  $\vec{B}$  непрерывны; по теореме о циркуляции в отсутствие на границе раздела поверхностных токов проводимости тангенциальные компоненты вектора  $\vec{H}$  также непрерывны:

$$B_{n_1} = B_{n_2}, \dots, H_{\tau_1} = H_{\tau_2}. \quad (8.9)$$

Тангенциальные компоненты вектора  $\vec{B}$  на границах претерпевают разрыв. Физически это связано с разрывом вектора намагниченности  $\vec{j}$  и может быть объяснено протеканием по границе поверхностного молекулярного тока, плотность которого равна величине скачка тангенциальной составляющей вектора намагниченности.

**Пример 8.1.** Найдите индукцию магнитного поля, создаваемого тороидом, обмотка которого содержит  $N$  витков. Ток, протекающий по обмотке, равен  $I$ , магнитная проницаемость сердечника  $\mu$ .

**Решение.** Тороид – кольцевая катушка, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора. При достаточно плотной упаковке витков такую катушку можно рассматривать как систему одинаковых витков с центрами на средней линии тороида, плоскости которых перпендикулярны к этой линии. При повороте тороида вокруг оси симметрии он переходит сам в себя, поэтому линии магнитной индукции суть концентрические окружности с центрами на оси симметрии тороида, и вдоль силовой линии величина вектора магнитной индукции постоянна. Теорема о циркуляции, примененная к произвольной силовой линии, дает:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 2\pi r H = \begin{cases} NI & \text{внутри тороида} \\ 0 & \text{вне тороида} \end{cases},$$

где  $r$  – радиус выбранной линии магнитной индукции. Видно, что поле сосредоточено внутри тороида и равно:

$$H = \frac{NI}{2\pi r}, \quad B = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r}. \quad (8.10)$$

**Пример 8.2.** Катушка (соленоид) намотана на длинный прямой сердечник из однородного магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  и имеет  $N$  витков. Ток, протекающий по обмотке, равен  $I$ , длина соленоида  $l$  много больше его радиуса  $R$ . Найдите индукцию и напряженность магнитного поля на оси соленоида внутри сердечника и вне его.

**Решение.** Наличие сердечника не дает возможность воспользоваться непосредственно формулой (7.4) для определения магнитного поля.

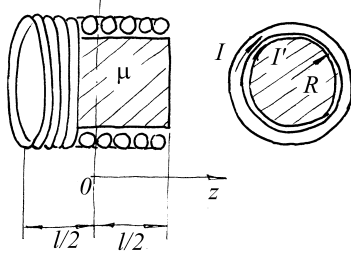


Рис.8.1

Согласно гипотезе Ампера, поле в сердечнике создается как током  $I$  так и микротоками во всем сердечнике, совокупное действие которых равносильно действию добавочного (заранее неизвестного) тока  $I'$ , обтекающего поверхность сердечника (рис. 8.1). Тогда, по аналогии с примером (7.Пр.4) (7.21), можно написать, что индукция поля на оси

соленоида в точке с координатой  $z$ , отсчитываемой от середины соленоида, равна  $B = Cf(z)$ , где  $f(z) = \frac{z+l/2}{\sqrt{R^2+(z+l/2)^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{R^2+(z-l/2)^2}}$ ,  $C$  –

подлежащая определению константа. На оси сердечника напряженность магнитного поля равна  $H_c = \frac{Cf(z)}{\mu\mu_0}$ , а на оси в воздухе вне соленоида

$H_b = \frac{Cf(z)}{\mu_0}$ . По теореме о циркуляции, примененному к бесконечной

силовой линии, совпадающей с осью соленоида,

$\int_{-\infty}^{\infty} H dz = \int_{-\infty}^{-l/2} H_b dz + \int_{-l/2}^{l/2} H_c dz + \int_{l/2}^{\infty} H_b dz = IN$ . В приближении длинного

соленоида  $\left(\frac{R}{l} \ll 1\right)$   $\int_{-\infty}^{-l/2} H_b dz = \int_{l/2}^{\infty} H_b dz = \frac{C}{\mu_0} R$ , а  $\int_{-l/2}^{l/2} H_c dz = \frac{C}{\mu\mu_0} 2(l-R)$ ,

(пренебрегая членами  $\sim (R/l)^2$ ) откуда следует, что  $\frac{2CR}{\mu_0} + \frac{2C(l-R)}{\mu\mu_0} = IN$ ,

откуда  $C = \frac{\mu\mu_0 IN}{2(l + (\mu - 1)R)}$ . Окончательно,  $B(z) = \frac{\mu\mu_0 IN}{2(l + (\mu - 1)R)} f(z)$ . При

$\mu R \ll l$  будет  $B(z) = \frac{\mu\mu_0 IN}{2l} f(z)$ , т.е. индукция поля в  $\mu$  раз больше

индукции в отсутствие сердечника. Если же  $\mu R \gg l$  (а для ферромагнитных сердечников  $\mu \sim 10^3 - 10^7$  и выполнение этого условия

вполне возможно)  $B(z) = \frac{\mu_0 IN}{2R} f(z)$ . Напряженность поля внутри и вне

соленоида равна соответственно  $H_c(z) = \frac{IN}{2(l + (\mu - 1)R)} f(z)$ ,

$H_b(z) = \frac{\mu N}{2(l + (\mu - 1)R)} f(z)$ . На торцах сердечника вектор  $\vec{H}$  претерпевает

разрыв, возрастающий в  $\mu$  раз при переходе из сердечника в пустоту. Внутри соленоида вдали от концов ( $|z| \ll l$ )  $f(z) \approx 2$ , поэтому поле можно считать однородным:

$$B(z) \approx \frac{\mu\mu_0 IN}{l + (\mu - 1)R} \quad (8.11)$$

**Пример 8.3.** По бесконечному прямолинейному цилиндрическому проводу радиусом  $R$  течет ток  $I$ , равномерно распределенный по сечению проводника. Найдите напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  как функцию расстояния от оси провода.

**Решение.** Выберем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$ . Ось  $Oz$  направим по оси провода в сторону тока. Поскольку перенос начала отсчета вдоль оси  $Oz$  и поворот вокруг  $Oz$  не изменяет конфигурацию токов в новой системе координат, вектор  $\vec{H}$  зависит только от  $\rho$ . Для нахождения напряженности поля в произвольной точке пространства  $M$  рассмотрим нормальное сечение провода, плоскость которого включает данную точку. Выделим на сечении провода элементарную площадку  $ds_1 = \rho d\rho d\varphi$ , через

которую вдоль оси Oz течет ток  $dI_1 = j ds_1$  ( $j$  - плотность тока). Он вносит вклад  $d\vec{H}_1$  в поле  $\vec{H}$ , причем  $d\vec{H}_1 \perp \vec{r}_1$ . Возьмем симметричную относительно ОМ элементарную площадку  $ds_2$ . Её вклад  $d\vec{H}_2$

перпендикулярен  $\vec{r}_2$  и  $|d\vec{H}_1| = |d\vec{H}_2|$ .

Суммарный вклад  $d\vec{H} = d\vec{H}_1 + d\vec{H}_2$  перпендикулярен ОМ. Так как при данной конфигурации тока суммирование вкладов можно произвести симметричными парами, то поле, создаваемое проводом, перпендикулярно ОМ. Отсюда следует, что силовые линии  $\vec{H}$  представляют собой окружности.

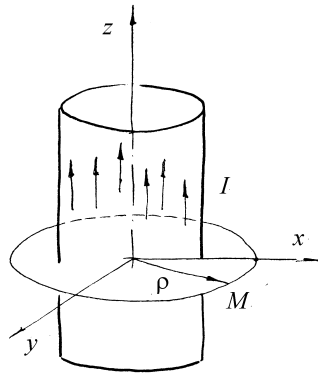


Рис.8.2

Для вычисления величины поля воспользуемся теоремой о циркуляции вектора  $\vec{H}$  (8.4):  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i$ . В качестве

контура  $L$  выберем окружность радиуса  $\rho_M$  (см. рис. 8.2), проходящую через точку  $M$ . Поскольку  $\vec{H} \parallel d\vec{l}$ , то  $\vec{H} d\vec{l} = H(\rho_M) dl$ . На окружности  $L$   $\rho_M = const$  и, следовательно,  $H(\rho_M) = const$ . Таким образом, из (8.4)

имеем  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H dl = 2\pi\rho_M H(\rho_M) = \begin{cases} I\rho_M^2 / \pi R^2, & 0 \leq \rho_M \leq R \\ I, & \rho_M > R \end{cases}$ . Отсюда

$$H(\rho) = \begin{cases} I\rho / 2\pi R^2, & 0 \leq \rho \leq R \\ I / 2\pi\rho, & \rho > R \end{cases}. \quad (8.12)$$

Полученный результат можно представить в векторном виде:

$$\text{внутри проводника } (0 \leq \rho \leq R) \quad \vec{H} = \frac{1}{2} [\vec{j}, \vec{\rho}],$$

$$\text{вне проводника} \quad \vec{H} = \frac{1}{2} [\vec{j}, \vec{\rho}] \frac{R^2}{r^2},$$

где  $\vec{j}$  - плотность тока ( $j = I/\pi R^2$ ),  $\vec{\rho}$  - радиус-вектор, проведенный в точку М из произвольной точки на оси провода,  $r$  - расстояние от точки М до оси проводника.

**Пример 8.4.** На тороидальный сердечник из однородного магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  намотано  $N$  витков провода. В сердечнике сделан зазор, ширина которого  $d$  мала по сравнению с линейным размером сечения тора. Найдите напряженность и индукцию магнитного поля в сердечнике и в зазоре.

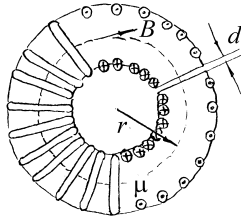


Рис.8.3

**Решение.** Из условия (8.9) равенства нормальных составляющих векторов  $\vec{B}$  на границе раздела сред следует, что индукция магнитного поля одинакова в сердечнике и в зазоре. Если пренебречь рассеянием силовых линий вблизи краев зазора, их можно считать концентрическими окружностями с центром на оси сердечника. (рис. 8.3). На расстоянии  $r$  от оси напряженности поля в сердечнике и в зазоре

соответственно равны  $\vec{H}_c = \frac{\vec{B}(r)}{\mu_0\mu}$  и  $\vec{H}_z = \frac{\vec{B}(r)}{\mu_0}$ . Теорема о циркуляции,

примененная к силовой линии радиусом  $r$  внутри катушки, дает:

$$IN = \frac{B(r)}{\mu_0\mu}(2\pi r - d) + \frac{B(r)}{\mu_0}d, \text{ откуда}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0\mu IN}{2\pi r + (\mu - 1)d}, \quad (8.13)$$

$$H_c = \frac{IN}{2\pi r + (\mu - 1)d}, \quad H_z = \frac{\mu IN}{2\pi r + (\mu - 1)d}. \text{ При } (\mu - 1)d \ll r \text{ можно}$$

приблизительно считать  $H_c \approx \frac{IN}{2\pi r}$ . Это приближение даже при малой

величине зазора не всегда оправдано в случае больших значений  $\mu$ . Если  $r \ll \mu d$ , то  $H_c \approx \frac{IN}{\mu d}$ ,  $H_z = \frac{IN}{d}$ ,  $B \approx \frac{\mu_0 IN}{d}$ .

**Пример 8.5.** Шар радиусом  $R$  из однородного магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  вносится в однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_0$ . Найдите индукцию магнитного поля внутри и вне шара.

**Решение.** В отсутствие токов проводимости  $\text{rot } \vec{H} = 0$ , а поскольку  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  и  $\mu$  не зависит от координат, то и  $\text{rot } \vec{B} = 0$ . Это дает возможность искать поле и вне, и внутри шара в виде суперпозиции известных решений, удовлетворяющих этому уравнению и уравнению  $\text{div } \vec{B} = 0$ . Попробуем найти решение этой задачи в виде суммы однородного поля  $\vec{B}_1$  и поля магнитного диполя  $\vec{p}_m$ , т.е.  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{p}_m \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right)$ , причем векторы  $B_1$  и  $p_m$  различны для внутренней (i) и внешней (e) областей:

$$\vec{B}^{(i)} = \vec{B}_1^{(i)} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{p}_m^{(i)} \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m^{(i)}}{r^3} \right) \quad \vec{B}^{(e)} = \vec{B}_1^{(e)} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{p}_m^{(e)} \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m^{(e)}}{r^3} \right).$$

Четыре неизвестных вектора  $\vec{B}_1^{(e)}, \vec{B}_1^{(i)}, p_m^{(e)}, p_m^{(i)}$  вне и внутри шара найдем из условий на границе шара (8.9) и на бесконечности, а также из условия ограниченности поля в центре шара. Из последнего условия следует, что  $\vec{p}_m^{(i)} = 0$  и поэтому поле  $\vec{B}^{(i)}$  внутри шара однородно:  $\vec{B}^{(i)} = \vec{B}_1^{(i)}$ . Так как при  $r \rightarrow \infty$  поле однородно по условию, то  $\vec{B}_1^{(e)} = \vec{B}_0$ , и для решения задачи осталось подобрать вектора  $\vec{B}_1^{(i)}$  и  $\vec{p}_m^{(e)}$ . Тогда будет:

$$\vec{B}^{(i)} = \vec{B}_1^{(i)}, \quad \vec{B}^{(e)} = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{p}_m^{(e)} \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m^{(e)}}{r^3} \right).$$

На границе шара из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора  $\vec{H}$  следует, что  $B_{0\tau} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_{m\tau}^{(e)}}{R^3} = \frac{1}{\mu} B_{1\tau}^{(i)}$ . Так как это условие должно выполняться в любой точке поверхности шара, то

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_{m\tau}^{(e)}}{R^3} = B_{0\tau} - \frac{1}{\mu} B_{1\tau}^{(i)}. \quad (8.14)$$

Второе уравнение, связывающее неизвестные векторы  $\vec{p}_m^{(e)}$  и  $\vec{B}_1^{(i)}$  получим из условия непрерывности нормальных составляющих векторов  $\vec{B}^{(e)}$  и  $\vec{B}^{(i)}$

на границе шара. Так как  $\frac{(\vec{p}_m \vec{r})}{r^5} \vec{r} = \frac{\left(\vec{p}_m \frac{\vec{r}}{r}\right) \vec{r}}{r^3}$  есть составляющая вектора  $\frac{\vec{p}_m}{r^3}$  вдоль  $\vec{r}$ , то  $\frac{(\vec{p}_m \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}$  есть составляющая, перпендикулярная  $\vec{r}$ , и потому равенство нормальных составляющих (после сокращения на косинус угла между радиус-вектором и направлением внешнего поля  $\vec{B}_0$ ) приводит к соотношению:  $B_1^{(i)} = B_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m^{(e)}}{R^3}$  и, соответственно, в векторном виде:

$$\vec{B}_1^{(i)} = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m^{(e)}}{R^3}. \quad (8.15)$$

Решая систему (8.14), (8.15), получаем:  $\vec{B}^{(i)} = \frac{3\mu}{\mu+2} \vec{B}_0$ ,  $\vec{p}_m = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\mu-1}{\mu+2} R^3 \vec{B}_0$ .

Окончательно:  $\vec{B}^{(e)} = \vec{B}_0 + \frac{\mu-1}{\mu+2} \left( \frac{3(\vec{B}_0 \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{B}_0}{r^3} \right)$ ;  $\vec{B}^{(i)} = \frac{3\mu}{\mu+2} \vec{B}_0$ .

Внутри шара поле однородно и сонаправлено с внешним полем и при  $\mu > 1$  сильнее поля  $\vec{B}_0$ . Вне шара поле есть суперпозиция первоначального поля



$\vec{B}_0$  и поля магнитного диполя, помещенного в центре шара и обладающего моментом  $\vec{p}_m = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} R^3 \vec{B}_0$ .

*Замечание.* Решение этой задачи может быть получено на основании аналогии между задачами электростатики и магнитостатики при отсутствии токов. С этой целью воспользуемся решением примера 8 из параграфа 4, заменив вектор  $\vec{D}$  на  $\vec{B}$  и  $\epsilon$  на  $\mu$  (формулы (4.33) и (4.36)).

**Пример 8.6.** Бесконечный прямолинейный тонкий провод с током  $I$  расположен параллельно плоской границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на некотором расстоянии  $a$  от границы в первой среде. Определите магнитное поле в обеих средах вблизи границы.

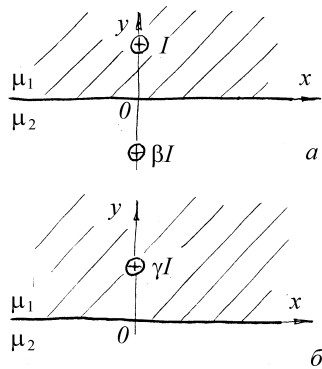


Рис.8.4

*Решение.* Для решения этой задачи применим метод, аналогичный методу изображений в электростатике. Заменим задачу расчета поля  $\vec{B}$  в неоднородной среде аналогичной задачей в вакууме. В первой среде поле  $\vec{B}$  подчиняется такому же уравнению, как и поле тока  $\mu_1 I$  в вакууме. Во второй среде  $\text{rot } \vec{B}_2 = 0$ . При расчете поля в первой среде можно добавить любые источники поля во вторую среду и наоборот, с целью обеспечить выполнение условий

на границе:  $\frac{B_{\tau 1}}{\mu_1} = \frac{B_{\tau 2}}{\mu_2}$ ;  $B_{n1} = B_{n2}$ . Для

расчета поля в первой среде добавим ток  $\beta I$  во вторую среду вдоль линии зеркального отражения исходного провода относительно границы раздела, а при расчете поля во второй среде исходный ток заменим на ток  $\gamma I$  (рис.8.4).

Тогда поле  $\vec{B}_1$  есть суперпозиция полей токов  $\mu_1 I$  (в первой среде) и  $\beta I$

(во второй среде), а поле  $\vec{B}_2$  создается током  $\mathcal{I}$  (в первой среде). В силу того, что величина  $B$  пропорциональна току, из граничных условий следует:  $\frac{\mu_1 - \beta}{\mu_1} = \frac{\gamma}{\mu_2}$ ,  $\mu_1 + \beta = \gamma$ . Откуда получаем:  $\beta = \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2}$ ;  $\gamma = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ . Таким образом, поле в первой среде совпадает с полем в вакууме, созданным током  $I_1 = \mu_1 I$ , текущим по исходному проводу, и током  $I_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2} I$ , текущим по его зеркальному отражению. Поле во второй среде совпадает с полем, созданным током  $I_3 = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I$ , текущим по исходному проводу в вакууме.

Если  $\mu_2 \gg \mu_1$  (вторая среда – ферромагнетик),  $I_2 = I_1 = \mu_2 I$ ; "зеркальный" ток течет в том же направлении, что и исходный. В общем случае ток  $I_3$  совпадает по направлению с исходным, а направление  $I_2$  зависит от знака разности  $(\mu_2 - \mu_1)$ . Таким образом, поле, соответствующее исходной задаче, может быть создано в вакууме (или однородной среде) системой токов, заменяющих собой действительное распределение молекулярных токов в средах. Вычисление поля в любой точке теперь может быть произведено по формуле Био-Савара или по формуле поля прямого тока с использованием принципа суперпозиции, и не вызывает трудностей. Найдем поле во второй среде вблизи границы на расстоянии  $x$  от проекции провода. Согласно (7.5) индукция в точке  $x$  будет

$$B_2(x) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \mathcal{I} = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2) \sqrt{x^2 + a^2}} I, \text{ а ее проекции на касательное}$$

направление и нормаль равны  $B_{2\tau} = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2 a}{\pi(\mu_1 + \mu_2)(x^2 + a^2)} I,$

$$B_{2n} = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2 x}{\pi(\mu_1 + \mu_2)(x^2 + a^2)} I. \text{ Согласно условиям для границ раздела,}$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad B_{1\tau} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{2\tau}, \quad \text{откуда окончательно:}$$

$$B_{1n} = B_{2n} = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2 x}{\pi(\mu_1 + \mu_2)(x^2 + a^2)} I, \quad B_{1\tau} = \frac{\mu_0 \mu_1^2 \mu_2 a}{\pi(\mu_1 + \mu_2)(x^2 + a^2)} I,$$

$$B_{2\tau} = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2 a}{\pi(\mu_1 + \mu_2)(x^2 + a^2)} I.$$

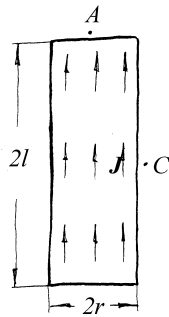


Рис.8.5

**Пример 8.7.** Намагниченность  $\vec{J}$  длинного тонкого магнита в виде цилиндра длиной  $2l$  и радиусом  $r$  однородна и направлена вдоль оси (рис.8.5). Оцените магнитную индукцию  $B_A$  в точке  $A$  вблизи центра торца и  $B_C$  около середины цилиндра.

**Решение.** Поскольку токи проводимости отсутствуют, поле создается исключительно молекулярными токами. Так как  $\vec{J}$  не зависит от координат,  $\text{rot } \vec{J} = 0$  и, следовательно, объемных молекулярных токов нет. Такой случай соответствует поверхностному току, обтекающему магнит по его

боковой поверхности. Граничные условия на этой поверхности требуют:  $I_{\text{пов}} = J$ , причем ток направлен по окружностям перпендикулярно оси цилиндра. Вокруг магнита возникает такое же поле  $\vec{B}$ , как и в вакууме вокруг цилиндра, обтекаемого поверхностным током с линейной плотностью  $J$ . Эта задача аналогична расчету поля длинного соленоида, поэтому воспользуемся результатами примера 7.4.. Как следует из (7.21), вне цилиндра вблизи центра его торца ( $I_{n0} = J$ ,  $\beta_1 = \pi/2$ ,  $\beta_2 = 0$ ),  $B_A = \frac{\mu_0 J}{2}$ .

Если бы цилиндр был бесконечно длинным, поле вне цилиндра отсутствовало бы, поэтому поле вблизи точки  $C$  такое же, какое создают в пустоте два полубесконечных соленоида с направлением тока, противоположным  $i_{\text{пов}}$ , и дополняющих цилиндр до бесконечного. Так как по условию  $l \gg r$ , для оценки поля в точке  $C$  можно воспользоваться прежним выражением (7.21), пренебрегая различием между полем в этой

точке и на оси соленоида. Полагая в последней формуле  $\beta_2=r/l \ll 1$ ,  $\beta_1=0$ ,

получим:  $B_C \approx \frac{\mu_0 J}{2} \frac{r^2}{l^2}$ .

### *Задачи и вопросы для самостоятельного решения*

**8.1.** Кабель состоит из двух коаксиальных цилиндров: центрального сплошного радиуса  $R_1$  и окружающего его полого цилиндра (оболочки) радиуса  $R_2$ . По внутреннему цилиндру параллельно его оси течет ток  $I$ , равномерно распределенный по его сечению, а по внешнему - ток такой же величины, направленный в противоположную сторону, распределенный равномерно по поверхности (коаксиальный кабель). Найдите величину напряженности магнитного поля  $H$  как функцию расстояния  $\rho$  от оси.

**8.2.** Определите напряженность магнитного поля  $H$  внутри бесконечной круглой цилиндрической полости, сделанной в бесконечном цилиндрическом проводе, по которому течет ток плотности  $j$ , равномерно распределенный по сечению провода. Расстояние между осями провода и полости равно  $a$ .

**8.3.** Тороидальный сердечник составлен из двух половинок, сделанных из различных ферромагнитных материалов с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Общая длина сердечников, включая два небольших зазора величиной  $d$ , равна  $L$ . По обмотке сердечника, имеющей  $N$  витков, течет ток  $I$ . Определите величину поля  $B$  в зазоре. Рассеянием магнитного поля в зазоре пренебречь.

**8.4.** По бесконечно длинному прямолинейному проводнику, лежащему в плоскости раздела двух непроводящих сред, течет ток  $I$ . Определите индукцию магнитного поля в произвольной точке пространства. Магнитные проницаемости сред равны  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

**8.5.** На плоской границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  помещен контур с током. Определите напряженность и индукцию

магнитного поля во всем пространстве, если известно, что в вакууме этот контур создает поле с напряженностью  $\vec{H}_0(\vec{r})$ .

**8.6.** В однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_0$  помещен шарик радиусом  $R_1$  из материала с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Внутри шарика сделана сферическая концентрическая полость радиусом  $R_2$ . Найдите индукцию магнитного поля внутри полости.

**8.7.** Длинный прямой провод с током  $I$  расположен параллельно плоской границе массивного тела, сделанного из магнитного материала с проницаемостью  $\mu$ , на расстоянии  $h$  от нее. Найдите силу, с которой притягивается к телу единичный отрезок провода.

**8.8.** По бесконечному прямолинейному цилиндрическому проводу радиусом

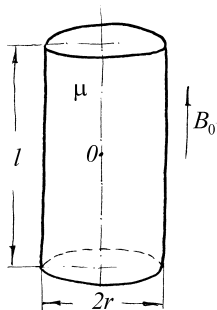


Рис.8.6

$R$ , сделанному из магнитного материала с проницаемостью  $\mu$ , течет ток  $I$ , равномерно распределенный по сечению проводника. Найдите индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  как функцию расстояния от оси провода.

**8.9.** Цилиндрический стержень длиной  $l$  и радиусом  $r$  ( $l \gg r$ ), сделанный из магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ , помещен во внешнее однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_0$ , направленной вдоль стержня

(рис.8.6). Найдите индукцию магнитного поля в центре цилиндра (в т.О).

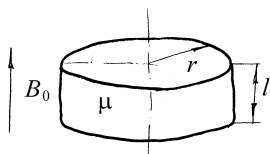


Рис.8.7

**8.10.** Тонкий диск радиусом  $r$  и высотой  $l$  ( $l \ll r$ ), сделанный из магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ , помещен во внешнее однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_0$ , направленной перпендикулярно

плоскости диска (рис.8.7). Найдите индукцию магнитного поля в центре диска (т.О).

**8.11.** Намагниченность  $\vec{J}$  постоянного магнита в виде короткого цилиндра высотой  $h$  и радиусом  $R$  ( $h \ll R$ ) однородна и направлена вдоль оси цилиндра. Найдите магнитную индукцию внутри и вне цилиндра вблизи центра основания (т.О).

**8.12.** Магнит в виде тонкого стержня длиной  $l$  и радиусом  $r \ll l$  намагничен продольно, так что его намагниченность возрастает линейно от нуля до максимального значения  $J_m$  на противоположном торце. Найдите индукцию магнитного поля в воздухе вблизи центра торца с наибольшей намагниченностью.

**8.13.** Длинный тонкий цилиндрический стержень из магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  заряжен по поверхности и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите индукцию и напряженность магнитного поля внутри стержня вдали от его концов. Длина стержня  $L$ , радиус  $R$ , заряд  $Q$ .

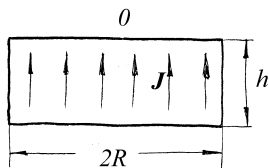


Рис.8.8

**8.14.** Постоянный магнит в виде тонкого диска радиусом  $R$  намагничен однородно (рис.8.8). Вектор намагниченности  $\vec{J}$  перпендикулярен плоскости диска. Найдите напряженность магнитного поля внутри диска вблизи его центра, если толщина диска  $h$ .

**8.15.** Постоянный ток  $I$  течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода. Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью  $\chi$ . Найдите индукцию магнитного поля внутри и вне провода на расстоянии  $r$  от его оси.

**§9. Магнитный поток. Индуктивность. Энергия магнитного поля.*****Краткие теоретические сведения***

Магнитный поток. Для описания многих электромагнитных явлений удобно ввести понятие *магнитного потока*, пронизывающего замкнутый контур. Он определяется следующим образом:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (d\vec{S} = \vec{n}dS) \quad (9.1)$$

где  $S$  – поверхность, опирающаяся на рассматриваемый контур, а  $\vec{B}$  – магнитная индукция в соответствующей точке этой поверхности. Из свойства соленоидальности магнитного поля следует, что величина магнитного потока не зависит от выбора поверхности, по которой ведется интегрирование.

Для некоторых контуров (типа соленоида с замкнутыми концами) опирающаяся на контур поверхность является самопересекающейся. В таком случае удобно разбить контур на отдельные витки и представить (9.1) в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{B} d\vec{S}, \quad (9.2)$$

где  $N$  – общее количество витков, а  $S_i$  – площадь  $i$ -го витка. Если распределение магнитной индукции в плоскости каждого из витков одинаково, то все интегралы в сумме (9.2) равны, и формула для расчета магнитного потока упрощается:

$$\Phi = N \int_{S_i} \vec{B} d\vec{S}. \quad (9.3)$$

Рассмотрим два замкнутых проводящих контура. Пусть по первому контуру течет ток силы  $I_1$ , создавая магнитное поле в окружающем контур пространстве. Как следует из формулы Био-Савара-Лапласа (7.4), индукция этого поля пропорциональна  $I_1$ . Соответственно, магнитный поток через второй контур будет также пропорционален  $I_1$ . Коэффициент пропорциональности между силой тока в первом контуре  $I_1$  и магнитным потоком через второй контур  $\Phi_2$ , создаваемым этим током, называется *коэффициентом взаимной индукции* этих контуров  $L_{12}$ :

$$L_{12} = \frac{\Phi_2}{I_1}. \quad (9.4)$$

Замечательным свойством коэффициентов взаимной индукции является их симметрия:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (9.5)$$

Магнитный поток через проводящий контур может создаваться током, протекающим по этому же контуру. Как и в случае двух контуров, этот магнитный поток пропорционален силе тока в контуре. Коэффициент пропорциональности между силой тока в замкнутом контуре  $I$  и магнитным потоком через этот контур  $\Phi$ , создаваемым этим током, называется *коэффициентом самоиндукции* или *индуктивностью* этого контура  $L$ :

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (9.6)$$

Как и электрическое поле, магнитное поле является материальным объектом, в котором сосредоточена определенная энергия. Например, соленоид (равно как и любой другой проводящий контур), по которому протекает ток, создает магнитное поле с полной энергией

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}I\Phi, \quad (9.7)$$



где  $L$  – индуктивность соленоида,  $I$  – сила протекающего по нему тока, а  $\Phi$  – магнитный поток, создаваемый током  $I$  в обмотке. Последняя формула легко обобщается на случай двух (или нескольких) контуров. Для двух индуктивно связанных катушек с токами  $I_1$  и  $I_2$

$$W_M = \frac{1}{2}(I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2) = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2, \quad (9.8)$$

где  $L_1$ ,  $L_2$ , и  $L_{12}$  – индуктивности и коэффициент взаимной индукции обмоток, а  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  – потоки, создаваемые в контурах всеми токами (включая и собственный).

Объемная плотность энергии магнитного поля в каждой точке пространства равна

$$w_M = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}, \quad (9.9)$$

где  $\vec{B}$  – магнитная индукция, а  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля в этой точке. Последняя формула справедлива не только для поля, создаваемого катушками с током, но и для произвольного магнитного поля.

В системе СИ магнитный поток измеряется в *веберах* (Вб), а коэффициент взаимной индукции и индуктивность – в *генри* (Гн).

Работа по перемещению проводника с током. При перемещении проводника с током в магнитном поле совершается определенная работа. Элементарная работа силы Ампера при малом перемещении  $d\vec{r}$  элемента проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$  в постоянном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  равна

$$\delta A = (I[d\vec{l}; \vec{B}]d\vec{r}), \quad (9.10)$$

или, по правилам преобразования смешанного произведения,

$$\delta A = I(\vec{B}; [d\vec{r}; d\vec{l}]) = I(\vec{B}; d\vec{S}) = Id\Phi. \quad (9.11)$$

Здесь  $d\vec{S}$  вектор площадки, которую прочерчивает элемент  $d\vec{l}$  при малом перемещении  $d\vec{r}$ , а  $d\Phi$  -- магнитный поток сквозь эту площадку. Аналогичным будет выражение для работы силы Ампера при конечном перемещении замкнутого контура с током:

$$A = I\Delta\Phi, \quad (9.12)$$

где  $\Delta\Phi$  - изменение магнитного потока через контур.

**Пример 9.1.** Найдите индуктивность соленоида, состоящего из  $N=500$  витков, равномерно намотанных на поверхность цилиндрического сердечника, изготовленного из материала с магнитной проницаемостью  $\mu=500$ . Длина соленоида  $l=31,4$  см, а площадь его поперечного сечения  $S=10$  см<sup>2</sup>. Неоднородностью магнитного поля вблизи торцов сердечника пренебречь.

**Решение.** Согласно определению (9.6) для нахождения индуктивности проводящего контура мы должны задать некоторое значение силы тока в нем и рассчитать возникающий в этом случае магнитный поток через контур. Пусть по соленоиду течет ток силы  $I$ . Тогда, в соответствии с решением задачи (8.Пр.2), индукция магнитного поля внутри соленоида вдали от его концов равна

$$B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I, \quad (9.13)$$

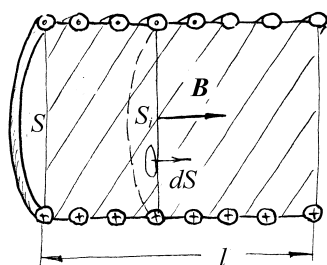


Рис.9.1

где вектор  $\vec{B}$  направлен вдоль оси соленоида в соответствии с правилом буравчика. (Рис. 9.1). Строго говоря, эта формула справедлива лишь для бесконечного соленоида, и она дает адекватный результат только в случае, когда длина соленоида достаточно велика (это следует из анализа решения задачи (8.Пр.2). Допустим, что это условие выполнено, поэтому будем считать магнитное поле в соленоиде однородным, а его индукцию –

полностью определяющейся формулой (9.13).

Однородность магнитного поля внутри соленоида позволяет для нахождения магнитного потока воспользоваться формулой (9.3):

$$\Phi = N \int_{S_i} \vec{B} d\vec{S} = N \int_{S_i} B ds = N \mu \mu_0 \frac{N}{l} I \int_{S_i} ds = \mu \mu_0 \frac{N^2}{l} IS. \quad (9.14)$$

Здесь мы учли, что при интегрировании по площади витка соленоида вектор нормали к элементарной площадке  $d\vec{S}$  всегда сонаправлен с вектором  $\vec{B}$ . Поделив полученное выражение на силу тока  $I$ , находим индуктивность соленоида:

$$L = \mu \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (9.15)$$

Подстановка в это выражение численных данных из условия задачи дает результат  $L \approx 0,5$  Гн.

**Пример 9.2.** Найдите индуктивность катушки, намотанной на тороид прямоугольного сечения. Внешний радиус тороида равен  $R_2=5,4$  см, внутренний –  $R_1=2$  см, высота тороида равна  $h=3$  см, а магнитная проницаемость его

материала –  $\mu=200$ . Катушка содержит  $N=100$  витков, равномерно распределенных по поверхности тороида.

