$$G_{\text{II}}(x;\xi;t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)$$

$\Phi(x)=\mathrm{erf}(x)$ – интеграл ошибок, возникает при интегр. в формуле решения

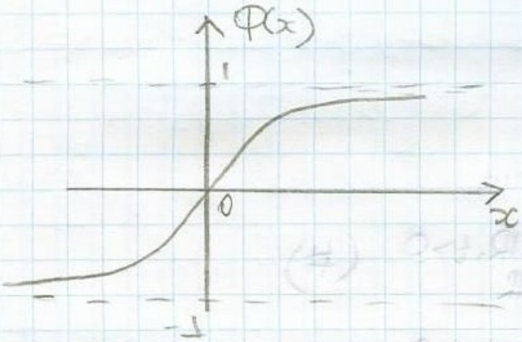
Функция ошибок (интеграл вероятности)

$$\Phi(x)=\mathrm{erf}\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(x),\quad \Phi(0)=0,\ \Phi(+\infty)=1,\ \Phi(-\infty)=-1$$

$\mathrm{erf}(-x)=-\mathrm{erf}\,x$ {нередко для решения этих задач удаётся избежать вычисления интеграла Пуассона (через подбор частного реш-я) и инт. ошибок (через заранее изв. частные реш.)}

$$\frac{d}{dx}\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$



Теорема. Если $V(x;t)$ явл. реш. уравн-я $U_t=U_{xx}$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, то

$$\omega(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha t}}e^{\frac{-\alpha x^2}{1+4\alpha t}}V\left(\frac{x}{1+4\alpha t};\frac{t}{1+4\alpha t}\right)\ \text{при } \alpha>0-\text{const}$$

также является реш. этого ур-я

в среду!

Упр. $U'_t=a^2U_{xx}\Rightarrow$ вывести $\omega(x,t)$ в Кирилове + светлая книга Орлик, Захаров

→ белая методичка

(28) | класс. зад

$$\begin{cases} U_t=a^2U_{xx},\ x\in\mathbb{R},\ t>0\\ U(x;0)=\begin{cases}U_1, & x<0\\ U_2, & x\geq 0\end{cases}\\ U_1, U_2-\text{const}\end{cases}$$

$$U(x;t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi=\frac{U_1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+$$

$$+\frac{U_2}{\sqrt{4\pi a^2t}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\left\{\begin{array}{l}\alpha=\frac{\xi-x}{\sqrt{4a^2t}},\ \text{т.е. } \xi=x+\alpha\sqrt{4a^2t},\ d\xi=\sqrt{4a^2t}\,d\alpha\\ \text{Если } \xi=-\infty,\ \alpha=-\infty;\ \xi=+\infty,\ \alpha=+\infty\\ \xi=0,\ \alpha=\alpha_0=\frac{-x}{\sqrt{4a^2t}}\end{array}\right\}=$$

$$= \frac{u_1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\alpha_0} e^{-\alpha^2} \sqrt{4a^2t}\, d\alpha + \frac{u_2}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{\alpha_0}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \sqrt{4a^2 t}\, d\alpha = \frac{u_1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha - \right.$$

$$\left. - \int_{\alpha_0}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha \right) + \frac{u_2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha - \int_{0}^{\alpha_0} e^{-\alpha^2} d\alpha \right) = \frac{u_1}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \left(-\Phi(-\infty) + \Phi(\alpha_0) \right) \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2} +$$

$$+ \frac{u_2}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \left(\Phi(+\infty) - \Phi(\alpha_0) \right) \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \Phi(\alpha_0) = \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \cdot$$

$\cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)$ – в ответ

(2) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x;0) = \cos x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

=> II задачи (неодн. ур-е; одн. усл.
одн. ур-е; неодн. усл.)

I $\begin{cases} V_t = V_{xx} + e^{-t}\cos x, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ V(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

II $\begin{cases} \omega_t = \omega_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \omega(x,0) = \cos x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

(I)

$V(x,t) = \varphi(t)\cos x, \; x \in \mathbb{R}, t > 0$

$V_t = \varphi' \cancel{\cos x} = V_{xx} = \varphi(t)(\cancel{-\cos x}) + e^{-t}\cancel{\cos x}$

$\varphi(0)\cancel{\cos x} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi' + \varphi = e^{-t} \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(t) = te^{-t}$ – сразу знаем

$V(x,t) = te^{-t}\cos x$

(II) $\omega(x;t) = \psi(t)\cos x$ пробуем искать в данном виде

$\begin{cases} \psi'(t)\cancel{\cos x} = (-\psi(t)\cancel{\cos x}) \\ \psi(0)\cancel{\cos x} = \cancel{\cos x} \end{cases}$

