

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

Учебное пособие по курсам «Основы кибернетики» и
«Структурная реализация дискретных функций»

Москва 2004

УДК 519.17, 519.71
ББК 22.18
Л 30

Ложкин С.А. «Лекции по основам кибернетики» (учебное пособие для студентов) — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ (лицензия ЛР N 05899 от 24.09.2001), 2004 г. — 251 с.

Пособие включает в себя основную часть материала из программы обязательного для всех студентов факультета ВМиК МГУ курса «Основы кибернетики». Кроме того, в нем содержится изложение ряда вопросов, входящих в программы курсов «Структурная реализация дискретных функций» и «Математические вопросы синтеза СВИС», которые являются обязательными для студентов специализирующихся по математической кибернетике. В нем предпринята попытка единого систематического изложения основных результатов теории дискретных управляющих систем в рамках общего методологического подхода, предложенного С. В. Яблонским, с использованием научных результатов и методических наработок последних лет в области дискретной математики и математической кибернетики. Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм. Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В третьей главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. В четвертой главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем.

Рецензенты:

Алексеев В. Б., профессор, д.ф.-м.н.
Гуров С. И., доцент, к.ф.-м.н.

Печатается по решению Редакционно-издательского Совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова.

ISBN

© Издательский отдел
факультета вычислительной
математики и кибернетики
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2001

Оглавление

Введение	7
1 Представление функций дизъюнктивными нормальными формами и связанные с ним задачи	10
§1 Основные понятия, относящиеся к множествам, матрицам, функциям, формулам	10
§2 Гиперкуб и его ширина. Функции алгебры логики, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы	17
§3 Сокращенная ДНФ и способы ее построения. Некоторые оценки длины сокращенной ДНФ .	27
§4 Тупиковые и минимальные ДНФ. Ядро и ДНФ Квайна. Критерий вхождения импликант в тупиковые ДНФ, его локальность	36
§5 Особенности ДНФ для функций из некоторых классов. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных	42
§6 Функция покрытия и построение всех тупиковых ДНФ. Оценка длины градиентного покрытия	49
§7 Алгоритмические трудности минимизации ДНФ. Оценки максимальных и типичных значений для ранга и длины ДНФ	57

§8	Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста	63
2	Основные классы управляющих систем. Оценка числа схем, их структурные представления	71
§1	Основные понятия из теории графов, сетей, схем	71
§2	Представление формул с помощью деревьев. Оптимизация подобных формул по глубине . . .	80
§3	Схемы из функциональных элементов и операции над ними. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$	88
§4	Некоторые модификации схем из функциональных элементов. Оценка числа схем в произвольном базисе	98
§5	Контактные схемы с одним входом и π -схемы, оценка их числа	106
§6	Многополюсные контактные схемы и их суперпозиции. Разделительные схемы, лемма Шеннона	119
§7	Некоторые частные случаи и модификации контактных схем. Оценка числа схем различных типов	131
3	Эквивалентные преобразования управляющих систем	144
§1	Эквивалентные преобразования схем на основе тождеств. Моделирование эквивалентных преобразований формул в классе схем из функциональных элементов и их «ускорение»	144

§2	Эквивалентные преобразования формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$. Полнота системы основных тождеств	154
§3	Структурное моделирование и эквивалентные преобразования формул и схем из функциональных элементов в различных базисах. Теорема перехода	161
§4	Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств . . .	167
§5	Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем	177
4	Синтез и сложность управляющих систем	184
§1	Задача синтеза и связанные с ней понятия. Простейшие методы синтеза схем	184
§2	Реализация некоторых функций и оценка их сложности	189
§3	Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов. Метод Шеннона	197
§4	Нижние мощностные оценки функций Шеннона	208
§5	Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$	216
§6	Регулярные сдвиговые разбиения единичного куба. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$	223

§7	Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Асимптотика сложности контактных дешифраторов	228
§8	Асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов и формул в произвольном базисе, итеративных контактных схем и BDD	238
Литература		248

*Памяти С. В. Яблонского
посвящается.*

Введение

Теория дискретных управляющих систем представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкретное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно пытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно пытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в данном пособии для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм, построение тестов для таблиц и т. п.).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывається полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В четвертой главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывається минимальность некоторых схем.

Пособие включает в себя основную часть материала из программы обязательного для всех студентов факультета ВМиК МГУ курса «Основы кибернетики». Кроме того, в нем содержится изложение ряда вопросов, входящих в программы курсов «Структурная реализация дискретных функций» и «Математические вопросы синтеза СБИС», которые являются обязательными для студентов специализирующихся по математической кибернетике.

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики») читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. Создателем и основным лектором этого курса был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский. Пособие написано на основе лекций по данному курсу, которые автор читает уже более 20 лет (до 1987 г. совместно с С. В. Яблонским). В нем предпринята попытка единого систематического изложения основных результатов теории дискретных управляющих систем в рамках общего методологического подхода, предложенного С.В. Яблонским [26, 28, 27], с использованием уже известных методов (см., например, [14, 19, 5, 6, 21]), а также научных результатов и методических разработок последних лет в области дискретной математики и математической кибернетики (см., в частности, [12, 13, 3, 22, 2]).

Глава 1

Представление функций дизъюнктивными нормальными формами и связанные с ним задачи

§1 Основные понятия, относящиеся к множествам, матрицам, функциям, формулам

Будем считать известными основные понятия и обозначения из теории множеств, математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей (см., например, [24, 25, 26, 4]). В дальнейшем через \mathbb{N} (через \mathbb{N}_0) обозначается множество всех натуральных (соответственно целых неотрицательных) чисел. Множество всех целых чисел j , для которых $a \leq j \leq b$, где a, b — целые, называется *отрезком* и обозначается через

$$[a, b] = (a - 1, b] = [a, b + 1) = (a - 1, b + 1).$$

При этом отрезки вида

$$[a_1, a_2), [a_2, a_3), \dots,$$

где $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, называются *последовательными*.

Напомним некоторые определения и обозначения, связанные с декартовыми произведениями множеств. Для множества A и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$(A)^n = A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}}$$

— n -я декартова степень A , то есть множество наборов (строк, слов, выборок) длины n с элементами (буквами) из A или, иначе, множество упорядоченных n -ок элементов множества A .

Для множества A и $s, n \in \mathbb{N}$ через $(A)^{s,n} = A^{s,n}$ обозначается множество матриц с s строками, n столбцами и элементами из A . При этом предполагается, что $A^n = A^{1,n}$, и что $A^{s,n}$ — n -я декартова степень множества $A^{s,1}$, элементы которого называются столбцами. Число столбцов (строк) матрицы M называется ее *длиной* (соответственно *высотой*). Для матрицы $M \in A^{s,n}$ и $I' \subseteq [1, s]$, $I'' \subseteq [1, n]$ через $M \langle I', I'' \rangle$ (при $s = 1$ и $I' = \{1\}$ — через $M \langle I'' \rangle$) обозначается ее подматрица, расположенная в строках с номерами из I' и столбцах с номерами из I'' . Набор $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$, состоящий из непустых множеств, будем называть *покрытием* множества $\delta = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_p$. При этом множества $\delta_1, \dots, \delta_p$ считаются *компонентами* покрытия Δ , а число p — его *длиной* или *рангом*. Покрытие, состоящее из непересекающихся множеств, называется *разбиением*. Покрытие, в котором ни одна из компонент не содержится в другой компоненте (в объединении остальных компонент), считается *неприводимым* (соответственно, *тупиковым*) покрытием.

Если A — конечное множество, то его мощность, то есть число элементов, обозначается обычно через $|A|$. Заметим, что при этом

$$|A^n| = |A|^n \text{ и } |A^{s,n}| = |A|^{s \cdot n},$$

где $s, n \in \mathbb{N}$, а если $|A| = a \geq n$, то число выборок (слов) длины n из A , в которых все элементы различны, — так называемых выборок без повторений, — равно

$$a(a-1) \cdots (a-n+1).$$

Каждое слово (набор) $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из A^n при всевозможных перестановках букв порождает множество слов, называемое *сочетанием* длины n из A или,

иначе, *неупорядоченной* n -кой из A , и обозначаемое через $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. В частности, сочетание, связанное с (упорядоченной) парой (u, v) , считается неупорядоченной парой $\{u, v\}$, сочетание, связанное с (упорядоченным) разбиением $(\delta_1, \dots, \delta_p)$, — неупорядоченным разбиением $\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$, и так далее. Заметим, что сочетание порождается перестановками букв из любого своего слова. При этом сочетание из A без повторений, то есть сочетание, порожденное словом из A^n , все буквы которого различны, с содержательной точки зрения представляет собой «обычное» подмножество, а сочетание с повторениями — «кратное» подмножество множества A , то есть подмножество, в которое его элементы входят с определенной кратностью (в соответствующем числе «экземпляров»).

Число различных сочетаний без повторений длины n из множества A , $|A| = a$, обозначается через $\binom{a}{n}$. Как известно (см., например, [26]),

$$\binom{a}{n} = \frac{a!}{n!(a-n)!} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}, \quad (1.1)$$

а число сочетаний с (возможными) повторениями длины n из A равно $\binom{a+n-1}{n}$.

Индукцией по n легко показать, что

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n, \quad (1.2)$$

а из формулы Стирлинга [25] следует, что¹

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \quad (1.3)$$

¹Асимптотическое равенство $a(n) \sim b(n)$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$, то есть

$$a(n) = (1 + o(1))b(n).$$

Из (1.1) и (1.2) вытекает, в частности, неравенство

$$\binom{a}{n} \leq \left(\frac{3a}{n}\right)^n, \quad (1.4)$$

а из (1.1) и (1.3) — асимптотическое равенство¹

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}}. \quad (1.5)$$

Напомним теперь некоторые понятия, связанные с функциями и отношениями. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, где переменная x_i пробегает значения из множества A и связана с i -й компонентой, $i \in [1, n]$, декартовой степени A^n . Функцию f , определенную на множестве A^n и принимающую значения из множества D (множества A), будем называть n -местной или, иначе, n -арной функцией из множества A во множество D (соответственно над множеством A) от переменных x и будем представлять ее в виде²

$$f = f(x), \quad f : A^n \longrightarrow D \quad (\text{соответственно } f : A^n \longrightarrow A).$$

При этом в случае $D = B = \{0, 1\}$ функция f считается отношением над множеством A , а запись $f(a)$ ($\overline{f(a)}$), где $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, означает, что компоненты набора a находятся (соответственно не находятся) в отношении f , то есть $f(a) = 1$ (соответственно $f(a) = 0$).

Для бинарных отношений, то есть отношений от двух переменных, обычным образом определяются свойства рефлексивности, транзитивности, симметричности и антисимметричности. Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, будем, как

¹Через $\lceil \alpha \rceil$ ($\lfloor \alpha \rfloor$) обозначается ближайшее к α сверху (соответственно снизу) целое число

²Функцию f от переменных x_1, x_2 будем, как обычно, представлять в виде $(x_1 f x_2)$.

обычно, называть отношением эквивалентности. Напомним, что отношение эквивалентности τ , заданное на множестве A , порождает разбиение этого множества на классы τ -эквивалентности — максимальные по включению подмножества множества A , состоящие из попарно τ -эквивалентных элементов. Примером отношения эквивалентности является отношение *перестановочности* на множестве A^n , в котором слова α' и α'' находятся тогда и только тогда, когда α'' можно получить из α' в результате перестановки букв. Заметим, что классами эквивалентности по этому отношению являются сочетания с повторениями.

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, будем, как обычно, называть отношением *частичного порядка*. Если τ — отношение частичного порядка на множестве A , то пару (A, τ) будем называть *частично упорядоченным множеством*. В том случае, когда в частично упорядоченном множестве (A, τ) любые два элемента a' и a'' из A сравнимы, то есть либо $a'\tau a''$, либо $a''\tau a'$, пару (A, τ) будем считать *линейно упорядоченным множеством*. Предполагается, что все элементы конечного линейно упорядоченного множества (A, τ) , где $|A| = t$, пронумерованы числами отрезка $[0, t)$ так, что для любых a' и a'' из A номер a' не больше, чем номер a'' тогда и только тогда, когда $a'\tau a''$.

По умолчанию все рассматриваемые далее множества считаются конечными. Для частично упорядоченного множества (A, τ) множество, состоящее из попарно сравнимых (несравнимых) элементов множества A , называется *цепью* (соответственно *антицепью*) этого частично упорядоченного множества. Заметим, что цепь $C \subseteq A$ в частично упорядоченном множестве (A, τ) представляет собой линейно упорядоченное множество вида (C, τ) . Максимальная мощность цепей (антицепей) частично упорядоченного множества называется его *длиной* (соответственно *шириной*). Цепь или

антицепь частично упорядоченного множества называется *неуплотняемой*, если она представляет собой максимальное по включению множество соответствующего типа.

Частично упорядоченное множество (A, τ) длины t называется *ранжированным частично упорядоченным множеством*, если все его неуплотняемые цепи имеют мощность t . При этом каждый элемент A имеет, очевидно, один и тот же номер в любой содержащей его неуплотняемой цепи, а все элементы из A , для которых указанный номер равен i , $i \in [0, t)$, образуют i -й *ярус* данного частично упорядоченного множества (A, τ) . Заметим, что каждый ярус ранжированного частично упорядоченного множества является его неуплотняемой антицепью.

Под дискретной функцией понимают, обычно, отображение одного конечного множества в другое. Так, функция над отрезком $[0, k)$, где $k \geq 2$, называется *функцией k -значной логики* (при $k = 2$ — *алгебры логики*), а множество всех таких функций обозначается через P_k . Дискретные функции, как правило, могут быть описаны таблицами. Так, бинарная функция $f(x_1, x_2)$ из конечного линейно упорядоченного множества $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ в конечное множество D может быть задана матрицей M , $M \in D^{m,m}$, где $M \langle i, j \rangle = f(a_i, a_j)$ при всех i, j из отрезка $[1, m]$, и обратно.

Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — счетный упорядоченный алфавит переменных над множеством A и пусть $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_A(\mathcal{X})$ — множество всех функций над A от переменных из \mathcal{X} . Переменная x_i , $i \in [1, n]$ называется *несущественной переменной функции* $f(x_1, \dots, x_n)$ из \mathcal{P}_A , если $f(\alpha) = f(\beta)$ для любых отличающихся только по x_i наборов α и β из A^n . В противном случае переменная x_i называется *существенной* переменной функции f . Считается, что функция f существенно (несущественно) зависит от переменной x_i , если x_i — существенная (соответственно несущественная) переменная функции f . Несущественная переменная не влияет на значе-

ние функции, поэтому, как обычно, равенство функций будем рассматривать с точностью до добавления или изъятия несущественных переменных. При этом две функции считаются *равными*, если они имеют одни и те же существенные переменные и одинаковым образом отображают декартову степень A , связанную с их существенными переменными, в A . Будем говорить, что f — *существенная* функция, если она существенно зависит от всех своих переменных.

Предполагается, что у нас имеется счетный алфавит функциональных символов (ФС) для обозначения функций из \mathcal{P}_A , и что в \mathcal{P}_A выделено «базисное» множество B . Дадим индуктивное определение формулы над B и реализуемой ею функции, которое, в отличие от [26], неявно предполагает наличие в B функции, тождественно равной переменной. Заметим, что с содержательной точки зрения формула представляет собой слово, построенное из ФС «базисных» функций, символов переменных и «разделителей», которое задает последовательность выполнения операций суперпозиции.