**Решение.** Принцип решения этой задачи полностью повторяет принцип решения предыдущей. Пусть по катушке течет ток силы  $I$ . Тогда, в соответствии с решением задачи (8.Пр 1), величина индукции магнитного поля внутри тороида равна

$$B(r) = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad (9.16)$$

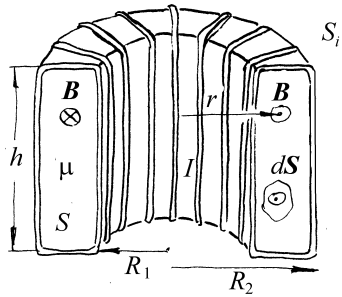


Рис.9.2

где  $r$  – расстояние от оси тороида до точки, где рассматривается индукция магнитного поля. При этом силовые линии магнитной индукции образуют окружности, центры которых лежат на оси тороида, т.е. в пределах любого витка катушки поле  $\vec{B}$  направлено параллельно нормали к элементарной площадке, лежащей в плоскости произвольного витка катушки (рис. 9.2).

Таким образом, распределение магнитной индукции в плоскости каждого из витков и ориентация вектора  $\vec{B}$  относительно плоскости витка одинаковы. Поэтому для нахождения магнитного потока, пронизывающего катушку, можно пользоваться формулой (9.3):

$$\begin{aligned} \Phi &= N \int_{S_i} B ds = N \int_{S_i} B ds = N\mu\mu_0 \frac{N}{2\pi} I \int_{S_i} \frac{ds}{r} = \\ &= N\mu\mu_0 \frac{N}{2\pi} I \int_0^h dz \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \mu\mu_0 \frac{N^2}{2\pi} I h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Поделив полученное выражение на силу тока  $I$ , окончательно найдем индуктивность катушки:

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (9.18)$$

Подстановка в это выражение численных данных из условия задачи дает результат  $L \approx 12$  мГн.

**Пример 9.3.** На один сердечник намотаны две катушки, индуктивности которых соответственно равны  $L_1$  и  $L_2$ . Найдите коэффициент взаимной индукции катушек.

**Решение.** Согласно определению (9.4), для нахождения коэффициента взаимной индукции катушек мы должны задать некоторое значение силы тока в первой катушке,  $I_1$ , и рассчитать возникающий в этом случае магнитный поток через вторую катушку,  $\Phi_2$ . Поскольку катушки намотаны на один сердечник, они могут отличаться только количеством витков, а магнитное поле внутри каждой из катушек одинаково. Как видно из решений примеров 1 и 2 этого раздела, индуктивность катушки пропорциональна квадрату количества витков, поэтому

$$\frac{L_2}{L_1} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2, \quad (9.19)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – количество витков в первой и второй катушке, соответственно.

Из формулы (9.3) следует, что при любых значениях токов в катушках отношение магнитных потоков сквозь них равно отношению числа витков:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (9.20)$$

Теперь можно найти магнитный поток через вторую катушку, связанный с протеканием тока в первой:

$$\Phi_2 = \Phi_1 \frac{N_2}{N_1} = L_1 I_1 \frac{N_2}{N_1} = L_1 I_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = I_1 \sqrt{L_1 L_2} \quad (9.21)$$

Поделив полученное выражение на силу тока  $I_1$ , окончательно найдем коэффициент взаимной индукции катушек:

$$L_{12} = \frac{\Phi_2}{J_1} = \sqrt{L_1 L_2} . \quad (9.22)$$

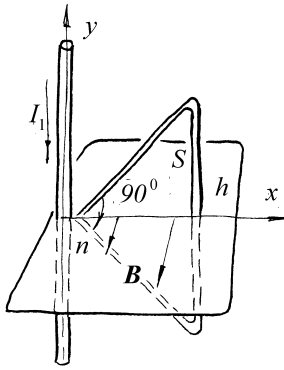


Рис.9.3

Проводу течет ток силы  $I_1$ . Тогда, в соответствии с (7.5) индукция магнитного поля, создаваемого этим током в плоскости треугольного контура, равна

$$B(x) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} , \quad (9.23)$$

где  $x$  – расстояние от оси провода до точки, в которой рассматривается индукция магнитного поля.

**Пример 9.4.** Найдите коэффициент взаимной индукции между бесконечным прямым проводом и замкнутым контуром в виде равнобедренного прямоугольного треугольника с высотой  $h=10$  см, лежащим в одной плоскости с проводом (рис. 9.3).

**Решение.** Согласно определению (9.4), для нахождения коэффициента взаимной индукции между двумя проводниками, мы должны задать некоторое значение силы тока в первом (например, в прямом проводе) и рассчитать возникающий в этом случае магнитный поток через второй (треугольный контур). Пусть по

Магнитный поток через контур по определению (9.1):

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int_S \mathbf{B} \, ds = \int_S B \, ds = \int_0^h dx B(x) \int_{-x}^x dy = 2 \int_0^h B(x) x dx = \\ &= 2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_0^h dx = \frac{\mu_0 I_1 h}{\pi}\end{aligned}\quad (9.24)$$

Поделив полученное выражение на силу тока  $I_1$ , окончательно найдем коэффициент взаимной индукции проводников:

$$L_{12} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 h}{\pi}. \quad (9.25)$$

Подстановка в это выражение численных данных из условия задачи дает результат  $L=0,04$  мкГн.

**Пример 9.5.** Найдите энергию магнитного поля, сосредоточенного в единице длины бесконечного прямого коаксиального кабеля, по которому протекает ток  $I=10$  А. Радиус внутренней жилы кабеля –  $R_1=0,5$  мм, а радиус оплетки –  $R_2=1$  см. Считать, что плотность тока внутри жилы постоянна. Толщиной оплетки пренебречь, а магнитную проницаемость и проводящей, и диэлектрической части кабеля считать равной единице.

**Решение.** В соответствии с решением задачи 8.1, напряженность магнитного поля, создаваемого коаксиальным кабелем с током  $I$ , равна

$$H(r) = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi R_1^2}, & r \leq R_1 \\ \frac{I}{2\pi r}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0, & r \geq R_2, \end{cases} \quad (9.26)$$

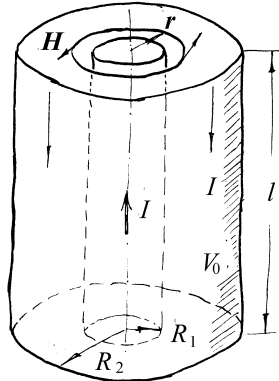


Рис.9.4

где  $r$  – расстояние от оси кабеля до точки, в которой рассматривается магнитное поле (рис.9.4). В соответствии с формулой (9.9), объемная плотность энергии этого магнитного поля равна

$$w_M = \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (9.27)$$

Таким образом, для вычисления полной энергии магнитного поля в отрезке кабеля длины  $l$  необходимо проинтегрировать последнее выражение в плоском слое  $V_0$ ,

охватывающем этот отрезок, причем симметрия задачи подсказывает использование цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} W_M &= \int_{V_0} w_M dV = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr \frac{1}{2} \mu_0 H(r)^2 = \\ &2\pi \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{(2\pi)^2} \left[ \int_0^{R_1} \frac{r^3}{R_1^4} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \right] = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{4} \frac{R_1^4}{R_1^4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right] = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \left[ 1 + 4 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \end{aligned} \quad (9.28)$$

Относя эту энергию к длине рассматриваемого отрезка кабеля и подставляя в получившуюся формулу численные данные из условия задачи, получаем:

$$\frac{dW_M}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \left( 1 + 4 \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \cong 32,5 \text{ мкДж/м.} \quad (9.29)$$

**Пример 9.6.** Постоянный магнит в виде стержня вставлен в длинный соленоид так, что длина находящейся в катушке части стержня намного больше диаметра катушки. Сила тока в обмотке –  $I$ , число витков на единицу длины –  $n$ , площадь



сечения стержня –  $S$ . Намагниченность стержня  $J$  считать однородной и направленной вдоль оси соленоида, а ее величину – не зависящей от внешнего поля. Найдите силу, с которой стержень втягивается в соленоид.

**Решение.** Сила взаимодействия между катушкой с током и магнитом возникает

за счет областей неоднородного поля вблизи концов катушки и стержня, поэтому рассчитать ее непосредственно по формуле Ампера затруднительно. Воспользуемся энергетическим подходом. При малом смещении стержня на величину  $\Delta x$  совершается работа  $\delta A = F \Delta x$ . С другой стороны, работа при смещении контура с током в магнитном поле равна  $\delta A = I \Delta \Phi$ , где  $\Delta \Phi$  – изменение магнитного потока через катушку при смещении стержня. Поэтому  $F = I \Delta \Phi / \Delta x$ . Изменение потока через катушку при малом смещении сердечника легко находится. Действительно, при смещении сердечника вглубь соленоида область однородного поля в части катушки с сердечником удлинится на величину  $\Delta x$ , а вне сердечника – уменьшится на такую же величину (рис. 9.5). Эти области сцеплены с числом витков  $\Delta N = n \Delta x$ , поэтому изменение потока будет

$$\Delta \Phi = (B_2 - B_1) s n \Delta x, \quad (9.30)$$

где  $B_2$  – индукция поля в сердечнике внутри катушки, а  $B_1$  – в соленоиде вдали от конца сердечника. Как следует из рассмотренного ранее примера, (8 Пр.2)  $B_2 = \mu_0 (H + J)$ ,  $B_1 = \mu_0 H$ ,  $H = In$ . Поэтому окончательно,

$$\Delta \Phi = \mu_0 J s n \Delta x. \quad (9.31)$$

Отсюда следует:

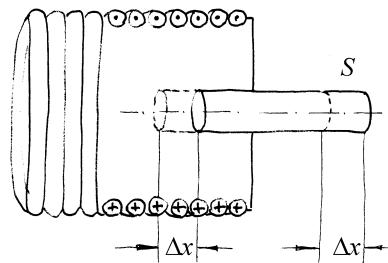


Рис.9.5

$$F = I\mu_0 J sn. \quad (9.32)$$

Заметим, что вектор  $\vec{J}$  может быть направлен как в ту же сторону, что и  $\vec{H}$ , так и в противоположную (в зависимости от того, каким концом магнит вставлен в соленоид). В последнем случае  $J$  следует считать отрицательным, и магнит будет выталкиваться из катушки.

### *Задание для самостоятельной работы*

**9.1.** Найдите индуктивность катушки, намотанной на тороид прямоугольного сечения, состоящей из двух одинаковых частей, одна из которых сделана из ферромагнетика с магнитной проницаемостью  $\mu_1=400$ , а другая – из материала с  $\mu_2=100$ . Внешний радиус тороида равен  $R_2=10,8$  см, внутренний –  $R_1=4$  см, а высота тороида равна  $h=6$  см. Катушка содержит  $N=400$  витков, равномерно распределенных по поверхности тороида. Неоднородностью магнитного поля вблизи стыка частей сердечника пренебречь.

**9.2.** Найдите индуктивность отрезка двухпроводной линии длины  $l=1$  м. Радиусы проводников  $a=0,5$  мм, много меньше расстояния  $d$  между ними ( $d=1$  см).

**9.3.** Найдите индуктивность отрезка коаксиального кабеля длины  $l=1$  м. Радиус внутреннего провода –  $R_1=0,5$  мм, а радиус оплетки –  $R_2=1$  см.

**9.4.** Однослойная, достаточно длинная катушка разделена на две секции. Индуктивности секций равны соответственно  $L_1$  и  $L_2$ . 1). Чему равна индуктивность всей катушки? 2). Найдите полное число витков катушки, если первая секция содержит  $N_1$  витков.

**9.5.** Вдоль оси тороида прямоугольного сечения, на который равномерно намотана катушка, содержащая  $N=500$  витков, проходит бесконечный прямой

провод. Внешний радиус тороида равен  $R_2=10,8$  см, внутренний –  $R_1=4$  см, высота тороида равна  $h=6$  см, а магнитная проницаемость его материала –  $\mu=1000$ . Найдите коэффициент взаимной индукции между катушкой и проводом.

**9.6.** На длинный соленоид с плотностью намотки  $n=10^3$  витков на единицу длины и площадью витка  $s = 10$  см<sup>2</sup> надета короткая катушка большего диаметра, содержащая  $N=20$  витков. Найдите коэффициент их взаимной индукции.

**9.7.** Найдите индуктивность катушки, намотанной на тороид прямоугольного сечения с зазором, ширина которого много меньше радиусов сердечника. Внешний радиус тороида равен  $R_2=5,4$  см, внутренний –  $R_1=2$  см, высота тороида равна  $h=3$  см, ширина зазора  $\Delta=1$  мм, а магнитная проницаемость материала –  $\mu=200$ . Катушка содержит  $N=100$  витков, равномерно распределенных по поверхности тороида.

**9.8.** Внутри длинного соленоида с плотностью намотки  $n$  витков на единицу длины помещена короткая катушка с площадью витка  $s$ , содержащая  $N$  витков. Найдите коэффициент взаимной индукции обмоток, если оси соленоида и катушки образуют угол  $\alpha$ .

**9.9.** Внутри длинного соленоида длиной  $l$ , содержащего  $N$  витков с площадью сечения  $S$ , помещен короткий ферромагнитный сердечник длиной  $d \ll l$  с магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ . Найдите индуктивность соленоида.

**9.10.** В стальном цилиндре с высотой  $h=20$  см и радиусом основания  $R=6$  см просверлено соосное отверстие радиусом  $r=3$  мм. Внутри отверстия вдоль оси цилиндра проходит бесконечный прямой провод, по которому протекает ток

$J=100$  А. Найдите энергию магнитного поля, сосредоточенного в материале цилиндра, если магнитная проницаемость стали  $\mu=1000$ .

**9.11.** Найдите энергию магнитного поля, сосредоточенного в катушке, намотанной на тороид прямоугольного сечения, по которой протекает ток  $I=10$  А. Внешний радиус тороида равен  $R_2=5,4$  см, внутренний –  $R_1=2$  см, высота тороида равна  $h=3$  см, а магнитная проницаемость его материала –  $\mu=500$ . Катушка содержит  $N=100$  витков, равномерно распределенных по поверхности тороида.

**9.12.** Прямой провод проходит вдоль оси соленоида с плотностью витков  $n_0=10$  см<sup>-1</sup>. По проводу и по соленоиду текут постоянные токи одинаковой силы. Площадь сечения провода –  $S_1=0,1$  см<sup>2</sup>, а площадь витка соленоида –  $S_2=10$  см<sup>2</sup>. Определите – во сколько раз энергия магнитного поля, создаваемого внутри соленоида самим соленоидом превышает энергию магнитного поля, создаваемого внутри соленоида проводом. При расчетах воспользоваться условием  $S_1 \ll S_2$ .

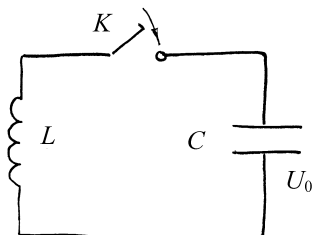


Рис.9.6

**9.13.** Конденсатор емкостью  $C=1$  мкФ, заряженный до напряжения  $U_0=12$  В, соединен с катушкой индуктивностью  $L=10$  мГн, через ключ (рис. 9.6). Каково может быть максимальное значение силы тока в этой цепи после замыкания ключа?

**9.14.** Два длинных соленоида различных диаметров вдвинуты друг в друга так, что длина области их перекрытия значительно превышает их диаметры. Токи в обмотках равны  $I_1=2$  А,  $I_2=5$  А, плотности намотки составляют  $n_1= n_2=10^3$

витков на метр, радиус меньшей катушки  $r=1$  см . Найдите силу взаимодействия соленоидов.

**9.15.** Внутри длинной катушки-соленоида индуктивностью  $L_0$  расположен соосно другой соленоид меньших размеров, все линейные размеры которого в  $\beta$  раз меньше линейных размеров большого соленоида (подобные катушки). Катушки соединены последовательно. Найдите индуктивность такой системы. Число витков обоих соленоидов одинаково.

## §10. Закон электромагнитной индукции.

### *Краткие теоретические сведения*

Закон электромагнитной индукции. Одно из наиболее важных электромагнитных явлений – это *явление электромагнитной индукции*, которое заключается в том, что изменение магнитного потока (9.1), пронизывающего замкнутый проводящий контур, порождает в этом контуре электродвижущую силу, которая в этом случае называется ЭДС индукции. *Закон электромагнитной индукции* связывает эту ЭДС со скоростью изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (10.1)$$

где  $\mathcal{E}_i$  – ЭДС индукции в контуре,  $\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий его, а  $t$  – время. Отметим, что закон электромагнитной индукции (10.1) справедлив независимо от того, с чем связано изменение магнитного потока – с нестационарностью магнитного поля, с деформацией контура или изменением его положения или ориентации в пространстве.

ЭДС индукции порождает в контуре индукционный ток, величина которого определяется законом Ома (6.9), а направление – *правилом Ленца*: *индукционный ток всегда направлен так, что его действие противоположно действию причины, его порождающей*. Иными словами, магнитное поле индукционного тока стремится поддержать значение магнитного потока через контур неизменным. Этому соответствует знак «минус» в правой части закона электромагнитной индукции (10.1).

Если изменение магнитного потока через замкнутый проводящий контур связано с изменением силы тока в контуре и, как следствие, с изменением индукции магнитного поля, порождаемого этим током, то говорят о

явлении самоиндукции. Выражение для ЭДС самоиндукции легко получить, подставив в закон электромагнитной индукции (10.1) магнитный поток, выраженный из (9.6):

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (10.2)$$

где  $\mathcal{E}_{si}$  – ЭДС самоиндукции в контуре,  $L$  – его индуктивность, а  $I$  – сила тока в контуре.

Закон электромагнитной индукции (10.1) имеет интегральный характер, т.е. описывает макроскопический объект – замкнутый проводящий контур. Воспользовавшись определением ЭДС (6.3), определением магнитного потока (9.1) и теоремой Стокса, нетрудно получить *дифференциальную формулировку* закона электромагнитной индукции:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.3)$$

где  $\vec{B}$  – индукция нестационарного магнитного поля, а  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля, порождаемого этим магнитным полем. Это не что иное, как *второе уравнение Максвелла*. Оно справедливо в любой точке пространства и количественно описывает тот факт, что *переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле*. Если вихревое электрическое поле существует в объеме проводника, то оно порождает в нем токи, циркулирующие вдоль силовых линий электрического поля. Эти токи называют *вихревыми токами*, или токами Фуко.

**Пример 10.1.** Самолет летит с постоянной скоростью  $v=900$  км/ч над Северным магнитным полюсом Земли. Оцените разность потенциалов, возникающую между концами его крыльев, если размах крыльев составляет  $L=40$  м, а индукция магнитного поля Земли –  $B=6 \cdot 10^{-5}$  Тл.

**Решение.** Причиной возникновения разности потенциалов между концами крыльев самолета является сила Лоренца, перемещающая заряды в его проводящих элементах. На каждый свободный заряд  $q$  действует сила

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}] \quad (10.4)$$

Над магнитным полюсом линии магнитной индукции «выходят из Земли» практически вертикально, а самолет летит горизонтально, поэтому сила Лоренца направлена вдоль крыльев. При этом положительные заряды смещаются к концу правого крыла, а отрицательные – к концу левого. Разделенные силой Лоренца заряды создают электрическое поле, направленное от правого крыла к левому. Пусть напряженность этого поля равна  $\vec{E}$ . Тогда оно действует на свободный заряд  $q$  с силой

$$\vec{F}_э = q\vec{E} \quad (10.5)$$

Перераспределение зарядов в крыльях прекратится тогда, когда эта сила точно уравновесит силу Лоренца, т.е. когда  $\vec{F}_э = -\vec{F}_L$ . Из этого условия, с учетом (10.4) и (10.5), найдем напряженность электрического поля:

$$\vec{E} = -[\vec{v}\vec{B}] = [\vec{B}\vec{v}].$$

Отсюда найдем искомую разность потенциалов при помощи формулы (2.3), связывающей потенциал и напряженность электростатического поля:

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E dl = Bv \int_1^2 dl = Bvl.$$

Здесь учтено, что интегрирование ведется вдоль силовых линий электрического поля, т.е. от края правого крыла (точка «1») до края левого (точка «2»). При этом векторы  $\vec{E}$  и  $d\vec{l}$  параллельны. Таким образом, за счет действия магнитного поля Земли правое крыло самолета приобретает положительный



потенциал относительно левого. Подставив в полученный ответ численные данные из условия задачи, получим  $\Delta U = 0,6B$ .

**Пример 10.2.** Бесконечный прямой провод и квадратная рамка со стороной  $a$  и полным сопротивлением  $R$  расположены в одной плоскости так, что провод проходит параллельно одной из сторон рамки на расстоянии  $d$  от нее. Сила тока в проводе изменится по закону  $I_1(t) = \alpha t^3$ ,  $\alpha = \text{const}$ . Найдите зависимость силы тока в рамке от времени.

**Решение.** Для решения этой задачи мы должны воспользоваться законом электромагнитной индукции (10.1). Сначала найдем магнитный поток через рамку, создаваемый током, протекающим по проводу. В соответствии с (7.5), индукция магнитного поля, создаваемого этим током в плоскости рамки, равна

$$\vec{B}(x, t) = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2\pi x} \vec{n}, \quad (10.6)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости рамки (см. рис.10.1), а  $x$  – расстояние от провода до точки, где рассматривается индукция магнитного поля.

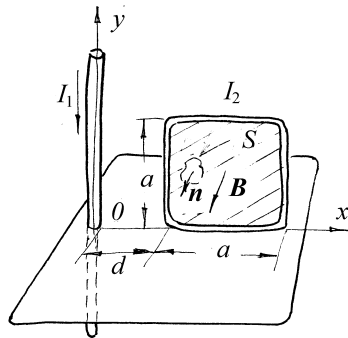


Рис.10.1

Магнитный поток через рамку найдем непосредственно из его определения (9.1) (см. Рис.10.1)

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B dS = \int_0^a dy \int_d^{d+a} B dx$$

Здесь учтено, что поле  $\vec{B}$  направлено вдоль нормали к площадке  $d\vec{S}$ .

Подставляя в выражение для потока выражение (10.6), получаем

$$\Phi = \int_0^a dy \int_d^{d+a} B dx = a \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln(1+a/d).$$

Для нахождения ЭДС индукции осталось подставить сюда выражение для силы тока в проводе и продифференцировать его по времени:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln(1+a/d) \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln(1+a/d) \cdot 3\alpha^2 = -\frac{3\mu_0 a \alpha^2}{2\pi} \ln(1+a/d)$$

Согласно закону Ома для замкнутого контура (6.9), сила индукционного тока, протекающего в рамке равна отношению ЭДС индукции к сопротивлению рамки:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{3\mu_0 a \alpha^2}{2\pi R} \ln(1+a/d).$$

Отрицательное значение полученной силы тока говорит о том, что он течет против положительного направления обхода рамки, определяемого правилом буравчика относительно вектора нормали  $\vec{n}$ .

**Пример 10.3.** Соленоид имеет  $N=500$  витков и обладает сопротивлением  $R=5$  Ом. Площадь поперечного сечения соленоида равна  $S=10$  см<sup>2</sup>. Концы соленоида замыкают и вносят его в однородное магнитное поле с индукцией  $B=10$  мТл, силовые линии которого направлены под углом  $\alpha=60^\circ$  к оси соленоида. Найдите заряд, протекший через обмотку соленоида.

**Решение.** Запишем закон электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\mathcal{E}_i$  – ЭДС индукции в соленоиде, а  $\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий его в момент времени  $t$ . Поскольку концы соленоида замкнуты, можем найти силу индукционного тока  $I$  из закона Ома для замкнутого контура (6.9):

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.7)$$

Индукционный ток связан с зарядом  $q$ , протекшим к моменту времени  $t$  через произвольное сечение проволоки соленоида, очевидным соотношением:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (10.8)$$

Приравняв правые части выражений (10.7) и (10.8) и интегрируя полученное уравнение по времени, получаем:

$$q(t_2) - q(t_1) = -\frac{1}{R} (\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) = \frac{1}{R} (\Phi(t_1) - \Phi(t_2)),$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – произвольные моменты времени. Выберем их так, чтобы момент  $t_1$  предшествовал внесению соленоида в магнитное поле, а момент  $t_2$  соответствовал ситуации, когда индукционный ток уже перестал течь. Тогда  $q(t_1)=0$ , а  $q(t_2)$  – не что иное как искомый полный заряд (обозначим его  $Q$ ), а последнее выражение переписется в виде

$$Q = \frac{1}{R} (\Phi_{\text{нач}} - \Phi_{\text{кон}}), \quad (10.9)$$

где  $\Phi_{\text{нач}} = \Phi(t_1)$  и  $\Phi_{\text{кон}} = \Phi(t_2)$  – магнитные потоки через соленоид, соответственно, до и после его внесения в магнитное поле. Очевидно, начальный магнитный поток  $\Phi_{\text{нач}}$  равен нулю, а конечный поток  $\Phi_{\text{кон}}$  найдем из формулы (9.3)

$$\Phi_{\text{кон}} = N \int_{S_i} \vec{B} d\vec{S} = N \int_{S_i} B dS \cos \alpha$$

Так как поле однородно, то индукцию можно вынести за знак интеграла, получим

$$\Phi_{\text{кон}} = NB \cos \alpha \int_{S_i} ds = NB S \cos \alpha.$$

Подставляя магнитные потоки в выражение (10.9), находим искомый заряд:

$$Q = -\frac{NB S \cos \alpha}{R}.$$

Отрицательная величина найденного заряда означает, что индукционный ток течет против положительного направления обхода соленоида, т.е. такого направления обхода, при котором магнитное поле, создаваемое индукционным током, было бы направлено «в сторону» внешнего магнитного поля. Это находится в полном соответствии с правилом Ленца: индукционный ток «пытается препятствовать» увеличению магнитного потока через соленоид.

Подставив в полученный ответ численные данные из условия задачи, получим  $Q = -0,5$  мКл.

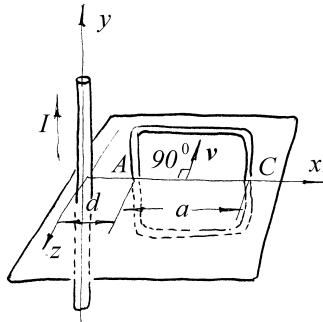


Рис.10.2

удалиться от провода настолько, чтобы расстояние от провода до ближайшей стороны рамки стало бы сравнимо с  $a$ .

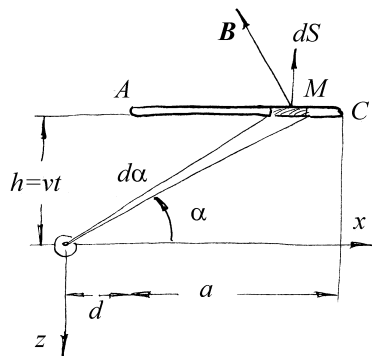


Рис.10.3

**Пример 10.4.** Квадратная рамка со стороной  $a$  движется с постоянной скоростью  $v$  в направлении, перпендикулярном бесконечному прямому проводу (см. рис.10.2). По проводу течет ток силы  $I$ . В начальный момент времени  $t=0$  рамка лежала в одной плоскости с проводом, а расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки равнялось  $d$ . Найдите зависимость ЭДС, индуцируемой в рамке, от времени, при условии, что  $a \gg d$ , а рамка не успела

**Решение.** Рассмотрим некоторое мгновенное положение рамки, определяемое расстоянием  $h$  между плоскостью рамки и параллельной ей плоскостью  $xz$ , проходящей через провод (см. рис.10.3). Индукция  $B$  магнитного поля, создаваемого проводом в точке  $M$ , лежащей в плоскости контура и задаваемой углом  $\alpha$ , также обозначенным на рисунке, направлена ортогонально перпендикуляру, опущенному из точки  $M$  на провод, а ее величина определяется формулой (7.5):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(h/\sin \alpha)} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi h}.$$

Подсчитаем магнитный поток, пронизывающий рамку:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B dS \cos \alpha ,$$

где  $S$  – плоская поверхность, ограниченная рамкой,  $d\vec{S}$  – элемент этой поверхности (см. рис.).

Учтем, что  $dS = adx$ , где  $x$  – расстояние от точки М до левого края рамки, обозначенного как точка А (соответственно, точка С – это правый край рамки), равное  $x = h \operatorname{ctg} \alpha - d$ , получим

$$\Phi = -\frac{\mu_0 I a^2}{2\pi} \int_1^2 \operatorname{ctg} \alpha d\alpha .$$

Вычислим определенный интеграл:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} [\ln(\sin \alpha)]_C^A = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \ln \left( \frac{h^2 + (d+a)^2}{h^2 + d^2} \right) .$$

Учтем далее, что  $d \ll a$  и  $h \ll a$ , получим

$$\Phi \approx \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \ln \left( \frac{a^2}{h^2 + d^2} \right) .$$

Теперь воспользуемся законом электромагнитной индукции и учтем, что

скорость рамки  $v = \frac{dh}{dt}$ :

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \approx \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{h^2 + d^2}{a^2} \right) \right] = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{a^2}{h^2 + d^2} \frac{2h}{a^2} \frac{dh}{dt} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{v^2 t}{v^2 t^2 + d^2} .$$

Из найденной зависимости видно, что в начале движения рамки ЭДС нарастает со временем практически линейно, после чего скорость роста постепенно замедляется, ЭДС достигает максимума, и при дальнейшем движении рамки уже уменьшается.

**Пример 10.5.** Вблизи центра длинного соленоида, содержащего  $n_0$  витков на единицу длины, внутри него помещена плоская рамка, по которой течет ток, сила которого изменяется по закону  $I_0 \cos \omega t$ . Площадь рамки равна  $s$ , а ее плоскость перпендикулярна оси соленоида. Найдите ЭДС, индуцируемую в соленоиде.

**Решение.** Согласно определению коэффициента взаимной индукции (9.4), магнитный поток, пронизывающий соленоид, равен

$$\Phi_2 = L_{12}I_1 = L_{12}I_0 \cos \omega t ,$$

где индекс «1» соответствует характеристикам рамки, а индекс «2» – характеристикам соленоида. Закон электромагнитной индукции (10.1) позволяет выразить искомую ЭДС:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_2}{dt} = L_{12}I_0\omega \sin \omega t . \quad (10.10)$$

Неизвестным пока остается коэффициент  $L_{12}$  взаимной индукции между рамкой и соленоидом. Найдем его, воспользовавшись симметрией коэффициентов взаимной индукции (9.5) и его определением (9.4):

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_1}{I_2} . \quad (10.11)$$

Таким образом, для нахождения коэффициента взаимной индукции необходимо задать некоторое значение силы тока  $I_2 = \text{const}$  в соленоиде и подсчитать соответствующее значение магнитного потока  $\Phi_1$  через рамку (без учета магнитного поля самой рамки). Согласно (7.22), магнитное поле в соленоиде, по которому протекает постоянный ток, является стационарным и однородным, а его индукция равна

$$\vec{B} = \mu_0 n_0 I_2 \vec{n} ,$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси соленоида в соответствии с правилом буравчика. Отсюда, принимая во внимание ориентацию рамки внутри соленоида, находим магнитный поток через рамку:

$$\Phi_1 = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B dS = BS = \mu_0 n_0 I_2 S,$$

где  $S$  – плоская поверхность, ограниченная рамкой, а  $d\vec{S}$  – вектор нормали к плоскости рамки. Подставим последнее выражение в (10.11) и найдем коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$ :

$$L_{12} = \mu_0 n_0 S.$$

Чтобы получить окончательный ответ задачи, осталось подставить это выражение в (10.10):

$$\mathcal{E}_i = \mu_0 n_0 s \omega I_0 \sin \omega t.$$

Заметим, что без привлечения свойства симметрии коэффициентов взаимной индукции мы бы столкнулись с существенными трудностями при попытке рассчитать магнитный поток через соленоид  $\Phi_2$ , создаваемый неоднородным магнитным полем рамки с током.

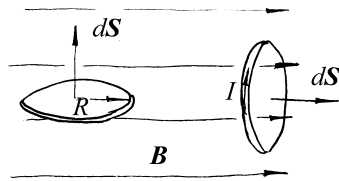


Рис.10.4

**Пример 10.6.** В постоянном однородном магнитном поле, индукция которого равна  $\vec{B}$ , находится круглое, недеформируемое, тонкое кольцо радиусом  $R$ , сделанное из сверхпроводника. В начальный момент плоскость кольца параллельна  $\vec{B}$  и тока в кольце нет. Найдите силу тока в кольце сразу после того, как оно было повернуто так, что



плоскость кольца стала перпендикулярна  $\vec{B}$  (рис.10.4). Индуктивность кольца равна  $L$ .

**Решение.** При повороте кольца в магнитном поле изменяется магнитный поток, пронизывающий кольцо, и, следовательно, по кольцу начинает течь индукционный ток, создающий дополнительное магнитное поле. Полный магнитный поток через кольцо складывается из потока  $\Phi_{\text{внеш}}$ , связанного с внешним магнитным полем, и потока  $\Phi_{\text{собств}}$ , связанного с магнитным полем индукционного тока:

$$\Phi = \Phi_{\text{внеш}} + \Phi_{\text{собств}}. \quad (10.12)$$

По закону электромагнитной индукции найдем ЭДС, действующую в кольце:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_{\text{внеш}}}{dt} - \frac{d\Phi_{\text{собств}}}{dt}. \quad (10.13)$$

Теперь применим к кольцу закон Ома для замкнутого контура (6.9), принимая во внимание, что сопротивление сверхпроводника равно нулю:

$$J \cdot 0 = \mathcal{E}_i \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_i = 0.$$

Из последнего выражения и (10.13) следует, что полный магнитный поток через кольцо изменяться не может, т.е. каким он был в исходном состоянии, таким он и останется после поворота кольца. Начальный магнитный поток равен нулю, поскольку индукционного тока нет, а плоскость кольца ориентирована параллельно силовым линиям внешнего магнитного поля. Следовательно, нулю должен быть равен и магнитный поток через кольцо после его поворота. Выразим этот поток через параметры задачи, принимая во внимание (10.12):

$$\Phi = Bs + LI = B\pi R^2 + LI,$$

где  $s = \pi R^2$  – площадь кольца. Осталось приравнять этот поток к нулю и выразить из полученного равенства искомую силу индукционного тока:

$$I = -\frac{\pi R^2 B}{L}. \quad (10.14)$$

Отрицательное значение найденной силы тока означает, что ток течет против выбранного направления обхода кольца (так, как показано на рисунке).