$\begin{cases} \psi'(t) = -\psi(t) \\ \psi(0) = 1 \end{cases}$ $\quad \omega(x;t) = e^{-t}\cos x$ – сразу знаем

Собираем рез-т: $\boxed{u(x,t) = e^{-t}(1+t)\cos x}$

(3) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x;0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\begin{cases} V_t = V_{xx} + \sin t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ V(x;0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\begin{cases} \omega_t = \omega_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \omega(x;0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad$ неодн. ч. зав. только от t

$V(x,t)$ ищем в виде $V(t)$

$\begin{cases} V'_t = \sin t \\ V(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow V(x,t) = 1 - \cos t$

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\alpha t+1}}e^{-\frac{\alpha x^2}{1+4\alpha t}},\ \alpha>0-const$$

т.к. $w_0(x,t)=1$ яв. реш.,
(const яв. реш!)

Подставляя в усл. для $w(x,0)$, находим:

$$e^{-\alpha x^2}=e^{-x^2},\ \alpha=1$$

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$$

Общее решение - сумма $w(x,t)$ и $V(x,t)$

$$\boxed{U(x,t)=1-\cos t+\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}$$

$x\in\mathbb{R},\ t\geq 0.$

Метод продолжений

(21)

$$\begin{cases} U_t=a^2U_{xx},\ x>0,\ t>0\\ U(x,0)=0,\ x\geq 0\\ U(0,t)=U_0-const,\ t\geq 0\end{cases}$$

1) Обнуляем КУ:

$$U(x,t)=V(x,t)+U_0$$

$$\begin{cases} V_t=a^2V_{xx},\ x>0,\ t>0\\ V(x,0)=-U_0,\ x\geq 0\\ V(0,t)=0\ ,\ t\geq 0\end{cases}$$

КУ I рода требует нечётное прод-е

$$\varphi(x)=\begin{cases}-U_0,\ x\geq 0 & \{U_2\}\\ U_0,\ x<0 & \{U_1\}\end{cases}$$

$$V(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi$$

$=\{$ Из пред. задачи знаем реш.: $\frac{U_1+U_2}{2}+\frac{U_2-U_1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)\}=$

$$=\frac{\cancel{-U_0+U_0}}{2}+\frac{-U_0-U_0}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)=-U_0\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)$$

$$U(x,t)=U_0-U_0\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)$$

Д/з. решаем зад. т. 3,4,5!

2 сем.: конс., далее ⩸ Чр!

Тема 1

① $u_{xx} - y u_{yy} = 0$

$A=1,\ B=0,\ C=-y$

$\delta = y$

1) $y>0 \Rightarrow$ гипербол.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y}$$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \Rightarrow x \pm 2\sqrt{y} = C \Rightarrow \begin{cases} \xi = x + 2\sqrt{y} \\ \eta = x - 2\sqrt{y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\xi+\eta}{2} = x \\ \frac{\xi-\eta}{2\cdot 2} = \sqrt{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_x = 1 & \eta_x = 1 \\ \xi_y = \frac{1}{\sqrt{y}} & \eta_y = \frac{-1}{\sqrt{y}} \end{cases}$$

Подстановка:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{\sqrt{y}}(u_\xi - u_\eta)$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{2y^{3/2}}(u_\xi - u_\eta) + \frac{1}{y}(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

$$\cancel{u_{\xi\xi}} + 2u_{\xi\eta} \cancel{+ u_{\eta\eta}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}(u_\xi - u_\eta) \cancel{- u_{\xi\xi}} + 2u_{\xi\eta} \cancel{- u_{\eta\eta}} = 0$$

$$2\cdot 2u_{\xi\eta} = \frac{1}{2\sqrt{y}}(u_\eta - u_\xi)$$

$$2u_{\xi\eta} = \frac{1}{4\sqrt{y}}(u_\eta - u_\xi) = \frac{-u_\eta + u_\xi}{\xi - \eta} \Rightarrow u_{\xi\eta} = \frac{u_\xi - u_\eta}{2(\xi-\eta)}$$

2) $y<0 \Rightarrow$ эллиптич.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{-y}$$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{-y}} = i\,dx$$

$$\pm ix - 2\sqrt{-y} = C \Rightarrow \begin{cases} \xi = \mathrm{Re}(2\sqrt{-y} \pm ix) = -2\sqrt{-y} \\ \eta = \mathrm{Im}(-2\sqrt{-y} \pm ix) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_y = \frac{1}{\sqrt{-y}} & \xi_x = 0 \\ \eta_y = 0 & \eta_x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\eta \\ &u_{xx} = u_{\eta\eta} \\ &u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{\sqrt{-y}} u_\xi \\ &u_{yy} = +\frac{1}{2(-y)^{3/2}} u_\xi + \frac{1}{(-y)} u_{\xi\xi} \end{aligned}$$

Подстановка:

$$U_{\eta\eta}-\frac{1}{2\sqrt{-y}}U_\xi-U_{\xi\xi}=0$$

$$U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}=\frac{1}{2\sqrt{-y}}U_\xi=\frac{-U_\xi}{\xi}$$

$$\boxed{U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}=\frac{-U_\xi}{\xi}}$$

3) $y=0 \Rightarrow$ параболич.