Любая переменная x_j из X считается *формулой глубины 0 над множеством B* , которая реализует функцию x_j . Если $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in B$ и для каждого $i, i \in [1, k]$, определена формула \mathcal{F}_i глубины q_i над множеством B , которая реализует функцию f_i из \mathcal{P}_A , то запись \mathcal{F} вида

$$\mathcal{F} = \varphi(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k) \quad (1.6)$$

является *формулой глубины $q = \max\{q_1, \dots, q_k\} + 1$ над B* , которая реализует функцию f вида $f = \varphi(f_1, \dots, f_k)$. Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются *формулами над множеством B* . При этом формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы \mathcal{F} , называются ее *подформулами*, а те подформулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$, из которых на последнем шаге индуктивного построения строится формула \mathcal{F} вида (1.6), считаются ее *главными* подформулами. Под

сложностью (рангом) формулы \mathcal{F} понимается число вхождений в нее ФС (соответственно символов переменных), которое обозначается через $L(\mathcal{F})$ (соответственно, $R(\mathcal{F})$).

Формулы \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' , реализующие равные функции f' и f'' , называются *равными* или, иначе, *эквивалентными*. При этом равенство вида $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ считается *тождеством*. Обычным образом вводятся тождества, характеризующие свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности бинарных функций из \mathcal{P}_A .

Множество всех функций, реализуемых формулами над B , называется *замыканием* множества B . При этом множество B считается *полным*, если его замыкание совпадает с \mathcal{P}_A . В дальнейшем любое конечное, полное в \mathcal{P}_A базисное множество B будем называть *базисом*. При этом, в отличие от [26], в B могут присутствовать ФАЛ, при удалении которых оставшееся множество продолжает быть полным.

§2 Гиперкуб и его ширина. Функции алгебры логики, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Множество B^n , где $B = \{0, 1\}$ и $n \in \mathbb{N}$, то есть множество наборов длины n из 0 и 1, обычно называют *единичным кубом* или *гиперкубом* размерности n . Отношение перестановочности разбивает куб B^n на классы эквивалентности (сочетания) $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$, где B_i^n , $i \in [0, n]$, — так называемый i -й слой куба B^n , то есть множество наборов с i единицами, и, очевидно, $|B_i^n| = \binom{n}{i}$.

На множестве B^n введем отношение лексикографического линейного порядка, которое задается взаимно однозначным отображением (нумерацией) $\nu : B^n \rightarrow [0, 2^n)$ таким, что

$$\nu(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i 2^{n-i}.$$

Заметим, что двоичная запись числа $\nu(\alpha)$, $\alpha \in B^n$, дополненная слева нулями до набора длины n , совпадает с α . Аналогичным образом вводится лексикографический порядок на множестве $([0, k])^n$ при $k > 2$. Множество наборов, являющееся образом отрезка $[a, b]$, где $[a, b] \subseteq [0, 2^n)$, при отображении ν^{-1} , называется *отрезком куба* B^n .

Для наборов α, β из B^n через $\rho(\alpha, \beta)$ обозначается так называемое расстояние Хэмминга между ними, то есть число тех разрядов, в которых они отличаются друг от друга. При этом наборы, находящиеся на расстоянии n , называются *противоположными*, а наборы, отличающиеся только в одном (i -м) разряде, считаются *соседними* (соответственно *соседними по i -й переменной*). При геометрическом изображении куба B^n на плоскости вершины i -го слоя обычно располагаются на одном и том же горизонтальном уровне над вершинами $(i - 1)$ -го слоя, $i = 1, \dots, n$, а соседние вершины соединяются отрезками прямых (см. рис. 2.1). Множество наборов куба B^n , находящихся на расстоянии t (не больше, чем t) от набора α , называется *сферой* (соответственно *шаром*) *радиуса t с центром α* . Заметим, что i -й слой куба B^n является сферой радиуса i с центром в наборе $\tilde{0} = (0, \dots, 0)$ и сферой радиуса $(n - i)$ с центром в наборе $\tilde{1} = (1, \dots, 1)$.

На множестве B^n обычным образом введем отношение частичного порядка \leq такое, что

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ при всех $i \in [1, n]$. При этом считается, что $\alpha < \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$, а наборы α, β из B^n , для которых $\alpha \leq \beta$ или $\beta \leq \alpha$ ($\alpha \not\leq \beta$ и $\beta \not\leq \alpha$), называются *сравнимыми* (соответственно *несравнимыми*). Заметим, что пара (B^n, \leq) задает ранжированное частично упорядоченное множество (см. §1) длины $n + 1$, где при любом $i \in [0, n]$ множество B_i^n образует i -й ярус, а

наборы с номерами i и $i + 1$, $i \in [0, n)$, в любой неуплотняемой цепи являются соседними наборами куба.

Лемма 2.1. *Ширина частично упорядоченного множества (B^n, \leq) равна $\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right)$.*

Доказательство. Легко видеть, что число неуплотняемых цепей частично упорядоченного множества (B^n, \leq) равно $n!$ и что через каждый набор $\alpha \in B^n$ проходит $i!(n - i)!$ таких цепей. Пусть $A' \subseteq B^n$ — неуплотняемая антицепь частично упорядоченного множества (B, \leq) и пусть $A'_i = B_n^i \cap A'$ для всех $i \in [0, n)$. Заметим, что каждая неуплотняемая цепь частично упорядоченного множества (B, \leq) содержит не более одного элемента множества A' и поэтому, с учетом сказанного выше,

$$\sum_{i=0}^n |A'_i| \cdot (i!) \cdot (n - i)! \leq n!,$$

откуда следует, что

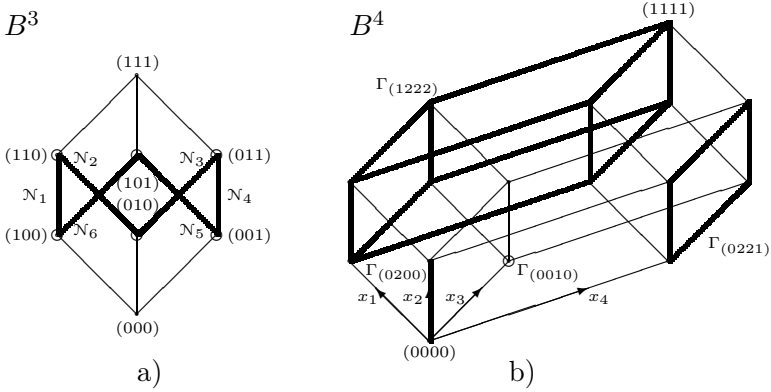
$$\sum_{i=0}^n |A'_i| = |A'| \leq \max_{i \in [0, n]} \binom{n}{i}.$$

Нетрудно убедиться в том, что неравенства

$$\binom{n}{i} < \binom{n}{i+1} \text{ и } 2i + 1 < n$$

равносильны, если i изменяется на отрезке $[0, n]$. Таким образом, максимальное по i значение величины $\binom{n}{i}$ на отрезке $[0, n]$ достигается при $i = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ и равно $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Следовательно, множество $B_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n$ является максимальной по числу элементов антицепью куба B^n .

Лемма доказана. □

Рис. 2.1: B^3 и B^4 , примеры граней

Замечание. Аналогичным образом доказывается, что если в произвольном ранжированном частично упорядоченном множестве через каждые два элемента одного и того же яруса проходит одинаковое число неуплотняемых цепей, то ширина этого частично упорядоченного множества равна максимальной мощности его ярусов.

Для набора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ длины n над множеством $[0, 2]$ через Γ_γ обозначим множество всех тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ куба B^n , для которых $\alpha_i = \gamma_i$ при всех $i \in [1, n]$ таких, что $\gamma_i \neq 2$. Множество Γ_γ называется *гранью* куба B^n , число $(n - r)$, равное числу "2" в наборе γ , считается *размерностью* этой грани, а число r — ее *рангом*. Заметим, что указанная грань Γ_γ представляет собой подкуб размерности $(n - r)$ куба B^n и состоит из 2^{n-r} наборов, отличающихся друг от друга только в тех разрядах, в которых расположены символы "2" набора γ . В частности, грань размерности 0 представляет собой вершину куба, грань размерности 1 — его ребро, грань размерности 2 — квадрат, и так

x_1	0	\bar{x}_1	x_1	1
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

а)

x_1	x_2	$\&$	\vee	\oplus	\sim	\rightarrow	$ $	\downarrow
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

б)

$\tilde{\alpha}_f$	название функции f
(00)	— "0" (константа нуль)
(11)	— "1" (константа единица)
(01)	— тождественная функция
(10)	— отрицание
(0001)	— конъюнкция (умножение)
(0111)	— дизъюнкция
(0110)	— сумма по модулю 2
(1001)	— эквивалентность
(1101)	— импликация
(1110)	— штрих Шеффера
(1000)	— стрелка Пирса

в)

Рис. 2.2: $P_2(1)$ и «основные» ФАЛ из $P_2(2)$

далее. Так, на рис. 2.1 в кубе B^3 выделены ребра $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_6$, а в кубе B^4 выделены грани $\Gamma_{(0010)}$, $\Gamma_{(0200)}$, $\Gamma_{(0221)}$ и $\Gamma_{(1222)}$ размерностей 0, 1, 2 и 3 соответственно. Легко видеть, что грань Γ_γ ранга $(n - r)$ в кубе B^n , где $\gamma = (\alpha, 2, \dots, 2)$ и $\alpha \in B^{n-r}$, соответствует отрезку куба длины 2^r , а множество всех граней указанного вида образует разбиение B^n на последовательные отрезки.

Будем, как обычно, предполагать, что у нас имеется счетный упорядоченный алфавит булевых переменных (БП) $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ и будем рассматривать функции алгебры логики (ФАЛ) или, иначе, булевы функции от переменных из \mathcal{X} , а множество всех таких функций будем обозначать через $P_2(\mathcal{X})$ или P_2 . Будем предполагать также, что каждый рассматриваемый n -мерный куб имеет вид $B^n = B^n(X)$, где множество переменных $X = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\} \subset \mathcal{X}$ и $j_1 < \dots < j_n$, причем переменная x_{j_i} для всех $i \in [1, n]$ связана с i -м разрядом куба $B^n(X)$. Множество всех функций алгебры логики $f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$, отображающих куб $B^n(X)$ в B , будем обозначать через $P_2(X)$, а его m -ю декартову степень, то есть множество систем вида $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящих из m таких функций, — через $P_2^m(X)$. Как правило, мы будем выделять из \mathcal{X} множество БП $X(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, будем сопоставлять ему набор БП $x(n) = (x_1, \dots, x_n)$ и будем рассматривать множество ФАЛ $P_2(n) = P_2(X(n))$, а также его степени $P_2^m(n) = P_2^m(X(n))$.

Для задания ФАЛ f из $P_2(n)$ можно использовать ее таблицу значений, то есть матрицу M из множества $B^{2^n, n+1}$, i -я строка, $i \in [1, 2^n]$, которой имеет вид

$$M \langle i, [1, n + 1] \rangle = (\alpha, f(\alpha)),$$

где $\nu(\alpha) = i - 1$. При этом столбец $M \langle [1, 2^n], n + 1 \rangle$, однозначно задающий ФАЛ f , считается ее столбцом значений и обычно записывается в виде транспонированной строки, обозначаемой через $\tilde{\alpha}_f$. Отсюда следует, в частности, что

$|P_2(n)| = 2^{2^n}$. На рис. 2.2а (2.2б) приведены таблицы всех (соответственно «основных») ФАЛ от БП x_1 (соответственно x_1, x_2), а на рис. 2.2с перечислены столбцы значений $\tilde{\alpha}_f$ и названия для всех указанных ФАЛ. Столбец значений ФАЛ f из $P_2(n)$ при любом $k \in [1, n]$ можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы) длины 2^k и высоты 2^{n-k} , i -я строка которой, $i \in [1, 2^{n-k}]$, имеет вид

$$\tilde{\alpha}_f \left\langle \left((i-1)2^k, i2^k \right] \right\rangle.$$

Кроме того, ФАЛ f однозначно определяется своим *характеристическим множеством*, которое состоит из всех наборов $\alpha \in B^n$ таких, что $f(\alpha) = 1$, и обозначается через N_f , а также его дополнением $\overline{N}_f = N_{\bar{f}} = B^n \setminus N_f$. Заметим, что ФАЛ f является характеристической функцией множества N_f .

На рис. 2.3а показана таблица значений ФАЛ трех переменных $H(x_1, x_2, x_3)$, которая называется функцией *голосования*, на рис. 2.3б приведены прямоугольные таблицы ее значений, а на рис. 2.3с выписаны наборы множеств N_H и \overline{N}_H .

Нетрудно убедиться в том, что бинарные операции $\&$, \vee , \oplus удовлетворяют обычным «алгебраическим» тождествам ассоциативности и коммутативности, а операция $\&$, кроме того, — тождествам дистрибутивности относительно \vee и \oplus , с помощью которых можно раскрывать скобки¹. Заметим, также, что имеют место следующие тождества приведения

¹При записи формул над $P_2(2)$ будем применять обычные соглашения о «силе» операций, в соответствии с которыми ФАЛ \neg сильнее ФАЛ $\&$, а ФАЛ $\&$ сильнее всех остальных ФАЛ от двух БП. Кроме того, внешние скобки и скобки, задающие порядок многократного выполнения одной и той же бинарной ассоциативной операции $\&$, \vee , \sim , \oplus , будем, как правило, опускать.

x_1	x_2	x_3	H
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a)

x_1	x_2	x_3	0	1	x_2	0	0	1	1
0	0	x_3	0	0	x_1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

b)

$$N_H = \{(011), (101), (110), (111)\}$$

$$\overline{N}_H = \{(000), (001), (010), (100)\}$$

c)

Рис. 2.3: функция голосования

подобных

$$x \cdot 0 = x \cdot \bar{x} = x \oplus x = 0, \quad x \vee 1 = x \vee \bar{x} = x \oplus \bar{x} = 1, \quad (2.1)$$

$$x \cdot x = x \vee x = x \vee 0 = x \oplus 0 = x \cdot 1 = x, \quad (2.2)$$

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1, \quad (2.3)$$

последнее из которых называется «тождеством поглощения».

Рассмотрим некоторые формулы «алгебраического» типа над множеством

$$B_0 = \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}.$$

Функции x_i и \bar{x}_i будем называть *буквами* БП x_i и, как обычно, будем считать, что $x_i^0 = \bar{x}_i$, $x_i^1 = x_i$. Конъюнкция (дизъюнкция) r , $1 \leq r \leq n$, букв различных БП из множества $X(n)$ называется *элементарной конъюнкцией* (соответственно *элементарной дизъюнкцией*) *ранга r от булевых переменных $X(n)$* . Из (2.1), (2.2) следует, что элементарная конъюнкция (ЭК) $K = x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_r}^{\alpha_r}$ и элементарная дизъюнкция (ЭД) $J = x_{i_1}^{\bar{\alpha}_1} \vee \cdots \vee x_{i_r}^{\bar{\alpha}_r}$, где $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, являются характеристическими ФАЛ грани $N_K = \Gamma_\beta$ и ее дополнения $N_J = B^n \setminus \Gamma_\beta$, где набор β из $([0, 2])^n$ обладает тем свойством, что $\beta \langle i_p \rangle = \alpha_p$ при всех $p \in [1, r]$ и $\beta \langle i \rangle = 2$ в остальных случаях. Так, элементарные конъюнкции $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$, $\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$, $\bar{x}_1 x_4$ и x_1 ранга 4, 3, 2 и 1 соответственно от БП x_1, x_2, x_3, x_4 являются характеристическими ФАЛ граней куба B^4 , показанных на рис. 2.1b. Будем считать, что константа 1 (константа 0) является элементарной конъюнкцией (соответственно элементарной дизъюнкцией) ранга 0. Заметим, что любая отличная от $x_1 \oplus x_2$ и $x_1 \sim x_2$ существенная ФАЛ от БП x_1, x_2 является либо ЭК, либо ЭД ранга 2.