**Пример 10.7.** Внутри длинного соленоида, содержащего  $n=1000$  витков на метр длины, помещен стержень длиной  $l=10$  см и сечением  $s=10$  см<sup>2</sup>, изготовленный из материала с магнитной проницаемостью  $\mu=1000$ . Сила тока в обмотке  $I=10$  А. Какую работу надо затратить, чтобы вытащить стержень из соленоида?

**Решение.** Работа внешней силы, затраченная на извлечение стержня расходуется как на изменение энергии магнитного поля, так и на совершение дополнительной работы в цепи протекания тока. Обе эти величины удобно выразить через изменение магнитного потока в соленоиде. При вытаскивании стержня в обмотке возникает Э.Д.С. индукции  $\mathcal{E}_i$ , которая стремится изменить протекающий по соленоиду ток. Поддерживая постоянную силу тока  $I$  в цепи, источник совершает дополнительную работу (положительную или отрицательную), равную работе Э.Д.С. индукции:

$$\Delta A = \int I \mathcal{E}_i dt = -I \Delta \Phi, \quad (10.15)$$

где  $\Delta \Phi$  – изменение магнитного потока через соленоид, произошедшее вследствие вытаскивания стержня. С другой стороны, изменение энергии поля в катушке, согласно (9.7) будет

$$\Delta W = \frac{1}{2} I \Delta \Phi, \quad (10.16)$$

поэтому работа по вытаскиванию стержня, которая затрачивается как на совершение внешней работы, так и на изменение энергии магнитного поля, будет

$$A = \Delta A + \Delta W = -\frac{1}{2} I \Delta \Phi. \quad (10.17)$$

Здесь следует помнить, что изменение потока  $\Delta\Phi$  в нашем случае отрицательно. Осталось вычислить изменение потока. Будем считать, что стержень находился целиком в области однородного поля. Тогда внутри стержня  $B = \mu\mu_0 nI$ , а число витков, сцепленных со стержнем  $\Delta N = nl$ . При удалении стержня создаваемая им часть потока  $Bs\Delta N = \mu\mu_0 n^2 l s$  заменится на  $\mu_0 n^2 l s$ , поэтому  $\Delta\Phi = -\mu_0(\mu-1)n^2 l s$ . Окончательно

$$A = \frac{1}{2} \mu_0(\mu-1) n^2 l^2 s. \quad (10.18)$$

Заметим, что энергия магнитного поля при удалении стержня уменьшается. Работа по удалению стержня пропорциональна его объему.

Подставив в полученный ответ численные данные из условия задачи, получим  $A \approx 6,3$  Дж.

#### Задание для самостоятельной работы

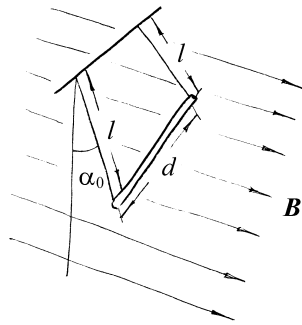


Рис.10.5

**10.1.** Две параллельных невесомых непроводящих нити, закрепленные в верхних точках, и тонкая проводящая палочка длины  $d$  образуют «качели», способные качаться в однородном постоянном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны и перпендикулярны отрезку, соединяющему точки подвеса нитей (см. рис.10.5). Длина каждой нити –  $l$ , индукция магнитного поля –  $B$ , а начальный угол отклонения качелей –  $\alpha_0$  (качели отпускают из этого положения в момент  $t=0$  без начальной скорости). Найдите

зависимость от времени разности потенциалов между концами палочки.

Указание: угол  $\alpha_0$  считать достаточно малым для того, чтобы можно было пользоваться приближением  $\sin \alpha_0 \approx \alpha_0$ .

**10.2.** Тонкая квадратная проводящая пластина движется с постоянной скоростью  $v=10$  м/с в постоянном магнитном поле с индукцией  $B=10$  мТл, причем вектора  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  параллельны плоскости пластины и перпендикулярны друг другу. Найдите поверхностную плотность заряда на пластине, возникшую вследствие ее движения.

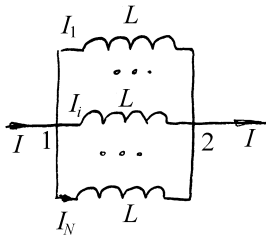


Рис.10.6

**10.3.**  $N$  одинаковых катушек с индуктивностью  $L$  соединены параллельно (рис.10.6). Определите эффективную индуктивность такой системы катушек.

**10.4.** Бесконечный прямой провод и замкнутый контур в виде равнобедренного прямоугольного треугольника с высотой  $h=17$  см и полным сопротивлением  $R=0,7$  Ом расположены в одной плоскости так, что провод проходит параллельно гипотенузе рамки на расстоянии  $d=10$  см от вершины прямого угла. Сила тока в проводе изменяется по закону  $I_1(t) = I_0 e^{-(t/\tau)^2}$ , где  $I_0=100$  А, а  $\tau=1$  мс. Чему равно максимальное значение индукционного тока в контуре?

**10.5.** Замкнутая проволочная прямоугольная рамка со сторонами  $a=20$  см и  $b=17$  см расположена в одной плоскости с бесконечным прямым проводом с током  $I=10$  А так, что сторона  $a$  параллельна проводу. Сопротивление рамки –  $R=0,8$  Ом, а расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки –

$c=10$  см. Рамку поворачивают на  $180^\circ$  вокруг ее оси симметрии, параллельной стороне  $a$ . Найдите заряд, протекший через сечение проволоки в рамке.

**10.6.** Замкнутая проволочная прямоугольная рамка со сторонами  $a=19$  см и  $b=11$  см расположена в одной плоскости с бесконечным прямым проводом с током  $I=10$  А так, что сторона  $b$  параллельна проводу. Расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки –  $c=21$  см. Рамку поворачивают на  $180^\circ$  вокруг стороны  $b$ , ближайшей к проводу. Найдите заряд, протекший через сечение проволоки в рамке, если сечение проволоки рамки равно  $s=1$  мм<sup>2</sup>, а ее проводимость –  $\lambda=6 \cdot 10^7$  (Ом·м)<sup>-1</sup>.

**10.7.** Проводящий контур в форме квадрата находится в постоянном однородном магнитном поле. Сторона квадрата равна  $a$ , а вектор индукции поля  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости контура. Контур деформируют так, что его длина не изменяется. После деформации контур становится круглым, но положение плоскости контура остается неизменным. Считая, что сопротивление контура,  $R$ , не изменилось, найдите заряд, протекший в контуре.

**10.8.** Прямоугольная рамка со сторонами  $a$  и  $b$  движется с постоянной скоростью  $v$  в направлении, перпендикулярном бесконечному прямому проводу, лежащему в плоскости рамки параллельно стороне  $b$  (удаляется от провода). По проводу течет ток силы  $I$ . В начальный момент времени  $t=0$  расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки равнялось  $c$ . Найдите зависимость от времени ЭДС, индуцируемой в рамке.

**10.9.** Прямоугольная проводящая рамка со сторонами  $a$  и  $b$  вращается вокруг своей оси симметрии, параллельной стороне  $a$ , в постоянном однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Угловая скорость вращения рамки постоянна и равна  $\omega$ . Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен оси вращения, а в момент времени  $t=0$

перпендикулярен и плоскости рамки. Найдите ЭДС индукции, возникающую в рамке.

**10.10.** Прямоугольная проводящая рамка со сторонами  $a$  и  $b$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси симметрии, параллельной стороне  $a$ , в однородном переменном магнитном поле, индукция которого изменяется по гармоническому закону с угловой частотой  $\Omega$ . Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  перпендикулярен оси вращения рамки, а в момент времени  $t=0$  перпендикулярен плоскости рамки и равен по величине своему амплитудному значению  $B_0$ . Найдите ЭДС индукции, возникающую в рамке.

**10.11.** Прямоугольная проводящая рамка со сторонами  $a$  и  $b$  вращается вокруг своей оси симметрии, параллельной стороне  $a$ , в постоянном однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Угловая скорость вращения рамки постепенно нарастает по закону  $\omega = \omega_0 \left(1 - e^{-\delta t}\right)$ . Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен оси вращения, а в момент времени  $t=0$  перпендикулярен и плоскости рамки. Найдите ЭДС индукции, действующую в рамке в момент, когда ее скорость достигает половины своего максимального значения.

**10.12.** Снаружи длинного соленоида с площадью витка  $S$ , обтекаемого током  $I$  и имеющего  $n$  витков на единицу длины, помещен охватывающий его виток провода с сопротивлением  $R$ . Какой заряд протечет в этом витке, если прервать ток в соленоиде?

**10.13.** Трансформатор содержит две обмотки, намотанные на общий замкнутый сердечник из ферромагнитного материала. Сопротивления обмоток и их индуктивности равны, соответственно,  $R_{1,2}$  и  $L_{1,2}$ . Вторичную обмотку замкнули накоротко, а к первичной подключили источник постоянного тока с Э.Д.С.  $\mathcal{E}$  и

малым внутренним сопротивлением. Найдите заряд, протекший по вторичной обмотке после подключения источника.

**10.14.** Катушка с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  подсоединена к источнику питания с регулируемой ЭДС. Как следует изменять ЭДС источника, чтобы ток через катушку изменялся по закону  $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ .

## §11. Уравнения Максвелла

### *Краткие теоретические сведения*

В самом общем виде любые электромагнитные явления описываются следующими *уравнениями Максвелла*, которые в системе СИ имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (11.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (11.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (11.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (11.4)$$

где  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  – напряженность, соответственно, магнитного и электрического поля,  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  – соответственно, электрическая и магнитная индукция,  $\vec{j}$  – плотность тока проводимости, а  $\rho$  – объемная плотность свободного заряда.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений для электромагнитного поля, уравнения Максвелла следует дополнить *материальными уравнениями*, описывающими свойства среды и связывающие между собой векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$ . Следует помнить, что материальные уравнения не выражают, в отличие от уравнений Максвелла, фундаментальные законы электромагнитного поля, а описывают свойства реальных сред. Обычно их записывают в форме:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (11.5)$$



$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad (11.6)$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая, а  $\mu$  – магнитная проницаемость среды.

Плотность тока в проводящей среде определяется в каждой точке электрическим полем  $\vec{E}$ , а также полем сторонних сил  $\vec{E}_{\text{ст}}$ , действующих на носители заряда. Для широкого класса материальных сред справедлив закон Ома:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (11.7)$$

Здесь  $\lambda$  – удельная проводимость среды.

Входящие в правую часть уравнений Максвелла плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\vec{j}$  не могут задаваться независимо, так как удовлетворяют уравнению непрерывности (см. Раздел 6):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (11.8)$$

Это уравнение выражает фундаментальный закон *сохранения заряда*.

Движение заряженных частиц сопровождается выделением тепла, равного работе сил поля (*джоулево тепло*), а плотность выделяемой при этом мощности описывается *законом Джоуля-Ленца*:

$$v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \lambda E^2 = j^2 / \lambda \quad (11.9)$$

Из системы уравнений Максвелла (11.1-4) следует *теорема Умова-Пойнтинга*, выражающая закон сохранения энергии в электромагнитном поле:

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} - \frac{dQ}{dt} + \int_V \vec{j} dV. \quad (11.10)$$

Здесь

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV \quad (11.11)$$

– энергия электромагнитного поля в объеме  $V$ , ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ ,  $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]$  – вектор Пойнтинга, имеющий смысл *плотности потока энергии* через границу  $S$ ,  $Q$  – выделяемое в объеме  $V$  тепло. Последнее слагаемое в (11.10) выражает работу внешних (сторонних) сил, совершаемую в объеме в единицу времени.

Во многих случаях удобно выразить поля через скалярный и векторный потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$ :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (11.12)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11.13)$$

В последней формуле первое слагаемое представляет потенциальную часть электрического поля, а второе – вихревую часть, обусловленную нестационарным магнитным полем.

Точные решения уравнений Максвелла удается найти лишь в редких случаях. Обычно приходится делать те или иные упрощения. Для прикладных задач часто используют *квазистационарное приближение*. Оно основано на

пренебрежении *током смещения* (членом  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ) в первом уравнении. Физически

это эквивалентно пренебрежению запаздыванием поля при его распространении от источника до точки наблюдения. В квазистационарном случае потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  сохраняют тот же смысл, что и в статике, и могут быть вычислены по ранее приведенным формулам (2.6) и (7.11). В этом приближении строится теория электрических цепей (см. Раздел 12).

## Примеры решения задач

**Пример 11.1.** Кольцо прямоугольного сечения изготовлено из материала с проводимостью  $\lambda=6 \cdot 10^7$  (Ом·м)<sup>-1</sup>. Внутренний радиус кольца равен  $R_1=3$  см, внешний –  $R_2=5$  см, а его высота –  $h=1$  см. Кольцо находится в нестационарном магнитном поле, вектор индукции которого  $\vec{B}$  параллелен оси симметрии кольца. Магнитное поле изменяется по закону

$$B(t) = \begin{cases} kt, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

где  $r$  – расстояние от оси кольца, а  $R > R_2$ . Найдите силу тока, протекающего по кольцу, если  $k=0,1$  Тл/с.

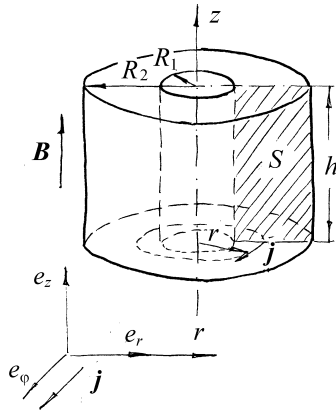


Рис.11.1

В выбранной (рис.11.1) системе координат координаты вектора магнитной индукции равны:

$$\vec{B} = \{0, 0, kt\},$$

**Решение.** Поскольку ток течет не в линейном контуре, а в объеме кольца, мы не можем решать задачу через интегральный закон электромагнитной индукции (10.1), а должны воспользоваться вторым уравнением Максвелла (11.2):

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Симметрия задачи подсказывает, что удобнее всего ее решать в цилиндрических координатах  $\{r, \varphi, z\}$ , причем ось этой системы должна совпадать с осью кольца (так как магнитное поле обладает симметрией именно относительно оси кольца). В выбранной (рис.11.1) системе координат координаты вектора магнитной индукции равны:

а, с учетом представления ротора в цилиндрических координатах, второе уравнение Максвелла (11.2) в проекциях на координатные оси распадается на 3 скалярных уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -k. \end{cases} \quad (11.14)$$

Также из соображений симметрии очевидно, что напряженность электрического поля  $\vec{E}$  не может зависеть от координат  $\varphi$  и  $z$ . Поэтому система (11.14) упрощается:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0 \Rightarrow E_z = C_1 \\ \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = -kr \Rightarrow E_\varphi = -\frac{kr}{2} + \frac{C_2}{r}, \end{cases}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования. Из ограниченности электрического поля при  $r=0$  (его напряженность может иметь особенности только в точках, где имеются свободные заряды, а по условию задачи на оси цилиндра никаких зарядов нет) следует, что  $C_2=0$ . Поэтому азимутальная проекция напряженности электрического поля равна:

$$E_\varphi = -\frac{kr}{2}.$$

До сих пор не определенной является радиальная проекция вектора  $\vec{E}$ . Найдем ее из четвертого уравнения Максвелла (11.4). Так как  $\rho = 0$ , то  $\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = 0$ , или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Так как напряженность поля не зависит от  $\varphi$  и  $z$ , то уравнение упрощается и принимает вид  $\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$ , откуда  $E_r = \frac{C_3}{r}$ . Опять же, из ограниченности электрического поля при  $r=0$  следует, что  $C_3=0$ . Поэтому, радиальная проекция вектора  $\vec{E}$  также равна нулю. Итак, мы нашли все три компоненты вектора напряженности электрического поля (с точностью до константы  $C_1$ ):

$$\vec{E} = \left\{ 0, -\frac{kr}{2}, C_1 \right\}.$$

Закон Ома (6.1) позволяет по известной напряженности электрического поля найти плотность протекающего в кольце тока:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E} = \left\{ 0, -\frac{\lambda kr}{2}, \lambda C_1 \right\}.$$

Из этого выражения видно, что константа интегрирования  $C_1$  должна быть равна нулю в силу ограниченности кольца (ток, текущий вдоль оси кольца, не является замкнутым и, следовательно, не может поддерживаться). Итак, в кольце течет кольцевой ток с плотностью, зависящей от радиуса линии тока:

$$\vec{j}(r) = -\frac{\lambda kr}{2} \vec{e}_\varphi, \quad (11.15)$$

где  $\vec{e}_\varphi$  – единичный вектор, направленный как показано на рис.11.1.

Силу этого тока найдем, проинтегрировав это выражение по сечению кольца  $S$ :

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j dS = -\frac{k\lambda h}{2} \int_{R_1}^{R_2} r dr = -\frac{k\lambda h}{4} (R_2^2 - R_1^2).$$

Здесь учтено, что вектор  $\vec{j}$  параллелен нормали к площадке  $dS = h dr$ , а также соотношение (11.15). Отрицательное значение силы тока означает, что ток течет против направления орта  $\vec{e}_\varphi$ , то есть так, как показано на рис.11.1.

Окончательно, 
$$I = \frac{1}{4} k\lambda h (R_2^2 - R_1^2) = 24 \text{ A}.$$

**Пример 11.2.** Плоскопараллельный диод представляет собой откачанный сосуд, в котором находятся анод и катод – две плоскопараллельные пластинки, расстояние между которыми равно  $d$ . Определите распределение потенциала между катодом и анодом в таком приборе в предположении, что электроны, испускаемые катодом с малой начальной скоростью за счет явления термоэлектронной эмиссии, создают вокруг катода облако и только часть электронов движется к аноду. Потенциал анода равен  $U_0$ , а потенциал катода равен нулю. Расстояние между анодом и катодом мало по сравнению с поперечными размерами пластин.

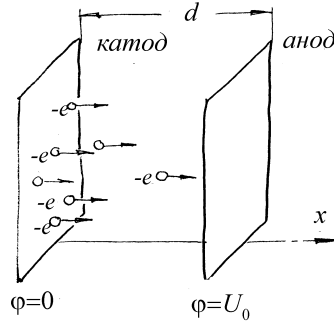


Рис.11.2

**Решение.** Пренебрегая краевыми эффектами на границах пластин-электродов, что можно сделать, так как расстояние между ними много меньше размеров пластин, допустим, что потенциал поля между пластинами определяется только координатой  $x$  (рис.11.2). Пренебрегая магнитным полем движущихся электронов, получим из уравнений (11.2 и 11.4) уравнение Пуассона, описывающее распределение потенциала. В этом случае

оно имеет обычный вид, однако, в отличие от задач электростатики, плотность зарядов  $\rho(x)$  теперь не известна заранее, а должна быть вычислена в ходе решения задачи.

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}. \quad (11.16)$$

Объемный заряд между электродами создают электроны. Обозначим их концентрацию как  $n(x)$ , тогда  $\rho(x) = -en(x)$ , где  $e$  – заряд электрона. Плотность тока в сечении  $x = const$  определяется скоростью электронов  $v$ :

$$\vec{j} = -en(x)\vec{v},$$

откуда  $n(x) = \frac{j}{ev}$ .

Скорость электронов найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - e\varphi(x) = \frac{mv_0^2}{2} - e\varphi(0),$$

где  $m$  – масса электрона,  $v$  – скорость электронов в сечении  $x$ ,  $v_0$  – начальная скорость вылетающих с катода электронов,  $\varphi(0)$  – потенциал катода, по условию задачи равный нулю. Так как скорость вылетающих с катода электронов мала по сравнению со скоростью, приобретаемой ими в поле, положим  $v_0 \approx 0$ . Тогда из закона сохранения энергии найдем  $v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}$ .

Подставляя найденное значение в выражение для  $\rho(x)$ , а его в уравнение Пуассона (11.16), получим для потенциала следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{j\sqrt{m}}{\varepsilon_0\sqrt{2e}}\varphi^{-1/2} = a\varphi^{-1/2}, \quad (11.17)$$

где обозначено  $a = \frac{j\sqrt{m}}{\varepsilon_0\sqrt{2e}}$ .

Умножим левую и правую часть (11.17) на  $\frac{d\varphi}{dx}$  и проинтегрируем, получим

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 4a\sqrt{\varphi(x)} + C. \quad (11.18)$$

По условию задачи катод окружен облаком электронов, а следовательно на электрон, находящийся около катода, не действует сила, или  $E(0) = 0$ . Переходя к потенциалу, получим  $\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0$ . Сам потенциал на катоде по условию задачи также равен нулю. Подставляя эти условия в (11.18), находим константу  $C = 0$ . После чего (11.18) преобразуется к виду



$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{a}\varphi^{1/4}(x). \quad (11.19)$$

Интегрируя (11.19), получаем

$$\varphi(x) = \left(\frac{3\sqrt{a}}{2}x\right)^{4/3} + C_1.$$

Константу  $C_1$  находим из условия  $\varphi(0) = 0$ :  $C_1 = 0$ , откуда

$$\varphi(x) = \left(\frac{9a}{4}\right)^{2/3} x^{4/3}. \quad (11.20)$$

Здесь  $a$  неизвестная пока постоянная. Найдем ее из граничного условия на аноде:  $\varphi(d) = U_0$ . Подстановка в (11.20) найденного значения  $a$  дает окончательно:

$$\varphi(x) = U_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}. \quad (11.21)$$

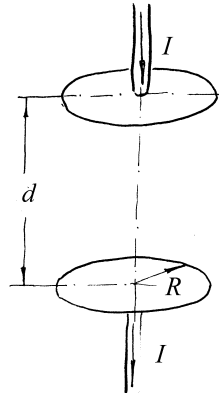


Рис.11.3

**Пример 11.3.** Плоский конденсатор, представляющий собой две круглые пластины радиусом  $R$ , заряжают постоянным током  $I$ , направление которого показано на рис.11.3. Определите напряженность магнитного поля  $H$ , возникающего в зазоре между пластинами конденсатора в зависимости от расстояния  $r$  от оси конденсатора. Сравните полученное выражение с формулой для напряженности поля  $H$  вне конденсатора. Чем можно объяснить скачок напряженности поля  $H$  при переходе через поверхность пластины конденсатора?

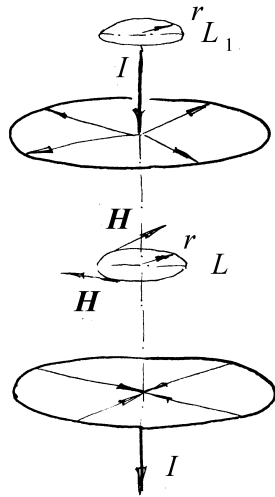


Рис.11.4

**Решение.** Так как распределение тока проводимости вне пластин и токов смещения между ними обладает цилиндрической симметрией, воспользуемся этим фактом при выборе контура обхода для теоремы о циркуляции (см. рис.11.4). В силу симметрии модуль напряженности магнитного поля на окружности  $L$ , ось которой совпадает с током, одинаков во всех точках, поэтому циркуляция вектора  $\vec{H}$  по такому контура равна

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 2\pi r H. \quad (11.22)$$

Для контура, лежащего внутри конденсатора, как следует из уравнения (11.1), ее следует приравнять току смещения, пронизывающему контур  $L$  :

$$I_{см} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} dS = \frac{\partial}{\partial t} (\pi r^2 D) = \pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial t} Q = \frac{r^2}{R^2} I. \quad (11.23)$$

Из этого условия находим поле:

$$H = \frac{r}{2\pi R^2} I. \quad (11.24)$$

Для определения поля вне конденсатора применим теорему о циркуляции к контуру  $L_1$  (рис.11.4). Циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по этому контуру следует приравнять току проводимости  $I$ , заряжающему конденсатор, откуда

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r}. \quad (11.25)$$

Скачок поля при переходе через пластину конденсатора обусловлен наличием радиальных токов, текущих по поверхности пластин в процессе зарядки конденсатора (рис.11.4).

**Пример 11.4.** Заряженный и отключенный от источника плоский конденсатор с круглыми пластинами медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой проводимости. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислите напряженность магнитного поля внутри конденсатора.

**Решение.** Воспользуемся цилиндрической симметрией в распределении токов и вычислим циркуляцию вектора  $\vec{H}$  для контура  $L$ , введенного в предыдущем примере:

$$2\pi r H = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \vec{dS} = \int_S \left( j + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) dS. \quad (11.26)$$

В силу закона сохранения заряда выражение в круглых скобках в правой части (11.26) равно нулю, следовательно равна нулю и напряженность поля  $H$ .

**Пример 11.5.** Заряженный и отключенный от источника плоский конденсатор с круглыми пластинами радиусом  $R$  пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислите мгновенное значение напряженности магнитного поля  $H$  внутри конденсатора как функцию расстояния  $r$  от его оси, если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна  $I$ .

**Решение.** Как и в предыдущей задаче, воспользуемся симметрией в распределении токов и выберем контур  $L$  в виде окружности, плоскость которой параллельна пластинам, а ее центр совпадает с осью симметрии пластин, вдоль которой протекает ток. На этом контуре модуль вектора  $\vec{H}$  в силу симметрии остается неизменным, поэтому  $\oint_L \vec{H} \vec{dl} = 2\pi r H$ . Контур  $L$

пронизывает ток проводимости  $I$ , текущий в искре, и ток смещения, текущий в противоположную сторону и подсчитанный ранее в Примере 3 (11.23).

Подставляя эти токи в выражение для циркуляции  $\vec{H}$  получаем:

$$2\pi r H = I - \frac{r^2}{R^2} I,$$

или

$$H = \frac{I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

В отличие от предыдущего примера, теперь ток проводимости не распределен равномерно по объему поля между пластинами, а сосредоточен в узкой области вблизи оси конденсатора.

**Пример 11.6.** Обкладки плоского конденсатора имеют форму дисков радиусом  $R = 10 \text{ см}$ . Пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ . Конденсатор включен в цепь переменного тока  $I = I_0 \cos \omega t$ . Пренебрегая краевыми эффектами, вычислите электрическую и магнитные энергии, локализованные в конденсаторе. Найдите отношение максимальной магнитной к максимальной электрической энергии. При расчетах следует принять  $\epsilon = \mu = 1$ , а частоту тока  $\nu = \omega/2\pi = 100 \text{ Гц}$ .

**Решение.** Энергия электрического поля, заключенного между обкладками плоского конденсатора определяется выражением (5.8) и для данных задачи равна

$$W_{\text{эл}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon\epsilon_0 \pi R^2}. \quad (11.27)$$

Магнитное поле в конденсаторе создается током смещения. Оно было подсчитано в Примере 3 и задается выражением (11.24). Плотность энергии магнитного поля задается выражением (9.9). Воспользуемся ею для определения энергии магнитного поля в конденсаторе. Энергия поля в цилиндрическом слое, ограниченном радиусами  $r$  и  $r + dr$  равна

$$dW_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 dV = \mu\mu_0 \frac{2d \cdot rdr}{2} \frac{I^2 r^2}{4\pi^2 R^4}. \quad (11.28)$$

Интегрируя это выражение по всему объему цилиндра, получаем

$$W_{\text{маг}} = \frac{\mu\mu_0 dI^2}{4\pi^2 R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu\mu_0 dI^2}{16\pi^2}. \quad (11.29)$$

Подставим в выражения (11.27) и (11.29) заданное по условию задачи выражение для тока и для заряда  $Q = \int I(t)dt = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t$  и найдем отношение их максимальных значений

$$k = \frac{W_{\text{маг}}^m}{W_{\text{элек}}^m} = \frac{\mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \omega^2 R^2}{8\pi}.$$

Учитывая, что скорость электромагнитных волн в вакууме определяется выражением  $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ , перепишем найденное отношение в окончательном виде

$$k = \frac{\mu \varepsilon \omega^2 R^2}{8\pi c^2} = 0,5 \cdot 10^{-14}.$$

Видим, что энергия магнитного поля составляет ничтожную долю от энергии электрического поля, заключенного между обкладками конденсатора.

**Пример 11.7.** Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из  $N$  витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ . Длина соленоида равна  $l$ , радиус  $R$ . По обмотке соленоида течет переменный ток  $I = I_0 \cos \omega t$ . Пренебрегая краевыми эффектами, вычислите электрическую и магнитную энергии, локализованные внутри соленоида, и найдите отношение максимальных значений этих энергий. Численный расчет провести для  $R = 5$  см,  $\varepsilon = \mu = 1$  при частоте тока  $\nu = \omega/2\pi = 100$  Гц.

**Решение.** Энергия магнитного поля, заключенного в катушке, определяется выражением (9.7), а ее индуктивность – формулой (9.15):

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu\mu_0 N^2 \pi R^2}{2l} I_0^2 \cos^2 \omega t. \quad (11.30)$$

Для определения электрического поля в катушке отметим, что распределение тока обладает цилиндрической симметрией, поэтому силовые линии напряженности электрического поля будут окружностями, концентрическими с витками катушки. Выберем контур  $C$ , совпадающим с одной из силовых линий и запишем для него закон электромагнитной индукции:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (11.31)$$

Индукция магнитного поля на оси соленоида задается выражением (9.13). Подставляя его в (11.31), получаем

$$2\pi r E = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu\mu_0 \frac{N}{l} I(t) \pi r^2 \right) = \frac{\mu\mu_0 \omega N \pi r^2}{l} I_0 \sin \omega t,$$

откуда

$$E(r) = \frac{\mu\mu_0 \omega N r}{2l} I_0 \sin \omega t. \quad (11.32)$$

Энергия электрического поля, заключенная в катушке, может быть подсчитана через плотность энергии (5.9). Выберем цилиндрический слой между цилиндрами с радиусами  $r$  и  $r + dr$ , тогда энергия электрического поля в этом слое будет равна

$$dW_{\text{элек}} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 dV = \frac{\epsilon \epsilon_0 \mu^2 \mu_0^2 \omega^2 N^2}{8l^2} r^2 I_0^2 \sin^2 \omega t 2\pi r dr l.$$

Интегрируя по всей катушке, окончательно получим

$$W_{\text{элек}} = \frac{\epsilon\epsilon_0\mu^2\mu_0^2\omega^2 N^2\pi}{4l} I_0^2 \sin^2 \omega t \int_0^R r^3 dr = \frac{\epsilon\epsilon_0\mu^2\mu_0^2\omega^2 N^2\pi R^4}{16l} I_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Отношение максимальных значений электрической энергии к энергии магнитного поля равно

$$k = \frac{W_{\text{элек}}}{W_{\text{магн}}} = \frac{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0\omega^2 R^2}{8}.$$

Учитывая, что скорость электромагнитных волн в вакууме определяется выражением  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$ , перепишем найденное отношение в окончательном виде

$$k = \frac{\mu\epsilon\omega^2 R^2}{8c^2} = 1,3 \cdot 10^{-15}.$$

**Пример 11.8.** Внутри цилиндрической области пространства радиусом  $R=10$  см (см. рис.11.5) магнитное поле направлено параллельно оси  $OO'$  воображаемого цилиндра, а его индукция изменяется по закону  $B(t) = kt$ ,  $k=60$  Тл/с. Вне этой области магнитная индукция равна нулю. На расстоянии  $a=19$  см от оси  $OO'$  расположена, как показано на рисунке, тонкая проводящая палочка длиной  $l=22$  см. Найдите разность потенциалов между концами палочки.

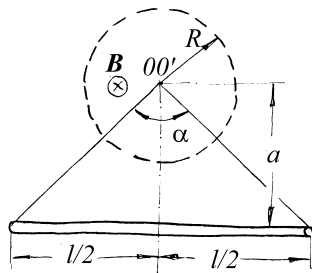


Рис.11.5

**Решение.** Как внутри, так и вне области,



занятой переменным во времени магнитным полем, существует электрическое поле, определяемое уравнением (11.2). Структура этого поля внутри области однородного цилиндрически симметричного магнитного поля была подробно рассмотрена в примере 1. Как было показано, в рассматриваемом случае отлична от нуля только азимутальная составляющая  $E_\varphi$ , и она равна  $-\frac{1}{2}kr$  ( $r < R$ ). Найдем теперь электрическое поле вне области магнитного поля. При  $r > R$

( $B=0$ ) эта составляющая удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = 0$ , откуда следует

$E_\varphi = C/r$ . Теперь особая точка  $r = 0$  не входит в рассматриваемую область, и это решение не должно быть отброшено. Постоянная  $C$  находится из условия непрерывности вектора  $\vec{E}$  при  $r = R$ :  $C/R = -\frac{1}{2}kR$ , откуда окончательно:

$$E_\varphi = -\frac{kR^2}{2r} \quad (11.33)$$

Заметим, что найденное выражение для вихревого электрического поля есть не что иное как производная  $-\frac{\partial A}{\partial t}$  в формуле (11.13) и могло быть легко получено

из выражения для векторного потенциала. При помещении проводящей палочки во внешнее поле в ней произойдет перемещение свободных зарядов и их стационарное распределение должно удовлетворять условию равенства нулю полного электрического поля:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \text{ откуда следует } \text{grad}\varphi = -\vec{E}_i, \text{ где } \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{поле}$$

электромагнитной индукции.

Интегрируя это выражение вдоль палочки, получим выражение для искомой разности потенциалов:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}kR^2\alpha, \quad (11.34)$$

где  $\alpha$  – угол, под которым видны концы палочки из центра области магнитного поля. В рассматриваемой геометрии  $\alpha = 2 \arcsin \frac{l}{\sqrt{4a^2 + l^2}}$ . Отметим, что

рассчитанная разность потенциалов учитывает только потенциальную часть полного поля и, поэтому, не равна работе по перемещению пробного заряда от одного конца палочки до другого. Эта работа зависит от траектории (так как полное поле не потенциально), и включает как работу потенциальных сил, так и вихревой составляющей поля.

$$\text{Окончательно, } \Delta\varphi = kR^2 \arcsin \frac{l}{\sqrt{4a^2 + l^2}} = 0,314 \text{ В.}$$

#### *Задание для самостоятельной работы*

**11.1.** Из материала с проводимостью  $\lambda = 6 \cdot 10^7 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$  изготовлен сплошной цилиндр длиной  $l = 4 \text{ см}$  и радиусом  $R = 1 \text{ см}$ . Цилиндр помещают в нестационарное магнитное поле, вектор индукции которого  $\vec{B}$  параллелен оси цилиндра. Магнитное поле изменяется по закону

$$B(t) = \begin{cases} kt, & 0 \leq r \leq R_1, \\ 0, & r > R_1, \end{cases}$$

где  $r$  – расстояние от оси цилиндра, а  $R_1 > R$ . Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в цилиндре за счет токов Фуко, если  $k = 10 \text{ Тл/с}$ .