$U_{xx}=0$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$

$\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow \quad y=C$

$\begin{cases}\xi=y\\ \eta=x\end{cases}$ $\begin{cases}\xi_x=0 & \xi_y=1\\ \eta_x=1 & \eta_y=0\end{cases}$

$U_x=U_\eta$
$U_{xx}=U_{\eta\eta}$

$\Rightarrow \boxed{U_{\eta\eta}=0}$

(19) $U_{xx}+2U_{xy}+U_{yy}+U_x+U_y+U=0$

$A=1,\ B=1,\ C=1$
$\delta=B^2-AC=0 \Rightarrow$ параболич.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+1=0$

$\frac{dy}{dx}=1; \quad dy=dx; \quad -y+x=C$

$\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=x+y\end{cases}$ ЛНЗ: $\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq0$

$\begin{cases}\frac{\xi+\eta}{2}=x\\ \frac{\eta-\xi}{2}=y\end{cases}$ $\begin{cases}\xi_x=1 & \xi_y=-1\\ \eta_x=1 & \eta_y=1\end{cases}$

$U_x=U_\xi\xi_x+U_\eta\eta_x=U_\xi+U_\eta$ $\quad U_{xy}=U_{yx}=-U_{\xi\xi}-\cancel{U_{\xi\eta}}+U_{\eta\eta}+\cancel{U_{\xi\eta}}$

$U_y=U_\xi\xi_y+U_\eta\eta_y=U_\eta-U_\xi$

$U_{xx}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}$

$U_{yy}=U_{\eta\eta}-2U_{\xi\eta}+U_{\xi\xi}$

$\cancel{U_{\xi\xi}}\cancel{+2U_{\xi\eta}}+U_{\eta\eta}+2U_{\eta\eta}\cancel{-2U_{\xi\xi}}+U_{\eta\eta}\cancel{-2U_{\xi\eta}}\cancel{+U_{\xi\xi}}\cancel{+U_\xi}\cancel{+U_\eta}+U_\eta\cancel{-U_\xi}+U=0$

$-4U_{\eta\eta}=2U_\eta+U$

$$\boxed{U_{\eta\eta}=-\frac{U_\eta}{2}-\frac{U}{4}}$$

(24) $U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+6U_x-2U_y+U=0$

$A=1,\ B=-1,\ C=1$

$\delta=B^2-AC=0 \Rightarrow$ параб.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-1$$

$y+x=c \Rightarrow \begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases} \leftarrow$ ЛНЗ (см. №19) $\begin{cases}\xi_x=1 & \xi_y=1\\ \eta_x=1 & \eta_y=-1\end{cases}$

$U_x=U_\xi\xi_x+U_\eta\eta_x=U_\xi+U_\eta$

$U_y=U_\xi\xi_y+U_\eta\eta_y=U_\xi-U_\eta$

$U_{xx}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}$

$U_{yy}=U_{\xi\xi}-2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}$

$U_{xy}=\frac{\partial}{\partial\xi}(U_\xi+U_\eta)\xi_y+\frac{\partial}{\partial\eta}(U_\xi+U_\eta)\eta_y=\cancel{U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}}$

$=(U_{\xi\xi}+U_{\xi\eta})\cdot 1+(U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta})(-1)=U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}$

Подстановка: $\cancel{U_{\xi\xi}}\cancel{+2U_{\xi\eta}}+U_{\eta\eta}\cancel{-2U_{\xi\xi}}+2U_{\eta\eta}\cancel{+U_{\xi\xi}}\cancel{-2U_{\xi\eta}}+U_{\eta\eta}+$
$+6U_\xi+6U_\eta-2U_\xi+2U_\eta+U=0$

$4U_{\eta\eta}+6U_\xi+6U_\eta-2U_\xi+2U_\eta+U=0$

$U_{\eta\eta}+U_\xi+2U_\eta+\frac{1}{4}U=0$

Заменой $U=e^{\alpha\xi+\beta\eta}V$ можно убрать U_ξ, U_η

$U_\xi=V\alpha e^{\alpha\xi+\beta\eta}+e^{\alpha\xi+\beta\eta}V_\xi=e^{\alpha\xi+\beta\eta}(V\alpha+V_\xi)$