Дизъюнкция различных элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ), а

конъюнкция различных элементарных дизъюнкций — *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ). При этом ДНФ (КНФ) считается *совершенной*, если все ее ЭК (соответственно ЭД) существенно зависят от одних и тех же БП, а их ранг равен числу этих БП. Число ЭК (ЭД) в ДНФ (соответственно КНФ) \mathfrak{A} называется ее *длиной* и обозначается через $\lambda(\mathfrak{A})$. Любую ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, отличную от константы, можно представить в виде ее совершенных ДНФ и КНФ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N_f} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \\ &= \bigwedge_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \bar{N}_f} (x_1^{\bar{\beta}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\beta}_n}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так, совершенная ДНФ ФАЛ $g(x_1, x_2, x_3)$, для которой $\bar{N}_g = \{(000), (111)\}$, (см. рис. 2.1а) имеет вид

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3. \end{aligned}$$

Заметим, что любую ФАЛ f из $P_2(n)$, отличную от константы 0, можно представить ее совершенной ДНФ вида (2.4), а ФАЛ $f \equiv 0$ — формулой $x_1 \cdot \bar{x}_1$. Следовательно, любая ФАЛ из P_2 может быть реализована формулой над B_0 , и поэтому множество B_0 является базисом P_2 .

Номер $\nu(\alpha)$ набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из B^n считается *номером ЭК (ЭД) ранга n от БП $X(n)$ вида $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ (соответственно $x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$), а система из всех таких ФАЛ, упорядоченных по их номерам, называется *конъюнктивным (соответственно дизъюнктивным) дешифратором порядка n от БП x_1, \dots, x_n и обозначается через Q_n (соответственно J_n)*.*

Функция вида

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_{\nu(\alpha)}$$

называется *мультиплексорной функцией* или, иначе, *мультиплексором порядка n* , а переменные $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($y = (y_0, \dots, y_{2^n-1})$) считаются *адресными* (соответственно *информационными*) БП мультиплексора μ_n .

Мультиплексорную ФАЛ порядка $(n - q)$, $0 \leq q < n$, от адресных БП $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и информационных БП $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$ часто используют для разложения произвольной ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ по БП x'' , которое обобщает совершенную ДНФ (2.4) следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x', x'') &= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} f_{\sigma''}(x') = \\ &= \mu_{n-q}(x'', f_{\tilde{0}}(x'), \dots, f_{\tilde{1}}(x')), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_q)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. Заметим, что при $q = 0$ все «остаточные» ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ являются константами.

§3 Сокращенная ДНФ и способы ее построения. Некоторые оценки длины сокращенной ДНФ

Представление ФАЛ в виде ДНФ или КНФ имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_n) = K_1 \vee \dots \vee K_s = \mathfrak{A}, \quad (3.1)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = J_1 \cdots J_t = \mathfrak{B}, \quad (3.2)$$

где K_1, \dots, K_s (J_1, \dots, J_t) — различные ЭК (соответственно ЭД) от БП x_1, \dots, x_n . Из (2.1), (2.2) следует, что представления (3.1) и (3.2) эквивалентны следующим покрытиям

множеств N_f и \bar{N}_f гранями куба B^n

$$N_f = N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_s}; \quad (3.3)$$

$$\bar{N}_f = \bar{N}_{J_1} \cup \dots \cup \bar{N}_{J_t}. \quad (3.4)$$

Так, представление

$$g(x_1, x_2, x_3) = K_1 \vee \dots \vee K_6, \quad (3.5)$$

где $\bar{N}_g = \{(000), (111)\}$ и

$$\begin{array}{lll} K_1 = x_1\bar{x}_3, & K_2 = x_2\bar{x}_3, & K_3 = \bar{x}_1x_2, \\ K_4 = \bar{x}_1x_3, & K_5 = \bar{x}_2x_3, & K_6 = x_1\bar{x}_2, \end{array}$$

соответствует покрытию $N_g = N_1 \cup \dots \cup N_6$, где $N_i = N_{K_i}$ при всех $i = 1, \dots, 6$ (см. рис. 2.1а). Заметим, что совершенные ДНФ и КНФ ФАЛ f из (2.4) задают покрытие множеств N_f и \bar{N}_f соответственно гранями размерности 0. Принимая во внимание указанную выше геометрическую интерпретацию, мы не будем в дальнейшем делать существенных различий между ЭК K_i и соответствующей ей гранью N_{K_i} , а также между ДНФ вида (3.1) и соответствующим ей покрытием (3.3).

Рассмотрим теперь некоторые специальные виды ДНФ, их «геометрическую» интерпретацию и способы построения. Будем говорить, что ФАЛ f' *имплицирует* ФАЛ f'' или, иначе, ФАЛ f'' *поглощает* ФАЛ f' , если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$, то есть импликация $(f' \rightarrow f'')$ тождественно равна 1. Элементарная конъюнкция, которая имплицирует ФАЛ f , называется *импликантой* этой ФАЛ. Заметим, что отношение имплицируемости является отношением частичного порядка, и что f' имплицирует f'' тогда и только тогда, когда $f'' = f' \vee f''$ или $f' = f' \cdot f''$. Отсюда следует, в частности, что ЭК K' имплицирует ЭК K'' тогда и только тогда, когда множество букв K'' содержится во множестве букв K' , то есть $K' = K'' \cdot K$

для некоторой ЭК K , не имеющей общих букв с ЭК K'' . Это означает, что в данном случае ЭК K' может быть «устранена» из ДНФ $K'' \vee K'$ с помощью тождества поглощения (2.3) (см. §2).

Дизъюнктивную нормальную форму \mathfrak{A} вида (3.1) будем называть *неприводимой*, если соответствующее ей покрытие является неприводимым (см. §1), то есть ни одна из граней N_{K_1}, \dots, N_{K_s} не содержится ни в одной из других граней покрытия (3.3). На «языке имплицируемости» это означает, что ни одна из ЭК K_i , $i \in [1, s]$, не является импликантой ЭК K_j , где $j \in [1, s]$ и $i \neq j$. Заметим, что с помощью тождества поглощения (2.3) (см. §2), из любой ДНФ \mathfrak{A} можно получить неприводимую ДНФ $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Импликанта K ФАЛ f называется *простой импликантой* этой ФАЛ, если она не поглощается никакой другой отличной от нее импликантой ФАЛ f . Из определений и отмеченных выше фактов следует, что в простую импликанту ФАЛ f не входят буквы несущественных БП этой ФАЛ и что из любой импликанты ФАЛ f можно получить ее простую импликанту удалением некоторых букв. Последнее означает, что любая импликанта ФАЛ f имплицирует некоторую простую импликанту f .

Дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f называется ее *сокращенной ДНФ*. Заметим, что сокращенная ДНФ ФАЛ f является неприводимой ДНФ, и что ей соответствует покрытие множества N_f всеми максимальными по включению гранями множества N_f этой ФАЛ, которые мы будем называть просто *максимальными гранями* ФАЛ f . Указанное соответствие позволяет строить сокращенную ДНФ на основе «геометрических» соображений. Так, в соответствии с рис. 2.1 правая часть (3.5) является сокращенной ДНФ ФАЛ g , а из рис. 3.1а вытекает, что сокращенная ДНФ ФАЛ $g'(x_1, x_2, x_3, x_4)$, для которой $\tilde{\alpha}_{g'} = (1111\ 1011\ 1101\ 1010)$,

имеет вид

$$g' = K'_1 \vee \dots \vee K'_7, \quad (3.6)$$

где $K'_1 = \bar{x}_3\bar{x}_4$, $K'_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3$, $K'_3 = \bar{x}_2x_4$, $K'_4 = \bar{x}_1x_3$, $K'_5 = x_2\bar{x}_4$, $K'_6 = \bar{x}_1\bar{x}_4$, $K'_7 = \bar{x}_1\bar{x}_2$, причем ЭК K'_i , $i = 1, \dots, 7$, соответствует грани $N'_i = N_{K'_i}$ на рис. 3.1а. На рис. 3.1б приведена для наглядности «развертка» множества $N_{g'}$ и составляющих его максимальных граней указанной ФАЛ g' . Легко видеть, что сокращенная ДНФ ЭК или ЭД совпадает с ней самой.

Теорема 3.1. Пусть \mathfrak{A}' и \mathfrak{A}'' — сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а неприводимая ДНФ \mathfrak{A} получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда \mathfrak{A} — сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

Доказательство. Достаточно доказать, что в \mathfrak{A} входит любая простая импликанта ФАЛ f . Пусть ЭК K является простой импликантой ФАЛ f и, следовательно, является импликантой как ФАЛ f' , так и ФАЛ f'' . Из свойств сокращенных ДНФ вытекает, что в \mathfrak{A}' и \mathfrak{A}'' найдутся ЭК K' и K'' соответственно, которые имплицируются ЭК K . Таким образом, в ДНФ \mathfrak{A} войдет имплицируемая ФАЛ $K' \cdot K''$ ЭК \tilde{K} , которая получится в результате раскрытия скобок и приведения подобных в формуле $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$. Заметим, что при этом ЭК K имплицирует ФАЛ $K' \cdot K''$ и, следовательно, имплицирует ЭК \tilde{K} . Поскольку ЭК \tilde{K} является импликантой ФАЛ f и, одновременно, имплицируется ЭК K , то $\tilde{K} = K$, так как K — простая импликанта ФАЛ f .

Теорема доказана. \square

Следствие. Если неприводимая ДНФ \mathfrak{A} получается из КНФ \mathfrak{B} ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то \mathfrak{A} — сокращенная ДНФ ФАЛ f .

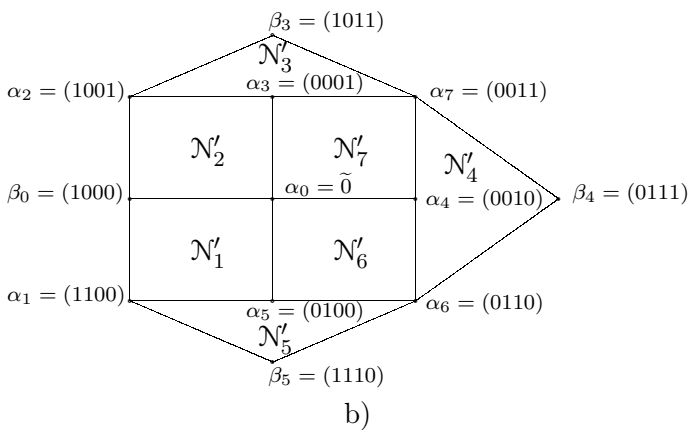
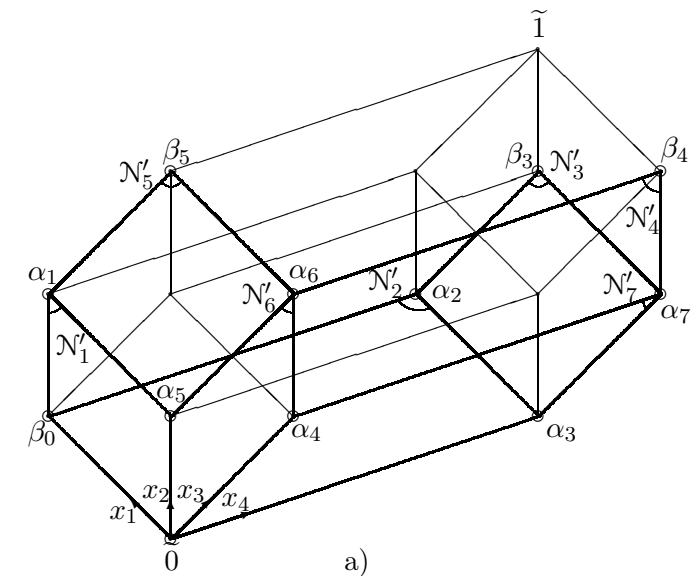


Рис. 3.1: «геометрия» сокращенной ДНФ ФАЛ g'

Применяя следствие из теоремы 3.1 к ФАЛ g' , показанной на рис. 3.1, получим (сравните с (3.6))

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) = \\ &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) = \\ &= \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_4. \end{aligned}$$

Следующий метод (метод Блейка [6]) позволяет получать сокращенную ДНФ ФАЛ f из произвольной ДНФ этой ФАЛ с помощью эквивалентных преобразований на основе тождества обобщенного склеивания:

$$x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3.$$

Любая ДНФ \mathfrak{A}' , которую можно получить из ДНФ \mathfrak{A} путем формирования в ней с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности подформулы вида $x_i K' \vee \bar{x}_i K''$, применения к этим подформулам тождества обобщенного склеивания

$$x_i K' \vee \bar{x}_i K'' = x_i K' \vee \bar{x}_i K'' \vee K' K'' \quad (3.7)$$

и последующего приведения подобных, называется *расширением* ДНФ \mathfrak{A} . Расширение \mathfrak{A}' ДНФ \mathfrak{A} считается *строгим*, если \mathfrak{A}' содержит ЭК, не являющуюся импликантой ни одной ЭК из \mathfrak{A} . Заметим, что сокращенная ДНФ не имеет строгих расширений и что в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных из любой ДНФ можно получить неприводимую ДНФ, которая не имеет строгих расширений.

Теорема 3.2. *Неприводимая ДНФ является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что неприводимая ДНФ \mathfrak{A} , не имеющая строгих расширений, содержит все простые импликанты реализуемой ею ФАЛ f . Пусть $X(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество БП ДНФ \mathfrak{A} , а K — простая импликанта f , которая не входит в \mathfrak{A} . Рассмотрим множество \mathcal{K} , состоящее из всех тех элементарных конъюнкций от БП $X(n)$, которые являются импликантами f , но не являются импликантами ни одной ЭК из \mathfrak{A} . Заметим, что множество \mathcal{K} не пусто, так как содержит ЭК K в силу ее свойств, и что \mathcal{K} не может содержать ЭК ранга n , поскольку любая ЭК вида $x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N_f$, является импликантой той ЭК из \mathfrak{A} , которая обращается в 1 на наборе α .

Пусть, далее, k — ЭК максимального ранга в \mathcal{K} , причем, как было отмечено, $R(k) < n$, и пусть буквы некоторой БП x_i , $1 \leq i \leq n$, не входят в k . Тогда в силу выбора ЭК k и свойств ДНФ \mathfrak{A} ЭК вида $x_i \cdot k$ (вида $\bar{x}_i \cdot k$) должна быть импликантой некоторой ЭК вида $x_i \cdot K'$ (соответственно $\bar{x}_i \cdot K''$) из \mathfrak{A} , где ЭК K' и K'' состоят из букв ЭК k . Следовательно, ЭК k является импликантой ЭК \tilde{K} равной $K' \cdot K''$, а ЭК \tilde{K} , в свою очередь, является импликантой некоторой ЭК из \mathfrak{A} . Действительно, ДНФ \mathfrak{A} не имеет строгих расширений и поэтому содержит ЭК, которая имплицируется ЭК \tilde{K} , получающейся из подформулы $x_i K' \vee \bar{x}_i K''$ в результате эквивалентного преобразования (3.7). Таким образом, ЭК k является импликантой некоторой ЭК из \mathfrak{A} и не может входить в \mathcal{K} . Полученное противоречие доказывает, что ЭК K входит в \mathfrak{A} .