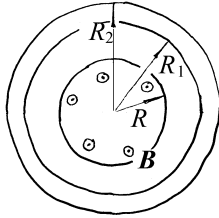


Рис.11.6

**11.2.** Внутри цилиндрической области пространства радиусом  $R=10$  см (см. рис.11.6) магнитное поле однородно и направлено параллельно оси  $OO'$  воображаемого цилиндра, а его индукция изменяется по закону  $B(t) = B_0 \sin \omega t$ ,  $B_0=1.5$  Тл. Вне этой области магнитная индукция равна нулю. Вне области магнитного поля расположен, как показано на рисунке, отрезок проводящей трубы с радиусами  $R_1=12$  см и  $R_2=15$  см и высотой  $h=20$  см. Найдите среднюю

тепловую мощность, выделяемую в трубе. Проводимость материала трубы  $\lambda=5 \cdot 10^7$  (Ом·м) $^{-1}$ .

**11.3.** В проводнике, помещенном в нестационарное магнитное поле, циркулируют токи Фуко. Линии тока представляют собой окружности, центры которых лежат на оси  $Oz$ , причем зависимость плотности тока от времени  $t$  и от расстояния  $r$  рассматриваемой точки проводника до оси  $Oz$  описывается законом  $j(r,t) = k r e^{-t/\tau}$ . Определите индукцию магнитного поля в проводнике, если известно, что в момент времени  $t=0$  она была равна нулю во всем объеме проводника.

**11.4.** Для плоскопараллельного диода, описанного в примере 2, рассчитайте плотность объемного заряда  $\rho(x)$  как функцию расстояния  $x$  до катода. Потенциал анода  $U_0$ , расстояние между катодом и анодом  $d$ . Определите плотность заряда на расстоянии  $d/2$  от катода при условии  $U_0 = 100$  В,  $d = 5$  мм.

**11.5.** Для плоскопараллельного диода, описанного в примере 2, определите плотность тока, протекающего через диод. Напряжение на аноде  $U_0 = 200B$ , расстояние между катодом и анодом  $d = 5\text{мм}$ .

**11.6.** Для плоскопараллельного диода, описанного в примере 2, найдите скорость электронов в точке, равноудаленной от катода и анода. Напряжение на аноде  $U_0 = 100B$ .

**11.7.** Для плоскопараллельного диода, описанного в примере 2, определите время пролета электронов от катода к аноду. Потенциал анода  $U_0 = 100B$ , расстояние между катодом и анодом  $d = 10\text{мм}$ .

**11.8.** К плоскому воздушному конденсатору, обкладки которого имеют форму дисков с зазором  $d = 1\text{см}$  между ними, приложено переменное напряжение  $U = U_0 \cos \omega t$  с амплитудой  $U_0 = 300B$  и круговой частотой  $\omega = 3 \cdot 10^6\text{с}^{-1}$ . Найдите амплитуду полей  $H_0$  и  $B_0$  на расстоянии  $r = 1\text{см}$  от оси конденсатора, если это расстояние меньше радиуса обкладок конденсатора. Как изменятся эти амплитуды, если зазор между обкладками заполнить однородным диэлектриком с  $\epsilon = 10$  и  $\mu = 100$ ?

**11.9.** Заряженный и отключенный от источника плоский конденсатор с круглыми пластинами пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислите полный поток электромагнитной энергии, вытекающей из пространства между обкладками.

**11.10.** Найдите плотность тока смещения  $j_{см}$  в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью  $v$ , оставаясь параллельными

друг другу. Если: 1) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными; 2) разность потенциалов  $U$  между пластинами остается постоянной. Расстояние между пластинами конденсатора  $d$  остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин.

**11.11.** По прямолинейному проводнику радиусом  $a$  течет постоянный ток с плотностью  $j$ . 1) Укажите для произвольной точки боковой поверхности провода направление составляющей вектора Пойтинга, обусловленной тангенциальной составляющей  $\vec{E}$ . 2) Покажите, что произведение модуля вектора Пойтинга на величину площади боковой поверхности провода равно мощности, выделяемой током в проводе.

**11.12.** Цилиндрический электронный пучок радиусом  $R$  распространяется в свободном пространстве. Электроны пучка летят параллельно, их концентрация равна  $n$ , а кинетическая энергия каждого из них -  $W$ . Найдите величину и направление вектора Пойтинга в любой точке пространства.

**11.13.** Найдите индукцию магнитного поля, создаваемого потоком электронов в плоском диоде с круглыми электродами на расстоянии  $r = 1 \text{ см}$  от оси прибора. Расстояние между анодом и катодом  $d = 5 \text{ мм}$ , напряжение на аноде  $U_0 = 200 \text{ В}$ .

**11.14.** Найдите величину силы Лоренца, действующей на электроны в плоском диоде с круглыми электродами за счет их собственного магнитного поля, вблизи края анода с радиусом  $R$ . Расстояние между анодом и катодом  $d$ , напряжение на аноде  $U_0$ .

## §12. Электрические цепи. Правила Кирхгофа.

### *Краткие теоретические сведения*

Электрические цепи состоят из *элементов цепи* и соединяющих их проводов. Свойства элементов задаются соотношениями, связывающими падение напряжения на элементе с проходящим через него током. Точки цепи, где сходятся три или более проводов называются *узлами* цепи. Участок цепи между двумя соседними узлами называется *ветвью*. Любой замкнутый участок цепи называется *контуром*. Протекание токов в цепи описывается системой дифференциальных уравнений (в простейших случаях алгебраических), которую можно составить, следуя *правилам Кирхгофа*.

Первое правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма всех токов, текущих в любой узел, равна нулю.* Если в цепи  $N$  узлов, то это правило позволяет написать  $N-1$  линейно-независимое уравнение. Поэтому при составлении уравнений один узел (любой) следует исключить.

Второе правило Кирхгофа: *для любого контура сумма падений напряжения на его элементах равна сумме ЭДС, действующих в этом контуре.* При составлении уравнений следует выбирать *независимые* контуры. Такой выбор гарантируется следующим простым алгоритмом: выбрав первый контур (произвольно) помечаем одну из его ветвей, которая не должна входить в последующие контуры. Так же поступаем со вторым контуром, и так далее, пока в цепи нельзя будет провести более ни одного контура. Построенная таким путем система контуров позволяет, вместе с системой уравнений для узлов, получить ровно столько уравнений, сколько в цепи неизвестных токов ветвей.

Правило знаков. Чтобы избежать возможных ошибок при составлении уравнений цепи, следует соблюдать правила расстановки знаков. Вначале для каждой ветви, наряду с введением соответствующей переменной, выбирается (произвольно) положительное направление тока ветви, которое больше не изменяется в процессе решения задачи. При составлении уравнений для узлов токи, которые направлены к рассматриваемому узлу учитываются со знаком плюс, а от узла – со знаком

минус. В уравнениях для контуров падение напряжения на элементе учитывается со знаком +, если при обходе контура этот элемент проходится в направлении, совпадающим с ранее выбранным направлением тока ветви. ЭДС источника считается положительной, если источник проходится от минуса к плюсу.

Элементы цепи. Обычно рассматривают три типа элементов: резистор (сопротивление), индуктивность и конденсатор. Соответствующие этим элементам величины *сопротивления*, коэффициента самоиндукции и емкости обозначим  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Падения напряжения на этих элементах выражаются, соответственно, соотношениями:

$$U_R = IR, \quad U_L = L \, dI/dt, \quad U_C = 1/C \int I dt, \quad (12.1)$$

где  $I$  – ток ветви, содержащей элемент.

Последнее выражение содержит произвольную постоянную, которая находится из начальных условий. В индуктивно связанных катушках ЭДС в каждой из обмоток зависит от тока в другой обмотке:

$$\mathcal{E}_{1,2} = L_{12} dI_{2,1}/dt, \quad (12.2)$$

где  $L_{12}$  – коэффициент взаимной индукции обмоток.

Метод комплексных амплитуд. При наличии в цепи источника гармонической ЭДС установившийся режим может быть найден методом *комплексных амплитуд*. Метод основан на известном приеме решения дифференциальных уравнений с гармонической правой частью, когда решение ищется в комплексной форме. Применительно к теории электрических цепей ЭДС источника вида  $E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$  заменяется комплексным изображением  $E = \check{E} \exp(i\omega t)$ , где  $\check{E}$  – *комплексная амплитуда*:  $\check{E} = E_0 \exp(i\varphi)$ . Аналогично вводятся комплексные амплитуды искомых токов  $\check{I}_k$ . Пользуясь обычными правилами Кирхгофа, можно составить систему уравнений для комплексных амплитуд (минуя процедуру составления дифференциальных уравнений), если записать выражения для падений напряжения на элементах в комплексном виде:

$$\check{U}_R = \check{I}R, \quad \check{U}_C = \check{I}/i\omega C, \quad \check{U}_L = \check{I}i\omega L. \quad (12.3)$$

Все эти выражения можно записать единообразно:

$$\check{U} = \check{I}Z, \quad (12.4)$$

где  $Z_R = R$ ,  $Z_C = 1/i\omega C$ ,  $Z_L = i\omega L$ .

В этом случае уравнения цепи составляются точно так же, как и для цепей постоянного тока. Параметр  $Z$  называют *комплексным сопротивлением (импедансом)* соответствующего элемента. Для группы соединенных вместе элементов можно ввести их общее (эквивалентное) комплексное сопротивление по тем же правилам, что и для цепей постоянного тока.

Следует помнить, что действительная амплитуда тока или напряжения – это модуль соответствующей комплексной переменной, а фаза – ее аргумент.

### Примеры решения задач

**Пример 12.1.** В цепи, показанной на рис.12.1, найдите силу тока через источник  $E_2$  при условии, что  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 2R$ ,  $R_3 = R$ ,  $R_4 = 2R$ .

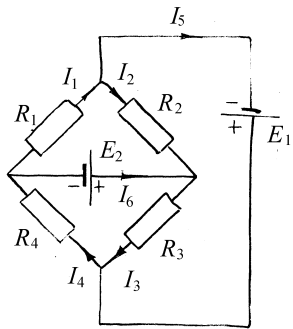


Рис.12.1

**Решение.** В рассматриваемой цепи четыре узла и шесть ветвей. Введем шесть неизвестных токов ( $I_1 - I_6$ ), положительные направления которых обозначены на рис.12.1 стрелками. Исключив нижний узел, запишем первую систему уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_5 &= 0, \\ I_2 + I_6 - I_3 &= 0, \quad I_4 - I_6 - I_1 = 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Для трех контуров, показанных на рис.12.2 пунктиром (номер контура помещен в кружке), составим вторую систему уравнений Кирхгофа:

$$-I_2 R_2 - I_3 R_3 = E_1,$$



$$I_3 R_3 + I_4 R_4 = E_2, \quad (12.6)$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = 0.$$

Места разрыва контуров обозначены на рис.12.2 крестиком с номером контура.

Решение этой системы уравнений в общем случае приведено ниже:

$$\begin{aligned} I_1 &= [E_1(R_3 + R_4)R_2 - E_2(R_2 + R_3)R_4] / \Delta, \\ I_2 &= -[E_1(R_3 + R_4)R_2 + E_2(R_1 + R_4)R_3] / \Delta, \\ I_3 &= -[E_1(R_1 + R_2)R_4 - E_2(R_1 + R_4)R_2] / \Delta, \\ I_4 &= [E_1(R_1 + R_2)R_3 + E_2(R_2 + R_3)R_1] / \Delta, \\ I_5 &= [E_1(R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_1 R_3 + R_1 R_4) + E_2(R_1 R_3 - R_2 R_4)] / \Delta, \\ I_6 &= [E_1(R_1 R_3 - R_2 R_4) + E_2(R_1 R_3 + R_3 R_4 + R_1 R_2 + R_2 R_4)] / \Delta, \end{aligned} \quad (12.7)$$

где

$$\Delta = R_1 R_2 R_3 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4.$$

При оговоренных в условии значениях  $R_1 = R_3 = R$ ,  $R_2 = R_4 = 2R$

$$I_6 = \frac{3E_2}{4R} - \frac{E_1}{4R}. \quad (12.8)$$

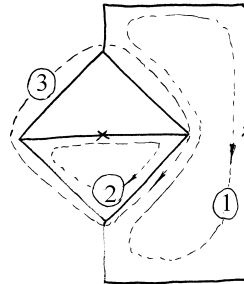


Рис.12.2

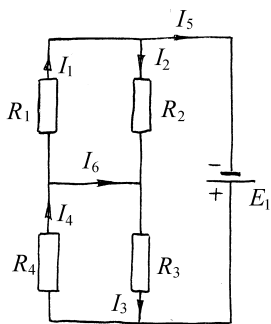


Рис.12.3

$E_1/2$ . Поэтому  $I_4 = E_1/4R$ ,  $I_1 = E_1/2R$ ,  $I_6'' = I_4 - I_1 = -E_1/4R$ .

Аналогично рассуждая, находим для другого случая:  $I_4 = E_2/4R$ ,  $I_1 = -E_2/2R$ ,  $I_6' = 3E_2/4R$ . Окончательно получим прежний результат (12.8).

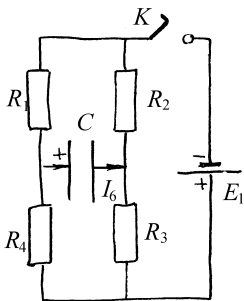


Рис.12.4

$E_2$  на  $(-V)$  (согласно выбранному ранее направлению тока  $I_6$  напряжение  $V$  следует считать положительным, если плюс расположен слева). Воспользуемся полученным ранее решением (12.8):

Процедуру решения уравнений можно существенно упростить, воспользовавшись принципом суперпозиции: если обозначить  $I_6'$  ток в диагональной ветви в случае  $E_1 = 0$ , а  $I_6''$  - в случае  $E_2 = 0$ , то в общем случае  $I_6 = I_6' + I_6''$ . Значения  $I_6'$  и  $I_6''$  легко находятся. При  $E_2 = 0$  схема цепи приобретает вид, показанный на рис.12.3. При этом в силу симметрии цепи падения напряжения на верхней и нижней половинах схемы одинаковы и равны

**Пример 12.2.** В цепи, показанной на рис.12.4, найдите изменение напряжения на конденсаторе как функцию времени при условии, что вначале конденсатор не заряжен. Ключ замыкается при  $t = 0$ .

**Решение.** После замыкания ключа структура цепи совпадает с рассмотренной в предыдущем примере, если заменить источник с  $E_2$  конденсатором  $C$ . Обозначив напряжение на конденсаторе  $V$ , составим систему уравнений Кирхгофа, которая совпадает с (12.5), (12.6), где следует заменить

$$I_6 = -\frac{3V + E_1}{4R}.$$

С другой стороны из свойств конденсатора следует  $I_6 = C \frac{dV}{dt}$ .

Приравнявая эти выражения, получаем

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{3V + E_1}{4RC}. \quad (12.9)$$

Теперь следует найти решение (12.9) с начальным условием  $V(0) = 0$ . Заметим, что (12.9) имеет очевидное частное решение  $V = -E_1/3$ , поэтому

$$V(t) = -\frac{E_1}{3} + A \exp\left(-\frac{3t}{4RC}\right),$$

где  $A$  - произвольная постоянная.

Из начального условия следует  $A = E_1/3$ . Окончательно получим:

$$V(t) = \frac{E_1}{3} \left[ \exp\left(-\frac{3t}{4RC}\right) - 1 \right]. \quad (12.10)$$

**Пример 12.3.** Конденсатор, заряженный до напряжения  $U_0$ , подключается при  $t = 0$  к цепи, как показано на рис.12.5. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени.

**Решение.** Для  $t > 0$  первое уравнение Кирхгофа имеет вид:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (12.11)$$

Из (12.1) непосредственно следует:

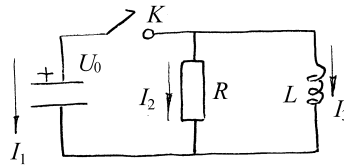


Рис.12.5

$$I_1 = C \frac{dU}{dt}, \quad I_2 = \frac{U}{R}, \quad L \frac{dI_3}{dt} = U. \quad (12.12)$$

Продифференцировав уравнение (12.11) и подставив в него производные токов, полученные из (12.12), запишем:  $CU'' + U'/R + U/L = 0$ , или

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\delta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0, \quad (12.13)$$

где  $2\delta = 1/RC$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC$ .

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$U = \exp(-\delta t)[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (12.14)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ,  $\delta = 1/2RC$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Постоянные  $A$  и  $B$  находятся из начальных условий. По условию задачи  $U(0) = 0$ . Для нахождения  $U'(0)$  заметим, что  $I_3(0) = 0$ , так как ток через индуктивность не претерпевает скачков. Поэтому при  $t = 0$  ток  $I_1 = -I_2$ , а  $I_2 = U_0/R$ . Таким образом,  $U'(0) = I_1(0)/C = -U_0/RC$ .

Используя эти значения, находим:  $A = U_0$ ,  $B = -\delta U_0/\omega$ . Откуда окончательно:

$$U = U_0 \exp(-\delta t) \left[ \cos(\omega t) - \frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t) \right].$$

**Пример 12.4.** Найдите полный заряд, протекающий во вторичной цепи трансформатора после замыкания ключа (см. схему на рис.12.6).

**Решение.** Уравнения для двух контуров, содержащихся в схеме, будут:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = E + L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad (12.15)$$

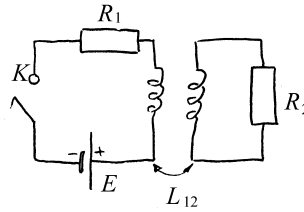


Рис.12.6

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 = L_{12} \frac{dI_1}{dt}. \quad (12.16)$$

Заряд  $Q_2$ , равный  $\int_0^{\infty} I_2 dt$ , можно найти, не решая системы

уравнений (12.15), (12.16). Для этого проинтегрируем уравнение (12.16) по времени от нуля до бесконечности:

$$L_2 I_2 \Big|_0^{\infty} + R_2 Q_2 = L_{12} I_1 \Big|_0^{\infty}. \quad (12.17)$$

Учитывая начальные условия  $I_1(0) = 0$ ,  $I_2(0) = 0$  и предельные значения токов  $I_1(\infty) = E/R_1$  и  $I_2(\infty) = 0$ , найдем

$$Q_2 = \frac{EL_{12}}{R_1 R_2}.$$

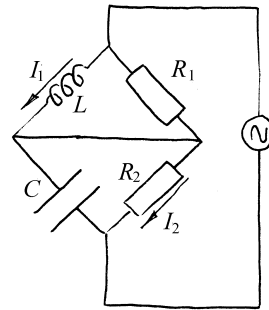


Рис.12.7

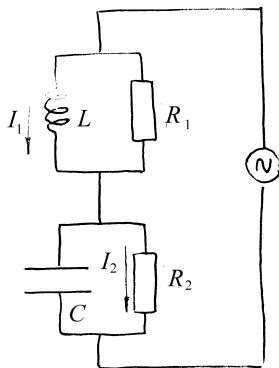


Рис.12.8

**Пример 12.5.** В цепи, показанной на рис.12.7, найдите фазовый сдвиг между током  $I_1$ , протекающим через катушку индуктивности, и током  $I_2$  в резисторе  $R_2$ . При каком условии этот сдвиг фаз не зависит от частоты?

**Решение.** Как видно из рис.12.8, цепь можно представить как последовательное соединение двух участков по два элемента в каждом. Поэтому

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad Z_1 = i\omega L R_1 / (R_1 + i\omega L), \quad Z_2 = R_2 / (1 + i\omega R_2 C). \quad (12.18)$$

Падения напряжения на этих участках будут:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= EZ_1 / (Z_1 + Z_2), \quad \tilde{U}_2 = EZ_2 / (Z_1 + Z_2), \\ \tilde{I}_1 &= \tilde{U}_1 / i\omega L, \quad \tilde{I}_2 = \tilde{U}_2 / R_2. \end{aligned} \quad (12.19)$$

$$\varphi = \arg \tilde{I}_1 - \arg \tilde{I}_2 = \arg(\tilde{I}_1 / \tilde{I}_2) = \arg \left[ \frac{1 + i\omega R_2 C}{1 + i\omega L / R_1} \right]. \quad (12.20)$$

Из (12.20) следует:

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\omega R_2 C) - \operatorname{arctg}(\omega L / R_1).$$

Сдвиг фазы не зависит от частоты, если

$$R_2 C = L / R_1.$$

В этом случае  $\varphi = 0$ .

**Пример 12.6.** Найдите условие, при котором ток  $I_3$  в диагонали моста (см. рис.12.9) будет равен нулю.

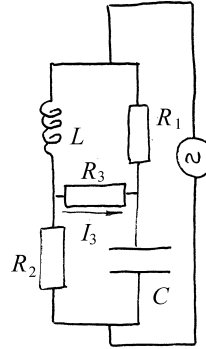


Рис.12.9

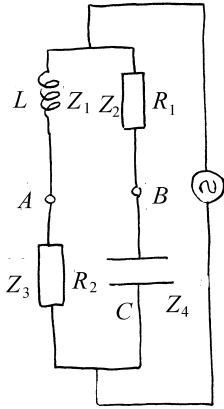


Рис.12.10

**Решение.** Требуемое условие можно получить, составив систему уравнений Кирхгофа для цепи, найдя ток в диагонали и приравняв его к нулю. Такой путь требует, однако, довольно длинных вычислений. Задачу можно решить значительно короче следующим путем. Допустим, что ток  $I_3$  (рис.12.10) равен нулю и запишем условие, когда это будет действительно так. При  $I_3 = 0$  потенциалы точек А и В должны быть равны. Вместе с тем, ветвь, по которой течет ток  $I_3$ , можно удалить (так как этот ток равен нулю), не изменив режим в оставшейся части цепи. Поэтому, если в исходной цепи требуемое условие выполнено, то в цепи, показанной на рис.12.10, потенциалы  $V_A$  и  $V_B$  должны совпасть. Запишем это условие:

$$V_A = \frac{EZ_3}{Z_1 + Z_3}, \quad V_B = \frac{EZ_4}{Z_2 + Z_4},$$

откуда

$$Z_2 Z_3 = Z_1 Z_4. \quad (12.21)$$

Подставляя вместо комплексных сопротивлений ветвей их конкретные значения  $Z_2 = R_1$ ,  $Z_3 = R_2$ ,  $Z_1 = i\omega L$  и  $Z_4 = 1/i\omega C$ , получим

$$R_1 R_2 = \frac{L}{C}.$$

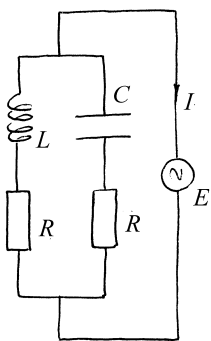


Рис.12.11

**Пример 12.7.** Найдите амплитуду тока  $I$  в цепи, показанной на рис.12.11. Возможны ли такие значения параметров цепи, при которых ток не будет зависеть от частоты источника?

**Решение.** Запишем комплексное сопротивление цепи, рассматривая ее как параллельное соединение двух ветвей, каждая из которых содержит два элемента:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad Z_1 = R + i\omega L, \quad Z_2 = R + 1/i\omega C$$

После простых преобразований получим

$$Z = R \frac{(R + 1/RC) + i(\omega L - 1/\omega C)}{2R + i(\omega L - 1/\omega C)}, \quad (12.22)$$

$$\tilde{I} = E/|Z| = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{4R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}{(R + L/RC)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Как нетрудно заметить непосредственно из (12.22), если

$$R + L/CR = 2R, \text{ или } L = CR^2,$$

то комплексный множитель в (12.22) сокращается и  $Z = R$  независимо от частоты  $\omega$ . В этом случае ток в цепи от частоты не зависит.

### Задание для самостоятельной работы

#### Правила Кирхгофа

В условиях задач, если не оговорено специально, внутренние сопротивления источников считаются равными нулю. Токи на схемах направлены произвольно. Если реальный ток течет так, как указано на схеме, то в ответе стоит знак +, если нет - то минус.



**12.1.** Из 12 проводников, обладающих одинаковым сопротивлением, спаян куб. Три проводника разорваны таким образом, что в каждом из шести одинаковых контуров, образованных гранями куба, есть по одному разрыву. В эти разрывы вставлены одинаковые элементы с нулевым внутренним сопротивлением. Ток в двух из них одинаков и равен  $I$ . Найдите ток через третий элемент.

**12.2.** Два гальванических элемента с ЭДС  $E_1, E_2$  и внутренними сопротивлениями  $r_1, r_2$  соединены параллельно. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление полученной батареи.

**12.3.** Каково должно быть сопротивление  $R$  измерительного прибора (рис.12.12), чтобы при небольшом рассогласовании первоначально уравновешенного моста прибор потреблял максимальную мощность?

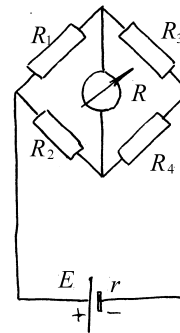


Рис.12.12

**12.4.** Сопротивление состоит из трех элементов, соединенных треугольником:  $R_{12} = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_{23} = 4 \text{ Ом}$  и  $R_{31} = 5 \text{ Ом}$ . Токи, притекающие извне к его вершинам:  $I_1 = 4,5 \text{ А}$ ,  $I_2 = 1,5 \text{ А}$ . Найдите потенциалы вершин  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , если потенциал  $\varphi_3 = 0$ .

**12.5.** Электрическая цепь имеет вид тетраэдра, спаянного из проволочек сопротивлением  $g$  каждая. Удалив из схемы три проволочки, получили цепь, соединяющую две вершины  $A$  и  $B$  тетраэдра, причем такую, что, пройдя по ней, можно посетить все вершины тетраэдра по одному разу. Каково будет сопротивление цепи между точками  $A$  и  $B$ , если вставить вместо удаленных проволочек другие, сопротивлением  $R$  каждая.

**12.6.** В схеме, показанной на рис.12.13, сопротивление  $R_1$  разделено на две равные части  $R_1'$  и  $R_2''$ . Найдите разность потенциалов между точками  $A$  и

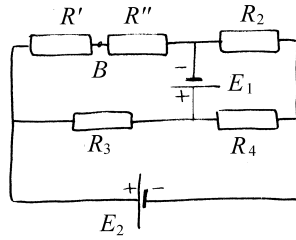


Рис.12.13

$r_1=6 \text{ Ом}$ ,  $r_2=r_3=30 \text{ Ом}$ ,  $r_4=15 \text{ Ом}$  и  $r_6=40 \text{ Ом}$ .

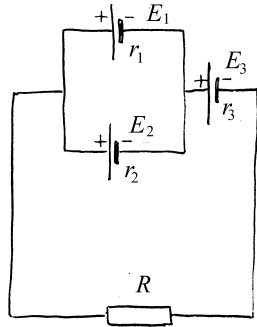


Рис.12.15

$E_1=5 \text{ В}$ ,  $E_2=4 \text{ В}$ ,  $E_3=3 \text{ В}$ ,  $r_1=2 \text{ Ом}$ ,  $r_2=1 \text{ Ом}$ ,  $r_3=0,5 \text{ Ом}$  и  $R=2,5 \text{ Ом}$ .

В. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

$E_1 = 41 \text{ В}$ ,  $E_2 = 7 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,

$R_3 = 30 \text{ Ом}$  и  $R_4 = 40 \text{ Ом}$ .

**12.7.** Определите токи во всех ветвях схемы (рис.12.14). Параметры схемы:  $E_1=200 \text{ В}$ ,  $E_2=10 \text{ В}$ ,  $E_3=30 \text{ В}$ ,  $E_4=56 \text{ В}$ ,

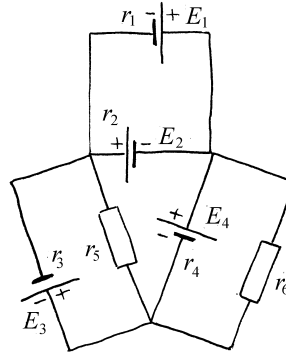


Рис.12.14

**12.8.** Три источника тока и реостат соединены, как показано на рис.12.15. Определите силу тока в реостате, если

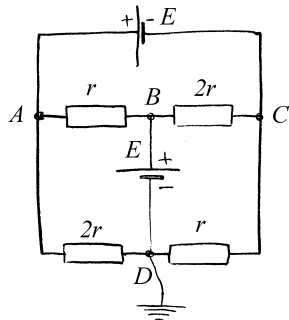


Рис.12.16

12.9. Найдите потенциалы узлов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , если потенциал узла  $D$  равен нулю (рис.12.16). Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.

12.10. Определите внутреннее сопротивление и ЭДС элемента, эквивалентного данной батарее (рис.12.17), то есть дающего во внешнюю цепь такой же ток, как и батарея при любом сопротивлении  $R$ .

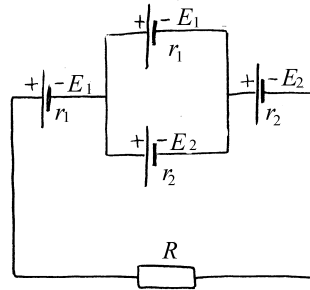


Рис.12.17

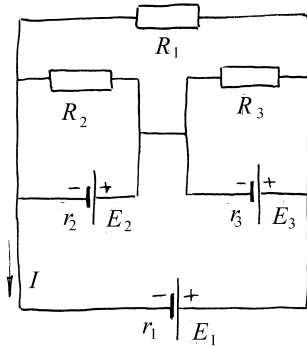


Рис.12.18

12.11. Найдите ток в ветви  $AB$  схемы, изображенной на рис.12.18, если  $E_1=6$  В,  $E_2=16$  В,  $E_3=28$  В,  $r_1=2$  Ом и  $R_1=9$  Ом.

12.12. Какова должна быть ЭДС элементов  $E_2$ ,  $E_3$  в схеме, показанной на рис.12.19,

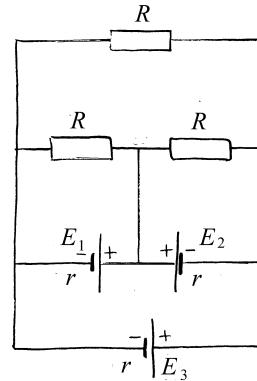


рис.12.19

чтобы ток в ветви  $AB$  был равен  $I_{AB}=4$  А?  $E_1=4$  В,  $r=0,5$  Ом,  $R=2,25$  Ом.

### Переходные процессы

В задачах, где на схемах не указано внутренне сопротивление источников, принять их равными нулю. Если не оговорено особо, конденсаторы в начальный момент считать не заряженными. При выборе корней характеристического уравнения знак  $+$  перед корнем соответствует  $\lambda_1$ , а знак минус -  $\lambda_2$ .

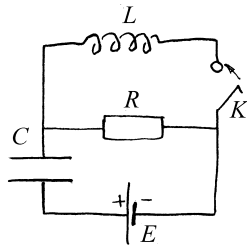


Рис.12.20

зависимость тока через резистор от времени  $I_R(t)$ .

**12.13.** В схеме, показанной на рис.12.20, в момент  $t = 0$  ключ замыкается. Найдите

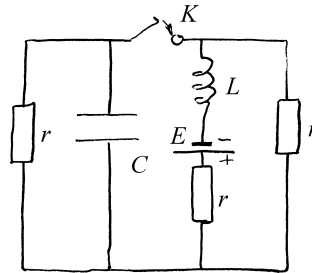


Рис.12.21

**12.14.** Найдите предельное напряжение на конденсаторе в схеме, показанной на рис.12.21, после замыкания ключа.

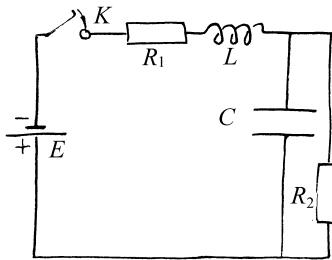


Рис.12.22

**12.16.** Найдите зависимость напряжения на индуктивности от времени, в цепи на рис.12.23, если в момент времени  $t = 0$  ключ  $K$  переходит из положения 1 в положение 2.

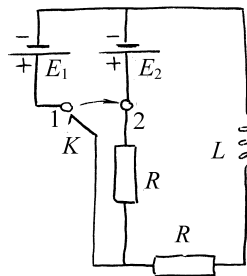


Рис.12.23

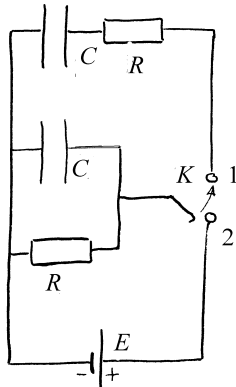


Рис.12.24

**12.17.** Найдите зависимость от времени напряжения на обоих конденсаторах в схеме на рис.12.24, если в момент  $t = 0$  ключ  $K$  мгновенно переключается из положения 1 в положение 2. Емкости конденсаторов одинаковы  $C_1 = C_2 = C$ .

**12.18.** Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени (рис.12.25), если в момент  $t = 0$  ключ  $K$  замыкается.

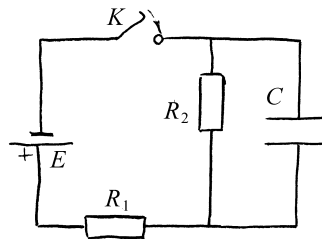


Рис.12.25

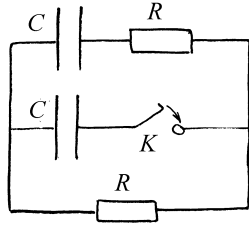


Рис.12.26

**12.20.** Найдите напряжение на конденсаторе (рис.12.27) как функцию времени, если ключ замыкается в момент  $t = 0$ .

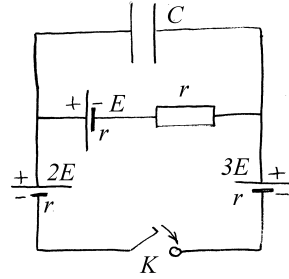


Рис.12.27

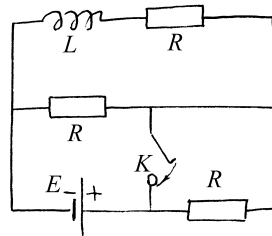


Рис.12.28

**12.21.** Найдите напряжение на катушке индуктивности (рис.12.28) как функцию времени, протекшего после замыкания ключа.

**12.22.** При каких значениях  $R$  изменение напряжения на индуктивности после замыкания ключа будет аperiodическим (рис.12.29)?

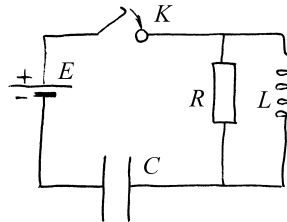


Рис.12.29

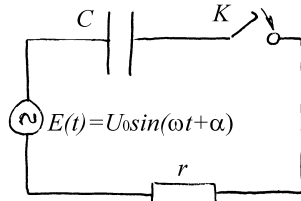


Рис.12.30

**12.23.** Каково должно быть  $\alpha$ , чтобы при замыкании ключа в момент  $t = 0$  в цепи (рис.12.30) сразу наступил установившийся режим?