$U_\eta=V\beta e^{\alpha\xi+\beta\eta}+e^{\alpha\xi+\beta\eta}V_\eta=e^{\alpha\xi+\beta\eta}(V\beta+V_\eta)$

$U_{\xi\xi}=$ /не надо считать/

$U_{\eta\eta}=V\beta^2e^{\alpha\xi+\beta\eta}+e^{\alpha\xi+\beta\eta}\beta V_\eta+e^{\alpha\xi+\beta\eta}V_{\eta\eta}=e^{\alpha\xi+\beta\eta}(V\beta^2+\beta V_\eta+V_{\eta\eta})$

Подстановка:

$\cancel{e^{\alpha\xi+\beta\eta}}\left[(V\beta^2+\beta V_\eta+V_{\eta\eta}+\alpha V+V_\xi+2V\beta+2V_\eta+\frac{1}{4}V\right]=0$

$(\beta^2+\alpha+2\beta+\frac{1}{4})V+(\beta+2)V_\eta+V_{\eta\eta}+V_\xi=0$

$\Rightarrow \beta=-2;\ \alpha=\frac{-1}{4}; \Rightarrow \boxed{V_{\eta\eta}+V_\xi=0}$

Пример:

$u_{xx}-4u_{xy}+5u_{yy}-3u_x+u_y+u=0$

$A=1,\ B=-2,\ C=5$

$\delta=B^2-AC=4-5=-1<0 \Rightarrow$ эллиптич.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4\left(\frac{dy}{dx}\right)+5=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\pm 2i}{2}$$

$$y=(-2\pm i)x+\tilde{C}$$

$C=y+2x\pm ix \Rightarrow \begin{cases}\xi=2x+y\\ \eta=x\end{cases}$ $\begin{cases}\xi_x=2\\ \eta_x=1\end{cases}$ $\begin{matrix}\xi_y=1\\ \eta_y=0\end{matrix}$

$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=2u_\xi+u_\eta$

$u_y=2u_\xi$

$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial\xi}(2u_\xi+u_\eta)\xi_x+\frac{\partial}{\partial\eta}(2u_\xi+u_\eta)\eta_x=(2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta})2+$

$+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}=2u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$

$u_{yy}=4u_{\xi\xi}$

$u_{yx}=\frac{\partial}{\partial\xi}(2u_\xi)\xi_x+\frac{\partial}{\partial\eta}(2u_\xi)\eta_x=4u_{\xi\xi}+2u_{\eta\xi}$

Подстав.: $2u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}-16u_{\xi\xi}-8u_{\xi\eta}+20$

$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=2u_\xi+u_\eta$

$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi$

$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial\xi}(2u_\xi+u_\eta)\xi_x+\frac{\partial}{\partial\eta}(2u_\xi+u_\eta)\eta_x=2(2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta})+$

$+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$

$u_{yy}=u_{\xi\xi}$

$u_{yx}=\frac{\partial}{\partial\xi}u_\xi\xi_x+\frac{\partial}{\partial\eta}u_\xi\eta_x=2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}$

Подстав.:

$4u_{\xi\xi}+\cancel{4u_{\xi\eta}}+u_{\eta\eta}-8u_{\xi\xi}-\cancel{4u_{\xi\eta}}+5u_{\xi\xi}-6u_\xi-3u_\eta+u_\xi+u=0$

$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-5u_\xi-3u_\eta+u=0$

$u = e^{\alpha\xi+\beta\eta} v$

$u_\xi = \alpha e^{\alpha\xi+\beta\eta} v + e^{\alpha\xi+\beta\eta} v_\xi = (\alpha v + v_\xi) e^{\alpha\xi+\beta\eta}$

$u_{\xi\xi} = (\alpha^2 v + 2\alpha v_\xi + v_{\xi\xi}) e^{\alpha\xi+\beta\eta}$

$u_\eta = \beta v e^{\alpha\xi+\beta\eta} + e^{\alpha\xi+\beta\eta} v_\eta = (\beta v + v_\eta) e^{\alpha\xi+\beta\eta}$

$u_{\eta\eta} = (\beta^2 v + 2\beta v_\eta + v_{\eta\eta}) e^{\alpha\xi+\beta\eta}$

$u_{\xi\eta} = \alpha\beta e^{\alpha\xi+\beta\eta} v + \alpha v_\eta e^{\alpha\xi+\beta\eta} + \beta e^{\alpha\xi+\beta\eta} v_\xi + v_{\xi\eta} e^{\alpha\xi+\beta\eta} =$

$= e^{\alpha\xi+\beta\eta}(\alpha\beta v + \alpha v_\eta + \beta v_\xi + v_{\xi\eta})$

Подстав.:

$e^{\alpha\xi+\beta\eta}(\alpha^2 v + 2\alpha v_\xi + v_{\xi\xi} + \beta^2 v + \boxed{2\beta v_\eta} + v_{\eta\eta} - 5\alpha v - 5v_\xi - 3\beta v \boxed{-3v_\eta} + v) = 0$

$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (\alpha^2 - 5\alpha \overset{+\beta^2}{-} 3\beta + 1)v + (2\beta - 3)v_\eta + (2\alpha - 5)v_\xi = 0$

$\beta = \frac{3}{2}, \ \alpha = \frac{5}{2}$ $\quad \alpha^2 - 5\alpha - 3\beta + 1 \overset{+\beta^2}{=} \frac{25}{4} - \frac{25}{2} - \frac{9}{2} + 1 \overset{+\frac{9}{4}}{=} \frac{-24\cdot 2}{4} + \frac{25}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} = -\frac{15}{2}$

$\Rightarrow v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{15}{2} v = 0$

(25) $u_{xx} - 2x u_{xy} + \sin x = 0$

$A = 1, B = -x, C = 0 \quad \delta = x^2 - 1\cdot 0 = x^2 \geq 0$

1) $x \neq 0 \Rightarrow$ гиперб.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x \pm 2x}{2} = \frac{(-x \pm x)\cancel{2}}{\cancel{2}} = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -2x \end{array}\right.$

Но $x \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x$ Но нужно д.б. => данный м-од (гипер.) не подх.

?

2) $x = 0 \Rightarrow \boxed{u_{xx} = 0}$

(13) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$

$A = y^2 \ B = 0 \ C = x^2$

$\delta = -(xy)^2 < 0 \Rightarrow$ эллиптич.

$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 = 0$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\left(\frac{x}{y}\right)^2$

$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{x}{y} i \Rightarrow \frac{y^2}{2} \pm \frac{x^2}{2} i = \tilde{c}, \ c = y^2 \pm i x^2$

$\xi = x^2$ $\begin{cases} \xi = y^2 \\ \eta = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \xi_x = 0 & \xi_y = 2y \\ \eta_x = 2x & \eta_y = 0 \end{cases}$

$u_x = 2x u_\eta$ $\qquad$ $u_y = 2y u_\xi$

$u_{xx} = 2u_\eta + 4x^2 u_{\eta\eta}$ $\qquad$ $u_{yy} = 4y^2 u_{\xi\xi} + 2u_\xi$

Подстав.:

$$2y^2 u_\eta + 4x^2y^2 u_{\eta\eta} + 4x^2y^2 u_{\xi\xi} + 2x^2 u_\xi = 0$$

$$2\cancel{4}x^2y^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \cancel{-2(x^2+y^2)} - \cancel{2}(x^2 u_\xi + y^2 u_\eta)$$

$$2\xi^2\eta^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \eta^2 u_\xi + \xi^2 u_\eta$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_\xi}{\xi^2} + \frac{u_\eta}{\eta^2}\right)$$

ТЕМА 2

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = \varphi_1(x), \ u(l,t) = \varphi_2(x), \ t \geq 0 \text{ КУ} \\ u(x,0) = \psi(x), \ x \in [0; l] \text{ НУ} \end{cases}$$

1) Обнулить КУ (т.е., чтобы $\varphi_1(x) \to 0$, $\varphi_2(x) \to 0$)

Алгоритм:

$$w(x,t) = (a_1 x + b_1)\varphi_1(x) + (a_2 x + b_2)\varphi_2(x)$$

Тогда $V(x,t) = u(x,t) - w(x,t) \Rightarrow$ одн. КУ

(Для II краевой зад.: $w(x,t) = (a_1x^2 + b_1x)\varphi_1(x) + (a_2x^2 + b_2x)\varphi_2(x)$)

2) Искать решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$

[C_n нах.: $C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)dx$ если $\lambda_0 = 0$ с.з.

$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\lambda_n(x)dx$]

— // — // — // — // — // — // —

Подготовка к к.р.

(4) $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + u + e^x \sin x - t, \; x\in(0;\pi), t>0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 1+t, t\geq 0 \\ u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x, \; x\in[0;\pi] \end{cases}$

1) Обнуление КУ:

$u(x,t) = V(x,t) + t + 1$

2) Подставляем:

$\begin{cases} V_t + \cancel{1} = V_{xx} - 2V_x + V + \cancel{t} + \cancel{1} + e^x \sin x - \cancel{t}, \; x\in(0;\pi), t>0 \\ V(0,t) + \cancel{t+1} = \cancel{t+1}, \; V(\pi,t) + \cancel{t+1} = \cancel{t+1}, \; t\geq 0 \\ V(x,0) + \cancel{1} = \cancel{1} + e^x \sin 2x, \; x\in[0;\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} V_t = V_{xx} - 2V_x + V + e^x \sin x, \; x\in(0;\pi), t>0 \\ V(0,t) = V(\pi,t) = 0, \; t\geq 0 \\ V(x,0) = e^x \sin 2x, \; x\in[0;\pi] \end{cases}$