Теорема доказана. □

Следствие. *Из любой ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения неприводимой ДНФ, не имеющей строгих расширений.*

Возьмем для примера в качестве ДНФ \mathfrak{A} совершенную ДНФ ФАЛ голосования $H(x_1, x_2, x_3)$, которая имеет вид

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3.$$

Применяя к \mathfrak{A} метод Блейка, получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= (x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3) \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 = \\ &= x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 = (x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_1x_3) \vee x_1x_2\bar{x}_3 = \\ &= x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 = x_2x_3 \vee (x_3x_1 \vee \bar{x}_3x_1x_2) = \\ &= x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Приведем, в заключение параграфа, некоторые оценки длины сокращенной ДНФ у ФАЛ от n БП, показывающие, в частности, что длина сокращенной ДНФ может быть существенно больше длины совершенной ДНФ той же ФАЛ. Для $I \subseteq [0, n]$ через $\mathfrak{s}_n^I(x_1, \dots, x_n)$ обозначим ФАЛ из $P_2(n)$, которая является характеристической ФАЛ объединения всех слоев куба B^n с номерами из I . При этом числа из I считаются *рабочими числами* ФАЛ \mathfrak{s}_n^I . Заметим, что ФАЛ \mathfrak{s}_n^I является *симметрической*, то есть не изменяет свое значение при любой перестановке аргументов, и наоборот, любая симметрическая функция алгебры логики совпадает с одной из ФАЛ вида \mathfrak{s}_n^I . Заметим также, что отличная от константы симметрическая ФАЛ является существенной ФАЛ. Легко видеть, что симметрические ФАЛ ℓ_n и $\bar{\ell}_n$, рабочими числами которых являются все нечетные и все четные числа отрезка $[0, n]$ соответственно, имеют вид

$$\ell_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n, \quad \bar{\ell}_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1.$$

Симметрическая ФАЛ называется *поясковой*, если ее рабочие числа образуют отрезок. Поясковой ФАЛ является, в частности, ФАЛ голосования $H(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{s}_3^{[2,3]}$, а также ФАЛ $g = \mathfrak{s}_3^{[1,2]}$, показанная на рис. 2.1а. Легко видеть,

что сокращенная ДНФ поясковой ФАЛ $\mathfrak{s}_n^{[r,p]}(x_1, \dots, x_n)$, где $0 \leq r \leq p \leq n$, состоит из всех ЭК ранга $(n+r-p)$, которые содержат r БП и $(n-p)$ отрицаний БП, то есть имеет вид

$$\mathfrak{s}_n^{[r,p]}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{n+r-p} \leq n \\ \sigma_1 + \dots + \sigma_{n+r-p} = r}} x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_{n+r-p}}^{\sigma_{n+r-p}}. \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что длина сокращенной ДНФ ФАЛ $\mathfrak{s}_n^{[r,p]}$ равна $\binom{n}{r} \cdot \binom{n-p}{n-r}$, и поэтому при $r = n - p = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ она в соответствии с формулой Стирлинга (1.3) не меньше, чем $e_1 \frac{3^n}{n}$, где e_1 — некоторая константа.

С другой стороны, сокращенная ДНФ любой ФАЛ из $P_2(n)$ является неприводимой ДНФ, и поэтому соответствует антицепи в частично упорядоченном множестве из всех граней куба B^n с отношением вложения. Заметим, что это частично упорядоченное множество является ранжированным частично упорядоченным множеством длины $(n+1)$, где i -й ярус, $i = 0, \dots, n$, состоит из всех граней размерности i , число которых равно $\binom{n}{i} 2^{n-i}$. Заметим также, что через любую грань куба B^n размерности i , $i = 0, \dots, n$, проходит $(n-i)! \cdot i! \cdot 2^i$ неуплотняемых цепей указанного частично упорядоченного множества, которое, следовательно, удовлетворяет условию замечания к лемме 2.1. Оценивая максимальное значение величины $\binom{n}{i} 2^{n-i}$ на отрезке $i \in [0, n]$ так, как это делалось при доказательстве леммы 2.1 для биномиальных коэффициентов $\binom{n}{i}$, можно показать, что оно достигается, когда $i = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$. В соответствии с формулой Стирлинга (1.3) отсюда следует, что мощность любой антицепи рассматриваемого частично упорядоченного множества, а значит и длина сокращенной ДНФ любой ФАЛ f из $P_2(n)$, не больше, чем $e_2 \frac{3^n}{\sqrt{n}}$, где e_2 — некоторая константа.

§4 Тупиковые и минимальные ДНФ. Ядро и ДНФ Квайна. Критерий вхождения импликант в тупиковые ДНФ, его локальность

Рассмотрим вопрос о построении тех ДНФ, в которых нет ничего «лишнего». Будем говорить, что ДНФ \mathfrak{A} , реализующая ФАЛ f , является *тупиковой* ДНФ, если $f \neq \mathfrak{A}'$ для любой ДНФ \mathfrak{A}' , полученной из \mathfrak{A} в результате удаления некоторых букв или целых ЭК. Из определения вытекает, что в тупиковую ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ f могут входить только простые импликанты этой ФАЛ, то есть \mathfrak{A} получается из сокращенной ДНФ ФАЛ f путем удаления некоторых ЭК, и что \mathfrak{A} является неприводимой ДНФ (см. §3). С «геометрической» точки зрения тупиковая ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ f задает тупиковое (см. §1) покрытие множества N_f максимальными гранями ФАЛ f и обратно. Исходя из этих «геометрических» соображений, можно находить все или некоторые тупиковые ДНФ для ФАЛ от небольшого числа БП. Так например, сокращенная ДНФ (3.8) для ФАЛ «голосования» $H(x_1, x_2, x_3)$ является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ, ФАЛ $g(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{s}_3^{\{1,2\}}$ (см. рис. 2.1а и (3.5)) имеет пять тупиковых ДНФ —

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5, \quad \mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6, \quad (4.1)$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5, \quad \mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6, \quad (4.2)$$

$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1,$$

а у ФАЛ $g'(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (см. рис. 3.1 и (3.6)) имеются две тупиковые ДНФ —

$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5. \quad (4.3)$$

Построение всех или некоторых тупиковых ДНФ для заданной ФАЛ f является, обычно, промежуточным этапом

при построении *минимальной* (кратчайшей) ДНФ ФАЛ f , то есть ДНФ, которая имеет минимальный ранг (соответственно длину) среди всех ДНФ, реализующих f . Это связано с тем, что минимальная ДНФ обязательно является тупиковой, а среди кратчайших ДНФ всегда есть тупиковая. Так ДНФ \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 в (4.1) являются минимальными и, одновременно, кратчайшими ДНФ ФАЛ $g = \mathfrak{s}_3^{\{1,2\}}$, а для ФАЛ g' , показанной на рис. 3.1, обе ее тупиковые ДНФ \mathfrak{A}'_1 и \mathfrak{A}'_2 в (4.3) являются минимальными и, одновременно, кратчайшими.

При построении тупиковых ДНФ ФАЛ f бывает полезно знать ДНФ *пересечение тупиковых* (сумма тупиковых) ФАЛ f , то есть дизъюнкцию всех тех различных простых импликант этой ФАЛ, которые входят в любую (соответственно хотя бы в одну) тупиковую ДНФ ФАЛ f . Заметим, что ДНФ пересечение тупиковых (ДНФ $\cap T$) ФАЛ f в общем случае не реализует саму ФАЛ f , а в некоторых случаях и, в частности, в случае $g = \mathfrak{s}_3^{\{1,2\}}$ (см. выше), может быть пустой. В тоже время ДНФ сумма тупиковых (ДНФ ΣT) ФАЛ f всегда реализует эту ФАЛ, содержится в ее сокращенной и может с ней совпадать, как это имеет место в случае $\mathfrak{s}_3^{\{1,2\}}$ или в случае ФАЛ «голосования». Аналогичным образом определяется ДНФ сумма минимальных (ДНФ ΣM) ФАЛ f и т. п. Очевидно, что ДНФ ΣM ФАЛ f реализует эту ФАЛ и содержится в ее ДНФ ΣT , а для всех приведенных выше ФАЛ ДНФ ΣM совпадает с ДНФ ΣT .

Набор α , $\alpha \in B^n$, называется *ядровой точкой* ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, если $\alpha \in N_f$ и α входит только в одну максимальную грань ФАЛ f . При этом грань N_K , являющаяся максимальной гранью ФАЛ f и содержащая точку α , считается *ядровой гранью* ФАЛ f , а совокупность всех различных ядровых граней ФАЛ f называется *ядром* ФАЛ f . Так, ядром ФАЛ g' , показанной на рис. 3.1, являются грани N'_3 , N'_4 и N'_5 , которые содержат ядровые точки β_3 , β_4 и β_5 соответственно.

Лемма 4.1. *Дизъюнктивная нормальная форма $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f , которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.*

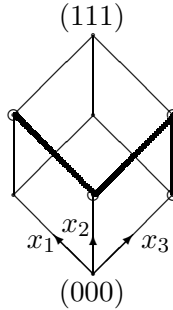
Доказательство. Пусть тупиковая ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ не включает в себя простую импликанту K , которая соответствует ядровой грани N_K ФАЛ f , содержащей ядровую точку α этой ФАЛ. Поскольку все отличные от K простые импликанты ФАЛ f обращаются в 0 на наборе α , то ДНФ \mathfrak{A} также будет равна 0 на этом наборе и, следовательно, $f(\alpha) = 0$. Полученное противоречие с тем, что $\alpha \in N_f$, доказывает необходимость включения ЭК K в любую тупиковую ДНФ ФАЛ f .

Пусть теперь простая импликанта K ФАЛ f соответствует грани N_K , которая не входит в ядро ФАЛ f . При этом каждая точка грани N_K покрывается хотя бы одной отличной от N_K максимальной гранью ФАЛ f . Следовательно, все отличные от N_K максимальные грани ФАЛ f образуют покрытие множества N_f , из которого можно выделить тупиковое подпокрытие, соответствующее тупиковой ДНФ ФАЛ f , не содержащей ЭК K .

Лемма доказана. □

Будем называть ФАЛ *ядровой*, если все ее максимальные грани являются ядровыми. Из леммы 4.1 следует, что сокращенная ДНФ ядровой ФАЛ является ее единственной тупиковой ДНФ. Примером ядровой ФАЛ является ФАЛ голосования (3.8) (см. также §5).

Дизъюнктивная нормальная форма, получающаяся из сокращенной ДНФ ФАЛ f удалением тех ЭК K , для которых грань N_K покрывается ядром ФАЛ f , но не входит в него, называется *ДНФ Квайна* этой ФАЛ. Из определений следует, что ДНФ Квайна ФАЛ f включает в себя ДНФ ΣT этой ФАЛ и содержится в ее сокращенной ДНФ. Заметим,

Рис. 4.1: «геометрия» сокращенной ДНФ ФАЛ g''

что для ФАЛ $g''(x_1, x_2, x_3)$, показанной на рис. 4.1, ее сокращенная ДНФ имеет вид $g'' = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3$, то есть отличается от ДНФ Квайна, которая является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид $g'' = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3$. В то же время для ФАЛ g' , показанной на рис. 3.1, ДНФ Квайна совпадает с сокращенной ДНФ этой ФАЛ и отличается от ее ДНФ ΣT , которая (см. выше) равна

$$K'_1 \vee K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$

Для ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ и набора α , $\alpha \in N_f$, обозначим через $\Pi_\alpha(f)$ множество всех проходящих через α максимальных граней ФАЛ f , которое мы будем называть *пучком ФАЛ f через точку α* . Точку α , $\alpha \in N_f$, будем называть *регулярной точкой ФАЛ f* , если найдется точка β , $\beta \in N_f$, для которой имеет место строгое включение $\Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$. Указанное включение означает, что любая максимальная грань ФАЛ f , проходящая через точку β , проходит и через точку α , причем есть такая максимальная грань ФАЛ f , которая проходит через точку α , но не проходит через точку β . Легко видеть, что для любой регулярной точки α ФАЛ f всегда найдется такая нерегулярная точка β , $\beta \in N_f$, для которой $\Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$.

Из определений следует, что любая неядровая точка ядровой грани регулярна, и поэтому точки α_i , $i \in [1, 7]$, ФАЛ g' , показанной на рис. 3.1, являются ее регулярными точками. Кроме того, в силу включения $\Pi_{\beta_0}(g') \subset \Pi_{\alpha_0}(g')$ точка α_0 тоже является регулярной точкой этой ФАЛ.

Грань N_K ФАЛ f называется *регулярной гранью* этой ФАЛ, если все точки N_K регулярны. Заметим, что грань, которая не входит в ядро, но покрывается им, является регулярной. Заметим также, что для ФАЛ g' , показанной на рис. 3.1, грани N'_6 и N'_7 , которые не входят в ДНФ ΣT , являются регулярными, так как состоят из регулярных точек.

Теорема 4.1 ([6, 9, 10]). *Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — все регулярные точки ФАЛ f . Тогда для каждого j , $j = 1, \dots, s$, в силу регулярности точки α_j найдется нерегулярная точка β_j ФАЛ f , обладающая тем свойством, что любая максимальная грань ФАЛ f , проходящая через точку β_j , проходит и через точку α_j . Следовательно, любая система максимальных граней ФАЛ f , покрывающая точки β_1, \dots, β_s , «автоматически» покроеет все точки $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Таким образом, грань N_K , состоящая из регулярных точек, не может входить в тупиковое покрытие множества N_f максимальными гранями и поэтому ЭК K не может входить в ДНФ ΣT ФАЛ f .

Пусть теперь N_K — нерегулярная грань ФАЛ f , которая содержит нерегулярную точку α , и пусть $N_f \setminus N_K = \{\beta_1, \dots, \beta_q\}$. Из нерегулярности точки α следует, что для любого j , $j = 1, \dots, q$, пучок $\Pi_{\beta_j}(f)$ не может быть строго вложен в пучок $\Pi_{\alpha}(f)$. Кроме того, равенство $\Pi_{\beta_j}(f) = \Pi_{\alpha}(f)$ тоже невозможно, так как $N_K \in \Pi_{\alpha}(f) \setminus \Pi_{\beta_j}(f)$, и поэтому в $\Pi_{\beta_j}(f)$ найдется грань N_{K_j} , которая проходит через точку β_j , но не проходит через точку α . Следова-

но, из покрытия множества N_f максимальными гранями $N_K, N_{K_1}, \dots, N_{K_q}$ нельзя удалить грань N_K , так как только она покрывает в нем точку α . Таким образом, любое тупиковое покрытие множества N_f , являющееся подпокрытием указанного покрытия, будет соответствовать тупиковой ДНФ, содержащей ЭК K .

Теорема доказана. \square

Коснемся, в заключение, вопроса о локальном характере рассмотренных выше критериев вхождения простых импликант ФАЛ f в ее ДНФ $\cap T$ и ДНФ ΣT . Для каждой максимальной грани \mathcal{N} ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ положим $S_0(\mathcal{N}, f) = \{\mathcal{N}\}$, а затем индукцией по $r, r = 1, 2, \dots$, определим множество $S_r(\mathcal{N}, f)$ как множество всех тех максимальных граней ФАЛ f , которые имеют непустое пересечение хотя бы с одной гранью из $S_{r-1}(\mathcal{N}, f)$. При этом множество $S_r(\mathcal{N}, f)$ будем называть *окрестностью порядка r грани \mathcal{N} функции f* .

Докажем, что вопрос о вхождении простой импликанты K ФАЛ f в ДНФ $\cap T$ (ДНФ ΣT) этой ФАЛ можно решить, рассматривая окрестность $S_1(N_K, f)$ (соответственно $S_2(N_K, f)$). Действительно, грань N_K является ядровой гранью ФАЛ f тогда и только тогда, когда она не покрывается всеми остальными максимальными гранями этой ФАЛ. Поскольку грани, не входящие в $S_1(N_K, f)$, не имеют общих точек с N_K , грань N_K является ядровой тогда и только тогда, когда она не покрывается всеми остальными гранями из $S_1(N_K, f)$. Из теоремы 4.1 следует, что ЭК K не входит в ДНФ ΣT ФАЛ f тогда и только тогда, когда для любой точки α из N_K найдется точка $\beta, \beta \in N_f$, для которой $\Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$. Заметим, что все грани пучка $\Pi_\alpha(f)$ входят в $S_1(N_K, f)$, а все грани пучка $\Pi_\beta(f)$, если $\Pi_\alpha(f) \cap \Pi_\beta(f) \neq \emptyset$, — в $S_2(N_K, f)$. Следовательно, проверку грани N_K на регулярность можно осуществить на осно-

ве анализа ее окрестности порядка 2. Легко показать, что рассмотрение окрестности порядка 2 достаточно для проверки грани N_K на ее вхождение в ДНФ Квайна ФАЛ f . Если же все ядровые грани ФАЛ f выделены и «помечены» (для этого, как уже говорилось, достаточно рассмотреть их окрестности порядка 1), то невхождение ЭК K в ДНФ Квайна ФАЛ f равносильно покрытию грани N_K отличными от нее «помеченными» гранями из окрестности $S_1(N_K, f)$.