**12.24.** Найдите ток через резистор  $R$  (рис.12.31) после замыкания ключа, если начальные токи в индуктивностях равны нулю, а магнитной связи между катушками нет.

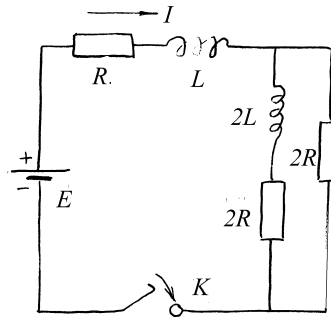


Рис.12.31

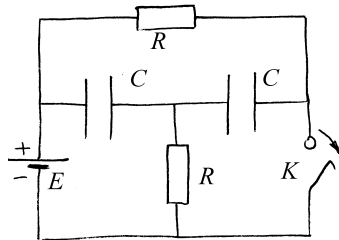


Рис.12.32

**12.25.** Рубильник  $K$  (рис.12.32) замкнут в течение продолжительного времени и размыкается в момент  $t = 0$ . Найдите напряжение на рубильнике  $U(t)$ .

**12.26.** Найдите напряжение  $U(t)$  (рис.12.33) на правом конденсаторе, если в момент  $t = 0$  ключ  $K$ : а) замыкается, б) размыкается.

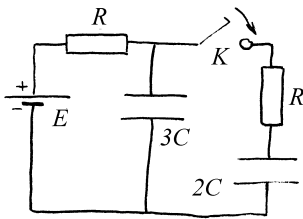


Рис.12.34

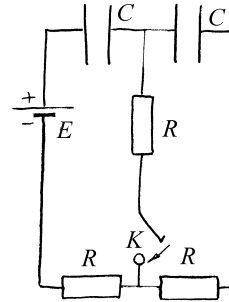


Рис.12.33

**12.27.** Через какой промежуток времени после замыкания ключа в схеме, изображенной на рис.12.34 напряжение на конденсаторе  $3C$  будет наименьшим?

**12.28.** Найдите ток через резистор  $3R$  в схеме на рис.12.35 после замыкания ключа, если начальные напряжения на всех конденсаторах равны нулю?

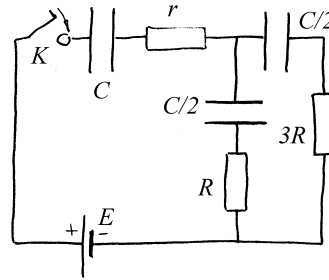


Рис.12.35



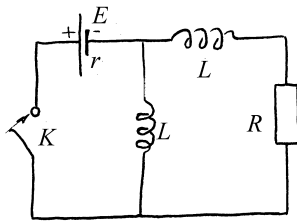


Рис.12.36

**12.29.** Найдите ток через сопротивление  $R$  (рис.12.36) как функцию времени, протекшего после замыкания ключа  $K$ .

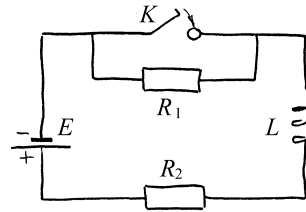


Рис.12.37

**12.30.** Как будет изменяться со временем ток  $I$  в цепи, представленной на рис.12.37, после замыкания ключа?

**Вынужденные колебания в цепи переменного тока**

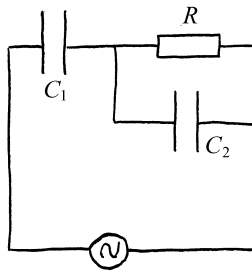


рис.12.38

**12.31.** Два конденсатора  $C_1$  и  $C_2$  и сопротивление  $R$  соединены по схеме, показанной на рис.12.38. Определите силу тока через сопротивление  $R$  и конденсатор  $C_1$ .

**12.32.** При каком соотношении между частотой переменного тока  $\omega$  и параметрами схемы (рис.12.39)  $r, L$  и  $C$  сдвиг фаз между напряжением и током через источник будет равен нулю?

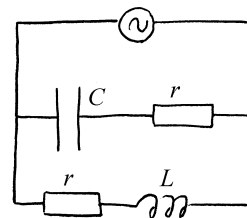


Рис.12.39

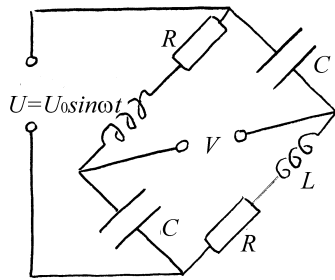


Рис.12.40

**12.34.** Найдите мощность  $W$ , рассеиваемую в схеме, показанной на рис.12.41.

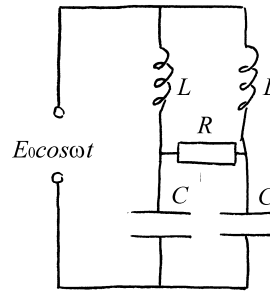


Рис.12.41

**12.35.** Какова должна быть емкость конденсатора  $C$ , чтобы мощность, выделяемая в цепи, изображенной на рис.12.42, была максимальна. Найдите эту максимальную мощность.

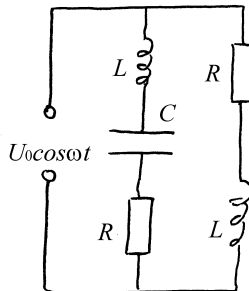


Рис.12.42

**12.36.** Найдите сдвиг фаз между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$  в схеме, показанной на рис.12.43.

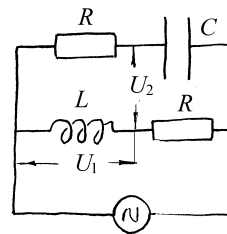
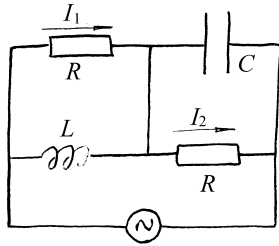


Рис.12.43



12.37. Найдите сдвиг фаз между токами  $I_1$  и  $I_2$  в схеме, показанной на рис.12.44.

Рис.12.44

12.38. Найдите сдвиг фаз между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$  в схеме, показанной на рис.12.45.

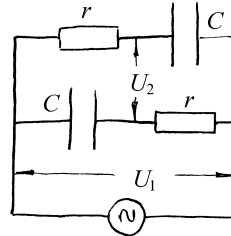


Рис.12.45

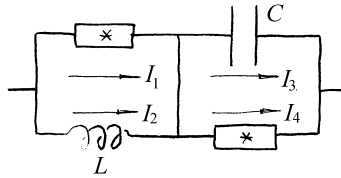


Рис.12.46

12.39. Найдите сдвиг фаз между токами  $I_1$  и  $I_2$  в схеме, показанной на рис.12.46, если известно, что сдвиг фаз между токами  $I_3$  и  $I_4$  равен  $\varphi$ . Элементы, обозначенные \*, имеют неизвестные, но одинаковые импедансы.

**12.40.** Найдите значения  $L_1, L_3, C_3$ , при которых цепь, показанная на рис.12.47а, на любой частоте ведет себя так же как цепь, показанная на рис.12.47б. если параметры  $L_0, L_2$  и  $C_2$  известны.

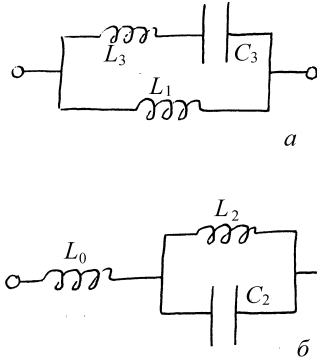


Рис.12.47

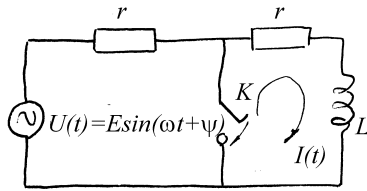


Рис.12.48

**12.42.** Найдите сдвиг фаз между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$  в схеме, показанной на рис.12.49.

**12.41.** В момент  $t=0$  контур  $r, L$  замыкается накоротко (рис.12.48). Определите величину тока в этом контуре.

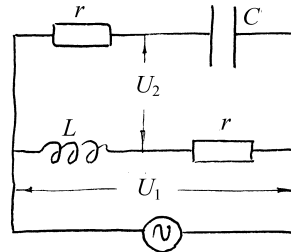


Рис.12.49

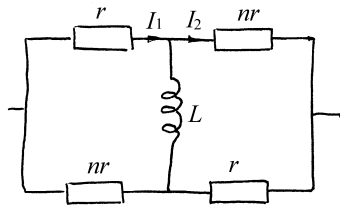


Рис.12.50

**12.43.** Найдите максимально возможный сдвиг фаз между токами  $I_1$  и  $I_2$  в схеме, показанной на рис.12.50. При какой частоте он достигается?

**12.44.** Найдите сдвиг фаз между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$  в схеме, показанной на рис.12.51.

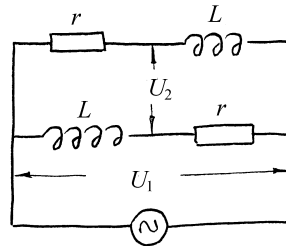


Рис.12.51

**12.45.** Схема (рис.12.52) присоединена к источнику переменной ЭДС заданной

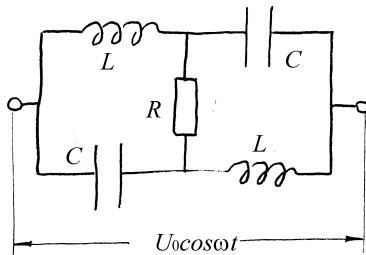


Рис.12.52

амплитуды  $U_0$ . При некотором  $R$  в схеме выделяется наибольшая мощность. Найдите эту мощность.

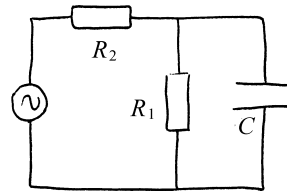


Рис.12.53

**12.46.** Найдите среднюю мощность, отдаваемую источником в схеме, показанной на рис.12.53.

**12.47.** Найдите сдвиг фаз  $\varphi$  между токами  $I_1$  и  $I_2$  в схеме, показанной на рис.12.54.

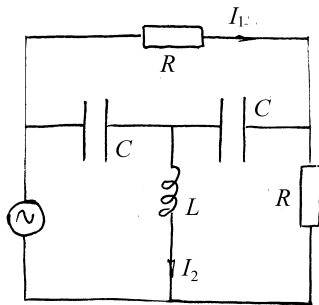


рис.12.54

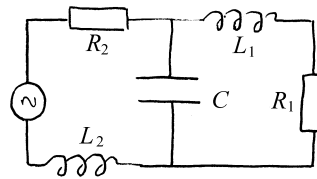


рис.12.55

**12.48.** Сила тока в катушке  $L_1$  в схеме, показанной на рис.12.55, равна  $I_0 \cos \omega t$ . Найдите ЭДС.

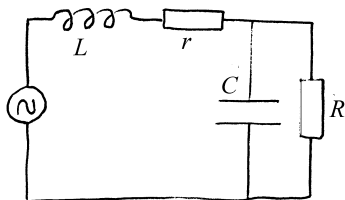


Рис.12.56

**12.49.** Найдите сдвиг фаз между напряжением на конденсаторе и током через сопротивление  $r$  в схеме, показанной на рис.12.56.

### §13. Электромагнитные волны

#### *Краткие теоретические сведения*

Рассмотрим свойства электромагнитного поля, существующего в однородном ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ) незаряженном ( $\rho \equiv 0$ ) диэлектрике. Из системы уравнений Максвелла для напряженности электрического поля можно получить так называемое *волновое уравнение*:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (13.1)$$

где  $c = (\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0)^{-1/2}$ . Аналогичное уравнение справедливо и для напряженности магнитного поля в диэлектрике (или в вакууме, чему соответствует  $\epsilon = \mu = 1$ ). В общем случае волновое уравнение описывает некоторое возмущение электромагнитного поля, распространяющееся в среде со скоростью  $c$ , которую обычно представляют в следующем виде:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (13.2)$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (13.3)$$

Определенная таким образом константа  $c_0$  есть не что иное как *скорость света в вакууме*. Соответственно, выражение (13.2) описывает скорость распространения электромагнитных возмущений в диэлектрике, которая в  $\sqrt{\epsilon\mu}$  раз меньше скорости света в вакууме. Для электромагнитных волн видимого диапазона, которые могут распространяться в диэлектриках с  $\mu \approx 1$ , принято

вводить *показатель преломления* среды  $n = \sqrt{\epsilon}$ , показывающий во сколько раз данное вещество уменьшает скорость волны.

Важным частным случаем общего решения волнового уравнения является *плоская монохроматическая электромагнитная волна*, поле которой описывается следующими формулами:

$$\vec{E} = \vec{E}_A \cos(\omega t - kz), \quad (13.4)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_A \cos(\omega t - kz), \quad (13.5)$$

где  $\vec{E}_A$  и  $\vec{H}_A$  – амплитудные значения напряженности электрического и магнитного поля,  $\omega$  – круговая частота волны, а  $k$  – ее *волновое число*, определенное так:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (13.6)$$

$\lambda$  – длина волны. В выражениях (13.4-5) координата  $z$  отсчитывается вдоль направления распространения волны. Важность рассмотрения свойств плоских монохроматических волн связана с тем, что принцип суперпозиции позволяет представить произвольную электромагнитную волну в виде суммы (в общем случае – бесконечной) плоских монохроматических волн.

Как следует из уравнений Максвелла, электрическое и магнитное поле плоской монохроматической электромагнитной волны не являются независимыми, а связаны следующим соотношением:

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} [n\vec{E}] = \sqrt{\mu\mu_0} \vec{H}, \quad (13.7)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, задающий направление распространения волны. Таким образом, векторы  $\vec{n}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в каждый момент времени образуют правую тройку, т.е. плоская электромагнитная волна является поперечной:



векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, и их колебания являются синфазными.

Поскольку и электрическое и магнитное поле обладают определенной энергией, электромагнитная волна переносит энергию в пространстве. Объемная плотность энергии, переносимой электромагнитной волной, равна

$$w = \epsilon \epsilon_0 E^2. \quad (13.8)$$

*Плотность потока энергии* электромагнитной волны, т.е. энергия, переносимая волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, характеризуется *вектором Пойнтинга*:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}] = w c \vec{n}. \quad (13.9)$$

Как следует из (13.4), (13.8) и (13.9), значение вектора Пойнтинга осциллирует с частотой  $2\omega$ . Например, для электромагнитных волн видимого диапазона эта частота составляет порядка  $10^{15}$  рад/с. Поэтому, часто бывает более уместно говорить о средней за период плотности потока энергии электромагнитной волны. Эта величина называется *интенсивностью* электромагнитной волны и определяется следующим образом:

$$I = \langle \Pi \rangle_T \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt, \quad (13.10)$$

где  $T = 2\pi/\omega$  – период волны.

В системе СИ интенсивность электромагнитной волны измеряется в *ваттах на квадратный метр* ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ).

**Пример 13.1.** Источник излучает электромагнитную волну с частотой  $\omega$  в направлении приемника, равномерно движущегося со скоростью  $v$ , много меньшей скорости света, вдоль прямой, соединяющей источник и приемник. Какова будет частота электромагнитной волны, регистрируемой приемником?

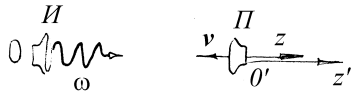


Рис.13.1

**Решение.** Пусть источник излучает волну в направлении оси  $OZ$  (см. Рис.13.1). Тогда в системе координат, связанной с источником, напряженность электрического поля этой волны описывается выражением (13.5):

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_A \cos(\omega t - kz),$$

где  $t$  – время,  $\vec{E}_A$  – амплитудное значение напряженности,  $k = \frac{\omega}{c}$  – волновое число, а  $c$  – скорость света в среде, где распространяется волна. Введем систему координат, связанную с приемником так, чтобы ее ось  $O'Z'$  была параллельна оси  $OZ$ . Тогда «штрихованные» и «нештрихованные» координаты связаны соотношением

$$z = z' - vt, \tag{13.11}$$

где скорость  $v$  считается положительной, если приемник приближается к источнику и отрицательной – если удаляется. Для описания электрического поля волны в «штрихованной» системе координат, связанной с приемником, подставим (13.11) в (13.4):

$$\vec{E}(z', t) = \vec{E}_A \cos[\omega t - k(z' - vt)] = \vec{E}_A \cos[(\omega + kv)t - kz'].$$

Вспоминая, что  $k = \frac{\omega}{c}$ , окончательно получаем

$$\vec{E}(z', t) = \vec{E}_A \cos\left[\left(1 + \frac{v}{c}\right)\omega t - kz'\right].$$

Как видно из (13.4), круговая частота волны есть множитель при времени в аргументе гармонической функции. В последнем выражении соответствующий множитель равен:

$$\omega' = \omega \left( 1 + \frac{v}{c} \right). \quad (13.12)$$

Это и есть частота волны в системе координат, связанной с приемником, то есть искомая регистрируемая частота.

Изменение регистрируемой приемником частоты волны при относительном движении приемника и источника волны называется эффектом Доплера. Он имеет место не только для электромагнитных волн, но вообще для волн любой природы, например – звуковых. Как видно из (13.12), регистрируемая частота больше частоты, с которой излучает источник, если приемник приближается к источнику и меньше – если удаляется. Это можно заметить, например, сравнивая шум приближающегося и удаляющегося поезда.

**Пример 13.2.** Оценить при какой интенсивности электромагнитной волны напряженность ее электрического поля становится сравнима с напряженностью внутриатомного поля.

**Решение.** Поскольку в условии речь идет об оценке и тип атома явно не указан, выберем самый простой – атом водорода, состоящий из одного протона и одного электрона. Согласно классической модели атома водорода, электрон вращается вокруг протона по круговой орбите радиусом  $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$  м, который называют боровским радиусом. Следовательно, напряженность  $\vec{E}_i$  электрического поля протона во всех точках электронной орбиты равна по модулю

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{a_0^2},$$

где  $e$  – заряд протона, равный элементарному заряду.

Пусть на такой атом водорода падает плоская монохроматическая электромагнитная волна. Напряженность  $\vec{E}$  электрического поля этой волны, описываемая выражением (13.4) сравнивается с напряженностью

внутриатомного поля, если ее амплитудное значение  $\vec{E}_A$  сравнивается по модулю с  $\vec{E}_i$ . Для того, чтобы определить – какова будет при этом интенсивность волны  $I$ , воспользуемся формулами (13.9-13.10):

$$I = \langle \Pi \rangle_r = c_0 \langle w \rangle_r .$$

Так как в нашем случае  $\varepsilon = 1$ , то согласно (13.4)

$$I = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle_r = \varepsilon_0 c_0 E_A^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle_r = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c_0 E_A^2 .$$

Учитывая, что  $E_A = E_i$ , окончательно находим

$$I = \frac{c_0 e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 a_0^4} ,$$

где  $\Pi$  и  $w$  – соответственно, плотность потока энергии и объемная плотность энергии волны, а угловыми скобками обозначено усреднение по времени на промежутке, равном периоду волны  $T$ . Подставляя в полученную формулу табличные константы, получим искомую оценку:  $I \approx 10^{20}$  Вт/м<sup>2</sup>.

**Пример 13.3.** Плоская монохроматическая электромагнитная волна нормально падает из вакуума на плоскую поверхность проводника. Чему равно среднее (за период) давление этой волны на проводник, если интенсивность волны –  $I$ ? Считать, что волна полностью поглощается.

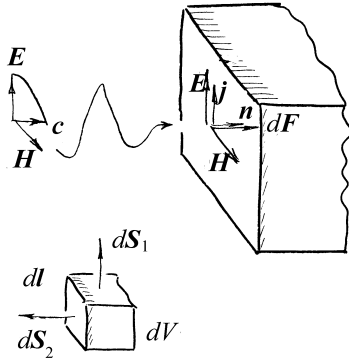


Рис.13.2

**Решение.** Рассмотрим физически бесконечно малый объем проводника  $dV$ , расположенный на его поверхности. Пусть вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  падающей волны направлены как показано на Рис.13.2. Электрическое поле волны вызывает в проводнике ток, плотность которого  $\vec{j}$  определяется законом Ома:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E},$$

где  $\lambda$  – проводимость проводника. Так как в электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  всегда ортогональны, этот ток протекает в направлении, перпендикулярном напряженности магнитного поля падающей волны. Следовательно, это магнитное поле будет действовать на проводник с током с силой Ампера (7.2). Посчитаем силу Ампера  $d\vec{F}$ , действующую на объем проводника  $dV$ :

$$d\vec{F} = gJ [d\vec{l}, \vec{B}] = \mu\mu_0 dJ [d\vec{l}, \vec{H}],$$

где  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля волны,  $\mu$  – магнитная проницаемость проводника,  $d\vec{l}$  – высота объема  $dV$  (см. рис.13.2), а  $dJ = \vec{j} \cdot d\vec{S}_1$  – элементарный ток, протекающий через верхнюю поверхность  $d\vec{S}_1$  этого объема. С учетом введенных обозначений перепишем последнее выражение в следующем виде:  $d\vec{F} = \mu\mu_0 (\vec{j}, d\vec{S}_1) [d\vec{l}, \vec{H}]$ . Так как  $\vec{j}$  параллельна  $d\vec{l}$ , то

$$d\vec{F} = \mu\mu_0 (d\vec{l}, d\vec{S}_1) [\vec{j}, \vec{H}] = \mu\mu_0 dV [\vec{j}, \vec{H}].$$

Напомним, что вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен  $\vec{E}$  и  $\vec{\Pi}$  (13.9), поэтому выражение для силы можно переписать в виде

$$d\vec{F} = \mu\mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} dV [\vec{j}[\vec{n}, \vec{E}]] = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} dV \{ \vec{n}(\vec{j}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{j}, \vec{n}) \},$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $c$  – скорость света в ней, а  $\vec{n}$  – единичный вектор, задающий направление распространения электромагнитной волны. Учитывая направление векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{n}$ , получим

$$dF = \frac{1}{c} dV(jE).$$

В силу закона Джоуля-Ленца (6.10), протекание по проводнику электрического тока вызывает выделение в нем тепла. При этом в теплоту превращается энергия падающей волны, совершающей работу по перемещению зарядов в проводнике. Далее будем для простоты считать, что вся энергия волны поглощается поверхностным слоем проводника. Тогда мы можем приравнять энергию  $dW_{EM} = wdV$  ( $w$  – объемная плотность энергии), приносимую волной внутрь элемента объема  $dV$  за время  $dt$ , и энергию  $dW_{Дж} = (\vec{j}, \vec{E})dVdt$ , выделяющуюся в нем за это время в виде Джоулева тепла.

Следовательно, выражение для силы  $d\vec{F}$  можно переписать в следующем виде:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \frac{dW_{Дж}}{dt} \vec{n} = \frac{dW_{EM}}{cdt} \vec{n}.$$

Напомним, что  $cdt = dl$  и  $dW_{EM} = wdV$ , откуда

$$d\vec{F} = w \frac{dV}{dl} \vec{n} = wdS_2 \vec{n},$$

где  $dS_2$  – площадь боковой поверхности элемента объема  $dV$ , ориентированной перпендикулярно направлению распространения волны.

Итак, мы нашли силу Ампера, действующую со стороны падающей электромагнитной волны на элемент объема  $dV$  проводника. По определению, давление есть отношение нормальной проекции силы, действующей на элемент поверхности тела, к площади этого элемента. Таким образом, давление  $p$  волны на проводник равно:

$$p = \frac{dF_n}{dS_2},$$

или согласно (13.10)

$$p = \frac{\Pi}{c},$$

где  $\Pi$  – плотность потока энергии волны. Так как по условию требуется найти среднее давление, необходимо усреднить последнее равенство по периоду электромагнитной волны:

$$\langle p \rangle_T = \frac{\langle \Pi \rangle_T}{c} = \frac{I}{c}.$$

**Пример 13.4.** Плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется в вакууме. Длина волны –  $\lambda_1=1$  м. На ее пути находится антенна, состоящая из двух одинаковых заземленных проводящих стержней, ориентированных параллельно направлению колебаний вектора  $\mathbf{E}$  волны и отстоящих друг от друга на расстояние  $d=50$  см. Возникающая при этом максимальная разность потенциалов между незаземленными концами стержней составляет  $\Delta U_1^{\max} = 20$  мкВ. Чему будет равна эта разность потенциалов в случае падения на антенну плоской монохроматической электромагнитной волны с такой же интенсивностью и длиной  $\lambda_2=3$  м.

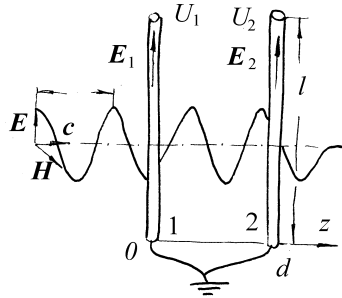


Рис.13.3

**Решение.** Поскольку стержни ориентированы параллельно направлению колебаний вектора  $\vec{E}$  электромагнитной волны, они перпендикулярны направлению ее распространения (см. рис.13.3). Следовательно, в каждый момент времени каждый из стержней находится в однородном электрическом поле. Пусть каждый стержень имеет длину  $l$ . Тогда потенциалы  $U_{1,2}$  верхних концов стержней связаны с напряженностями  $E_{1,2}$

электрического поля волны в соответствующих поперечных плоскостях следующими соотношениями:

$$U_{1,2} = -E_{1,2}l. \quad (13.13)$$

Здесь учтено, что вектора  $\vec{E}_{1,2}$  параллельны стержням, а нижние концы стержней заземлены, т.е. имеют нулевой потенциал. Напряженность электрического поля плоской монохроматической электромагнитной волны описывается выражением (13.4):

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_A \cos(\omega t - kz),$$

где  $z$  – продольная координата,  $t$  – время,  $\vec{E}_A$  – амплитудное значение напряженности, а  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число. Введем координатную ось  $OZ$  так,

чтобы координата первого стержня была равна нулю. Тогда из (13.4) имеем:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_A \cos \omega t; \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_A \cos(\omega t - kd).$$



Следовательно, разность потенциалов между незаземленными концами стержней с учетом (13.13) равна

$$\Delta U = U_1 - U_2 = l(E_2 - E_1) = 2E_A l \sin \frac{kd}{2} \sin \left( \omega t - \frac{kd}{2} \right).$$

Отсюда видно, что эта разность потенциалов осциллирует с частотой  $\omega$ , а ее максимальное значение  $\Delta U^{\max}$  равно:

$$\Delta U^{\max} = 2E_A l \sin \frac{kd}{2} = 2E_A l \sin \frac{\pi d}{\lambda}.$$

Итак, искомая разность потенциалов действительно зависит от длины волны, а отношение разностей потенциалов  $\Delta U_1^{\max}$  и  $\Delta U_2^{\max}$ , соответствующих длинам волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , равно:

$$\frac{\Delta U_2^{\max}}{\Delta U_1^{\max}} = \frac{\sin \pi \frac{d}{\lambda_2}}{\sin \pi \frac{d}{\lambda_1}}.$$

Выражая отсюда  $\Delta U_2^{\max}$ , получим окончательный ответ задачи. Подстановка численных данных из условия дает результат  $\Delta U_2^{\max} = 10$  мкВ.

**Пример 13.5.** Оцените поперечную компоненту электрического поля заряда  $q$ , в течение небольшого промежутка времени двигавшегося равноускоренно с ускорением  $a$ . Примечание: поперечным считается направление, перпендикулярное отрезку, соединяющему заряд и точку, где рассматривается его электрическое поле.

**Решение.** Для начала конкретизируем закон движения заряда. Итак, пусть он при  $t < 0$  покоился в начале координат, потом в течение небольшого промежутка

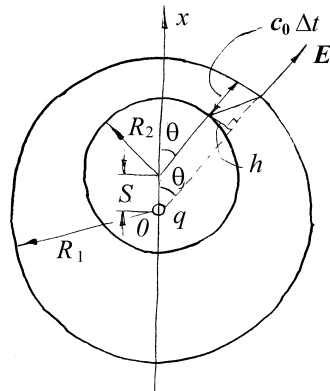


Рис.13.4

времени  $\Delta t$  двигался вдоль оси  $Ox$  с заданным ускорением  $a$ , после чего продолжал движение в том же направлении с набранной скоростью. Рассмотрим картину силовых линий электрического поля, создаваемого этим зарядом в момент времени  $t_0 \gg \Delta t$ . Как известно, любые электромагнитные возмущения распространяются в пространстве со скоростью света  $c_0$  (рассматриваем уединенный заряд в вакууме). Поэтому, «информация» о том, что заряд начал двигаться при  $t=0$ , к моменту времени  $t_0$  будет «недоступна» за пределами сферы

радиуса  $R_1 = c_0 t_0$  с центром в начале координат. Таким образом, за пределами этой сферы электрическое поле будет точно таким, как поле, создаваемое зарядом, покоящимся в начале координат, т.е. его силовые линии радиально расходятся из точки  $O$ . Рассмотрим одну такую линию, составляющую угол  $\theta$  с осью  $Ox$  (см. рис.13.4). Как устроено электрическое поле ускоренно движущегося заряда, мы пока не знаем. Зато нам известно, что при  $t > \Delta t$  заряд двигался равномерно, создавая поле, которое в каждый момент времени выглядит как электростатическое, но перемещается вместе с зарядом. Внутри сферы радиусом  $R_2 = c_0(t_0 - \Delta t)$  с центром в точке, соответствующей положению заряда в момент времени  $t_0$ , «информация» о прекращении ускоренного движения заряда уже «доступна». Поэтому на поверхности этой сферы электрическое поле заряда  $q$  в момент времени  $t_0$  определяется его положением  $s$  в рассматриваемый момент времени:

$$s \equiv x(t) = \frac{a(\Delta t)^2}{2} + a\Delta t(t_0 - \Delta t) \approx // \Delta t \ll t_0 // \approx at_0\Delta t. \quad (13.14)$$

Проведем внутри меньшей сферы силовую линию, составляющую угол  $\theta$  с осью  $Ox$ . Как известно, силовые линии электрического поля могут прерываться только на электрических зарядах. Поэтому мы должны замкнуть наши две силовые линии отрезком ломаной.

Итак, мы установили, что существует излом силовых линий электрического поля, движущийся в направлении «от заряда» со скоростью света, причем в пределах этого излома поле направлено не параллельно направлению его движения. Иными словами, в пределах излома электрическое поле имеет поперечную компоненту. Таким образом, этот излом по своим свойствам напоминает электромагнитный импульс, т.е. электромагнитную волну, ограниченную в пространстве и во времени. Из геометрических соображений можем найти отношение поперечной  $E_{\perp}$  и продольной  $E_{\parallel}$  компонент электрического поля этого импульса:

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{h}{c_0\Delta t} = \frac{s \sin \theta}{c_0\Delta t},$$

или с учетом (13.14)

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{at_0 \sin \theta}{c_0}.$$

При этом продольную компоненту этого поля мы знаем – это обыкновенное Кулоновское поле на поверхности меньшей сферы:

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_2^2}.$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$E_{\perp} = E_{\parallel} \frac{a t_0 \sin \theta}{c_0} \approx E_{\parallel} \frac{a(R_2/c_0) \sin \theta}{c_0} = \frac{a q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c_0^2 R_2}.$$

Здесь учтено, что  $t_0 \approx \frac{R_2}{c_0}$  и  $\Delta t \ll t_0$ .

Учитывая, что  $R_2$  – не что иное как расстояние между текущим положением заряда и рассматриваемым электромагнитным импульсом, а ускорение  $a$  соответствует моменту времени  $t=+0$ , перепишем последнюю формулу в более общем виде:

$$E_{\perp}(r, \theta, t) = \frac{q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c_0^2 r} a(t - t_0) = \frac{q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c_0^2 r} a(t - r/c_0),$$

где  $r$  – текущее расстояние от заряда до точки, где «измеряется» напряженность электрического поля, а  $\theta$  – полярная координата этой точки относительно направления движения заряда.

**Пример 13.6.** Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью  $I_0$  падает под углом  $\theta_1$  на плоскую границу раздела сред, показатели преломления которых равны  $n_1$  и  $n_2$ . Найдите интенсивность  $I_R$  волны, отраженной от границы раздела, и интенсивность  $I_T$  волны, прошедшей во вторую среду, при условии, что в падающей волне колебания вектора  $\vec{E}$  происходят в направлении, параллельном поверхности раздела сред.

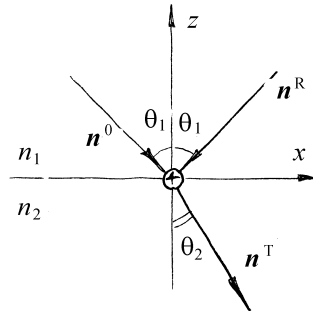


Рис.13.5

**Решение.** Введем декартову систему координат таким образом, чтобы плоскость  $xOz$  являлась *плоскостью падения*, т.е. плоскостью, образованной нормалью к поверхности раздела (ось  $Oz$ ) и вектором  $\vec{n}^0$ , задающим направление распространения падающей волны (см. Рис.13.5). Коль скоро по условию задачи колебания вектора  $\vec{E}$  в падающей волне происходят в направлении, параллельном поверхности раздела сред, то в силу поперечности световых волн это направление совпадает с осью  $Oy$ . Световые волны, в которых направление колебаний вектора  $\vec{E}$  перпендикулярно плоскости падения называются *s-поляризованными*. Соответственно, световые волны, в которых направление колебаний вектора  $\vec{E}$  лежит в плоскости падения называются *p-поляризованными*. Заметим, что любую волну можно представить в виде суперпозиции *s*- и *p*-поляризованных волн.

На границе раздела двух диэлектриков напряженности электрического и магнитного поля обязаны удовлетворять граничным условиям (4.6) и (8.9), заключающимся в том, что тангенциальные компоненты обеих напряженностей непрерывны на границе. Электрические поля падающей, отраженной и прошедшей волн определяются выражениями типа (13.4), а магнитные – типа (13.5) (следует иметь в виду, что направления распространения этих трех волн различны, поэтому в этих выражениях каждая из волн имеет «свою собственную» ось  $z$ ). Поскольку поля волн осциллируют как во времени, так и в пространстве, а граничные условия должны выполняться как тождества в любой точке пространства и в любой момент времени, мы можем подставлять в граничные условия не сами поля, а их амплитуды  $\vec{E}_A$  и  $\vec{H}_A$ . В среде 1 действуют поля падающей (индекс «0») и отраженной (индекс «R») волн, а в

среде 2 – поля прошедшей (индекс «T») волны. Таким образом, граничные условия для электрических и магнитных полей выглядят следующим образом:

$$E_{A_z}^0 + E_{A_z}^R = E_{A_z}^T, \quad (13.15)$$

$$H_{A_z}^0 + H_{A_z}^R = H_{A_z}^T, \quad (13.16)$$

где индекс «т» означает тангенциальные проекции векторов  $\vec{E}_A$  и  $\vec{H}_A$ .