3) Избавимся от V_x, затем от V:

$V(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}\omega(x,t)$ {дост взять $e^{\alpha x}$, т.к. произв. от 1-ой $\} = \omega(x,t) e^{\alpha x}$

$\omega_t \cdot e^{\alpha x} = \omega_{xx} e^{\alpha x} + 2\alpha\omega_x e^{\alpha x} + \alpha^2 \omega e^{\alpha x} -$

$-2\omega_x e^{\alpha x} - 2\alpha\omega e^{\alpha x} + \omega e^{\alpha x} + e^x \sin x$

$V_x = \omega_x e^{\alpha x} + \alpha\omega e^{\alpha x}$

$V_{xx} = \omega_{xx} e^{\alpha x} + \alpha\omega_x e^{\alpha x} + \alpha^2 \omega e^{\alpha x} + \alpha\omega_x e^{\alpha x}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$: $V(x,t) = \omega(x,t) e^x$

Переписываем постановку:

$\begin{cases} \omega_t \cancel{e^x} = \omega_{xx} \cancel{e^x} + \cancel{e^x} \sin x, \; x\in(0;\pi), t>0 \\ \omega(0,t) = \omega(\pi,t)\cancel{e^x} = 0, \; t\geq 0 \\ \omega(x,0)\cancel{e^x} = \cancel{e^x} \sin 2x, \; x\in[0;\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} \omega_t = \omega_{xx} + \sin x, \; x\in(0;\pi), t>0 \\ \omega(0,t) = \omega(\pi,t) = 0, \; t\geq 0 \\ \omega(x,0) = \sin 2x, \; x\in[0;\pi] \end{cases}$

~~Ищем в виде~~

4) ~~Разделение переменных~~ Разбиваем на 2 задачи:

$\omega(x,t) = \nu(x,t) + \eta(x,t)$

ν — решение одн. задачи с неодн. НУ; η — -//- неодн. с нулев. НУ

$\begin{cases} \nu_t = \nu_{xx}, \; t>0, x\in(0;\pi) \\ \nu(0,t) = \nu(\pi,t) = 0, \; t\geq 0 \\ \nu(x,0) = \sin 2x, \; x\in[0;\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} \eta_t = \eta_{xx} + \sin x, \; t>0, x\in(0;\pi) \\ \eta(0,t) = \eta(\pi,t) = 0, \; t\geq 0 \\ \eta(x,0) = 0, \; x\in[0;\pi] \end{cases}$

Заметим: $\eta(x,t) = \varphi(t)\sin x$

$\begin{cases} \varphi'(t)\cancel{\sin x} = -\varphi(t)\cancel{\sin x} + \cancel{\sin x}, \; x\in(0;\pi), t>0 \\ \varphi(t)\sin 0 = 0, \; \varphi(t)\sin\pi = 0 \\ \varphi(0)\cancel{\sin x} = 0 \end{cases}$

$\frac{d\varphi}{\varphi} = -dt$

$\ln|\varphi| = -t + \tilde{C}$

$\varphi = Ce^{-t}$

$C'e^{-t} \cancel{- Ce^{-t}} = \cancel{-Ce^{-t}} + 1$

$\Rightarrow$ ~~C=Const~~ $\Rightarrow \varphi = \cancel{C}e^{+t} + C$

~~[illegible]~~ $\Rightarrow \varphi = 1 + Ce^{-t}; \; \varphi(0) = 0 \Rightarrow C = -1$

$\Rightarrow \varphi = 1-e^{-t}$

$\Rightarrow \eta(x,t) = (1-e^{-t})\sin x$

Для $\nu(x,t)$: ~~$\nu(x,t)=\psi(t)\sin 2x$~~ ← Нельзя в таком виде (можно было попытаться, но не на устном)

$$\begin{cases} \psi'(t)\cancel{\sin 2x} = -\psi(t)\cdot 4\cancel{\sin 2x} \\ \psi(t)\sin 0 = \psi(t)\sin 2\pi = 0 \\ \psi(0)\cancel{\sin 2x} = \cancel{\sin 2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'(t) = -4\psi(t) \\ \psi(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{d\psi}{\psi} = -4dt$$

$$\ln|\psi| = -4t + \tilde{C}$$

$\psi = Ce^{-4t}$, $\psi(0)=1$: $\Rightarrow$ $C=1 \Rightarrow \psi = e^{-4t}$

Разделим переменные для $\nu(x,t)$:

$\nu(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$:

$$\begin{cases} X(x)T'(t) = X''(x)T(t), \ x\in(0;\pi), t>0 \\ X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0, \ t\geq 0 \\ X(x)T(0) = \sin 2x, \ x\in[0;\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda = const \\ X(0)=X(\pi)=0, \ x\in(0;\pi), t>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x\in(0;\pi) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\lambda=0$: $X''(x)=0$, $X(x)=\alpha x+\beta$, α,β - const

$\begin{cases} X(0)=\beta \\ X(\pi)=\alpha\pi+\beta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=\beta=0 \\ \text{не подх.} \end{cases}$: $X(x)\equiv 0$ не явл. с/з

$\lambda=-k^2$ $k>0$: $X''(x) - k^2X(x) = 0$

х.ч.: $\mu^2-k^2=0$, $\mu=\pm k$

веществ. корни: ... не явл. с/з.

Когда комплексные корни, получим

$X(x) = \alpha\cos kx + \beta\sin kx$, $\alpha,\beta = const$

$\begin{cases} X(0)=\alpha \\ X(\pi) = \alpha\cos\pi k + \beta\sin k\pi \end{cases}$ $\sin\pi k=0$ k не обяз. целое

~~$\pi k = \pi n$~~

$\pi k = \pi n \Rightarrow k = n,\ n \in N$

$$\begin{cases} \lambda_n = n^2 \\ X_n(x) = \beta \sin nx \end{cases}$$

X_n опр. с точностью до const $\Rightarrow \begin{cases} X_n = \sin nx,\ n \in N \\ \lambda_n = n^2,\ n \in N \end{cases}$

Возвращаемся к $T(t)$:

$T_n'(t) + \lambda_n T_n(t) = 0$

$\frac{dT_n}{dt} = -\lambda_n T_n$

$\Rightarrow \ln|T_n| = -\lambda_n t + C$

$\boxed{T_n = e^{-\lambda_n t} \cdot C_n}$ С точностью до const $\Rightarrow T_n = e^{-\lambda_n t}$

Возвращаемся к подстановке

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx\, e^{-n^2 t} \cdot C_n$$

C_n - const!

Н.У: $v(x,0) = \sin 2x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx \Rightarrow n=2$ даёт решение

~~C_n~~ $C_2 \sin 2x = \sin 2x,\ C_2 = 1$

$n \in N \wedge n \neq 2 \Rightarrow C_n = 0$.

$\Rightarrow$ Общее решение: $v(x,t) = e^{-4t} \sin 2x$

$u(x,t) = t + 1 + \omega(x,t) e^x = t + 1 + e^x\big(v(x,t) + \eta(x,t)\big) = t + 1 + e^x\big(e^{-4t}\sin 2x +$
$+ (1 - e^{-t})\sin x\big)$

Тема 5

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-4x^2+8x},\ x \in \mathbb{R}\ \{\varphi(x)\} \end{cases}$$

Интеграл Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \ominus \cancel{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int^{+\infty}}$$

$$\ominus \left\{ z = \frac{x-s}{\sqrt{8t}},\ \varphi(x) = e^{-4x^2+8x},\ a = \sqrt{2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{8\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4(s^2-2s)} e^{-\frac{(x-s)^2}{8t}} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4((x-2\sqrt{2t}\cdot z)^2 - 2(x-2\sqrt{2t}\cdot z))} e^{-z^2} (-2\sqrt{2t})\, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z^2+4(x-2\sqrt{2t}z)^2 - 8(x-2\sqrt{2t}z))} dz \ \boxed{=}$$

$$A = z^2 + 4(x-2\sqrt{2t}z)^2 - 8(x-2\sqrt{2t}z) = \left(z\sqrt{1+32t}\right)^2 + 2z\sqrt{1+32t} \cdot \frac{8\sqrt{2t} - 8\sqrt{2t}x}{\sqrt{1+32t}} +$$

$$+\frac{(8\sqrt{2t}-8\sqrt{2t}\,x)^2}{1+32t}-\frac{(8\sqrt{2t}-8\sqrt{2t}\,x)^2}{1+32t}+4x^2-8x=$$

$$=\Big(\underbrace{z\sqrt{1+32t}+\frac{8\sqrt{2t}-8\sqrt{2t}\,x}{\sqrt{1+32t}}}_{=w^2}\Big)^2+(4x^2-8x)-\frac{(8\sqrt{2t}-8\sqrt{2t}\,x)^2}{1+32t}$$

$$\boxed{=}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-w^2}e^{-(4x^2-8x)}e^{\frac{(8\sqrt{2t}-8\sqrt{2t}\,x)^2}{1+32t}}\frac{dw}{\sqrt{1+32t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+32t}}\cdot$$

$$\cdot e^{-(4x^2-8x)}e^{\frac{(8\sqrt{2t}-8\sqrt{2t}\,x)^2}{1+32t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-w^2}dw$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+32t}}\,e^{-4x^2+8x+\frac{128t(1-x)^2}{1+32t}}$$