§5 Особенности ДНФ для функций из некоторых классов.

Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных

Рассмотрим особенности «поведения» и связанные с ними особенности ДНФ для функций из некоторых классов. Напомним, что ФАЛ вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_0$$

из $P_2(n)$, где $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ — булевы константы, называется *линейной* ФАЛ и заметим, что существенными БП этой ФАЛ являются те и только те БП x_i из множества $X(n)$, для которых «коэффициент» α_i равен 1. Заметим также, что ФАЛ ℓ_n и $\bar{\ell}_n$ (см. §3) являются единственными существенными линейными ФАЛ в $P_2(n)$. Будем говорить, что ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ *линейно зависит от БП x_i* или, иначе, что БП x_i является *линейной БП* ФАЛ f , если $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для любых соседних по БП x_i наборов α и β куба B^n . При этом разложение ФАЛ f по БП x_i (см. (2.5)) переходит в равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i \oplus f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (5.1)$$

которое равносильно линейности БП x_i ФАЛ f , а значит ФАЛ является линейной тогда и только тогда, когда она линейно зависит от всех своих существенных БП. На самом

деле для линейности ФАЛ f достаточно, чтобы она линейно зависела от всех своих существенных БП, кроме одной. Это легко доказать индукцией по числу существенных БП ФАЛ f , используя тот факт, что все ФАЛ из $P_2(1)$ являются линейными, в качестве базиса индукции и применяя равенство (5.1) для обоснования индуктивного перехода.

Заметим, что если во множестве N_f ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ нет соседних по некоторой БП x_i наборов, то в каждую импликанту K ФАЛ f обязательно входит одна из букв БП x_i . Действительно, если K не содержит букв БП x_i , то для любого набора α из N_K и соседнего с ним по БП x_i набора β будут выполняться равенства $K(\alpha) = K(\beta) = 1$. Следовательно, $f(\alpha) = f(\beta) = 1$, так как K — импликанта f , а это противоречит свойствам множества N_f . Указанное свойство выполняется, в частности, если ФАЛ f линейно зависит от БП x_i , так как при этом $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для любых соседних по БП x_i наборов α и β .

Заметим, далее, что если во множестве N_f ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ вообще нет соседних наборов, то она имеет единственную ДНФ от БП $X(n)$ — свою совершенную ДНФ. Действительно, ранг любой импликанты K ФАЛ f в этом случае равен n , а соответствующая ей грань N_K состоит из одного набора куба B^n . Следовательно, любая ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ f включает в себя $|N_f|$ ЭК ранга n , то есть является ее совершенной ДНФ. Очевидно, что если во множестве N_f есть соседние наборы, то совершенная ДНФ ФАЛ f уже не будет единственной ДНФ этой ФАЛ. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Совершенная ДНФ ФАЛ f из $P_2(n)$ является ее единственной ДНФ от БП $X(n)$ тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.*

Следствие. *Совершенная ДНФ линейной существенной ФАЛ является единственной ДНФ этой ФАЛ от ее существенных БП.*

Рассмотрим теперь класс монотонных ФАЛ и некоторые связанные с ним другие классы функций. Напомним, что ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если $f(\alpha) \leq f(\beta)$ для любых наборов α и β куба B^n таких, что $\alpha \leq \beta$. Будем говорить, что ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ *монотонно зависит от БП x_i* или, иначе, БП x_i является *монотонной* БП ФАЛ f , если неравенство $f(\alpha) \leq f(\beta)$ выполняется для любых соседних по БП x_i наборов α и β куба B^n таких, что $\alpha \leq \beta$. Легко видеть, что монотонная ФАЛ монотонно зависит от всех своих БП и обратно.

Докажем, что если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ монотонно зависит от БП x_i , то ни одна из ее простых импликант не может содержать букву \bar{x}_i . Действительно, пусть импликанта K' ФАЛ f содержит букву \bar{x}_i и, следовательно, для грани $N_{K'} = \Gamma_{\gamma'}$, где $\gamma' \in ([0, 2])^n$ и $\gamma' \langle i \rangle = 0$, имеет место включение $N_{K'} \subseteq N_f$. Тогда в силу монотонной зависимости ФАЛ f от БП x_i имеют место включения

$$N_{K''} = \Gamma_{\gamma''} \subseteq N_f \quad \text{и} \quad N_K = \Gamma_{\gamma} = N_{K'} \cup N_{K''} \subseteq N_f,$$

где набор γ'' (набор γ) получается из набора γ' заменой 0 в i -ом разряде на 1 (соответственно 2). Последнее из этих включений означает, что ЭК не является простой импликантой ФАЛ f , то есть простая импликанта монотонной по БП x_i ФАЛ не может содержать буквы \bar{x}_i . Отсюда следует, что любая простая импликанта отличной от 0 монотонной ФАЛ является монотонной ЭК, то есть не содержит отрицаний БП.

Частным случаем монотонной зависимости ФАЛ f от БП x_i является *конъюнктивная (дизъюнктивная)* зависимость f от x_i , когда $f = x_i \cdot g$ (соответственно $f = x_i \vee g$), где ФАЛ g получается из f подстановкой константы 1 (соответственно 0) вместо БП x_i . При этом в случае конъюнктивной зависимости буква x_i входит в любую импликанту ФАЛ f , а в случае дизъюнктивной зависимости буква x_i не входит ни в одну простую импликанту ФАЛ f отличную

от x_i . Будем говорить, что ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ *инмонотонно* (*инконъюнктивно, индизъюнктивно*) зависит от БП x_i , если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ зависит от x_i монотонно (соответственно конъюнктивно, дизъюнктивно). Очевидно, что все особенности ДНФ, характерные для ФАЛ с той или иной монотонной зависимостью от БП распространяются на ФАЛ с аналогичной инмонотонной зависимостью после инвертирования соответствующих БП.

Сопоставим каждому набору β из B^n , монотонную ЭК K_β^+ от БП $X(n)$, состоящую из тех и только тех букв x_j , $j \in [1, n]$, для которых $\beta \langle j \rangle = 1$, и заметим, что каждая монотонная ЭК от БП $X(n)$ может быть представлена в указанном виде. Легко видеть также, что грань, соответствующая ЭК K_β^+ , где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in B^n$, имеет вид Γ_γ , где $\gamma = (2 - \beta_1, \dots, 2 - \beta_n)$. Набор α , $\alpha \in B^n$, называется *нижней единицей* монотонной ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, если $\alpha \in N_f$ и $f(\beta) = 0$ для любого отличного от α набора β такого, что $\beta \leq \alpha$. Множество всех нижних единиц монотонной ФАЛ f будем обозначать через N_f^+ .

В силу введенных определений $K_\beta^+(\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq \beta$, откуда следует, что набор β является единственной нижней единицей ЭК K_β^+ и что ЭК $K_{\beta'}^+$ имплицирует ЭК $K_{\beta''}^+$ тогда и только тогда, когда $\beta' \geq \beta''$. Отсюда вытекает также, что ЭК K_β^+ является простой импликантой монотонной ФАЛ f тогда и только тогда, когда $\beta \in N_f^+$, и что набор β является при этом ядровой точкой ФАЛ f . Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Сокращенная ДНФ \mathfrak{A} монотонной ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:*

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+(x_1, \dots, x_n).$$

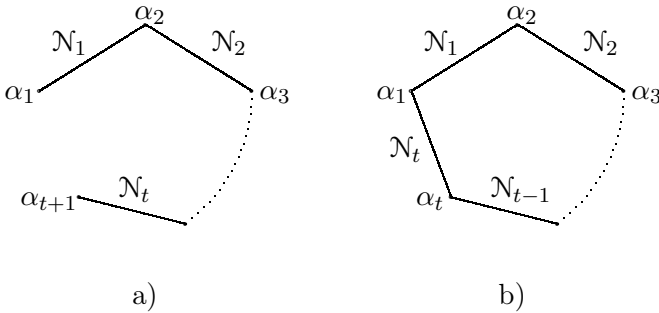


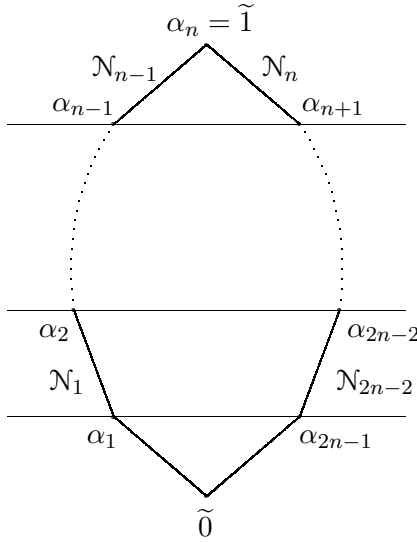
Рис. 5.1: множество N_f для цепной и циклической ФАЛ f

При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f .

Следствие. *Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.*

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *цепной* (*циклической*) *функцией длины t* , если ее сокращенная ДНФ с «геометрической» точки зрения представляет собой цепь (соответственно цикл) из t последовательно соединенных ребер N_1, N_2, \dots, N_t куба B^n (см. рис. 5.1a и 5.1b). Заметим, что циклическая ФАЛ длины t существует тогда и только тогда, когда $t \geq 6$ — четное число, а цепная ФАЛ длины t — при любом $t \geq 1$. Пример цепной ФАЛ длины 3 дает ФАЛ g'' , показанная на рис. 4.1, а ФАЛ $g = \mathfrak{s}_3^{\{1,2\}}$ (см. рис. 2.1a) является циклической ФАЛ длины 6.

Из теоремы 4.1 следует, в частности, что для любой цепной ФАЛ длины не меньше 4 и любой циклической ФАЛ ДНФ ΣT совпадает с сокращенной ДНФ. При этом цепная ФАЛ f нечетной длины $t = 2k - 1 \geq 3$ имеет единственную минимальную ДНФ, которая совпадает с ее ДНФ ΣM и соответствует покрытию (см. рис. 5.1a) $N_1 \cup N_3 \cup \dots \cup N_t$ длины k . Действительно, множество N_f в данном случае состоит из

Рис. 5.2: цепная ФАЛ длины $(2n - 2)$ в кубе B^n

$2k$ наборов и не может быть покрыто $(k - 1)$ ребром. Кроме того, покрытие множества N_f , состоящее из k ребер, не может включать в себя ребра с общими вершинами и должно содержать ядровые ребра N_1 и N_t ФАЛ f . Легко видеть, что только покрытие $N_1 \cup N_3 \cup \dots \cup N_t$ обладает всеми этими свойствами. Таким образом, для цепной ФАЛ нечетной длины t , $t \geq 5$, ДНФ ΣT не совпадает с ДНФ ΣM .

Теорема 5.1 (ср. [6, 9, 10]). При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'' , имеющие общую простую импликанту K , которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Доказательство. Достаточно построить в $P_2(n)$ цепную функцию f четной длины $t = 2k \geq 2n - 2 \geq 4$. Действи-

тельно, если указанная ФАЛ f найдена, а ее множество N_f соответствует рис. 5.1а, то, полагая

$$N_{f'} = N_f \setminus \{\alpha_1\} \quad \text{и} \quad N_{f''} = N_f \setminus \{\alpha_{t+1}\},$$

получим цепные ФАЛ f' и f'' нечетной длины $2k - 1$ такие, что каждое ребро \mathcal{N}_i , где $i = 2, \dots, t-1$, входит в ДНФ ΣM одной из них, но не входит в ДНФ ΣM другой. При этом, очевидно, $S_{k-2}(\mathcal{N}_k, f') = S_{k-2}(\mathcal{N}_k, f'')$ и, следовательно, исконая ЭК K соответствует ребру \mathcal{N}_k .

Для завершения доказательства возьмем в качестве f цепную ФАЛ длины $2n - 2$, у которой множество N_f состоит из всех наборов $\alpha_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})$, где $i \in [1, n]$, и наборов $\alpha_{n+i} = \bar{\alpha}_i$, $i \in [1, n]$, а ребро с номером j , $j \in [1, 2n - 2]$, имеет вид $\mathcal{N}_j = \{\alpha_j, \alpha_{j+1}\}$ (см. рис. 5.2) и применим к ней описанные выше построения.

Теорема доказана. \square

Замечание 1. Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣM не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣT (сравните с теоремой 4.1).

Замечание 2. Известно [7], что при $n \geq 14$ в $P_2(n)$ имеется цепная ФАЛ четной длины t , $t \geq 2^{n-11} - 4$, на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка $(\frac{t}{2} - 2)$ (см. доказательство).

§6 Функция покрытия и построение всех тупиковых ДНФ. Оценка длины градиентного покрытия

Напомним, что с «геометрической» точки зрения, сокращенная ДНФ ФАЛ f из $P_2(n)$ представляет собой покрытие множества N_f всеми максимальными гранями, а тупиковая ДНФ соответствует тупиковому подпокрытию, выделяемому из этого покрытия. Рассмотрим сначала метод выделения из заданного покрытия конечного множества всех его тупиковых подпокрытий, основанный на построении сокращенной ДНФ для специальной монотонной ФАЛ, связанной с исходным покрытием.

Пусть $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ — конечное множество, а $\mathfrak{N} = (N_1, \dots, N_p)$ — система его подмножеств, образующих покрытие множества \mathcal{N} . Сопоставим паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ матрицу M , $M \in B^{p,s}$, для которой $M \langle i, j \rangle = 1$ тогда и только тогда, когда $N_i \ni \alpha_j$. Заметим, что матрица M не имеет нулевых столбцов, так как система \mathfrak{N} образует покрытие множества \mathcal{N} . Будем считать, что i -я строка (j -й столбец) матрицы M соответствует подмножеству N_i системы \mathfrak{N} (элементу α_j множества \mathcal{N}) и не будем делать между ними существенных различий. Так, будем говорить, что i -я строка матрицы M покрывает ее j -й столбец, если $M \langle i, j \rangle = 1$, то есть $N_i \ni \alpha_j$, и что система строк с номерами из I , $I \subseteq [1, p]$, образует покрытие матрицы M , если каждый ее столбец покрывается хотя бы одной строкой с номером из I , то есть система подмножеств $\{N_i\}_{i \in I}$ задает покрытие множества \mathcal{N} . Аналогичным образом понимается покрытие одного множества строк матрицы M другим множеством ее строк и т. п.

Покрытие матрицы M , в котором ни одна строка не покрывается другой строкой, считается *неприводимым*, а покрытие не имеющее собственных подпокрытий, называется *тупиковым* и т. п. Заметим, что задача выделения всех ту-

пиковых подпокрытий из покрытия \mathfrak{N} множества \mathcal{N} эквивалентна задаче построения всех тупиковых покрытий матрицы M , соответствующей паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$. Для решения этой задачи по аналогии с ДНФ можно ввести понятие ядрового и регулярного столбцов, а также ядровой и регулярной строки, для которых будут справедливы утверждения, аналогичные лемме 4.1 и теореме 4.1.

Пусть M , $M \in B^{p,s}$ — матрица без нулевых столбцов. Сопоставим i -й строке, $i \in [1, p]$, матрицы M БП y_i , а каждому набору β , $\beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1, \dots, y_p)$, — множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1, p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta \langle i \rangle = 1$. Рассмотрим ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует ее покрытие, и будем называть эту ФАЛ *функцией покрытия* матрицы M . Заметим, что ФАЛ покрытия $F(y)$ является монотонной ФАЛ, а ее «нижние единицы» соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M . Действительно, из неравенства $\beta' \leq \beta''$ вытекает, что $I(\beta') \subseteq I(\beta'')$ и потому $F(\beta') \leq F(\beta'')$, то есть ФАЛ F является монотонной. Из определений следует также, что набор β , $\beta \in B^p$, являющийся «нижней единицей» ФАЛ F , соответствует множеству $I(\beta)$, которое задает тупиковое покрытие матрицы M , и обратно. Таким образом, в силу леммы 5.2 каждая простая импликанта вида $K = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p$, ФАЛ покрытия $F(y)$ соответствует тупиковому покрытию матрицы M , состоящему из строк с номерами из множества $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, и обратно.