Для  $s$ -поляризованных волн во введенной системе координат тангенциальные проекции напряженностей электрических полей суть  $y$ -проекции, а тангенциальные проекции напряженностей магнитных полей –  $x$ -проекции. Поэтому можем переписать (13.15-16) с учетом выбора системы координат и типа поляризации падающей волны (очевидно, что и отраженная и прошедшая волны также являются  $s$ -поляризованными):

$$E_{A_y}^0 + E_{A_y}^R = E_{A_y}^T, \quad (13.17)$$

$$H_{A_x}^0 + H_{A_x}^R = H_{A_x}^T. \quad (13.18)$$

Воспользуемся теперь соотношением (13.7) для того, чтобы выразить проекции магнитных полей через проекции электрических:

$$H_{A_x} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \left( n_y E_{A_z} - n_z E_{A_y} \right),$$

а так как  $E_{A_z} \equiv 0$ , то

$$H_{A_x} = -\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} n_z E_{A_y}. \quad (13.19)$$

Это справедливо для всех трех волн, с учетом их направлений  $\vec{n}$  и различных значений диэлектрической и магнитной проницаемости в первой и второй среде. Из рисунка видно, что  $n_z^0 = -\cos\theta_1$ ,  $n_z^R = \cos\theta_1$  (угол отражения равен углу падения), а  $n_z^T = -\cos\theta_2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} H_{A_x}^0 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} E_{A_y}^0 \cos\theta_1, \quad H_{A_x}^R = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} E_{A_y}^R \cos\theta_1, \\ H_{A_x}^T &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} E_{A_y}^T \cos\theta_2. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Для прозрачных диэлектрических сред магнитная проницаемость равна единице, а корень из диэлектрической проницаемости есть показатель преломления среды  $n$  (см. (13.2)). С учетом этого подставим выражения (13.20) в граничное условие (13.18):

$$n_1 E_{A_y}^0 \cos\theta_1 - n_1 E_{A_y}^R \cos\theta_1 = n_2 E_{A_y}^T \cos\theta_2,$$

или, с учетом связи между углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , определяемой известным *законом преломления*,  $n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$ :

$$\cos\theta_1 \left( E_{A_y}^0 - E_{A_y}^R \right) = E_{A_y}^T \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin\theta_2}. \quad (13.21)$$

Выражения (13.7) и (13.11) представляют собой систему уравнений для нахождения двух неизвестных амплитуд,  $E_{A_y}^R$  и  $E_{A_y}^T$ . Решение этой системы имеет вид:

$$E_{A_y}^R = E_{A_y}^0 \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (13.22)$$

$$E_{A_y}^T = E_{A_y}^0 \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \theta_1 / \operatorname{tg} \theta_2}. \quad (13.23)$$

Итак, мы нашли  $y$ -проекции амплитуд напряженностей электрического поля отраженной и прошедшей волны. Поскольку для  $s$ -поляризованных волн эти напряженности направлены вдоль оси  $Oy$ , то эти проекции и есть сами амплитуды. Как следует из формул (13.8), (13.9) и (13.10), интенсивность световой волны связана с амплитудой напряженности ее электрического поля следующим соотношением:

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c_0 n E_A^2. \quad (13.24)$$

Выражая из (13.22) и (13.23) квадраты амплитуд  $E_{A_y}^R$  и  $E_{A_y}^T$  и подставляя их в (13.24), получим окончательный ответ:

$$I_R = I_0 \left[ \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right]^2, \quad I_T = I_0 \frac{n_2}{n_1} \frac{4}{(1 + \operatorname{tg} \theta_1 / \operatorname{tg} \theta_2)^2}.$$

### *Задание для самостоятельной работы*

**13.1.** Выведите формулу для напряженности электрического поля электромагнитной волны, излучаемой зарядом  $q$ , колеблющимся с частотой  $\omega$  вдоль некоторой прямой. Амплитуда колебаний заряда –  $x_0$ .

**13.2.** Плоская монохроматическая световая волна распространяется в вакууме. Максимальное значение напряженности магнитного поля этой волны –  $H_0$ . Какова средняя (за период) энергия, переносимая волной в единицу времени через поверхность полусферы радиуса  $R$ , основание которой перпендикулярно направлению распространения волны?



**13.3.** Напряженность электрического поля монохроматической световой волны, распространяющейся в вакууме, описывается в цилиндрических координатах

$\{\rho, \varphi, z\}$  выражением  $\vec{E} = \vec{p} E_0 e^{-(\rho/a)^2} \cos(\omega t - kz)$ , где  $\vec{p}$  – единичный вектор, перпендикулярный оси  $OZ$ . Какова средняя (за период) мощность этой волны, т.е. средняя энергия, переносимая волной в единицу времени?

**13.4.** Найдите закон движения свободного электрона в поле монохроматической электромагнитной волны частоты  $\omega$ , если максимальное значение напряженности электрического поля этой волны –  $E_0$ . В момент падения переднего фронта волны на электрон последний покоился в начале координат, а фаза колебаний вектора  $\vec{E}$  волны была равна  $\varphi$ . Указание: решать задачу, пренебрегая силой Лоренца; выяснить условие применимости такого подхода.

**13.5.** Плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется в вакууме. На пути волны находится квадратная проводящая рамка со стороной  $a$ , плоскость которой ортогональна направлению вектора  $\vec{H}$  волны, а одна из сторон параллельна направлению распространения волны. Определите ЭДС, индуцируемую в рамке, если длина волны –  $\lambda$ , а максимальное значение напряженности электрического поля этой волны –  $E_0$ .

**13.6.** Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью  $I_0$  падает под углом  $\theta_1$  на плоскую границу раздела сред, показатели преломления которых равны  $n_1$  и  $n_2$ . Найдите интенсивность  $I_R$  волны, отраженной от границы раздела, и интенсивность  $I_T$  волны, прошедшей во вторую среду, при условии, что в падающей волне колебания вектора  $\vec{E}$  происходят в плоскости падения ( $p$ -поляризованная волна).

### §14. Задачи повышенной трудности

#### Примеры решения задач

**Пример 14.1.** Две одинаковые и одинаково заряженные капли несжимаемой проводящей жидкости находятся на большом (бесконечном) расстоянии друг от друга. Заряд, радиус и масса каждой капли равны соответственно  $q, r$  и  $m$ . Какую минимальную скорость  $v$  вдоль прямой, соединяющей их центры, нужно сообщить каждой капле, чтобы они стали двигаться навстречу друг другу и при столкновении соединились в одну каплю? Поверхностное натяжение не учитывать.

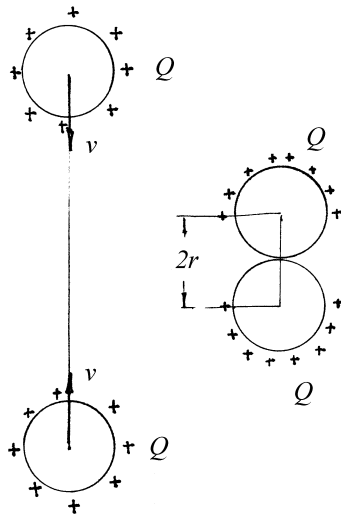


рис.14.1

**Решение.** На рис.14.1 показаны две капли в начальный момент времени и в момент перед слиянием. Так как сила Кулона, с которой отталкиваются капли, потенциальна, а другие силы на капли не действуют, то можно записать закон сохранения энергии

$$2 \left[ \frac{mv^2}{2} + \frac{\varphi_0 Q}{2} \right] = 2 \frac{\varphi Q}{2}. \quad (14.1)$$

Начальный потенциал капли  $\varphi_0 = \frac{kQ}{r}$ , так как заряд по поверхности уединенной проводящей сферы распределяется равномерно.

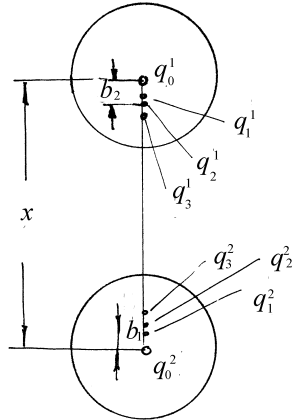


Рис.14.2

При сближении капля заряд перераспределяется по поверхности капли и его распределение становится неравномерным. Создаваемое им поле можно аппроксимировать бесконечной системой зарядов, показанной на рис.14.2.

Действительно, при  $x \gg r$ , поле, создаваемое зарядом второй капли в области нахождения первой в нулевом приближении совпадает с полем, создаваемым зарядом  $q_0^2 = Q$ , помещенным в центре капли. (Так как капли одинаковы, то заряды на них распределены одинаково, а верхний индекс у

величины заряда вводится для того, чтобы было понятно, о какой капле идет речь. При определении величины соответствующего заряда этот индекс опускается). Изменение электрического поля вокруг первой капли, связанное с наличием на расстоянии  $x$  этого заряда, можно описать, введя заряд  $q_1^1$  (см. метод изображений и пример 4 параграфа 4):

$$q_1 = -q_0 \frac{r}{x}, \quad b_1 = \frac{r^2}{x}. \quad (14.2)$$

Заряды  $q_0^2$  и  $q_1^1$  создают на поверхности первого шара нулевой потенциал, поэтому потенциал первого шара равен  $\varphi = \frac{kq_0^1}{r}$ .

Так как заряды по каплям распределены совершенно симметрично, то следует ввести заряд  $q_1^2$ , но тогда потенциал первого шара не будет одинаковым по всей его поверхности, что не верно, так как шар проводящий. Для исправления этого обстоятельства следует ввести заряд  $q_2^1$ :

$$q_2 = -q_1 \frac{r}{x-b_1}, \quad b_2 = \frac{r^2}{x-b_1}. \quad (14.3)$$

При этом вводя симметричный заряд  $q_2^2$ , опять нарушаем условие равенства потенциала во всех точках шара. Для его сохранения вводим заряд  $q_1^3$  и т.д.

Потенциалы шаров будут равны

$$\varphi = \frac{kq_0}{r}.$$

Значение  $q_0$  находим из условия

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i = Q. \quad (14.4)$$

Действительно, поле в малой окрестности вблизи поверхности неравномерно заряженных шаров совпадает с полем, создаваемым двумя цепочками зарядов. Применим теорему Гаусса к сферической поверхности, близко примыкающей к шару и охватывающей ее. Поток вектора индукции электростатического поля через эту поверхность равен заряду, заключенному внутри нее. Равенство (14.4) и есть равенство зарядов цепочки заряду, неравномерно распределенному по поверхности шара.

Выразим  $q_i$  из (14.2) и (14.3) для  $x = 2r$  (для капель перед слиянием):

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{q_0}{2}, & b_1 &= \frac{r}{2}, \\ q_2 &= \frac{q_0}{3}, & b_2 &= \frac{2}{3}r, \\ q_3 &= -\frac{q_0}{4}, & b_3 &= \frac{3}{4}r, \end{aligned}$$

и т.д.

Подставляя найденные выражения в (14.4), находим

$$Q = q_0 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \right).$$

В скобках стоит ряд, сумма которого равна  $\ln 2$ . Подставляя найденное значение  $q_0$  в выражение для потенциала шаров  $\varphi$ , а его в свою очередь в закон сохранения энергии (14.1), окончательно получаем

$$v = \sqrt{\frac{\varphi - \varphi_0}{m} Q} = Q \sqrt{\frac{k}{mr} \left( \frac{1}{\ln 2} - 1 \right)}.$$

**Пример 14.2.** Пластины плоского конденсатора расположены вертикально. Длина пластины по вертикали равна  $l$ , ее ширина  $-a$ , расстояние между пластинами  $d$ . Между пластинами введен диэлектрик так, что незаполненной осталась лишь верхняя часть конденсатора длины  $x$ . Заряд конденсатора равен  $q$ , масса диэлектрической пластины  $m$ . Найдите закон движения диэлектрической пластины с учетом действия силы тяжести, а также определите координату ее положения равновесия  $x_0$ .

**Решение.** Направим ось  $Ox$  вдоль стороны  $l$  конденсатора от верхнего края пластин вниз. Пусть верхний край диэлектрической пластины имеет координату

$x$ , а скорость пластины равна  $v = \frac{dx}{dt}$ . Полная энергия пластины складывается из ее кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$ , потенциальной энергии силы тяжести: -

$mg \left( x + \frac{l}{2} \right)$  и частью энергии электрического поля, обусловленной наличием диэлектрической пластинки. Последнюю находим как разность энергии

конденсатора  $\frac{q^2}{2C(x)}$  и энергии конденсатора без пластинки  $\frac{q^2}{2C_0}$ . Емкость конденсатора можно представить как емкость двух параллельно соединенных конденсаторов:

$$C(x) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a(l-x)}{d} + \frac{\varepsilon_0 ax}{d} = \frac{\varepsilon_0 a}{d}(\varepsilon l + x - \varepsilon x).$$

Функция Лагранжа для диэлектрической пластины примет вид

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mg\left(\frac{l}{2} + x\right) + \frac{q^2}{2C_0} - \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 a} \frac{1}{\varepsilon l + x - \varepsilon x},$$

откуда получим уравнение Лагранжа

$$m\ddot{x} - mg - \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 a} \frac{1 - \varepsilon}{(\varepsilon l + x - \varepsilon x)^2} = 0.$$

Выражение для функции Лагранжа и уравнение Лагранжа справедливы для  $x \leq l$ . Если  $x > l$  (пластина полностью выпала из конденсатора), то энергия электростатического поля в пластине равна нулю, а уравнение Лагранжа принимает вид  $m\ddot{x} = mg$ .

Положение равновесия пластины определяется условием  $\ddot{x} = 0$ , откуда

$$x_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} l - q \sqrt{\frac{d(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon_0 a m g}}.$$

Оно существует, если  $x_0 \leq l$ , или

$$\frac{mgl}{E_0} \leq (\varepsilon - 1)^3.$$

Здесь  $mgl$  – изменение потенциальной энергии пластины при ее перемещении от крайнего верхнего до крайнего нижнего положения внутри конденсатора, а

$$E_0 = \frac{q^2}{2C_0} \text{ -- энергия конденсатора в отсутствии пластинки.}$$

Если же  $x_0 > l$ , то пластина выпадет из конденсатора и далее будет свободно падать с ускорением свободного падения.

**Пример 14.3.** Проводящая сфера радиусом  $R$  составлена из двух полушфер. Определите силу  $F$ , с которой отталкиваются эти полушферы, если полный заряд сферы равен  $Q$ .

**Решение.** Выделим на сфере небольшой участок площадью  $dS$ , несущий заряд  $dq$ . Поле в окрестности этого заряда складывается из поля, создаваемого самим зарядом  $dq$ , и поля, создаваемого остальными зарядами на сфере. Суммарное поле равномерно заряженной сферы внутри сферы равно нулю, а

$$\text{снаружи } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Вблизи поверхности площадки  $dS$  поле, создаваемое зарядом  $dq$ , можно аппроксимировать полем бесконечной плоскости, напряженность которого  $E' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

Следовательно поле, создаваемое зарядами, расположенными на сфере, за исключением  $dq$

является однородным и равно  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , как показано

на рис.14.3. Это поле действует на заряд  $dq$  с

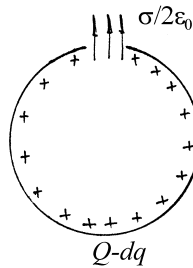


Рис.14.3

силой, направленной по радиусу сферы из центра наружу и равной

$$dF = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dq.$$

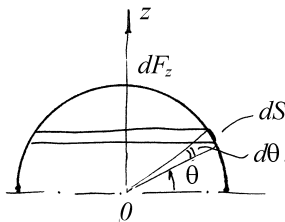


Рис.14.4

Теперь нетрудно найти силу, действующую на полусферу. Разделим ее на кольца, как показано на рис.14.4. Результирующая сила, действующая на кольцо, выделенное углом  $\theta$  и его приращением  $d\theta$ , направлена по оси  $Oz$  и равна

$$dF_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} q \sin \theta.$$

Здесь  $q$  -- заряд, находящийся на кольце и равный  $q = \sigma \cdot 2\pi R \cos \theta \cdot R d\theta$ .

Подставляя  $q$  в выражение для  $dF_z$  и интегрируя по углу  $\theta$ , находим искомую силу

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} 2\pi\sigma R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}.$$

**Пример 14.4.** Оцените, насколько изменится емкость плоского конденсатора, пластины которого находятся на расстоянии  $d = 1\text{ см}$  друг от друга, если в него внести проводящий шарик радиусом  $r = 0,2\text{ мм}$  и расположить его вдали от пластин.

**Решение.** При внесении шарика в пространство между пластинами конденсатора на его поверхности появится наведенный заряд. Так как поле в конденсаторе однородное ( $r \ll d$ , поэтому шарик вносит искажения в поле в малой окрестности вокруг себя), то поле, создаваемое зарядом на шарике вне него совпадает с полем диполя (см. пример 7 параграфа 3) с дипольным



моментом  $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 r^3 \vec{E} = \alpha \vec{E}$ . Наличие этого поля изменяет разность потенциалов между обкладками конденсатора. Расчет этого изменения достаточно сложен, поэтому для определения изменения емкости конденсатора удобнее воспользоваться энергетическим подходом.

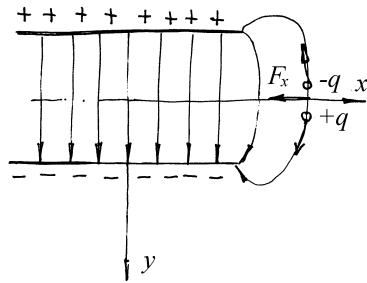


Рис.14.5

Найдем работу, которую нужно совершить, чтобы внести шарик в заряженный конденсатор. Так как электростатическое поле потенциально, то работа не зависит от траектории и последняя может быть выбрана произвольно. Направим ось  $Ox$  вдоль плоскости симметрии пластин и будем перемещать шарик вдоль оси  $Ox$  из конденсатора в бесконечность. Сила, действующая на диполь, когда он

находится в точке с координатами  $\{x, 0, 0\}$ , равна (рис.14.5)

$$F_x = qE_x\left(x, \frac{\Delta y}{2}\right) - qE_x\left(x, -\frac{\Delta y}{2}\right) = ql \frac{\partial E_x}{\partial y} = p \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

В силу потенциальности поля  $\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$  ( $\text{rot } \vec{E} = 0$ ), поэтому окончательно

$$F_x = \alpha E_y \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Работа, совершаемая при перенесении шарика вдоль оси  $Ox$  на  $dx$  равна

$$dA = F_x dx = \alpha E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} dx = \alpha d \left( \frac{E_y^2}{2} \right),$$

а вся работа по перемещению шарика из конденсатора в бесконечность

$$A = \alpha \frac{E_y^2}{2},$$

где  $E_y = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ ,  $\alpha = 4\pi\epsilon_0 r^3$ ,  $S$  – площадь пластин конденсатора.

Энергия, заключенная в конденсаторе до внесения шарика равна  $W_0 = \frac{Q^2}{2C}$ . При малом изменении емкости и неизменном заряде она изменится

на  $\Delta W = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C$ . Это изменение энергии равно работе по внесению шарика в

конденсатор, или  $\Delta W = -A$ , откуда  $\frac{\Delta W}{W_0} = -\frac{\Delta C}{C}$ , или

$$\Delta C = C \frac{A}{W_0} = \frac{4\pi r^3}{\epsilon_0 S^2} C^2.$$

Емкость плоского конденсатора  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ , откуда окончательно

$$\Delta C = 4\pi\epsilon_0 r^3 / d^2 = 8,85 \cdot 10^{-6} \text{ пкФ}.$$

**Пример 14.5.** Конденсатор емкостью  $C$  зарядили от источника ЭДС до разности потенциалов  $U$  и отключили от него. Пластины конденсатора поочередно заземляют. Можно ли, используя эту процедуру, полностью разрядить конденсатор? Куда при этом девается его энергия?

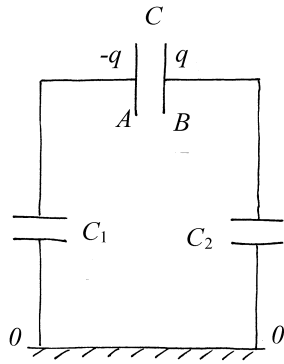


Рис.14.6

**Решение.** Заземление означает соединение пластин поочередно с достаточно большим удаленным проводником, потенциал которого полагают равным нулю. Этот проводник и обкладки конденсатора образуют конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  (см. рис.14.6). Пусть после зарядки потенциал отрицательно заряженной пластины конденсатора А равен  $\varphi_0$ , а другой пластины -  $(\varphi_0 + U)$ . После соединения пластины А с землей (с проводником О-О) ее потенциал станет равен нулю, а заряд  $Q$  перераспределится между конденсаторами  $C$  и  $C_2$ . Согласно закону

сохранения заряда  $Q = q^{(1)} + q_2^{(1)}$  и равенству напряжений на конденсаторах

$$\frac{q^{(1)}}{C} = \frac{q_2^{(1)}}{C_2}, \text{ откуда } q^{(1)} = \frac{QC}{C + C_2}.$$

В конденсатор  $C_2$  разрядится, а заряд  $q^{(1)}$  перераспределится по обкладкам конденсаторов  $C$  и  $C_1$ . При этом на конденсаторе  $C$  останется заряд

$$q^{(2)} = \frac{Cq^{(1)}}{C + C_1} = \frac{C^2 Q}{(C + C_1)(C + C_2)}.$$

Видим, что после очередного заземления пластин конденсатора заряд на нем уменьшается в

$$k = \frac{C^2}{(C + C_1)(C + C_2)} \text{ раз.}$$

Итак, конденсатор полностью разрядить не удастся, даже если повторить процедуру заземления пластин неоднократно.

Энергия конденсатора  $\frac{Q^2}{2C}$  уменьшается. Она переходит в тепло, выделяющееся при разрядке конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ .

**Пример 14.6.** Конденсатор емкостью  $C$  присоединен к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии  $l$  друг от друга. Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле, вектор индукции которого  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости шин. Вдоль шин падает без начальной скорости медный проводник массы  $m$  так, что всегда есть контакт между проводником и шинами. Найти ускорение проводника и силу тока, заряжающего конденсатор. Сопротивлением и индуктивностью проводников, а также трением проводника о шины пренебречь.

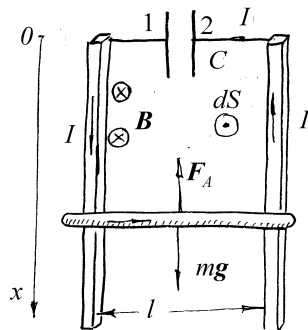


Рис.14.7

**Решение.** Для задания текущего положения проводника введем координатную ось  $Ox$ , направленную вертикально вниз (см. рис.14.7). Рассмотрим силы, действующие на проводник: это сила тяжести  $F_T = mg$ , направленная вертикально вниз, и сила Ампера (7.2), возникающая за счет протекания по проводнику индукционного тока. Пусть вектор индукции внешнего магнитного поля направлен «от нас», а индукционный ток  $I$  в контуре, образованном конденсатором, шинами и проводником, течет против часовой стрелки. Тогда сила Ампера направлена вертикально вверх и равна по модулю  $F_A = IlB$ . Запишем для проводника второй закон Ньютона в проекции на ось  $Ox$ :

$$ma = mg - IlB \quad ,$$

или

$$a = g - \frac{IlB}{m}, \quad (14.1)$$

где  $a$  – ускорение проводника.

Для нахождения индукционного тока необходимо воспользоваться законом электромагнитной индукции. Сначала найдем магнитный поток через наш замкнутый контур:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \, ds = -Blx.$$

где  $S$  – плоская поверхность, ограниченная контуром, а знак « $\rightarrow$ » появился из-за того, что при данном выборе направления индукционного тока вектор нормали к плоскости контура  $d\vec{S}$  антипараллелен вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ . ЭДС индукции найдем, продифференцировав последнее выражение по времени:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv, \quad (14.2)$$

где  $v = v(t)$  – мгновенная скорость проводника.

Применим теперь к участку рассматриваемого контура, начинающемуся в точке «1» и заканчивающемуся в точке «2» (см. рис.14.7) закон Ома:  $0 = u_2 - u_1 + \mathcal{E}_i$ , или

$$u_{12} = \mathcal{E}_i. \quad (14.3)$$

Здесь учтено, что сопротивление проводников исчезающе мало, и введено обозначение  $u_{12} \equiv u_1 - u_2$  для разности потенциалов между обкладками

конденсатора, которая зависит от их заряда  $Q$ :  $u_{12} = \frac{Q}{C}$ , или

$$Q = C u_{12} = CBlv .$$

Сила индукционного тока равна скорости изменения заряда обкладок конденсатора:

$$I = \frac{dQ}{dt} = CBl \frac{dv}{dt} = CBla . \quad (14.4)$$

Подставив последнее выражение в (14.1), выразим из последнего искомое ускорение:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{B^2 l^2 C}{m}} . \quad (14.5)$$

Из полученной формулы видно, что в достаточно сильном магнитном поле ускорение проводника может быть значительно меньше ускорения свободного падения – индукционный ток противодействует падению проводника, но остановить его не в состоянии.

Окончательное выражение для силы индукционного тока получим, подставив (14.5) в (14.4):

$$I = \frac{BlCg}{1 + \frac{B^2 l^2 C}{m}} .$$

**Пример 14.7.** По двум вертикальным параллельным медным шинам в поле силы тяжести может скользить без трения идеальная проводящая перемычка массой  $m$  и длиной  $l$ . Шины сверху замкнуты индуктивностью  $L$ , а снизу – сопротивлением  $R$ . Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого перпендикулярна плоскости шин и равна  $B$ . Перемычка сначала удерживается в некотором положении, а затем отпускается без толчка.

Найдите новое положение равновесия перемычки и характер переходного процесса.

**Решение.**

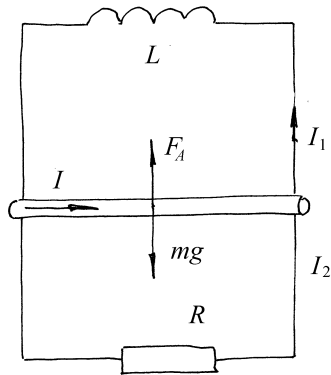


Рис.14.8

Как и в предыдущем примере направим ось  $Ox$  вертикально вниз. На перемычку действуют те же силы, что и в предыдущем примере: сила тяжести  $mg$  и сила Ампера  $F_A = I l B$ . Эти силы показаны на рис.14.8. Второй закон Ньютона принимает такой же вид, как и в примере 6, - формулу (14.1). ЭДС индукции также совпадает с найденной выше в примере 6 и задается выражением (14.2):  $E_i = Blv$ . А вот цепь, по которой протекает индукционный ток, в данном примере отличается от цепи примера 6. Правила Кирхгофа для нее имеют вид:

$$L \frac{dI_1}{dt} + E_i = 0, \quad RI_2 = L \frac{dI_1}{dt}, \quad I = I_1 + I_2. \quad (14.3)$$

Подставляя в первое уравнение (14.3)  $E_i$  и интегрируя, получаем

$$LI_1 + Blx = C.$$

Если ось  $Ox$  направить из начального положения перемычки, то константа интегрирования  $C=0$ , так как в момент  $t=0$  ток через катушку не течет.

Из двух последних уравнений (14.3) выразим  $I$ :

$$I = I_1 + \frac{L}{R} \frac{dI_1}{dt}. \quad (14.9)$$

Подставляя в (14.4)  $I_1 = -\frac{Bl}{L}x$ , а  $I$  во второй закон Ньютона (14.1), находим уравнение движения перемычки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(Bl)^2}{mR} \frac{dx}{dt} - \frac{(Bl)^2}{mL} x = g. \quad (14.5)$$

Новое положение равновесия перемычки найдем, положив в (14.5)  $x'' = x' = 0$

$$x_0 = \frac{gmL}{(Bl)^2}.$$

Решение уравнения (14.5) определяется корнями его характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \frac{(Bl)^2}{mR} \lambda - \frac{(Bl)^2}{mL} = 0.$$

1. Если  $\frac{(Bl)^2}{4mR^2} < \frac{1}{L}$ ,

то корни комплексно сопряженные  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$ ,

$$\text{где } \delta = \frac{(Bl)^2}{2mR}, \quad \omega^2 = \frac{(Bl)^2}{mL} - \frac{(Bl)^4}{4m^2R^2}.$$

Общее решение уравнения (14.5) в этом случае

$$x = \frac{mgL}{(Bl)^2} + \exp(-\delta t)[A \cos \omega t + C \sin \omega t].$$

Константы  $A$  и  $C$  находим из начальных условий: в момент  $t = 0$  координата

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad (14.6)$$



$$\text{или } 0 = \frac{mgL}{(Bl)^2} + A, \quad 0 = -\delta A + \omega C.$$

Откуда окончательно

$$x = \frac{mgL}{(Bl)^2} \left[ 1 - \exp(-\delta t) \cdot \left( \cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \right].$$

$$2. \text{ Если } \frac{(Bl)^2}{4mR^2} > \frac{1}{L},$$

то корни характеристического уравнения действительные

$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{-\omega^2}$ ,  $\lambda_2 = -\delta - \sqrt{-\omega^2}$ , а общее решение уравнения (14.5) с начальными условиями (14.6) имеет вид

$$x = \frac{mgL}{(Bl)^2} + A \left[ \exp(\lambda_1 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \exp(\lambda_2 t) \right],$$

$$\text{где } A = \frac{mgL\lambda_2}{(Bl)^2(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad \lambda_1 = -\delta + \sqrt{-\omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{-\omega^2}.$$

$$\text{При } t \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \frac{mgL}{(Bl)^2}.$$

Таким образом,

$$\text{если } \frac{(Bl)^2}{4mR^2} < \frac{1}{L}, \text{ то } x = \frac{mgL}{(Bl)^2} \left[ 1 - \exp(-\delta t) \cdot \left( \cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \right],$$

$$\text{где } \delta = \frac{(Bl)^2}{2mR}, \quad \omega^2 = \frac{(Bl)^2}{mL} - \frac{(Bl)^4}{4m^2R^2}.$$

$$\text{Если } \frac{(Bl)^2}{4mR^2} > \frac{1}{L}, \text{ то } x = \frac{mgL}{(Bl)^2} + A \left[ \exp(\lambda_1 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \exp(\lambda_2 t) \right],$$

$$\text{где } A = \frac{mgL\lambda_2}{(Bl)^2(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad \lambda_1 = -\delta + \sqrt{-\omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{-\omega^2}.$$

При  $t \rightarrow \infty$   $x \rightarrow \frac{mgL}{(Bl)^2}$ . Ось  $Ox$  направлена от начального положения переключки вертикально вниз.

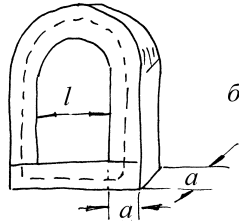
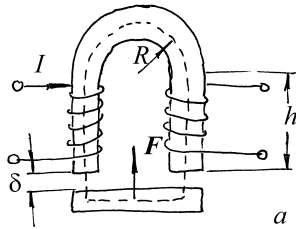


Рис.14.9

**Пример 14.8.** Электромагнит из железного бруса квадратного сечения в форме подковы имеет размеры, указанные на рис.14.9а:  $a = 5\text{ см}$ ,  $R = 7,5\text{ см}$ ,  $l = 10\text{ см}$ ,  $h = 10\text{ см}$ . Число витков обмотки  $N = 200$ , сила тока  $I = 2\text{ А}$ . Как велика подъемная сила электромагнита, если магнитная проницаемость бруса  $\mu = 200$ ?

**Решение.** Расчет подъемной силы электромагнита проведем, используя энергетические соображения. Допустим, что якорь электромагнита отстоит от подковы на малое расстояние  $\delta$  (рис.14.9б). При перемещении якоря на это расстояние (в положение, показанное на рис.14.9а) он совершит работу  $A = F\delta$ , где  $F$  – искомая подъемная сила электромагнита. Эта работа

совершается как за счет изменения энергии магнитного поля  $W = \frac{1}{2}LI^2$ ,

пронизывающего электромагнит

$$\Delta W = \frac{1}{2} I \Delta \Phi ,$$

так и за счет работы ЭДС индукции, возникающей в контуре за счет изменения магнитного потока

$$A_i = \int I E_i dt = -I \Delta \Phi ,$$

где  $\Delta \Phi$  – изменение потока вектора индукции магнитного поля через витки обмотки электромагнита.

Баланс энергии в системе при перемещении якоря имеет вид

$$A = F \delta = -I \Delta \Phi + \frac{1}{2} I \Delta \Phi = -\frac{1}{2} I \Delta \Phi . \quad (14.7)$$

Поток вектора индукции через витки обмотки равен  $\Phi = B N a^2$ , где  $B$  – величина индукции магнитного поля, которую, если пренебречь рассеянием поля, можно считать одинаковой для всех витков. Ее можно найти, если применить теорему о циркуляции к траектории, совпадающей с силовой линией, показанной на рис.14.9 пунктиром:

1. для положения якоря, показанного на рис.14.9б

$$\frac{B_1}{\mu \mu_0} [\pi R + 2h + l + 2a] + \frac{B_1}{\mu_0} 2\delta = IN ;$$

2. для положения якоря, показанного на рис.14.9а

$$\frac{B_2}{\mu \mu_0} [\pi R + 2h + l + 2a] = IN ;$$

Подставляя найденные значения  $B_1$  и  $B_2$  сначала в выражение для потока  $\Phi$ , а его в (14.7), окончательно получим

$$F\delta = \frac{1}{2} INa^2 (B_2 - B_1) = \frac{(INa)^2 \mu\mu_0}{2} \left[ \frac{1}{\pi R + 2h + l + 2a} - \frac{1}{\pi R + 2h + l + 2a + 2\mu\delta} \right]$$

Учтем, что  $\delta\mu \ll R, h, l, a$ , тогда выражение в правой части преобразуется к виду

$$\left( \frac{IaN}{\pi R + 2h + l + 2a} \right)^2 \mu^2 \mu_0 \delta,$$

или 
$$F = \left( \frac{IaN}{\pi R + 2h + l + 2a} \right)^2 \mu^2 \mu_0 = 49,8H.$$

#### Задание для самостоятельной работы

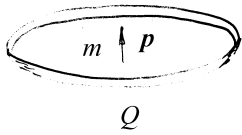


Рис.14.10

**14.1.** Заряд  $Q$  равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом  $R$  (рис.14.10). Точечный диполь массой  $m$  с дипольным моментом  $\vec{p}$  может перемещаться вдоль оси кольца. Определите частоту малых колебаний диполя около положения равновесия.