Интеграл ошибок

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, \ x>0, t>0 \\ U_x(0,t)=0, \ t\geq 0 \\ U(x,0) = \begin{cases} U_0, & x\in[0;l] \\ 0, & x>l \end{cases} \end{cases}$$

$$U(x,t) = \int_0^{+\infty} G_{II}(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

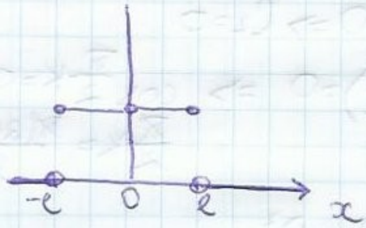
Пусть 1: $G_{II}(x,\xi,t) = \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}$

Метод продолжения чётной - пусть 2:

$$U(x,0) = \begin{cases} U_0, & x\in[-l;l] \\ 0, & x>l \\ 0, & x<-l \end{cases}$$

$$u(x,t) = U(x,t)\Big|_{x\geq 0}$$

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, \ x\in\mathbb{R}, t>0 \\ U_x(0,t) = 0, \ t\geq 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} U_0, & x\in[-l;l] \\ 0, & x>l \text{ или } x<-l \end{cases} \end{cases}$$



$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1\cdot U_0}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \left[\begin{array}{ll} \alpha = \frac{\xi - x}{\sqrt{4a^2t}} & \xi - x = \alpha\sqrt{4a^2t} \\ & \xi = x + \alpha\sqrt{4a^2t} \\ & d\xi = \sqrt{4a^2t}\,d\alpha \\ \xi = l \Rightarrow & \alpha = \frac{l-x}{\sqrt{4a^2t}} = \alpha_2 \\ \xi = -l \Rightarrow & \alpha = \alpha_1 = \frac{-l-x}{\sqrt{4a^2t}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{4\pi a^2t}}\cdot\cancel{\sqrt{4a^2t}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\alpha^2}d\alpha =$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\left(-\int_0^{\alpha_1} e^{-\alpha^2}d\alpha + \int_0^{\alpha_2} e^{-\alpha^2}d\alpha\right) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\left(-\Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2)\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2} =$$

$$= \frac{U_0}{2}\left(\Phi\left(\frac{l-x}{\sqrt{4a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{-l-x}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right)$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{U_0}{2}\left(\Phi\left(\frac{l-x}{\sqrt{4a^2t}}\right) + \Phi\left(\frac{l+x}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right), x\geq 0.$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}+5, \; x\in(0,\frac{\pi}{2}), t>0 \\ u(0,t)=5t, \; u_x(\frac{\pi}{2},t)=0 \\ u(x,0)=\sin 3x \end{cases}$$

$V(x,t) = u(x,t)-5t$

$u(x,t) = V+5t$

$$\begin{cases} V_t+\cancel{5} = V_{xx}+\cancel{5}, \; x\in(0;\frac{\pi}{2}), t>0 \\ V(0,t)=0, \; V_x(\frac{\pi}{2},t)=0 \\ V(x,0)=\sin 3x-\underbrace{5\cdot 0}_{0}=\sin 3x \end{cases} \Rightarrow V(x,t)=X(x)T(t)\neq 0.$$

$X_{xx}=-\lambda X, \; X(0)=0, \; X_x(\frac{\pi}{2})=0$

$\mu^2=-\lambda, \; \lambda=k^2>0 \Rightarrow \mu=\pm ik$

$X = C_1\sin kx \cancel{+C_2\cos kx}$

$X_x = k(C_1\cos kx \cancel{-C_2\sin kx})$

$X(0)=0 \Rightarrow C_2=0$

$X_x(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}k=0$

$\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}k = \frac{\cancel{\pi}(2n+1)}{\cancel{2}}, \; n\in\mathbb{N}_0$

$\lambda_n=(2n+1)^2$

$X_n = \sin(2n+1)x$

$\frac{dT_n}{dt} = -\lambda_n T_n$

$T_n = e^{-\lambda_n t}A_n = e^{-(2n+1)^2t}A_n$

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(2n+1)^2t}\sin(2n+1)x$$

$$V(x,0) = \sin 3x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(2n+1)^2t}\sin(2n+1)x$$

$\Rightarrow n=1, \; C_n=0 \; \forall n\neq 1$

$\Rightarrow V(x,t) = e^{-9t}\sin 3x$

$u(x,t) = e^{-9t}\sin 3x+5t$