Лемма 6.1. *Функция покрытия $F(y_1, \dots, y_p)$ матрицы M , $M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида:*

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left(\bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M \langle i, j \rangle = 1}} y_i \right). \quad (6.1)$$

Доказательство. Для каждого j , $j \in [1, s]$, положим

$$J_j(y) = \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M(i,j)=1}} y_i,$$

где $y = (y_1, \dots, y_p)$. Легко видеть, что $J_j(\beta) = 1$ для произвольного набора β , $\beta \in B^p$, тогда и только тогда, когда множество строк с номерами из $I(\beta)$ покрывает j -й столбец матрицы M , $j \in [1, s]$. Отсюда следует, что КНФ в правой части (6.1) обращается в 1 на наборе β тогда и только тогда, когда множество строк с номерами из $I(\beta)$ образует покрытие матрицы M , то есть тогда и только тогда, когда $F(\beta) = 1$.

Лемма доказана. \square

Следствие. В результате раскрытия скобок и приведения подобных из КНФ (6.1) можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M .

Задача построения всех тупиковых ДНФ ФАЛ f из $P_2(n)$ на основе ее сокращенной ДНФ сводится к рассмотренной выше задаче о покрытии, если в качестве множества \mathcal{N} взять множество N_f , а в качестве его покрытия \mathfrak{N} — систему всех максимальных граней ФАЛ f . Матрица M , соответствующая указанной паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, называется, обычно, *таблицей Квайна* ФАЛ f . Заметим, что ядровой стобец (строка) таблицы Квайна связана с ядровой точкой (соответственно гранью) ФАЛ f , что регулярный столбец (строка) этой таблицы задает регулярную точку (соответственно грань) ФАЛ f , что строка, покрываемая ядровыми строками, соответствует грани, покрываемой ядром и т. п.

Рассмотрим, для примера, задачу построения всех тупиковых ДНФ для ФАЛ $g(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{S}_3^{\{1,2\}}$ из ее сокращенной ДНФ, полагая (см. рис. 2.1а, (3.5), (4.1) и (4.2)), что

$$N_g = \{\alpha_1 = (100), \alpha_2 = (110), \alpha_3 = (010), \\ \alpha_4 = (011), \alpha_5 = (001), \alpha_6 = (101)\}, \\ \mathfrak{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_6\},$$

где $\mathcal{N}_i = N_{K_i} = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ для всех i , $i \in [1, 6]$, причем $\alpha_7 = \alpha_1 = (100)$. Паре (N_g, \mathfrak{N}) указанным выше способом сопоставим таблицу Квайна

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ФАЛ покрытия которой в соответствии с (6.1) задается следующей КНФ от переменных $y = (y_1, \dots, y_6)$:

$$F(y) = (y_6 \vee y_1)(y_1 \vee y_2)(y_2 \vee y_3)(y_3 \vee y_4)(y_4 \vee y_5)(y_5 \vee y_6).$$

Раскрывая в этой КНФ скобки и приводя подобные, получим сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$ вида

$$F(y) = y_1y_3y_5 \vee y_2y_4y_6 \vee y_1y_2y_4y_5 \vee y_2y_3y_5y_6 \vee y_1y_3y_4y_6,$$

слагаемые которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым ДНФ ФАЛ g (см. (4.1), (4.2)).

В общем случае при построении всех тупиковых ДНФ ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, с помощью леммы 6.1 на основе ее сокращенной ДНФ используют, обычно, следующую модификацию рассмотренного выше подхода, которая позволяет

уменьшать размеры матрицы M . Пусть N_{K_1}, \dots, N_{K_q} — все максимальные грани ФАЛ f , причем грани $N_{K_{p+1}}, \dots, N_{K_t}$, где $1 \leq p \leq t \leq q$, являются ядровыми, а грани $N_{K_{t+1}}, \dots, N_{K_q}$ — регулярными гранями ФАЛ f , и пусть множество \widehat{N} состоит из всех ядровых и регулярных точек ФАЛ f . Положим

$$\mathcal{N} = N_f \setminus \widehat{N}, \quad \mathfrak{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_p\},$$

где $\mathcal{N}_i = N_{K_i} \setminus \widehat{N}$ при всех i , $i \in [1, p]$, и заметим, что задача построения всех тупиковых ДНФ ФАЛ f эквивалентна задаче выделения всех тупиковых подпокрытий из покрытия \mathfrak{N} множества \mathcal{N} . Действительно, если система подмножеств $\mathcal{N}_{i_1}, \dots, \mathcal{N}_{i_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p$, является тупиковым покрытием множества \mathcal{N} , то система максимальных граней $N_{K_{i_1}}, \dots, N_{K_{i_r}}, N_{K_{p+1}}, \dots, N_{K_t}$ задает тупиковое покрытие множества N_f , то есть соответствует тупиковой ДНФ ФАЛ f , и обратно.

Так, применяя указанную модификацию к ФАЛ g' из $P_2(4)$, показанной на рис. 3.1 (см. также (3.6) и (4.3)), получим тривиальную задачу о покрытии множества $\mathcal{N} = \{(1000)\}$ двумя совпадающими с ним подмножествами \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 .

Выделение всех тупиковых подпокрытий из заданного покрытия и, в частности, построение всех тупиковых ДНФ является трудоемкой задачей. В связи с этим вместо того, чтобы строить все тупиковые ДНФ и выбирать среди них, например, кратчайшую, часто используют эвристические алгоритмы, позволяющие получать не очень «длинные» ДНФ. К числу таких алгоритмов относится и градиентный алгоритм, ориентированный на выделение из заданного покрытия достаточно «коротких» подпокрытий или, иначе, на построение достаточно «коротких» покрытий для заданной матрицы. На каждом шаге градиентного алгоритма в мат-

рице выбирается и включается в покрытие такая строка, которая покрывает наибольшее число еще не покрытых столбцов (если таких строк несколько, из них выбирается строка с наименьшим номером). Алгоритм заканчивает свою работу после того шага, на котором получилось покрытие.

Следующее утверждение дает верхнюю оценку длины покрытия, получаемого с помощью градиентного алгоритма для матриц с заданной «густотой».

Теорема 6.1 ([6]). Пусть для действительного γ , $0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы M , $M \in V^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем¹ $\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+ (\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma}$.

Доказательство. Пусть для построения покрытия матрицы M с помощью градиентного алгоритма потребовалось сделать q шагов, причем на шаге с номером t , $t \in [1, q]$, была выбрана строка с номером i_t . Для каждого t , $t \in [1, q]$, рассмотрим матрицу M_t , которая получается из матрицы M в результате удаления строк с номерами $\{i_1, \dots, i_t\}$, а также покрываемых ими столбцов и которая принадлежит множеству V^{p_t, s_t} , где $p_t = p - t$ и $s_t = s \cdot \delta_t$, $0 \leq \delta_t \leq 1$. Для определенности будем считать, что $M_0 = M$, $p_0 = p$, $s_0 = s$, $\delta_0 = 1$ и $p_q = p - q$, $s_q = \delta_q = 0$. Заметим, что при любом t , $t \in [0, q]$, справедливо неравенство

$$q \leq t + \delta_t \cdot s, \quad (6.2)$$

так как после выполнения первых t шагов алгоритма остаются не покрытыми $\delta_t \cdot s$ столбцов матрицы M , а на каждом следующем шаге покрывается не менее одного столбца.

¹Полагаем, что $\ln^+ x = \ln x$, если $x \geq 1$, и $\ln^+ x = 0$, если $0 < x < 1$.

Заметим, далее, что в каждом столбце матрицы M_t , $t \in [0, q)$, имеется не менее, чем $\gamma \cdot p$, единиц и поэтому общее число единиц в матрице M_t не меньше, чем $\gamma p s \delta_t$, а значит среднее число единиц в ее строках не меньше, чем $\gamma s \delta_t$. Отсюда вытекает, что строка матрицы M с номером i_{t+1} , которая выбирается на $(t+1)$ -м шаге алгоритма и является строкой матрицы M_t с наибольшим числом единиц, содержит не меньше, чем $\gamma s \delta_t$, единиц, то есть покрывает не меньше, чем $\gamma s \delta_t$, еще не покрытых столбцов матрицы M . Таким образом, для любого t , $t \in [0, q)$, выполняются соотношения

$$s \delta_{t+1} = s_{t+1} \leq s_t - \gamma s \delta_t = s \delta_t (1 - \gamma)$$

из которых, с учетом $\delta_0 = 1$, следует, что

$$\delta_t \leq (1 - \gamma)^t \leq e^{-\gamma t} \quad (6.3)$$

при любом t , $t \in [0, q)$.

Выбирая значение параметра t так, что

$$t = \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+ (\gamma s) \right\rceil,$$

подставляя его в (6.2) и учитывая (6.3), получим

$$q \leq \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+ (\gamma s) \right\rceil + s \cdot e^{-\ln^+ (\gamma s)} \leq \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+ (\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma}.$$

Теорема доказана. \square

В качестве примера применения градиентного алгоритма рассмотрим задачу о «протыкании» граней куба его точками. Задача о «протыкании» системы \mathfrak{M} , состоящей из подмножеств $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_p$ множества $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ заключается в нахождении такого подмножества множества

\mathcal{N} , в котором при любом i , $i \in [1, p]$, имеется хотя бы один элемент из \mathcal{N}_i . Эта задача сводится к задаче о выделении подпокрытия из покрытия отрезка $[1, p]$ его подмножествами I_1, \dots, I_s , где $I_i = \{j : \alpha_i \in \mathcal{N}_j\}$ при всех i , $i \in [1, s]$. Заметим, что матрица построенной таким образом системы подмножеств отрезка $[1, p]$ получается из матрицы системы $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ в результате транспонирования.

Лемма 6.2 ([18]). *При любых натуральных n и m , $m \leq n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m .*

Доказательство. Применяя указанный выше подход, рассмотрим множество \mathcal{N} , состоящее из всех граней ранга m куба B^n , $|\mathcal{N}| = \binom{n}{m} \cdot 2^m$, а также систему $\mathfrak{N} = \{\mathcal{N}_\alpha\}_{\alpha \in B^n}$ его подмножеств, где \mathcal{N}_α — множество тех граней из \mathcal{N} , которые проходят через точку α . Очевидно, что каждая грань из \mathcal{N} содержится в тех 2^{n-m} подмножествах \mathcal{N}_α , для которых точка α принадлежит этой грани. Следовательно, матрица M , связанная с парой $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, состоит из $p = 2^n$ строк и $s = \binom{n}{m} \cdot 2^m$ столбцов, в каждом из которых имеется $p \cdot \gamma$, где $\gamma = 2^{-m}$, единиц. Искомое множество наборов получается в результате применения к матрице M теоремы 6.1 и построения покрытия длины q , где

$$\begin{aligned} q &\leq \left\lceil 2^m \ln^+ \left(\binom{n}{m} \right) \right\rceil + 2^m \leq \left\lceil 2^m \log \left(\binom{n}{m} \right) \right\rceil + 2^m \leq \\ &\leq 2^m (n - 1) + 2^m = n \cdot 2^m. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

§7 Алгоритмические трудности минимизации ДНФ. Оценки максимальных и типичных значений для ранга и длины ДНФ

Как уже отмечалось, ДНФ представляет собой удобную и наглядную (с «геометрической» точки зрения) форму задания ФАЛ. С другой стороны, ДНФ можно рассматривать как простейшую модель, предназначенную для структурной реализации ФАЛ (см. гл. 2). Заметим, что различные параметры ДНФ (ранг, длина и т.п.) характеризуют различные «меры» сложности указанного представления или структурной реализации. В связи с этим часто возникает необходимость построения оптимальной в том или ином смысле ДНФ для заданной ФАЛ, то есть необходимость решения соответствующей задачи *минимизации ДНФ*, которая является частным случаем задачи синтеза управляющих систем (см. гл. 4).

В общем виде задача минимизации ДНФ может быть сформулирована следующим образом. Пусть для каждой ДНФ \mathfrak{A} определена ее «сложность» $\psi(\mathfrak{A})$, $\psi(\mathfrak{A}) \geq 0$, для которой $\psi(\mathfrak{A}') \geq \psi(\mathfrak{A}'')$, если ДНФ \mathfrak{A}'' получается из ДНФ \mathfrak{A}' удалением букв или ЭК. В этом случае будем говорить, что на множестве ДНФ задан неотрицательный *функционал сложности* ψ , обладающий свойством *монотонности*. Примерами таких функционалов могут служить длина $\lambda(\mathfrak{A})$, ранг $R(\mathfrak{A})$ или «формульная» сложность $L(\mathfrak{A})$ ДНФ \mathfrak{A} , а также число вхождений БП с отрицаниями и другие параметры ДНФ. Задача минимизации ДНФ относительно функционала сложности ψ состоит в том, чтобы по заданной ФАЛ f построить реализующую ее ДНФ \mathfrak{A} такую, что

$$\psi(\mathfrak{A}) = \min \psi(\mathfrak{A}'),$$

где минимум берется по всем ДНФ \mathfrak{A}' , реализующим ФАЛ f . При этом ДНФ \mathfrak{A} считается *минимальной относительно*

функционала ψ или, иначе, ψ -минимальной ДНФ, а значение $\psi(\mathfrak{A})$ называется сложностью ФАЛ f относительно функционала ψ или, иначе, ψ -сложностью ФАЛ f в классе ДНФ. В соответствии с введенными ранее определениями λ -минимальную ДНФ, то есть ДНФ минимальную по длине, будем называть кратчайшей, а R -минимальную ДНФ, то есть ДНФ минимальную по рангу, — просто минимальной. Функцию

$$\psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \psi(f),$$

которая характеризует максимальное значение ψ -сложности ФАЛ из $P_2(n)$, называют, обычно, функцией Шеннона для класса ДНФ относительно функционала ψ .

С алгоритмической точки зрения задача минимизации ДНФ является очень трудоемкой задачей. В теории сложности вычислений, где трудоемкость алгоритма определяется, обычно, числом битовых операций, необходимых для его выполнения в «худшем» случае, выделен целый класс так называемых NP-полных проблем, которые считаются алгоритмически трудными (см., например, [1, 22]). К NP-полным проблемам относится, в частности, проблема выполнимости КНФ, которая состоит в том, чтобы по заданной КНФ выяснить равна тождественно нулю реализуемая ею ФАЛ или нет. Таким образом, даже построение сокращенной ДНФ из КНФ (см. §3) является алгоритмически трудной задачей.

С другой стороны, Ю.И. Журавлев [9, 10] предложил применительно к ДНФ модель так называемых локальных или окрестностных алгоритмов, когда преобразование рассматриваемой грани однозначно определяется «состоянием» ее «окрестности» заданного порядка (см. §5). Он же (см. теорему 5.1) доказал, что при построении минимальной ДНФ для ФАЛ из $P_2(n)$, $n \geq 3$, приходится, в общем случае, рассматривать окрестности порядка $(n - 3)$ ее максимальных граней. Следовательно, задача минимизации ДНФ является

трудной и с точки зрения уровня локальности используемых алгоритмов.

Из монотонности функционала ψ для сложности ДНФ следует, что ψ -минимальную ДНФ всегда можно выбрать среди тупиковых ДНФ, алгоритм построения которых описан в §6. Однако, как показывает следующее утверждение, ФАЛ могут иметь очень много различных¹ тупиковых ДНФ и даже число различных минимальных ДНФ у них может быть очень велико.