**14.2.** Одна из пластин конденсатора жестко закреплена, а вторая, имеющая массу  $m$ , связана с пружиной жесткостью  $k$  (см. рис.14.11). Расстояние между пластинами при ненапряженной пружине равно  $d_0$ . К конденсатору подключили батарею. В новом положении равновесия расстояние между пластинами  $d = \frac{4}{5}d_0$ . Найдите частоту малых колебаний пластины.

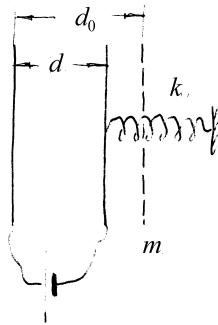


Рис.14.11

краевыми эффектами, найдите момент сил  $M$ , действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов  $V$ , диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна  $\epsilon$ .

**14.3.** Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис.14.12). Все пластины имеют форму полукруга радиуса  $R$ , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с  $d$ . Пренебрегая

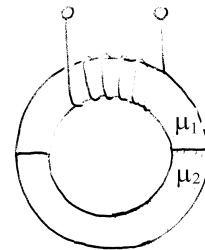


Рис.14.12

**14.4.** Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых квадратных пластин, расположенных в вакууме вертикально на расстоянии  $d = 1 \text{ мм}$  друг от друга. Одна из пластин закреплена, а другая может двигаться без трения по гладким вертикальным направляющим. При какой разности потенциалов  $V$  между пластинами подвижная пластина не упадет вниз? Масса подвижной пластины  $M = 1 \text{ г}$ , сторона квадрата  $l = 10 \text{ см}$ .

*Указание:* Воспользоваться уравнением Лагранжа.

**14.5.** В безграничном слое толщиной  $2d$  объемная плотность заряда  $\rho$  изменяется по закону  $\rho = \rho_0 x/d$  ( $-d \leq x \leq d$ ), где  $x$  - координата вдоль оси  $Ox$ , перпендикулярной плоскости слоя. В слое имеется тонкий канал вдоль оси

Ох, в котором помещен точечный диполь с массой  $m$  и дипольным моментом  $\vec{p}$ , направленным вдоль оси канала. Вычислите период малых продольных колебаний диполя.

**14.6.** Как изменится ответ в примере 3, если в центре сферы поместить дополнительный точечный заряд  $q$ ? Сферу считать полой и бесконечно тонкой.

**14.7.** На вертикальную гладкую спицу надета бусинка, несущая положительный заряд  $q$ . На нижнем конце спицы расположен равный одноименный заряд. Бусинку подвинули к нему достаточно близко и отпустили. Совершив ряд колебаний, бусинка остановилась на высоте  $a$ . Найдите эту высоту, если известно, что при движении на бусинку действует сила вязкого трения, пропорциональная ее скорости. Поднявшись в какой-то момент времени до максимальной высоты  $H_1$ , бусинка опустилась до минимальной высоты  $h_1$ , а затем поднялась до максимальной высоты  $H_2$ . Какой заряд был на бусинке, если ее масса равна  $m$ ?

**14.8.** По длинному соленоиду, имеющему  $n$  витков на единицу длины, течет ток  $I$ . Найдите давление  $p$ , действующее на боковую поверхность соленоида. Магнитная проницаемость среды  $\mu = 1$ .

**14.9.** Длинный сплошной цилиндр из диэлектрика статически поляризован, причем вектор поляризации во всех точках цилиндра направлен радиально. А его величина пропорциональна расстоянию от продольной оси цилиндра, то есть  $\vec{P} = k\vec{r}$  ( $k = const$ ,  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от оси перпендикулярно к ней). Цилиндр вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси. Найдите

индукцию магнитного поля внутри цилиндра вдали от его концов, если радиус цилиндра равен  $R$ .

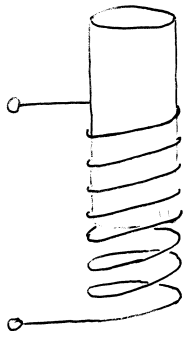


рис.14.13

**14.10.** Длинный сердечник с  $\mu = 100$  втягивается с силой  $F = 10\text{H}$  в длинный соленоид, по которому течет ток  $I = 10\text{A}$ . Сердечник занимает все сечение соленоида и вставлен на глубину, значительно превышающую его диаметр (рис.14.13) найдите коэффициент самоиндукции  $L$  соленоида (без сердечника), если его длина  $l = 50\text{см}$ .

**14.11.** Как изменится подъемная сила электромагнита, изображенного на рис.14.9, если его нижний якорь изготовить из материала с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ , отличной от магнитной проницаемости верхней подковы  $\mu_1$ ?

**14.12.** Вдоль эвакуированной длинной цилиндрической трубы радиусом  $R$  создан стационарный аксиально симметричный поток электронов, ускоренных при прохождении разности потенциалов  $U$ . Найдите распределение плотности электронов в зависимости от радиуса  $r$  в некотором сечении пучка, если результаты измерения магнитного поля  $B$  как функции  $r$  в этом сечении оказалось возможным описать выражением  $B = B_0(r/R)^q$  при  $r < R$ ,  $q > 0$ , где  $B_0$  и  $q$  -- постоянные. Определите электрическое поле  $E(r)$ , предполагая, что параметры пучка не изменяются вдоль его оси.

**14.13.** Диск радиусом  $R$  и толщиной  $l$  ( $l \ll R$ ) из равномерно заряженного диэлектрика с объемной плотностью заряда  $\rho$  лежит на большой металлической заземленной пластине. Вычислите энергию  $W$

электростатического поля , заключенного в диске. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\epsilon = 1$  . Краевыми эффектами пренебречь.

**14.14.** В безграничном слое толщиной  $2d$  объемная плотность заряда  $\rho$  изменяется по закону  $\rho = \rho_0 x / d (-d \leq x \leq d)$ , где  $x$  - координата вдоль оси  $Ox$ , перпендикулярной плоскости слоя. В слое имеется тонкий канал вдоль оси  $Ox$ , в котором помещен маленький проводящий шарик, сделанный из материала с плотностью  $\rho_m$ . Вычислите минимальную скорость, которую нужно сообщить шарика в центре слоя, чтобы он мог покинуть канал.

**14.15.** В безграничном слое толщиной  $2d$  объемная плотность заряда  $\rho$  изменяется по закону  $\rho = \rho_0 x / d (-d \leq x \leq d)$ , где  $x$  - координата вдоль оси  $Ox$ , перпендикулярной плоскости слоя. В слое имеется тонкий канал вдоль оси  $Ox$ , в котором помещен маленький диэлектрический шарик, сделанный из материала с плотностью  $\rho_m$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Вычислите период малых продольных колебаний шарика.

**14.16.** Проводящая полая сфера радиусом  $R$  составлена из двух полусфер. Внутри сферы помещен концентрично проводящий заземленный шар радиусом  $R_1$ . Определите силу  $F$ , с которой отталкиваются полусферы, если полный заряд сферы равен  $Q$ . При каком условии сила взаимодействия полусфер меняет знак?

**14.17.** По сфере радиусом  $R$  равномерно распределен заряд  $Q$ . Определите давление на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.



**14.18.** На вертикальную спицу надета бусинка с массой  $m$ , несущая положительный заряд  $q$ , которая может скользить по спице без трения. На нижнем конце спицы расположен такой же заряд. Найдите частоту малых колебаний бусинки около положения равновесия.

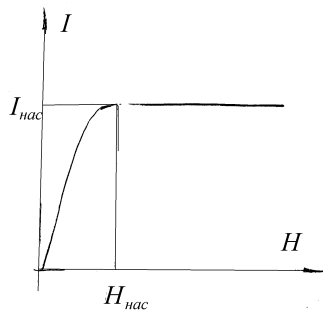


Рис.14.14

**14.19.** На рис.14.14 изображена зависимость намагниченности  $J$  от напряженности поля  $H$  для некоторого магнитного материала, из которого изготовлен сердечник тонкой тороидальной катушки, имеющей  $N$  витков. В сердечнике имеется узкий поперечный воздушный зазор длиной  $l$ . Длина катушки (периметр) равна  $L$ . Определите при каком значении тока  $I_0$  в катушке наступит насыщение намагниченности сердечника. Как

будет меняться магнитная индукция  $B$  в зазоре сердечника при  $I > I_0$ ? Величины  $J_{нас}$  и  $H_{нас}$  заданы.

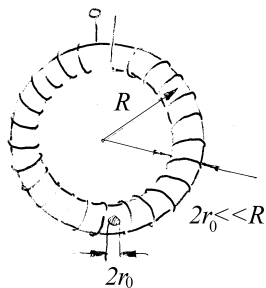


Рис.14.15

**14.20.** Тонкая тороидальная катушка, намотанная на полый немагнитный каркас (см. рис.14.15) радиусом  $R$ , имеет  $N$  витков, по которым течет ток  $I$ . Каково магнитное поле  $B$  в центре тора (в точке  $O$ )? Как изменится магнитное поле в точке  $O$ , если внутрь катушки поместить небольшой шарик радиусом  $r_0 \ll r$  с магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ ?

**14.21.** На сколько изменится индуктивность тонкого витка радиусом  $R = 1 \text{ см}$ , если его расположить на расстоянии  $h = 10 \text{ см}$  от бесконечной сверхпроводящей плоскости? Плоскость витка параллельна сверхпроводнику.

**14.22.** В условии примера 6 конденсатор заменяется на резистор с сопротивлением  $R$ . Требуется найти закон изменения скорости проводника.

**14.23.** В условии примера 6 конденсатор заменяется на катушку с индуктивностью  $L$ . Требуется найти закон движения проводника.

**14.24.** Внутри длинного соленоида, имеющего обмотку с  $n$  витками на единицу длины, внесли маленький шарик объемом  $V$  из магнитного материала с проницаемостью  $\mu$ . Оцените, насколько изменится индуктивность соленоида.

**14.25.** На сколько изменится индуктивность тонкого витка радиусом  $R = 1 \text{ см}$ , если его расположить на расстоянии  $h = 10 \text{ см}$  от бесконечной сверхпроводящей плоскости? Плоскость витка перпендикулярна сверхпроводнику.

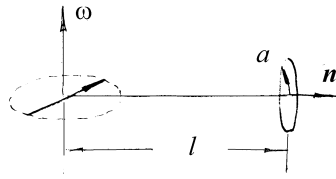


Рис.14.16

**14.26.** Магнитный диполь с моментом  $\vec{p}_m$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной магнитному моменту (см. рис.14.16). Найдите ток в плоской круглой неподвижной рамке радиусом  $a$  с сопротивлением  $R$ , находящейся на

расстоянии  $l \gg a$  от диполя. Нормаль  $\vec{n}$  к плоскости рамки перпендикулярна оси вращения диполя. Самоиндукцией рамки пренебречь.

**§15. Ответы***§1. Электрическое поле*

1.1.  $q' = -\frac{q}{\sqrt{3}}$ .

1.2.  $E = \frac{qb}{8\pi^2 \epsilon_0 a^3}$ , вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль линии, соединяющей центр кольца с прорезью.

1.3.  $\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \left(\frac{e}{m}\right)^2 = 4,2 \cdot 10^{42}$

1.4.  $a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}^2$

1.5.  $\frac{F}{l} = \frac{\kappa^2}{2\pi\epsilon_0 b} = 8,1 \text{ Н/м}$

1.6.  $F = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(1 + \frac{l}{r_0}\right)$ , с такой силой нить отталкивает отрезок.

1.7. в обоих случаях  $E = 0$

1.8.  $E_y = \frac{3qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}$ ,  $E_x = 0$ .

1.9.  $E_z = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]$ , для  $z \ll a$  совпадает с полем бесконечной однородно заряженной плоскости  $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$ , а для  $z \gg a$  с полем точечного заряда  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$ .

1.10.  $E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right]$ , где  $z$  – расстояние до центра кольца

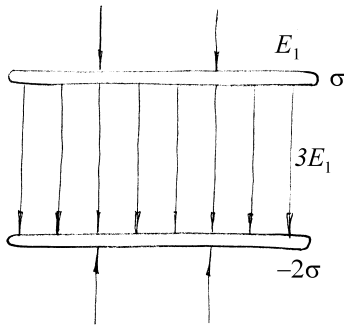


Рис.15.1

1.11. Картина силовых линий показана на рис.15.1, где  $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

1.12.  $E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$ , поле направлено вдоль оси симметрии полусферы.

1.13.  $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$ .

1.14.  $\rho(r) = \text{const} = \frac{3e}{4\pi R^3}$ ,

$$\nu = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m R^3}} = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Гц} .$$

1.15.  $E = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (a-l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (a+l)^2}} \right]$ , поле направлено вдоль оси цилиндра

1.16.  $E = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{l}{h}$ , поле направлено перпендикулярно плоскости полосы

1.17.  $E_x = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{l^2 + h^2} + l}{\sqrt{l^2 + h^2} - l}$ ,  $E_z = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \operatorname{arctg} \frac{l}{h}$ .

1.18.  $E = \frac{q}{\pi\epsilon_0 l^2}$ , направлено вдоль диагонали квадрата

1.19.  $\vec{E} = \vec{n} \frac{\sqrt{2}\kappa}{4\pi\epsilon_0 a}$ , где  $\vec{n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

1.20.  $\vec{E} = \vec{n} \frac{\sqrt{3}\kappa}{4\pi\epsilon_0 a}$ , где  $\vec{n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$

1.21.  $E = \frac{\kappa\sqrt{6}}{4\pi\epsilon_0 z}$

§2. Потенциал электрического поля

2.1. во всех трех случаях  $A = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ , в частности, в случае б)  $A = 0$

2.2.  $\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} \dots \right) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2$

2.3.  $A = 0$ , для одноименных зарядов  $A = \frac{qq'}{\pi\epsilon_0 a}$

2.4. а)  $W = 0$ ,  $M = p_e E$ , момент направлен за плоскость рисунка, б)

$W = -p_e E$ ,  $M = 0$ , в)  $W = p_e E$ ,  $M = 0$ ; во всех случаях  $F = 0$

2.5. а)  $W = -\frac{p_1 p_2}{\pi\epsilon_0 r^3}$ , б)  $W = \frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ , в)  $W = 0$

$$2.6. \omega = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{p_e E}{m}}, \quad \beta = \frac{2p_e E}{ml^2}$$

2.7. а)  $\vec{p}_e$  и  $\vec{r}$  антипараллельны, б)  $\vec{p}_e$  и  $\vec{r}$  параллельны, в)  $\vec{p}_e$  и  $\vec{r}$  ортогональны

$$2.8. E(\theta) = \frac{p_e \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}{4\pi \epsilon_0 R^3}, \quad \text{где } \theta \text{ -- угол между направлением на точку сферы}$$

и диполем.

$$2.9. \varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}, \quad E_z = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}, \quad \text{где ось } Oz \text{ направлена вдоль оси симметрии}$$

полусферы

$$2.10. n = \frac{4\pi \epsilon_0 r \varphi}{e} = 2 \cdot 10^{10} \text{ электронов}, \quad \Delta M = mn = 2 \cdot 10^{-20} \text{ кг}$$

$$2.11. \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}, \quad \text{где } E_x = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{a}, \quad E_y = \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{a}, \quad E_z = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{a}$$

$$2.12. F = \frac{q p_e}{2\pi \epsilon_0 d^3}, \quad \text{диполь будет притягиваться к заряду, если он обращен к}$$

нему противоположно заряженным концом, и отталкиваться в противном случае.

$$2.13. l = 2\sqrt{a^2 - R^2}.$$

2.14. Нет, так как такое поле не будет потенциальным.

$$2.15. \varphi = \frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0}.$$

§3. Проводники и диэлектрики в электрическом поле. Теорема Гаусса

$$3.1. q = \frac{2\epsilon_0 mg \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sigma}.$$

$$3.2. \sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2), \quad \sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2),$$

$$E_x = \frac{q_1 - q_2}{2\epsilon_0}, \quad E'_x = -E''_x = \frac{q_1 + q_2}{2\epsilon_0}.$$

3.4. Потенциал проводника уменьшится

3.5. На внутренней поверхности оболочки появится наведенный заряд такой, чтобы поле внутри оболочки обратилось в ноль. Так как оболочка не заряжена, то заряд противоположного знака распределится по внешней поверхности оболочки равномерно.

1) Если к оболочке поднести заряженный проводник, то изменится поле снаружи оболочки так, чтобы поле в проводнике было равно нулю. Распределение заряда на внутренней оболочке *не изменится* и по-прежнему будет создавать напряженность в оболочке, равную нулю. 2) Перемещение внутреннего проводника будет приводить к изменению распределения заряда на внутренней оболочке, но не будет влиять на поле снаружи.

3.6. Увеличится, так как поверхностная плотность заряда на металлической пластинке против диэлектрика возрастет.

3.7. Поле радиально и определяется выражениями

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{R_1(R_2 - R_3)}{R_2(R_3 - R_1)} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_2 < r < R_3 \\ 0 & R_3 < r \end{cases} \quad \text{если}$$

где  $r$  - расстояние от

центра сфер.

$$3.8. E_1 = \frac{Ux}{d^2}, \quad E_2 = \frac{U(x+d)}{d^2}.$$

$$3.9. q_3 = q_2^2 / q_1.$$

3.10. Уменьшится

$$3.11. \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r^2} \vec{r}, & r \geq R \\ \frac{\rho \vec{r}}{2\varepsilon_0}, & r \leq R \end{cases}, \text{ где } r \text{ — расстояние от оси цилиндра до}$$

рассматриваемой точки пространства

$$3.12. \quad E = \frac{2\kappa d}{\varepsilon_0 \pi (4h^2 + d^2)}, \text{ направлено параллельно плоскости, в которой лежат}$$

провода.

3.13. Поле перпендикулярно к поверхности слоя и равно вне слоя  $E_x = \frac{\rho d}{\varepsilon_0} \frac{x}{|x|}$  и внутри слоя  $E_x = \rho x / \varepsilon_0$ . Ось  $Ox$  перпендикулярна к поверхности слоя,  $x = 0$  в середине слоя.

$$3.14. \quad q = -\frac{\varepsilon Q}{(R/r + \varepsilon - 1)}.$$

$$3.15. \quad \rho(r) = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{r}.$$

$$3.16. \quad F = \frac{24\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^6}{r^4}, \text{ сферы притягиваются.}$$

3.17. а)  $\Phi_{E1} = \Phi_{E3} > \Phi_{E2}$ ; б)  $\Phi_{D1} = \Phi_{D2} = \Phi_{D3} = q$ . Палочка нарушает сферическую симметрию поля, поэтому определить поле  $\vec{D}$  с помощью интегральной теоремы Гаусса невозможно.

$$3.18. \text{ а) } \varphi(x) = \frac{E}{\varepsilon} x \text{ при } |x| < a; \quad \varphi(x) = \frac{E}{\varepsilon} a \frac{x}{|x|} + E \left( x - a \frac{x}{|x|} \right) \text{ при } |x| > a;$$

$$\text{ б) } \sigma' = -\varepsilon_0 E \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right); \quad \text{ в) } \vec{P} = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \varepsilon_0 \vec{E}.$$



$$3.19. \vec{E} = \begin{cases} -\frac{P \cos \alpha}{\epsilon_0} \vec{n}, & \text{внутри} \\ 0, & \text{снаружи} \end{cases}$$

$$3.20. \text{ а) } \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}, \vec{D} = 0; \text{ б) } \vec{E} = -\frac{2}{\pi \epsilon_0} \frac{L}{l} \vec{P}, \vec{D} = \left(1 - \frac{2L}{\pi l}\right) \vec{P}$$

$$3.21. E' = (\epsilon - 1)E/3 = P/3\epsilon_0.$$

3.22. В точках А и В напряженность возрастет в три раза, а в точках С и D обратится в нуль.

#### §4. Уравнения электростатики

$$4.1. \vec{F} = \frac{q^2 a R}{4\pi \epsilon_0 (R^2 - a^2)^2} \vec{n}, \text{ единичный вектор } \vec{n} \text{ направлен от центра сферы.}$$

$$4.2. \vec{F} = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 a^2} \left[ 1 - 8\xi \frac{1 + \xi^4}{(1 - \xi^4)^2} \right] \vec{n}, \text{ где } \xi = \frac{2R}{a}, \text{ единичный вектор } \vec{n} \text{ направлен от центра шара.}$$

$$4.3. \text{ а) диполь притягивается к плоскости с силой } F = \frac{3p_e^2}{64\pi \epsilon_0 a^4}; \text{ б) диполь}$$

отталкивается от плоскости с силой  $F_1 = 2F$ .

$$4.4. \sigma(M) = \frac{q}{4\pi R a} \left[ 1 - \frac{1 - \xi^2}{(1 - 2\xi \cos \alpha + \xi^2)^{3/2}} \right], \text{ где } \xi = \frac{R}{a}, \alpha - \text{ угол между}$$

отрезками прямых, соединяющих центр сферы с зарядом и центр сферы с текущей точкой  $M$  на сфере.

$$4.5. 1) A = \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0(a^2 - R^2)}, \quad 2) A = \frac{q^2 R^3}{8\pi\epsilon_0 a^2(a^2 - R^2)}.$$

$$4.6. F = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d^2} \left( \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right), \text{ сила направлена к вершине двугранного угла } O.$$

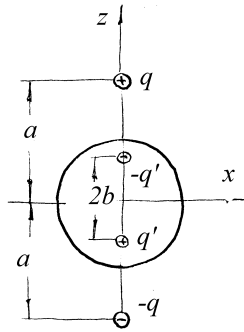


Рис.15.2

4.7. Поле создается четырьмя зарядами, показанными на рис.15.2, где  $b = R^2/a$ ,  $q' = qR/a$ . Его потенциал равен

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} + \frac{qR}{\sqrt{a^2 x^2 + a^2 y^2 + (za + R^2)^2}} - \frac{qR}{\sqrt{a^2 x^2 + a^2 y^2 + (az - R^2)^2}} \right]$$

4.8.  $q' = -\frac{qR}{d}$  - заряд, образовавшийся на шаре

$$4.9. \varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}, & \text{если } d > R, \\ \frac{(Q+q)}{4\pi\epsilon_0 R}, & \text{если } d \leq R \end{cases}$$

4.10. Поле параллельно оси  $Ox$  и напряженность его  $E = \alpha x$ . Такое поле будет существовать внутри слоя, ограниченного двумя бесконечными плоскостями, перпендикулярными к оси  $Ox$ , и заряженного равномерно с объемной плотностью  $\rho = \alpha\epsilon_0$ .

4.11.  $F = \frac{1}{16\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{q^2}{d^2}$ , заряд притягивается к плоскости, если  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , и отталкивается, если  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ .

4.12.  $\rho = -\varepsilon_0 \alpha E_0 / (\varepsilon_1 + \alpha x)^2$ , где  $\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a}$ ;

плотность заряда в центре пластины  $\rho_0 = -\frac{4\varepsilon_0 E_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} = -0,59 \text{ мкКл/м}^2$ .

4.13.  $\sigma_{\max} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 3,5 \text{ нКл/м}^2$ ,  $Q_+ = \sigma_{\max} \pi R^2 = 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$ .

4.14.  $\omega = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{3PE}{\rho}}$

4.15.  $\vec{F} = \frac{\kappa^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_1 d} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  - единичный вектор, направленный к поверхности раздела

4.16.  $\sigma(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{qL}{(\rho^2 + L^2)^{3/2}}$ , здесь  $\rho$  - расстояние от основания перпендикуляра, опущенного от заряда на границу раздела, до произвольной точки поверхности.  $Q = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} q$ , заряд притягивается к диэлектрику с силой

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{q^2}{4L^2}.$$

4.17. а) нет; б) да.

4.18.  $\rho = \begin{cases} 0 & \text{если } r > R \\ \frac{3a\varepsilon_0}{R^3} & \text{если } r < R \end{cases}$ .

4.19. В начале координат находится точечный заряд  $q = 4\pi\varepsilon_0 a$ , внутри сферы находится заряд с объемной плотностью  $\rho = -\frac{3\varepsilon_0 a}{R^3}$ .

$$4.20. \rho = \begin{cases} 0 & \text{если } r > R \\ 12a\varepsilon_0 r & \text{если } r < R \end{cases}, \text{ на сфере радиуса } R \text{ распределен заряд с}$$

поверхностной плотностью  $\sigma = -3a\varepsilon_0 R^2$ .

4.21. В начале координат находится заряд  $q = 4\pi\varepsilon_0 a$ , сфера радиуса  $R$  заряжена

4.22. В начале координат находится точечный заряд  $q = 4\pi\varepsilon_0 b$ , вне - заряд распределен непрерывно с поверхностной плотностью  $\rho(r) = -\frac{ba^2\varepsilon_0}{r} \exp(-ar)$ .

$$4.23. E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_1\Omega_1 + \varepsilon_2\Omega_2} \frac{1}{\varepsilon_0 r^2}, \text{ где } r - \text{расстояние от центра сфер}$$

§5. Электроемкость. Энергия электрического поля

$$5.1. C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}(\varepsilon - 1)}.$$

$$5.2. \Delta W = -2\pi\varepsilon_0 R_1 U^2.$$

$$5.3. C = C_0 \left( 1 + \frac{d}{d_1} \right) = 3C_0.$$

$$5.4. C = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{d \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}.$$

5.5. а) напряжение не изменится; б) напряженность уменьшится вдвое

$$5.6. C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_a a}{\ln(b/a)}, \quad W = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_a a}{\ln(b/a)} U^2.$$

$$5.7. C_0 = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{a-r}{r}} \approx \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(a/r)}.$$

$$5.8. E = \frac{Q}{\varepsilon_0 l r (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2)}, \text{ где } r - \text{ расстояние от оси конденсатора,}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{\psi_1 \varepsilon_1 + \psi_2 \varepsilon_2}{\ln(R_2/R_1)} l.$$

$$5.9. \text{ Не изменится. } \frac{U}{U_0} = \frac{n-1}{n} \text{ -- уменьшится}$$

$$5.10. 1) \text{ емкость батареи, включенной по схеме а), больше; } 2) C_4 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

$C_3$  может быть любой.

5.11. емкости равны.

5.12.  $C_1$ .

5.13.  $W_2 = \varepsilon W_1$  -- энергия увеличилась за счет работы по удалению диэлектрика.

5.14.

$$Q = 2\pi \varepsilon_0 \frac{R_1 R_2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + R_1 R_3 (\varphi_1 - \varphi_3)^2 + R_2 R_3 (\varphi_2 - \varphi_3)^2}{(R_1 + R_2 + R_3)} = 4,5 \cdot 10^{14} \text{ Дж.}$$

$$5.15. 1) \Delta W = -\frac{S \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U^2}{2d}, \quad A = -2\Delta W; \quad 2) \Delta W = A = \frac{S \varepsilon_0 \varepsilon (\varepsilon - 1) U^2}{2d}.$$

$$5.16. A = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} (d_0 - d), \text{ за счет энергии электрического поля конденсатора.}$$

$$5.17. x = \frac{d}{\varepsilon \left[ \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{2dA} \mathcal{E}^2 - 1 \right]}.$$

$$5.18. W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

$$5.19. W = \frac{q^2(\epsilon + 1)}{16\pi R \epsilon \epsilon_0}.$$

$$5.20. A = \frac{q^2}{40\pi\epsilon_0 r} = 0,9 \text{ нДж}.$$

$$5.21. \frac{A_1}{A_2} = \frac{d}{d-s}.$$

$$5.22. \alpha = 1.$$

$$5.23. C = \epsilon_0 (\epsilon_1 \Omega_1 + \epsilon_2 \Omega_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

$$5.24. M = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)U^2 R^2}{4d}.$$

§6. Квазистационарные токи

$$6.1. U_1 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = -\frac{UR_1}{R_1 + R_2}.$$

$$6.2. \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2 - \text{ углы, образованные линией тока с нормалью к}$$

поверхности раздела в первой и во второй среде.

$$6.3. R = \frac{1}{2\pi\lambda_2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2\pi\lambda_1} \cdot \frac{1}{b}.$$

$$6.4. R \approx \frac{1}{2\pi\lambda} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right).$$

$$6.5. \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 10.$$

$$6.6. \quad N_1 = \frac{\mathcal{E}_0^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}, \quad N_2 = \frac{\mathcal{E}_0^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2},$$

$$\text{где } R_1 = \frac{d_1}{2S} \rho_1, \quad R_2 = \frac{d}{2S} \rho_2.$$

$$6.7. \quad \sigma = \frac{2\mathcal{E}_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2)}{d(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

$$6.8. \quad R = \frac{1}{2\pi\lambda r}.$$

$$6.9. \quad R = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 (C_1 + C_2)}{\lambda C_1 C_2}.$$

$$6.10. \quad N_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}, \quad N_2 = \frac{U^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2},$$

$$\text{где } R_1 = \frac{1}{4\pi\lambda_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad R_2 = \frac{1}{4\pi\lambda_2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right).$$

$$6.11. \quad N_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}, \quad N_2 = \frac{U^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2},$$

$$\text{где } R_1 = \frac{1}{2\pi\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad R_2 = \frac{1}{2\pi\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}.$$

$$6.12. \quad U_w = \frac{I}{\pi\lambda L} \ln \left( 1 + \frac{l}{r_0} \right) = 14,9B.$$

$$6.13. \quad R = \frac{1}{\pi\delta\lambda} \left[ \frac{l}{D} + \ln \frac{D}{d} \right].$$

$$6.14. \quad \varphi = U \frac{\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right)}{2 \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}\right)}, \text{ ток течет от точки } A \text{ к точке } B, \text{ потенциал}$$

точки  $A$  принят равным нулю.

$$6.15. \quad R = \frac{1}{\delta\pi\lambda} \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}\right).$$

$$6.16. \quad E(r) = \frac{2U_0 r}{(R_2^2 - R_1^2)}, \quad \rho(r) = \frac{4\varepsilon\varepsilon_0 U_0}{(R_2^2 - R_1^2)}.$$

$$6.17. \quad \lambda(r) \sim \frac{1}{r^4}.$$

$$6.18. \quad \lambda \sim j \sim \frac{1}{r}.$$

$$6.19. \quad \rho = \varepsilon\varepsilon_0 j \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{[\lambda_1 l + (\lambda_2 - \lambda_1)x]^2}, \text{ где } x \text{ — текущая координата, отсчитываемая от}$$

точки  $A$  по направлению к точке  $B$ .

$$6.20. \quad N = \frac{\lambda}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k.$$

$$6.21. \quad P = \frac{4\pi\lambda U_0^2}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}.$$

$$6.22. \quad I = \frac{2\pi\lambda U_0}{\ln(R_2/R_1)} \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon_0\varepsilon/\lambda}\right).$$

$$6.23. \quad I = \frac{\mathcal{E}\varepsilon_0 S v}{(d_0 + vt)^2}.$$



$$6.24. I = \frac{2\varepsilon_0 \alpha \mathcal{E}}{d} t.$$

$$6.25. R \approx \frac{2\rho}{\pi R} \ln\left(\frac{a}{r}\right).$$

§7. Магнитное поле квазистационарных токов

7.1.  $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8I\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$ . Вектор  $\vec{B}$  направлен вдоль положительной нормали к плоскости контура.

7.2. Поле в обеих полуплоскостях однородное, но направлено в разные стороны;

$\vec{B} = \frac{\mu_0 [\vec{i}; \vec{e}]}{2}$ ,  $\vec{e}$  - единичный вектор, перпендикулярный плоскости, направленный от плоскости.

Указание: Результат дает непосредственное интегрирование:

$$B = 2 \int_0^{\infty} \frac{\mu_0 h i dx}{2\pi \sqrt{h^2 + x^2}}, \quad h - \text{расстояние от точки до плоскости, или применение}$$

теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$ .

7.3. Вне плоскостей поля нет, между плоскостями поле однородно;  $\vec{B} = \mu_0 [\vec{i}; \vec{e}]$ ,  $\vec{e}$  - единичный вектор, перпендикулярный плоскости с током  $\vec{i}$ , направленный от нее.

$$7.4. B(\rho) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho \leq R \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{\rho}, & \rho > R \end{cases}. \text{Силловые линии - концентрические окружности с}$$

центрами на проводнике.

7.5.  $B = \frac{\mu_0 I d}{4\pi^2 a r}$ . Указание: Дополнить токами  $I_d = \frac{I d}{2\pi R}$  и  $-I_d$ , текущими по щели.

7.6.  $\vec{B} = \frac{2\mu_0 \sigma R}{3} \vec{\omega}$ . Указание: Разбить сферу на слои параллельными плоскостями; поле от слоя, соответствующего углам от  $\theta$  до  $\theta+d\theta$ , есть поле от кругового контура радиуса  $R\sin\theta$  с силой тока  $\omega \sigma R^2 \sin\theta d\theta$ .

7.7. Вектор  $\vec{B}$  внутри сферы перпендикулярен плоскости рисунка 7.7. Справа от проводника направлен от нас, слева - к нам. Внутри сферы  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  ( $r$  - расстояние от проводника). Вне сферы  $B=0$ .

7.8.  $B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \operatorname{arctg} \frac{l}{2h}$  (направление - по правилу буравчика).

7.9.  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (1 + \cos \alpha)$ , где  $r$  - расстояние от точки А. Поле направлено перпендикулярно проводнику с током  $2I$ .

7.10.  $F_{\perp} = 2IRB$ .

7.11.  $F = \mu_0 I_1 I_2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - R^2/a^2}} - 1 \right)$

7.12. Спирали с осями, параллельными линиям магнитной индукции; радиус спиралей  $R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$ ; шаг  $h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}$ . Встретятся через время  $T = \frac{2\pi m}{qB}$  на расстоянии  $h$  от начальной точки. Максимальное расстояние  $4R$ .

7.13.  $\alpha = \begin{cases} \pi, & \text{при } v_0 \leq \frac{qBL}{m} \\ \operatorname{arcsin} \left( \frac{q}{m} \frac{BL}{v_0} \right) & \text{при } v_0 > \frac{qBL}{m} \end{cases}$

7.14.  $B_0 = \frac{I\mu_0 n}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ . Вектор  $\vec{B}_0$  направлен вдоль положительной нормали к

плоскости контура;. При  $n \rightarrow \infty$  будет  $B_0 = \frac{I\mu_0}{2R}$ .

7.15.  $B_0=0$ .

7.16.  $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \left( \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} + \arcsin \frac{a}{R} \right)$ , Вектор  $\vec{B}_0$  направлен за плоскость

рисунка 7.8.

7.17.  $B_0 = \frac{\mu_0 IN \ln(R_1 / R_2)}{2(R_1 - R_2)}$ , вектор  $\vec{B}_0$  направлен вдоль положительной нормали

к плоскости спирали. При  $R_1 / R_2 \rightarrow 1$  будет  $B_0 = \frac{\mu_0 IN}{2R_1}$  (поле кругового

контура радиуса  $R_1$  с током  $NI$  в центре контура).