Лемма 7.1. *Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geq 4$, вида*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{s}_3^{\{1,2\}}(x_1, x_2, x_3) \oplus x_4 \oplus \dots \oplus x_n$$

равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \mathfrak{s}_3^{\{1,2\}}(x_1, x_2, x_3), \\ \ell'(x_4, \dots, x_n) &= x_4 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1. \end{aligned}$$

Из линейной зависимости ФАЛ f от БП x_4, \dots, x_n и свойств ФАЛ g, \bar{g} вытекает, что (см. §5) любая простая импликанта K ФАЛ f имеет вид

$$K = K'(x_1, x_2, x_3) \cdot x_4^{\beta_4} \dots x_n^{\beta_n},$$

где либо K' — произвольная простая импликанта K_i , $i = 1, \dots, 6$, ФАЛ g (см. рис. 2.1а и (3.5)) и $(\beta_4, \dots, \beta_n) \in N_{\ell'}$, либо $K' \in \{x_1x_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\}$ и $(\beta_4, \dots, \beta_n) \in \bar{N}_{\ell'}$. Таким образом, сокращенная ДНФ ФАЛ f с «геометрической» точки зрения состоит из 2^{n-3} изолированных точек — ядровых

¹Все ДНФ рассматриваются с точностью до перестановки ЭК и букв в них.

граней размерности 0, — и 2^{n-4} циклов длины 6 (см. §5). Следовательно, любая тупиковая (минимальная) ДНФ ФАЛ f включает в себя систему из 2^{n-3} точек и одно из пяти (соответственно двух) реберных покрытий, связанных с тупиковыми (соответственно минимальными) ДНФ ФАЛ g , приведенными в (4.1)–(4.2) (соответственно (4.1)), для каждого из 2^{n-4} указанных циклов. Поэтому число тупиковых (минимальных) ДНФ ФАЛ f равно $5 \cdot 2^{n-4}$ (соответственно $2 \cdot 2^{n-4}$).

Лемма доказана. \square

Замечание 1. Поскольку длина тупиковой ДНФ у любой ФАЛ из $P_2(n)$ не больше, чем 2^n , а число различных граней куба B^n равно 3^n , то, следовательно, число тупиковых ДНФ у любой ФАЛ из $P_2(n)$ не больше, чем

$$2^n \binom{3^n}{2^n} \leq 2^n \cdot \frac{3^n \cdot 2^n}{(2^n)!} \leq 3^n \cdot 2^n.$$

Замечание 2. Оценку замечания 1 можно уточнить следующим образом. Установим между множеством всех ДНФ от БП $X(n)$ и кубом B^{3^n} изоморфизм, отображающий ДНФ \mathfrak{A} в набор β , для которого $\beta \langle i \rangle = 1$ тогда и только тогда, когда грань куба B^n с номером i , $i \in [1, 3^n]$, входит в покрытие, связанное с \mathfrak{A} . При этом любая тупиковая ДНФ соответствует набору с не более, чем 2^n , единицами, а две различные тупиковые ДНФ одной и той же ФАЛ — попарно не сравнимым наборам. Следовательно, число тупиковых ДНФ у одной и той же ФАЛ из $P_2(n)$ не больше ширины частично упорядоченного множества (A, \leq) , где множество A состоит из всех слоев куба B^{3^n} с номерами $0, 1, \dots, 2^n$, которая, в свою очередь, в силу замечания к лемме 2.1 не больше, чем $\binom{3^n}{2^n}$.

Рассмотрим, в заключение, поведение функций Шеннона для ранга и длины ДНФ, а также сравним их с «типич-

ными», то есть характерными для почти всех ФАЛ, значениями соответствующих функционалов сложности.

Теорема 7.1. *Для любого n , $n \in \mathbb{N}$, и для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, имеют место соотношения¹:*

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, \quad R(n) = n \cdot 2^{n-1}, \quad (7.1)$$

$$\lambda(f) \lesssim \frac{3}{4} 2^{n-1}, \quad R(f) \lesssim \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} \quad (7.2)$$

Доказательство. Нижняя оценка в (7.1) достигается на линейной функции алгебры логики $\ell_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$, для которой совершенная ДНФ длины 2^{n-1} от БП $X(n)$ является ее единственной ДНФ от этих БП (см. §5) и поэтому

$$\lambda(\ell_n) = 2^{n-1}, \quad R(\ell_n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Для получения требуемой в (7.1) верхней оценки возьмем произвольную ФАЛ f из $P_2(n)$ и в соответствии с (2.5) разложим ее по БП x_2, \dots, x_n следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_2, \dots, \sigma_n)} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} \cdot f(x_1, \sigma'') \quad (7.3)$$

Легко видеть, что после замены в разложении (7.3) каждой ФАЛ $f(x_1, \sigma'')$ равной ей ФАЛ из множества $\{0, 1, x_1, \bar{x}_1\}$ и и приведения подобных мы получим ДНФ \mathfrak{A}_f длины не больше, чем 2^{n-1} , что доказывает верхние оценки в (7.1).

Рассмотрим, далее, дискретную векторную случайную величину $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_1)$, состоящую из 2^n независимых случайных величин ξ_α , $\alpha \in B^n$, принимающих значения 0 и 1

¹Асимптотическое неравенство $a(n) \lesssim b(n)$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a(n)/b(n)) \leq 1$, или, что то же самое,

$$a(n) \leq b(n)(1 + o(1)).$$

с вероятностью $\frac{1}{2}$, а также совокупность из 2^{n-1} случайных величин η_β , где $\beta \in B^{n-1}$, вида $\eta_\beta = \xi_{0,\beta} \vee \xi_{1,\beta}$, которые, очевидно, являются независимыми случайными величинами, принимающими значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ соответственно. Заметим, что любая ФАЛ f из $P_2(n)$ является реализацией величины ξ , при которой $\xi_\alpha = f(\alpha)$ для любого α , $\alpha \in B^n$, и что вероятность такой реализации равна 2^{-2^n} . Отсюда следует, что для любого множества \mathcal{Q} , $\mathcal{Q} \subseteq P_2(n)$, отношение $|\mathcal{Q}|/2^{2^n}$, то есть доля тех ФАЛ f из $P_2(n)$, которые принадлежат \mathcal{Q} , равна вероятности того, что реализация случайной величины ξ принадлежит \mathcal{Q} . В частности, вероятность того, что случайная величина

$$\eta = \sum_{\beta \in B^{n-1}} \eta_\beta$$

принимает значение из отрезка I , $I \subseteq [0, 2^n]$, равна доле тех функций алгебры логики f из $P_2(n)$, для которых $\lambda(\mathfrak{A}_f) \in I$. Действительно, при указанной выше интерпретации $\eta_\beta = f(0, \beta) \vee f(1, \beta)$ и, следовательно, $\eta_\beta = 1$ тогда и только тогда, когда ФАЛ вида $x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n} f(x_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ из (7.3) не равна тождественно 0, то есть входит в ДНФ \mathfrak{A}_f в виде отдельной ЭК.

Из независимости случайных величин η_β , $\beta \in B^{n-1}$, вытекает (см., например, [4]), что

$$\mathbb{E}\eta = \sum_{\beta \in B^{n-1}} \mathbb{E}\eta_\beta, \quad \mathbb{D}\eta = \sum_{\beta \in B^{n-1}} \mathbb{D}\eta_\beta,$$

где $\mathbb{E}\theta$ и $\mathbb{D}\theta$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины θ соответственно. Следовательно

$$\mathbb{E}\eta = \frac{3}{4}2^{n-1}, \quad \mathbb{D}\eta = \frac{3}{16}2^{n-1}, \quad (7.4)$$

так как $\mathbb{E}\eta_\beta = \frac{1}{4}$ и $\mathbb{D}\eta_\beta = \frac{3}{16}$ при любом β , $\beta \in B^{n-1}$. Полагая

$$t = \left\lceil n \cdot 2^{\frac{n}{2}} \right\rceil, \quad I = \left(\frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} - t, \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} + t \right)$$

и применяя к случайной величине η с учетом (7.4) неравенство Чебышева [4], получим, что вероятность события $\eta \notin I$, то есть доля тех ФАЛ f из $P_2(n)$, для которых $\lambda(\mathfrak{A}_f) \notin I$, не больше, чем

$$\frac{\mathbb{D}\eta}{t^2} \leq \frac{3}{32n^2}$$

и, следовательно, стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности. Это означает, в частности, что для почти всех ФАЛ f из $P_2(n)$, выполнены соотношения (7.2).

Теорема доказана. \square

§8 Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста

Для управляющей системы (схемы) без памяти, функционирование которой описывается дискретной функцией или, в общем случае, вектор-функцией, может быть сформулирована следующая модель (см. [27]), в рамках которой обычно рассматриваются вопросы ее надежности и контроля. Предполагается, что имеется некоторый «внешний» источник неисправностей (источник помех) И, под действием которого рассматриваемая схема Σ может переходить в одно из своих «неисправных состояний» (схем), определяемых этим источником. Пусть схеме $\Sigma = \Sigma_1$, реализующей функцию $f = f_1$ от входных переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, и источнику неисправностей И соответствуют «неисправные» состояния (схемы) $\Sigma_2, \dots, \Sigma_s$, где схема Σ_i , $i = 2, \dots, s$, реализует функцию f_i от переменных x . При этом все состояния (как

исправное $\Sigma = \Sigma_1$, так и неисправные $\Sigma_2, \dots, \Sigma_s$) разбиваются на классы (функционально) неотличимых состояний, то есть классы эквивалентности по отношению равенства реализуемых функций, и рассматриваются далее с точностью до неотличимости. В дальнейшем, говоря о ненадежной схеме Σ , будем иметь в виду пару (Σ, \mathcal{I}) и (или) соответствующее ей множество схем вместе с теми функциями, которые они реализуют. Для простоты рассмотрения будем считать, что все переменные и функции являются булевскими, хотя многие излагаемые далее результаты без существенных изменений переносятся на случай многозначных функций, случай вектор-функций и другие более общие случаи.

Пусть (Σ, \mathcal{I}) — указанная выше модель ненадежной схемы Σ с возможными состояниями $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$ в которых реализуются ФАЛ $f = f_1, f_2, \dots, f_s$ соответственно от БП $X(n)$, определенные на множестве наборов $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу M , $M \in B^{p,s}$, где

$$M \langle i, j \rangle = f_j(\alpha_i),$$

считая, что i -й строке (j -му столбцу) этой таблицы соответствует набор α_i (соответственно функция f_j и состояние Σ_j). Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется *отделимой по столбцам* (соответственно *строкам*) матрицей. Заметим, что каждому классу неотличимых состояний модели (Σ, \mathcal{I}) соответствует группа одинаковых столбцов матрицы M и рассмотрим отделимую по столбцам матрицу \widehat{M} , состоящую из всех различных столбцов матрицы M . При этом будем считать, что каждый столбец матрицы \widehat{M} связан с соответствующим классом неотличимости состояний модели (Σ, \mathcal{I}) и будем называть \widehat{M} *таблицей контроля* данной модели. Для простоты будем, как правило, предполагать, что все состояния модели (Σ, \mathcal{I}) попарно отличимы, то есть, $M = \widehat{M}$. Это предположение, очевидно, не

ограничивает общности рассуждений.

Пусть, далее, помимо таблицы контроля M для модели (Σ, \mathcal{I}) задана цель контроля, то есть указано множество \mathcal{N} , состоящее из тех неупорядоченных пар различных чисел отрезка $[1, s]$, для которых пары состояний (столбцов матрицы M) с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов. В частности, если \mathcal{N} состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является *диагностика схемы*, а если $\mathcal{N} = \{(1, 2), \dots, (1, t)\}$, то — *проверка исправности схемы*. Множество строк матрицы M с номерами из T , $T \subseteq [1, p]$, называется *тестом для матрицы M относительно множества \mathcal{N}* , или, иначе, *тестом для (M, \mathcal{N})* , если для любой пары (i, j) из \mathcal{N} существует t , $t \in T$, такое, что $M \langle t, i \rangle \neq M \langle t, j \rangle$. Мощность теста называется также его *длиной*.

Заметим, что множество, состоящее из всех строк таблицы контроля, всегда образует тест. Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, называется *тупиковым*, а тест, который имеет минимальную мощность, — *минимальным*. В том случае, когда целью контроля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется *диагностическим* (соответственно *проверяющим*).

Будем говорить, что множество наборов τ , $\tau \subseteq A$, образует *тест для модели (Σ, \mathcal{I}) относительно цели контроля \mathcal{N}* или, иначе, *тест для $(\Sigma, \mathcal{I}, \mathcal{N})$* , если соответствующие наборам из τ строки матрицы M образуют тест для (M, \mathcal{N}) . Все введенные выше понятия, которые касаются тестов для таблиц, без изменений переносятся на случай тестов для ненадежных схем.

Для описания тестов можно ввести функцию, аналогичную функции покрытия из §6. Пусть M , $M \in B^{p,s}$, — отделимая по столбцам матрица, а \mathcal{N} — связанная с ней цель

контроля. Сопоставим i -й строке, $i \in [1, p]$, матрицы M БП y_i , а каждому набору β , $\beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1, \dots, y_p)$ — множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1, p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta \langle i \rangle = 1$. Рассмотрим ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует тест для (M, \mathcal{N}) , и будем называть эту ФАЛ *функцией теста* для (M, \mathcal{N}) . Сопоставим паре (M, \mathcal{N}) матрицу \mathcal{M} из множества $B^{p, S}$, $S = |\mathcal{N}|$, столбцы которой пронумерованы парами из \mathcal{N} , а ее столбец с номером $(i, j) \in \mathcal{N}$ получается в результате поразрядного сложения по модулю 2 столбцов с номерами i и j матрицы M . Заметим, что строки матрицы M с номерами из множества T , $T \subseteq [1, p]$, образуют тест (тупиковый тест, минимальный тест) для пары (M, \mathcal{N}) тогда и только тогда, когда строки матрицы \mathcal{M} с номерами из T образуют покрытие (тупиковое покрытие, покрытие минимальной длины) матрицы \mathcal{M} . Отсюда вытекает, в частности, что ФАЛ теста F для пары (M, \mathcal{N}) является, одновременно, ФАЛ покрытия для матрицы \mathcal{M} и обратно, а значит для нее в силу леммы 6.1 справедливо следующее утверждение.

Лемма 8.1. *Функция теста $f(y_1, \dots, y_p)$ для отдельной по столбцам матрицы M , $M \in B^{p, s}$, и цели контроля \mathcal{N} может быть задана с помощью КНФ*

$$f(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{(i, j) \in \mathcal{N}} \left(\bigvee_{\substack{1 \leq t \leq p \\ M \langle t, i \rangle \neq M \langle t, j \rangle}} y_t \right), \quad (8.1)$$

Следствие. *Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1} \cdots y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $f(y_1, \dots, y_p)$, получающаяся из КНФ (8.1) в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ и обратно.*

На данной лемме основан следующий алгоритм построения всех тупиковых тестов для матрицы M относительно цели контроля \mathcal{N} :

1. выписываем для функции теста КНФ вида (8.1);
2. раскрывая в ней скобки и приводя подобные, получаем сокращенную ДНФ функции теста;
3. сопоставляем каждой элементарной конъюнкции этой сокращенной ДНФ тупиковый тест.

Так, например, для построения всех тупиковых диагностических тестов матрицы M вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

выпишем соответствующую ей КНФ (8.1):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \cdot (y_2 \vee y_4) \cdot (y_1 \vee y_3 \vee y_4).$$

Раскрывая в этой КНФ скобки и приводя подобные, получим сокращенную ДНФ для функции теста:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_2 \vee y_1 y_4 \vee y_2 y_3 \vee y_2 y_4 \vee y_3 y_4.$$

Следовательно, тупиковыми диагностическими тестами матрицы M являются множества ее строк с номерами

$$\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

Для упрощения преобразований, связанных с применением описанного алгоритма, вместо исходной матрицы M можно рассматривать отделимую по строкам матрицу \check{M} , получающуюся из M удалением повторных вхождений одинаковых строк. При этом, очевидно, любой тупиковый тест

матрицы M получается из тупикового теста той же длины матрицы \widehat{M} в результате замены каждой его строки равной ей строкой матрицы M и обратно.

Рассмотрим, далее, некоторые оценки длины диагностических тестов для матриц с заданным числом столбцов.