7.18.  $\delta = \frac{l}{\xi} \left( 1 - \sqrt{1 - \xi^2} \right) + \frac{\xi D}{\sqrt{1 - \xi^2}}$ ,  $\xi = lB \sqrt{\frac{e}{2mU}}$ .

7.19.  $\vec{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \rho (R^2 - r^2) \vec{\omega}$  внутри,  $\vec{B}_0 = 0$  вне цилиндра.

7.20.  $I = \frac{T}{BR}$ . Указание: на элемент проволоки  $dl$  с током  $I$  действует сила

Ампера  $F=IBdl$  и две растягивающие силы  $T$  под углом  $\alpha = \frac{dl}{R}$ ,

равнодействующая которых равна  $2T \sin \frac{\alpha}{2}$ . При малых  $\alpha$  будет  $T \frac{dl}{R} = IBdl$ .

## §8. Магнитное поле в веществе

$$8.1. H(\rho) = \begin{cases} \frac{I\rho}{2\pi R_1^2}, & 0 \leq \rho \leq R_1 \\ \frac{I}{2\pi\rho}, & R_1 \leq \rho \leq R_2 \\ 0 & \rho > R_2 \end{cases}.$$

Указание: Воспользоваться теоремой о циркуляции вектора  $H$ .

$$8.2. \vec{H} = \frac{[\vec{j}, \vec{a}]}{2}, \text{ вектор } \vec{a} \text{ направлен от оси провода к оси полости.}$$

Указание: Дополнить полость "током" с плотностью  $\vec{j}$  и  $-\vec{j}$ . Воспользоваться теоремой о циркуляции вектора  $H$ .

$$8.3. B = \frac{4\pi d N \mu_1 \mu_2}{c \left( 2d\mu_1\mu_2 + \left( \frac{L}{2} - d \right) (\mu_1 + \mu_2) \right)}.$$

$$8.4. B = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2 I}{\pi r (\mu_1 + \mu_2)}. \text{ Силовые линии - окружности с центром на оси проводника.}$$

$$8.5. \vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_2(\vec{r}) = 2 \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{H}_0(\vec{r}); \quad \vec{H}_1(\vec{r}) = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{H}_0(\vec{r});$$

$$\vec{H}_2(\vec{r}) = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \vec{H}_0(\vec{r}).$$

$$8.6. \vec{B} = \vec{B}_0 \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \left( 1 - \frac{R_1^3}{R_2^3} \right) \frac{(\mu - 1)^2}{\mu}}.$$

$$8.7. f = \frac{1}{2h} \frac{(\mu - 1)}{(\mu + 1)} I^2.$$

$$8.8. B(\rho) = \begin{cases} \mu\mu_0 I \rho / 2\pi R^2, & 0 \leq \rho \leq R \\ \mu_0 I / 2\pi \rho, & \rho > R \end{cases}$$

$$8.9. \vec{B} = \vec{B}_\infty - 2\vec{B}_1 = \mu\vec{B}_0 \left( 1 - 2 \frac{(\mu - 1) r^2}{\mu l^2} \right).$$

$$8.10. \vec{B} = \vec{B}_0 \left( 1 + \frac{(\mu - 1) l}{\mu 2r} \right).$$

$$8.11. B = \frac{\mu_0 J h}{2R}.$$

$$8.12. B = \frac{1}{2} \mu_0 J_m \left( \sqrt{R^2 + l^2} - R \right) / l \approx \frac{1}{2} \mu_0 J_m (1 - R/l).$$

$$8.13. H = \frac{Q\omega}{2\pi L}, \quad B = \mu\mu_0 \frac{Q\omega}{2\pi L}.$$

$$8.14. H = \mu_0 J \left( \frac{h}{2R} - 1 \right)$$

$$8.15. \text{а) } I'_{нов} = -\chi I; \quad \text{б) } I'_{об} = \chi I.$$

§9. Магнитный поток. Индуктивность. Энергия магнитного поля.

$$9.1. L = \frac{(\mu_1 + \mu_2)\mu_0 N^2 h}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 0,47 \text{ Гн.}$$

$$9.2. L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{a} = 1,2 \text{ мкГн.}$$

$$9.3. L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 0,6 \text{ мкГн.}$$

$$9.4. 1). L = L_1 + L_2; 2). N = N_1 \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right).$$

$$9.5. L_{12} = \frac{\mu\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 6 \text{ мГн.}$$

$$9.6. L_{12} = \mu_0 N n s \approx 25 \text{ мкГн.}$$

$$9.7. L = \frac{\mu\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{(R_2 + (\mu-1)\Delta)}{(R_1 + (\mu-1)\Delta)} = 1.87 \text{ мГн.}$$

$$9.8. L_{12} = \mu_0 N n s \cos \alpha$$

$$9.9. L = \mu_0 N^2 S(l-d).$$

$$9.10. W_M = \frac{\mu\mu_0 h J^2}{4\pi} \ln \frac{R}{r} = 0,6 \text{ Дж.}$$

$$9.11. W = \frac{\mu\mu_0 N^2 h l^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 0,15 \text{ Дж.}$$

$$9.12. k = \frac{W_{\text{сол}}}{W_{\text{пр}}} = \frac{4\pi S_2 n_0^2}{\ln S_2/S_1} \approx 2700 \text{ раз.}$$

$$9.13. I_{\text{max}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,12 \text{ А.}$$

$$9.14. F = \mu_0 I_1 I_2 n_1 n_2 \pi^2 \approx 40 \text{ Н}$$

$$9.15. L = L_0 \left( 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \right).$$

§10. Закон электромагнитной индукции.

$$10.1. \Delta U = \frac{1}{2} \alpha_0^2 B d \sqrt{gl} \sin \left( 2t \sqrt{\frac{g}{l}} \right), \text{ где } g - \text{ ускорение свободного падения.}$$

$$10.2. \sigma = \epsilon_0 \nu B = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ Кл/м}^2.$$

$$10.3. L_{\text{эф}} = \frac{L}{N}.$$

$$10.4. I_2^{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{e}} \frac{\mu_0 I_0}{\pi R \tau} [h - \ln(1 + h/d)] = 3,4 \text{ мА}.$$

$$10.5. Q = \frac{\mu_0 I a}{\pi R} \ln(1 + b/c) = 1 \text{ мкКл}.$$

$$10.6. Q = \frac{\mu_0 I b \lambda s}{4\pi(a+b)} \ln\left(\frac{c+a}{c-a}\right) = 6,6 \text{ мкКл}.$$

$$10.7. Q = \frac{Ba^2}{R} (1 - 4/\pi) (<0, \text{ т.е. ток течет против направления обхода контура,}$$

соответствующего нормали, сонаправленной с вектором  $\vec{B}$ ).

$$10.8. \mathcal{E}_i = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi(c+vt)(a+c+vt)}.$$

$$10.9. \mathcal{E}_i(t) = B a b \omega \sin \omega t.$$

$$10.10. \mathcal{E}_i(t) = a b B_0 (\omega \sin \omega t \cos \Omega t + \Omega \sin \Omega t \cos \omega t).$$

$$10.11. \mathcal{E}_i = B a b \omega_0 \left(\frac{1 + \ln 2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_0 \ln 2}{2\delta}\right).$$

$$10.12. Q = \mu_0 I n S / R$$

$$10.13. Q = \mathcal{E} \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_1 R_2}.$$

$$10.14. \mathcal{E}(t) = I_0 R - I_0 \left(R - \frac{L}{\tau}\right) e^{-t/\tau}.$$

## §11. Уравнения Максвелла

$$11.1. P = \frac{\pi}{8} k^2 \lambda l R^4 = 0,94 \text{ Вт.}$$

$$11.2. P = \frac{B_0^2 \pi \omega^2 R^4 \lambda h}{4} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$11.3. \vec{B} = \frac{2k\tau}{\lambda} \left( e^{-t/\tau} - 1 \right) \vec{e}_z \quad (\text{предполагается, что токи текут в направлении, определяемом правилом буравчика относительно направления оси } Oz).$$

$$11.4. \rho(x) = -\frac{4}{9} \epsilon_0 U_0 \left( \frac{d}{x} \right)^{2/3} \frac{1}{d^2}, \quad \rho(d/2) = -25 \cdot \text{мкКл/м}^3.$$

$$11.5. j = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m} \frac{U_0^{3/2}}{d^2}} = 264 \text{ А/м}^2.$$

$$11.6. v = 2^{-2/3} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = 3,7 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$11.7. \tau = 3d \sqrt{\frac{m}{2eU_0}} = 5 \text{ нс}.$$

$$11.8. H_0 = \epsilon_0 \omega \frac{U_0 r}{2d} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}; \quad B_0 = \mu_0 H_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Тл},$$

$$H_1 = \epsilon \epsilon_0 \omega \frac{U_0 r}{2d} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}; \quad B_1 = \mu \mu_0 H_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}.$$

11.9. поток энергии равен нулю.

$$11.10. 1) j_{cm} = \frac{\partial D}{\partial t} = 0; \quad 2) j_{cm} = \frac{\partial D}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{vU}{d^2}.$$



11.12. Вне пучка  $\Pi = \frac{R^4 (ne)^2}{4\varepsilon_0 r^2} \sqrt{\frac{2W}{m}}$ , внутри пучка

$$\Pi = \frac{1}{4\varepsilon_0} r^2 (ne)^2 \sqrt{\frac{2W}{m}}, \text{ где } r - \text{ расстояние до оси пучка. Во всем}$$

пространстве вектор  $\vec{\Pi}$  сонаправлен со скоростью движения электронов.

11.13.  $B = \frac{2}{9c^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U_0^{3/2}}{d^2} r \approx 1.4 \cdot 10^{-9} \text{ Тл}.$

11.14.  $F = \frac{4}{9c^2} \frac{eU_0^2}{md^2} R.$

§12. Электрические цепи. Правила Кирхгофа.

12.1. возможны два случая 1)  $I$ ; 2)  $0,8I$ .

12.2.  $E = (E_1 r_2 + E_2 r_1) / (r_1 + r_2)$ ,  $r = r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$ .

12.3.  $R = R_2 \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_4}.$

12.4.

$$\varphi_1 = \varphi_3 + R_{13} \frac{J_1 R_{12} + (J_1 + J_2) R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} = 15B; \varphi_2 = \varphi_3 + R_{23} \frac{J_2 R_{12} + (J_1 + J_2) R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} = 12B$$

12.5.  $R_{\text{общ}} = Rr(3R+r)/(R^2+6Rr+r^2).$

12.6.  $\varphi_{AB} = 0$

12.7.  $I_{E1} = 10A, I_{E2} = 5A, I_{E3} = 1A, I_{E4} = 3A, I_{r5} = 4A, I_{r2} = 2A.$

12.8.  $I = \frac{r_2 E_1 + r_1 E_2 + (r_1 + r_2) E_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 + R(r_1 + r_2)} = 2A.$

12.9.

$$\varphi_A = \frac{E_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + E_1 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}, \varphi_B = E_2, \varphi_C = \frac{E_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - E_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

$$12.10. r_{\text{экв}} = r + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad E_{\text{экв}} = E_2 \frac{r_2}{r_1 + r_2} + E_1 \frac{r_1 - 2r_2}{r_1 + r_2}$$

$$12.11. I_{AB} = \frac{R(E_1 - E_2 + E_3) + 3rE_1}{3r(R+r)} = 3A.$$

12.12.  $E_2 = 7B$ ,  $E_3$  может иметь любое значение.

$$12.13. I_R(t) = \frac{E}{R\omega} \exp(-\delta t) [\delta \sin \omega t - \omega \cos \omega t], \text{ где}$$

$$\delta = \frac{1}{2RC}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{4R^2 C^2}}.$$

$$12.14. U_C = E/3.$$

$$12.15. Q(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} CE$$

$$12.16. U_L(t) = (E_2 - E_1) \exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

$$12.17. U_1(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} \exp\left(-\frac{3}{2RC}t\right) \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right) - \exp\left(-\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right) \right]$$

$$U_2(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} \exp\left(-\frac{3}{2RC}t\right) \left[ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \exp\left(\frac{\sqrt{5}2RC}{2}t\right) + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right) \right]$$

$$12.18. U(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{C} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) t \right) \right]$$

$$12.19. \tau = \frac{2RC}{\sqrt{5}} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,86RC$$

$$12.20. U_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{rC}\right).$$

$$12.21. U_L(t) = \frac{2}{3} E \exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

$$12.22. R < \sqrt{\frac{L}{2C}}.$$

$$12.23. \alpha = \operatorname{arctg}(\omega rC)$$

$$12.24. I(t) = \frac{E}{6R} \left[ 3 - 2 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) - \exp\left(-\frac{4R}{L}t\right) \right].$$

$$12.25. U(t) = E - \frac{E}{4} \exp\left(-\frac{3}{RC}t\right) \left[ (2 + \sqrt{2}) \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{RC}t\right) + (2 - \sqrt{2}) \exp\left(\frac{2\sqrt{2}}{RC}t\right) \right]$$

$$12.26. \text{a) } U(t) = \frac{E}{2} \exp\left(-\frac{t}{3RC}\right), \quad \text{б) } U(t) = 0.$$

$$12.27. t = \frac{6}{5} RC \ln 6.$$

$$12.28. I(t) = \frac{E}{4R} \left[ \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \frac{3}{7} \exp\left(-\frac{11}{7RC}t\right) \right].$$

12.29.

$$I(t) = \frac{E}{\sqrt{4r^2 + R^2}} \exp\left(-\frac{2r + R}{2L}t\right) \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{4r^2 + R^2}}{2L}t\right) - \exp\left(-\frac{\sqrt{4r^2 + R^2}}{2L}t\right) \right].$$

$$12.30. I(t) = \frac{E}{R_2} \left[ 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{R_2}{L}t\right) \right].$$

$$12.31. I_R = \frac{E_0 \omega C_1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 (C_1 + C_2)^2}} \cos \left( \omega t + \arctg \frac{1}{\omega R (C_1 + C_2)} \right),$$

$$I_{C_1} = \frac{E_0 \omega C_1 \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C_2^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 (C_1 + C_2)^2}} \cos \left( \omega t + \arctg \frac{\omega R C_2 (C_1 + C_2)}{C_1} \right).$$

$$12.32. 1) \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad r \text{ любое}, \quad 2) r = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \omega \text{ любая}.$$

$$12.33. V = U_0 \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L + 1/\omega C)^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

$$12.34. W = 0$$

$$12.35. C = \frac{1}{\omega^2 L}, \quad W = \frac{U_0^2}{2R} \cdot \frac{2R^2 + \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

$$12.36. \varphi = \arctg \frac{\omega(L - R^2 C)}{R(1 + \omega^2 LC)}$$

$$12.37. \varphi = \arctg \frac{R(1 + \omega^2 LC)}{\omega(L - R^2 C)}$$

$$12.38. \varphi = \arctg \frac{2\omega r C}{\omega^2 r^2 C^2 - 1}$$

$$12.39. \psi = \pi - \varphi$$

$$12.40. L_1 = L_0 + L_2, \quad L_3 = (L_0 + L_2) \frac{L_0}{L_2}, \quad C_3 = C_2 \left( \frac{L_2}{L_0 + L_2} \right)^2.$$

$$12.41. I = I_0 \exp\left(-\frac{rt}{L}\right), \text{ где } I_0 = \frac{E}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\psi - \varphi),$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r + r_0}.$$

$$12.42. \varphi = \operatorname{arctg} \frac{r(1 - \omega^2 LC)}{\omega(r^2 C + L)},$$

$$12.43. \varphi_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{n-1}{2\sqrt{n}} \text{ при } \omega = \frac{r}{L} \sqrt{n}$$

$$12.44. \varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}$$

$$45. W = \frac{U_0^2 C}{8L} \frac{\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|} \text{ при } R = \frac{2\omega L}{|1 - \omega^2 LC|}.$$

$$12.46. W = \frac{E_0^2 (R_1 + R_2 + \omega^2 R_1^2 R_2 C^2)}{\left[ (R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2 \right]}.$$

$$12.47. \operatorname{tg} \varphi = \frac{6\omega^2 LC - \omega^2 R^2 C^2 - 3}{2\omega RC(\omega^2 LC + 1)}$$

12.48.

$$E(t) = I_0 \left[ R_1 (1 - \omega^2 L_2 C) + R_2 (1 - \omega^2 L_1 C) \right] \cos \omega t - I_0 \left[ \omega C (R_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2) + \omega (L_1 + L_2) \right] \sin \omega t$$

$$12.49. \varphi = -\operatorname{arctg} \omega RC$$

## §13. Электромагнитные волны

$$13.1. E_{\perp}(r, \theta, t) = -\frac{q x_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \theta \cos(\omega t - kr).$$

$$13.2. P = \frac{\pi}{2} \mu_0 c_0 H_0^2 R^2.$$

$$13.3. P = \frac{\pi}{4} a^2 \epsilon_0 c_0 E_0^2.$$

$$13.4. (1) x(t) = \frac{\alpha E_0}{\omega^2} [\cos \varphi - \cos(\omega t + \varphi)] - \frac{\alpha E_0}{\omega} \sin \varphi \cdot t, \text{ где } \alpha = -1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг} -$$

удельный заряд электрона;

$$(2) \quad \frac{E_0}{\omega} \ll \left| \frac{c_0}{\alpha} \right| \sim 10^{-3} \text{ (В·с)/м}$$

$$13.5. \mathcal{E}_i(t) = 4aE_0 \sin \pi \frac{a}{\lambda} \sin \left( 2\pi \frac{c_0 t}{\lambda} + \varphi_0 \right), \text{ где } \varphi_0 - \text{ начальная фаза волны}$$

относительно рамки.

$$13.6. I_R = I_0 \left[ \frac{\operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} \right]^2, \quad I_T = I_0 \frac{n_2}{n_1} \frac{4 \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) \sin^2(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\text{где } \theta_2 = \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right).$$

## §14. Задачи повышенной трудности

$$14.1. \omega^2 = \frac{4Qp}{\pi \varepsilon_0 3^{5/2} m R^4}$$

$$14.2. \omega^2 = \frac{k}{2m}$$

$$14.3. M = \frac{\varepsilon_0 (1 - \varepsilon) R^2 V^2}{4d}$$

$$14.4. V = \sqrt{\frac{2Mgd}{\varepsilon_0 l}} = 4,75 \text{ кВ}$$

$$14.5. T = 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0 dm}{p\rho_0}}$$

$$14.6. F = \frac{Q}{16\pi \varepsilon_0 R^2} \left( q + \frac{Q}{2} \right)$$

$$14.7. a = \frac{H_1 H_2 - h_1^2}{H_1 + H_2 - 2h_1}, \quad q = a \sqrt{4\pi \varepsilon_0 mg}$$

$$14.8. p = \mu_0 I^2 n^2.$$

$$14.9. B = \mu_0 \omega k r^2.$$

$$14.10. L = \frac{2Fl}{(\mu - 1)I^2} = 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$14.11. \frac{F_1}{F_2} = \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu} \right)^2 \left[ \frac{R + 2h + l + 2a}{\mu_2 (\pi R + 2h) + \mu_1 (2a + l)} \right]^2$$

$$14.12. n(r) = \frac{(1+q)}{\mu_0 e v R} B_0 \left( \frac{r}{R} \right)^{q-1}; \quad E(r) = \frac{1}{v} B_0 \left( \frac{r}{R} \right)^q, \quad \text{где } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \text{ -- скорость}$$

электронов.

$$14.13. W = \frac{\pi R^2 \rho^2 l^3}{6\epsilon_0}$$

$$14.14. v = \frac{\rho_0 d}{2} \sqrt{\frac{3}{\epsilon_0 \rho_m}}$$

$$14.15. T = \frac{2\pi}{\rho_0} \sqrt{\frac{2\rho_m(\epsilon+2)}{3(\epsilon-1)}}$$

$$14.16. F = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{R_1}{R} \right), \quad R_1 = \frac{1}{2} R.$$

$$14.17. p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{32\epsilon_0 \pi^2 R^4}$$

$$14.18. a = \frac{H_1 H_2 - h_1^2}{H_1 + H_2 - 2h_1}$$

$$14.19. I_0 = \frac{L}{N} \left( H_{нас} + J_{нас} \frac{l}{L} \right), \quad B = \frac{\mu_0 N I}{L} + I_{нас} \mu_0 \left( 1 - \frac{l}{L} \right).$$

14.20.  $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$ , направлено перпендикулярно плоскости тора. С шариком появляется дополнительная составляющая, лежащая в плоскости тора

$$B_1 = \mu_0 \frac{IN}{\pi R} \left( \frac{r_0}{R} \right)^3.$$

$$14.21. \Delta L = -\frac{\mu_0 \pi R^4}{16 h^3} = -2,5 \cdot 10^{-12} \text{ Гн}$$

$$14.22. v(t) = \frac{mgR}{(Bl)^2} \left[ 1 - e^{-\frac{(Bl)^2}{mR} t} \right].$$



$$14.23. \quad x(t) = \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \quad \omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}.$$

$$14.24. \quad \Delta L = \frac{3}{2} \mu_0 V n^2 \frac{\mu - 1}{\mu + 2}$$

$$14.25. \quad \Delta L = -\frac{\mu_0 \pi R^4}{32 h^3} = -1,2 \cdot 10^{-12} \text{ Гн}$$

$$14.26. \quad I(t) = \mu_0 \frac{P_m a^2 \omega}{2Rl^3} \sin \omega t$$

### Формулы векторного анализа.

В данном пособии приняты следующие обозначения:

скалярное произведение  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $\vec{a} \vec{b}$ ;

векторное произведение  $[\vec{a}, \vec{b}]$ ,  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

Во всех формулах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  – векторные функции координат,  $\vec{p}$  – постоянный вектор,  $\varphi$ ,  $\psi$  – скалярные функции координат.

$$1. \text{ Смешанное произведение: } (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]) = (\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]).$$

$$\text{Двойное векторное произведение: } [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a}, \vec{b}).$$

$$\text{Дифференциалы: } d(\vec{a}, \vec{b}) = (d\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, d\vec{b}); \quad d[\vec{a}, \vec{b}] = [d\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, d\vec{b}].$$

$$2. \text{ Оператор Гамильтона (оператор "набла"): } \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$(\vec{a}, \vec{\nabla}) \equiv a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad \vec{\nabla} \varphi = \text{grad } \varphi;$$

$$\text{div } \vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}); \quad \text{rot } \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}].$$

$$3. \text{ div rot } \vec{a} = 0; \quad \text{rot grad } \varphi = 0;$$

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi;$$

$$\text{grad}(\varphi \cdot \psi) = \psi \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ grad } \psi;$$

$$\text{div}(\varphi \vec{a}) = (\text{grad } \varphi, \vec{a}) + \varphi \text{ div } \vec{a};$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{ rot } \vec{a} - [\vec{a}, \nabla \varphi];$$

$$\text{div}(\varphi \text{ grad } \psi) = \varphi \Delta \psi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi);$$

$$\text{div}(\varphi(r) \cdot \vec{r}) = \varphi'(r) r + 3\varphi(r);$$

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b});$$

$$\operatorname{rot}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a}, \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{a} \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{div} \vec{a};$$

$$\operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = [\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}] + [\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b}] + (\vec{a}, \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b}, \vec{\nabla}) \vec{a};$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = -\Delta \vec{a} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a}.$$

4. Если  $\vec{r}$  – радиус-вектор, то:  $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ ;  $\operatorname{rot} \vec{r} = 0$ ;

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}; \quad \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3};$$

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{2}{r}; \quad \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0;$$

$$\operatorname{div}[\vec{p}, [\vec{r}, \vec{a}]] = 2(\vec{p}, \vec{a});$$

$$\operatorname{grad} \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} = \frac{\vec{p}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5};$$

$$\operatorname{rot} \frac{[\vec{p}, \vec{r}]}{r^3} = -\operatorname{grad} \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} = \frac{3(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\operatorname{grad} \frac{(\vec{a}, \vec{r})}{r^3} = \frac{1}{r^3} \operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{r}) - 3 \frac{(\vec{a}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5};$$

$$\operatorname{grad}(\vec{p}, \vec{r}) = \vec{p}; \quad \operatorname{grad} f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r};$$

$$[\operatorname{grad} f(r), \vec{r}] = 0;$$

$$\operatorname{rot} [\vec{p}, f(r) \vec{r}] = 2f(r) \vec{p} + \frac{f'(r)}{r} [\vec{r}, [\vec{p}, \vec{r}]];$$

$$\operatorname{rot} [\vec{p}, \vec{r}] = 2\vec{p}; \quad \operatorname{rot}(\vec{p} f(r)) = f'(r) \frac{[\vec{r}, \vec{p}]}{r};$$

$$\operatorname{rot}(\vec{p} r^n) = n r^{n-2} [\vec{r}, \vec{p}]; \quad \operatorname{rot}(\vec{p} r) = \frac{[\vec{r}, \vec{p}]}{r};$$

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\vec{p}}{r} \right) = \frac{[\vec{p}, \vec{r}]}{r^3};$$

$$\operatorname{rot} (f \vec{a}) = f \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} f, \vec{a}]; \quad \operatorname{rot} (f(r) \cdot \vec{r}) = 0;$$

## 5. Интегральные теоремы

### 5.1. Формула Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S \vec{a} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV,$$

где  $S$  – кусочно-гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ , векторное поле  $\vec{a}$  непрерывно дифференцируемо в области  $V + S$ ,  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности  $S$ ,  $\vec{a} d\vec{S} = (\vec{a} \vec{n}) dS = a_n dS$ .

Частные случаи:

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta \varphi dV,$$

$$\iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iiint_V \varphi \Delta \varphi dV + \iiint_V (\vec{\nabla} \varphi, \vec{\nabla} \varphi) dV,$$

$\varphi$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция в области  $V + S$ .

Следствия: 
$$\iint_S \vec{n} \varphi dS = \iiint_V \nabla \varphi dV; \quad \oint_L \varphi d\vec{l} = \iint_S [\vec{n}, \nabla \varphi] dS.$$

**5.2. Формула Стокса.** Если векторное поле  $\vec{a}$  непрерывно дифференцируемо в односвязной области  $D$ , а  $S$  – произвольная кусочно-гладкая поверхность в  $D$ , ограниченная контуром  $L$ , то

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{l}) = \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S},$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор положительной нормали к  $S$ , т.е. той, из конца которой обход по контуру  $L$  виден совершающимся против часовой стрелки.

**5.3. Формулы Грина:**

1) на плоскости:

$$\iint_S (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dS = \oint_L \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dl,$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к гладкому контуру  $L$ , ограничивающему конечную область  $S$ ;

2) в пространстве:

$$\iiint_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV = \iint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS,$$

$$\iiint_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \iint_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  – дважды дифференцируемые в области  $V + S$  функции.

**5.4.**

$$\text{grad}_r \left( \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \iint_S \rho(\vec{r}') \frac{d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \iiint_V \text{grad}_{r'} \rho(\vec{r}') \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

при  $\rho \equiv 1$ : 
$$\iint_S \frac{d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \text{grad} \left( \iiint_V \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right).$$

6. Векторное поле называется **потенциальным** в некоторой области, если работа его не зависит от формы траектории, принадлежащей этой области, а зависит только от положения начальной и конечной точек. Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля  $\vec{a}$  в односвязной области может быть записано в одной из форм:

- 1) циркуляция по любому замкнутому контуру в этой области равна нулю;
- 2) существует скалярная функция координат  $\varphi$  такая, что  $\vec{a} = \text{grad} \varphi$  ( $\varphi$  называется **потенциалом** векторного поля  $\vec{a}$ );
- 3)  $\text{rot} \vec{a} = 0$ .

Векторное поле называется *соленоидальным*, если  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ . Для соленоидального поля существует *векторный потенциал*: такое поле  $\vec{c}$ , что  $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{c}$ .

Любое векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального:  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ , где  $\operatorname{rot} \vec{b} = 0$  и  $\operatorname{div} \vec{c} = 0$ , причем  $\vec{b}$  определяется с точностью до градиента некоторой функции, а  $\vec{c}$  – с точностью до ротора некоторого векторного поля.

Решение уравнения Пуассона  $\Delta \varphi = f$ ,  $\varphi_\infty = 0$ :

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Решение волнового уравнения  $\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f$ ,  $\varphi_\infty = 0$  ( $c = \text{const}$ ):

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(r', t')}{r_{12}} dV_2,$$

где  $t' = t - \frac{r_{12}}{c}$ .

## 7. Часто встречающиеся интегралы.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left( \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2a}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right);$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}; \quad \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}};$$

$$I(n) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{(a^2 + z^2 - 2azt)^{n/2}} = \frac{1}{az(n-2)} \left[ |a-z|^{2-n} - |a+z|^{2-n} \right].$$

<b>Декартова система координат</b> $(x, y, z)$ $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$
<b>Элемент дуги</b> $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$
<b>Элемент объема</b> $dV = dx dy dz$
<b>Единичные векторы вдоль координатных линий</b> $\vec{e}_x = \vec{i}, \quad \vec{e}_y = \vec{j}, \quad \vec{e}_z = \vec{k}$
<b>Градиент скалярного поля</b> $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$
<b>Дивергенция векторного поля</b> $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
<b>Оператор Лапласа</b> $\Delta f = \text{div grad } f$ $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
<b>Некоторые частные решения уравнения Лапласа</b> $\Delta f = 0$ : $f = e^{k_1 x + k_2 y + k_3 z}, k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$ ; $f = (a + bx)e^{k_2 y + k_3 z}, k_2^2 + k_3^2 = 0$ ; $f = (a + bx)(c + dy)(m + nz)$
$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$
<b>Элементарная работа векторного поля</b> $\Delta A = (\vec{a} d\vec{l})$ $A = a_x dx + a_y dy + a_z dz$
<b>Поток векторного поля</b> $\Phi = \iint_S \vec{a} d\vec{S} = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS =$ $= \iint_S a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$

<p><b>Цилиндрическая система координат</b> <math>(\rho, \varphi, z)</math>  <math>\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z</math>; <math>x = \rho \cos \varphi</math>, <math>y = \rho \sin \varphi</math>, <math>z = z</math></p>
<p>Элемент дуги <math>(dl)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2</math></p>
<p>Элемент объема <math>dV = \rho d\rho d\varphi dz</math></p>
<p><b>Единичные векторы вдоль координатных линий</b>  <math>\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}</math>, <math>\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}</math>, <math>\vec{e}_z = \vec{k}</math></p>
<p>Градиент скалярного поля <math>grad f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z</math></p>
<p>Дивергенция векторного поля <math>div \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}</math></p>
<p><b>Оператор Лапласа</b>  <math>\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}</math></p>
<p><b>Некоторые частные решения уравнения Лапласа <math>\Delta f = 0</math>:</b>  <math>f \propto \ln \frac{\rho}{R}</math> (поле заряженной нити)</p>
$rot \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$
<p><b>Элементарная работа векторного поля</b> <math>\Delta A = (\vec{a} d\vec{l})</math>  <math>\Delta A = a_\rho d\rho + \rho a_\varphi d\varphi + a_z dz</math></p>
<p><b>Поток векторного поля</b> <math>\Phi = \iint_S \vec{a} d\vec{S} = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS =</math>  <math>= \iint_S a_\rho \rho d\varphi dz + a_\varphi d\rho dz + a_z \rho d\rho d\varphi</math></p>



<p><b>Сферическая система координат</b> <math>(r, \vartheta, \varphi)</math> <math>\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\vartheta \vec{e}_\vartheta + a_\varphi \vec{e}_\varphi</math>;  <math>x = r \sin \vartheta \cos \varphi, y = r \sin \vartheta \sin \varphi, z = r \cos \vartheta</math></p>
<p><b>Элемент дуги</b> <math>(dl)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2</math></p>
<p><b>Элемент объема</b> <math>dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi</math></p>
<p><b>Единичные векторы вдоль координатных линий</b>  <math>\vec{e}_r = \cos \varphi \sin \vartheta \vec{i} + \sin \varphi \sin \vartheta \vec{j} + \cos \vartheta \vec{k}</math>,  <math>\vec{e}_\vartheta = \cos \varphi \cos \vartheta \vec{i} + \sin \varphi \cos \vartheta \vec{j} - \sin \vartheta \vec{k}</math>, <math>\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}</math></p>
<p><b>Градиент скалярного поля</b> <math>\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi</math></p>
<p><b>Дивергенция векторного поля</b>  <math>\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}</math></p>
<p><b>Оператор Лапласа</b> <math>\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}</math></p>
<p><b>Некоторые частные решения уравнения Лапласа</b> <math>\Delta f = 0</math> :  <math>f \propto \frac{1}{r}</math> (поле точечного заряда); <math>f \propto \frac{(\vec{p}; \vec{r})}{r^3} = \frac{p \cos \vartheta}{r^2}</math> (поле диполя);  <math>f \propto p r \cos \vartheta = p z</math> (однородное поле)</p>
<p><math>\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \vec{e}_r &amp; \frac{1}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\vartheta &amp; \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} &amp; \frac{\partial}{\partial \vartheta} &amp; \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r &amp; r a_\vartheta &amp; r \sin \vartheta a_\varphi \end{vmatrix}</math></p>
<p><b>Элементарная работа векторного поля</b> <math>\Delta A = (\vec{a} d\vec{l})</math>  <math>\Delta A = a_r dr + a_\vartheta r \sin \vartheta d\vartheta + r a_\varphi d\varphi</math></p>
<p><b>Поток векторного поля</b> <math>\Phi = \iint_S \vec{a} d\vec{S} = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS =</math>  <math>= \iint_S r^2 a_r \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + r a_\vartheta dr d\vartheta + r \sin \vartheta a_\varphi dr d\varphi</math></p>



**Литература**

1. С.Г. Калашников. Электричество. М.: Наука, 1985.
2. А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа", 1986.
3. И. В. Савельев. Курс общей физики. Том II. Электричество. М.: Наука, 1964.
- 4.3. Парселл. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1971.
- 5.И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 1973.
7. Л.И. Антонов, Л.Г. Деденко, А.Н. Матвеев. Методика решения задач по электричеству. М.: Изд-во МГУ, 1982.
8. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. М: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
9. С.М. Козел, В.Г. Лейман, Г.Р. Локшин, В.А. Овчинкин, Э.В. Прут. Сборник задач по общему курсу физики. Ч.2. Электричество и магнетизм. Оптика. М: Изд-во МФТИ, 2000.
10. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм. под ред. И.А. Яковлева. М: Наука, 1977.
11. Е.И. Бабаджан, В.И. Гервидс, В.М. Дубовик, Э.А. Нерсесов. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. М: Наука, 1990.
12. Н.Н. Взоров, О.И. Замша, И.Е. Иродов, И.В. Савельев. Сборник задач по общей физике. М: Наука, 1968.
- 13.Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. М: Мир, 1978.