Лемма 8.2. *Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s - 1)$.*

Доказательство. Пусть $M \in B^{p,s}$ и пусть, для определенности, первые t строк матрицы M образуют ее тупиковый диагностический тест. Очевидно, что в этом случае все столбцы матрицы \widehat{M} , состоящей из первых t строк матрицы M , различны и, следовательно, $s \leq 2^t$, то есть $t \geq \lceil \log s \rceil$, поскольку число различных булевых столбцов высоты t равно 2^t . Требуемая нижняя оценка длины диагностического теста установлена.

Докажем теперь, что $t \leq (s - 1)$. Для этого на множестве столбцов матрицы \widehat{M} при любом q , $q \in [1, t]$, определим отношение эквивалентности \sim_q так, что $m' \sim_q m''$ тогда и только тогда, когда столбцы m' и m'' матрицы \widehat{M} совпадают в строках с номерами из отрезка $[1, q]$. Будем считать, по определению, что \sim_0 — тривиальное отношение с одним классом эквивалентности, а число классов эквивалентности по отношению \sim_q , где $q \in [1, t]$, будем обозначать через $\theta(q)$.

Из общих свойств отношений эквивалентности (см. §1) вытекает, что при любом q , $q \in [1, t)$, каждый класс эквивалентности по отношению \sim_q либо является классом эквивалентности по отношению \sim_{q+1} , либо представляет собой объединение двух таких классов и, следовательно, $\theta(q) \leq \theta(q + 1)$. В силу тупиковости теста полученное неравенство является строгим, так как равенство $\theta(q) = \theta(q + 1)$

возможно тогда и только тогда, когда каждый класс эквивалентности отношения \sim_q является классом эквивалентности отношения \sim_{q+1} и обратно, то есть строка с номером $(q + 1)$ является «лишней» в рассматриваемом тесте.

Из диагностичности теста вытекает, что $\theta(t) = s$, и, таким образом, выполняются соотношения

$$1 = \theta(0) < \theta(1) < \dots < \theta(t) = s,$$

из которых следует, что $t \leq (s - 1)$.

Лемма доказана. \square

Замечание. Указанные в лемме границы достигаются: нижняя — на любой отделимой по столбцам матрице из $B^{p,s}$, где $p = \lceil \log s \rceil$, а верхняя — на матрице из $B^{s-1,s}$, все столбцы которой различны и содержат не более одной единицы (обе матрицы имеют единственный диагностический тест, состоящий из всех строк).

Следующее утверждение характеризует «типичное» значение длины диагностического теста, то есть длину минимального диагностического теста у «почти всех» таблиц контроля.

Лемма 8.3. Пусть $\varphi(s)$, $t(s)$ и $p(s)$ — целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента s , для которых

$$t(s) = \lceil 2 \log s \rceil + \varphi(s), \quad p(s) \geq t(s), \quad \varphi(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty.$$

Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ первые $t(s)$ строк образуют диагностический тест.

Доказательство. Заметим, что все матрицы из $B^{p,s}$, где $p = p(s)$, у которых первые $t = t(s)$ строк образуют диагностический тест, отделимы по столбцам. Легко видеть также,

что число таких матриц равно

$$\begin{aligned} 2^t (2^t - 1) \cdots (2^t - s + 1) \cdot 2^{(p-t)s} &= \\ &= 2^{ps} \left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \cdots \left(1 - \frac{(s-1)}{2^t}\right), \end{aligned}$$

а их доля среди всех отделимых по столбцам матриц из $V^{p,s}$ не меньше, чем

$$\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \cdots \left(1 - \frac{(s-1)}{2^t}\right) \geq 1 - \frac{s^2}{2^t} \geq 1 - 2^{-2\varphi(s)},$$

и, следовательно, стремиться к 1 при s стремящемся к бесконечности.

Лемма доказана. \square

Следствие. Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции $\varphi(s)$ у почти всех отделимых по столбцам матриц из $V^{p,s}$ длина минимального диагностического теста не больше, чем $2 \log s + \varphi(s)$

Глава 2

Основные классы управляющих систем. Оценка числа схем, их структурные представления

§1 Основные понятия из теории графов, сетей, схем

Понятие графа, которое обобщает понятие бинарного отношения (см. §1 гл. 1), часто используется для описания структурных моделей, связанных с вычислениями, представлениями или реализациями дискретных функций. Напомним основные понятия и обозначения из теории графов, сетей и схем, а также сформулируем некоторые известные результаты (см., например, [3, 26, 8]).

Пару (V, E) , где E — сочетание (с возможными повторениями) над множеством упорядоченных и неупорядоченных пар из V , будем, как обычно, называть *графом с множеством вершин* $V = V(G)$ и *множеством ребер* $E = E(G)$. При этом длина сочетания E считается числом ребер графа G и обозначается через $|E|$. Упорядоченные (неупорядоченные) пары вершин называются *ориентированными ребрами* или, иначе *дугами* (соответственно *неориентированными ребрами*), одинаковые пары — *параллельными ребрами* (*дугами*), дуги, отличающиеся порядком вершин, — *противоположными дугами*, а пары из совпадающих вершин — *петлями*. Граф из ориентированных (неориентированных)

ребер считается *ориентированным* (соответственно *неориентированным*). Заметим, что бинарное отношение представляет собой ориентированный граф без параллельных дуг. При этом симметричное антирефлексивное отношение можно рассматривать как неориентированный граф без параллельных ребер и петель.

Будем говорить, что ориентированное (неориентированное) ребро *инцидентно* составляющим его вершинам, а дуга (u, v) *исходит* или, иначе, *выходит* из вершины u и *заходит* или, иначе, *входит* в вершину v . Число ребер, инцидентных вершине v (входящих в v , выходящих из v) в графе G , называется *степенью* (соответственно *полустепенью захода*, *полустепенью исхода*) вершины v в графе G и обозначается через $d_G(v)$ (соответственно $d_G^+(v)$, $d_G^-(v)$). Заметим, что

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|, \quad (1.1)$$

и что $d_G(v) = d_G^+(v) + d_G^-(v)$ ($d_G(v) = d_G^+(v) = d_G^-(v)$) в случае ориентированного (соответственно неориентированного) графа G . Вершина v называется *изолированной вершиной* (*стоком*, *истоком*) графа G , если $d_G(v) = 0$ (соответственно $d_G^-(v) = 0$, $d_G^+(v) = 0$).

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. При этом G' считается *подграфом графа G , натянутым на множество вершин V'* , если E' включает в себя все входящие в E пары вершин из V' . Подграф, содержащий все вершины исходного графа, называется его *остовным подграфом*. Легко видеть, что подграф всегда можно получить из исходного графа в результате (многократного) применения операций *удаления ребра* или *удаления вершины*. При этом удаление вершины, как обычно, подразумевает удаление всех инцидентных ей ребер.

При определении понятий, связанных с «движениями» по графу, ограничимся случаем ориентированных графов, считая, как обычно, что неориентированное ребро эквивалентно двум противоположным дугам, связанным с той же парой вершин. Последовательность C , состоящая из ребер e_1, e_2, \dots, e_n , где $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ при всех $i, i \in [1, n]$, называется $(v_1 - v_{n+1})$ -*путем* графа G . При этом вершина v_1 (v_{n+1}) считается *начальной* (соответственно *конечной*) вершиной этого пути, вершины v_2, \dots, v_n — его *внутренними* вершинами, а число n — его *длиной*. Если все ребра пути различны (как элементы соответствующего сочетания), то он называется *цепью*, а если, кроме того, различны все его вершины, то — *простой цепью*. Если начальная и конечная вершины пути (цепи) C совпадают, то C считается *замкнутым путем* (соответственно *циклом*). Цикл, в котором все вершины, кроме начальной и конечной, различны, называется *простым циклом*.

Будем говорить, что *вершина u достижима из вершины v в графе G* , где $u, v \in V(G)$, если $u = v$ или в G существует $(v - u)$ -цепь. Заметим, что отношение достижимости вершин графа G является рефлексивным и транзитивным, а если G — неориентированный граф, то и симметричным. Следовательно, множество вершин графа G распадается на классы эквивалентности по отношению их достижимости в графе \widehat{G} , который получается из графа G заменой каждой дуги на соответствующее неориентированное ребро ($G = \widehat{G}$, если G — неориентированный граф). При этом подграф графа G , натянутый на каждый такой класс вершин, называется *связной компонентой* графа G , а множество всех его связных компонент обозначается через $c(G)$. Граф G называется *связным*, если $|c(G)| = 1$.

Напомним, что

$$|E(G)| - |V(G)| + |c(G)| \geq 0 \quad (1.2)$$

и что левая часть (1.2) называется *цикломатическим числом* графа G . Напомним также, что это число равно максимальному числу линейно независимых относительно операции симметрической разности¹ остовных подграфов графа G , состоящих из одного простого цикла и изолированных вершин.

Неориентированный (ориентированный) граф, не имеющий циклов (соответственно ориентированных циклов), называется *ациклическим*. Заметим, что в ориентированном ациклическом графе G всегда есть как стоки, так и истоки. При этом для каждой его вершины v можно определить ее *глубину* (соответственно *исходящую глубину*), как максимальную длину $(u - v)$ - (соответственно $(v - u)$ -) путей графа G , где u — один из истоков (соответственно, стоков) G . Легко видеть, что отношение достижимости является отношением частичного порядка на множестве вершин ориентированного ациклического графа и обратно.

Неориентированный связный ациклический граф называется *деревом*. Для дерева G , как известно, имеет место равенство

$$|E(G)| = |V(G)| - 1. \quad (1.3)$$

Дерево с выделенной вершиной (*корнем*) называется *корневым деревом*, а все отличные от корня вершины степени 1 этого дерева считаются его *листьями*. Ориентированный граф, который получается из корневого дерева заменой каждого его неориентированного ребра на соответствующую дугу, «направленную» к корню, называется *ориентированным деревом*.

¹Под симметрической разностью графов G_1 и G_2 понимается граф G , для которого

$$\begin{aligned} V(G) &= V(G_1) \cup V(G_2), \\ E(G) &= (E(G_1) \cup E(G_2)) \setminus (E(G_1) \cap E(G_2)). \end{aligned}$$

Дерево (ориентированное дерево) D , являющееся остовным подграфом графа G , называется его *остовным поддеревом*, а дерево D' , которое получается из D в результате «подсоединения» всех не вошедших в него ребер G к своим «начальным» вершинам, — *остовным наддеревом* графа G . Очевидно, что при этом граф G может быть получен из дерева D' в результате присоединения некоторых вершин степени 1 (листьев) к другим его вершинам. Заметим, что любой неориентированный связный граф, а также любой ориентированный ациклический граф с 1 стоком всегда имеют остовные поддеревья и наддеревья соответствующего типа.

Граф, вершинам и (или) ребрам которого сопоставлены определенные символы (пометки), считается *помеченным графом*. Примером такого графа является, в частности, корневое дерево. Другим примером помеченного графа является ациклический граф с *монотонной нумерацией вершин*, когда для любой дуги номер вершины, из которой она исходит, больше номера вершины, в которую эта дуга входит. Ориентированный граф G называется *упорядоченным*, если для любой его вершины v , $v \in V(G)$, все ребра, входящие в v , упорядочены и пронумерованы числами $1, 2, \dots, d_G^+(v)$. Будем считать, что ребра и вершины остовного поддерева, а также ребра связанного с ним остовного наддерева помеченного графа имеют те же самые пометки, которые они имели в исходном графе. Это означает, в частности, что остовное наддерево ориентированного ациклического упорядоченного графа является упорядоченным.

Графы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ называются *изоморфными*, если существуют такие взаимнооднозначные отображения $\varphi : V' \rightarrow V''$ и $\psi : E' \rightarrow E''$, при которых вершины и неориентированные ребра (дуги) G' переходят в вершины и неориентированные ребра (соответственно дуги) G'' с сохранением отношения инцидентности (соответственно, исхода, захода) вершин и ребер, а также всех пометок. Для

(конечного) множества графов \mathcal{G} через $|\mathcal{G}|$ будем обозначать число попарно неизоморфных графов в \mathcal{G} . Известно, что

$$|\mathfrak{D}(q)| \leq 4^q, \quad (1.4)$$

где $\mathfrak{D}(q)$ — множество упорядоченных ориентированных корневых деревьев с не более, чем q ребрами.

Введем теперь общие определения и обозначения, связанные с сетями и «абстрактными» схемами, с реализацией ими функций, а также с некоторыми структурными представлениями схем.

Набор вида $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$, где G — граф, а V' и V'' — выборки из множества $V(G)$ длины p и q соответственно, причем выборка V' является выборкой без повторений, называется (p, q) -сетью. При этом выборка V' (выборка V'') считается *входной* (соответственно *выходной*) *выборкой*, а ее i -я вершина называется i -м *входным* (соответственно *выходным*) *полосом* или, иначе, i -м *входом* (соответственно *выходом*) сети \mathcal{G} . Вершины, не участвующие во входной и выходной выборках сети, считаются ее *внутренними* вершинами.

Для того, чтобы выделить входную и выходную выборки сети $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$ будем записывать ее в виде $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V'; V'')$ или $\mathcal{G} = G(V'; V'')$. Сеть, в которой входная и выходная выборки совпадают (не совпадают), называется *сетью с неразделенными* (соответственно *с разделенными*) *полосами*. При этом в случае неразделенных полюсов сеть $\mathcal{G} = (G; V; V) = \mathcal{G}(V; V)$ будем записывать в виде $\mathcal{G} = (G; V) = \mathcal{G}(V)$. Как правило, входы и выходы (полоса) сети имеют специальные пометки, которые отличают эти вершины от других вершин сети и указываются вместо них в соответствующих выборках. Таким образом, сети можно считать специальным частным случаем помеченных графов.

Примером сети является корневое дерево, входами которого считаются его листья, а выходом — корень. При этом

порядок листьев во входной выборке ориентированного упорядоченного корневого дерева \mathcal{D} задается их «естественной» нумерацией τ , отображающей множество листьев дерева \mathcal{D} в \mathbb{N} так, что $\tau(v') < \tau(v'')$ тогда и только тогда, когда $k' < k''$, где k' и k'' — номера дуг, по которым цепи, соединяющие листья v' и v'' соответственно с корнем \mathcal{D} , входят в свою первую общую вершину.

Под «абстрактной» схемой понимается сеть, часть пометок которой составляют входные переменные и в каждой вершине которой реализуется функция (столбец из функций) от этих переменных. При этом считается, что сама схема реализует систему (матрицу), состоящую из функций (соответственно столбцов функций), реализованных на ее выходах. В качестве выходных пометок схемы используются, как правило, специальные выходные переменные, а схема Σ с входными переменными (входами) x_1, \dots, x_n и выходными переменными z_1, \dots, z_m записывается в виде $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$.

Схему, которая реализует систему ФАЛ $Q_n(J_n, \mu_n)$ будем называть *дешифратором* (соответственно *дизъюнктивным дешифратором*, *мультиплексором*) *порядка* n . Схемы, реализующие равные системы функций, называются *эквивалентными*. Предполагается, что изоморфные схемы всегда эквивалентны, и поэтому для любого конечного множества схем \mathcal{U} выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}\| \leq |\mathcal{U}|, \quad (1.5)$$

где $\|\mathcal{U}\|$ — число попарно не эквивалентных схем в \mathcal{U} .

В основе большинства структурных преобразований схем лежит ряд операций, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется *тоже-*

дественной вершиной кратности k , $k \geq 0$, если она одновременно является k -кратным выходом данной схемы. При этом кратность один, как правило, не указывается, а тождественная вершины кратности 0 считается *фиктивной*.

Также, как и в случае формул, простейшим видом суперпозиции схем является операция *переименования входов схемы* с возможным их отождествлением. Определим, далее, операцию *снятия (дублирования) выхода схемы*, то есть удаления с него имеющейся (соответственно добавления к нему новой) выходной пометки и другим простейшим случаем суперпозиции схем будем считать операцию *переименования выходов схемы* с возможным их дублированием или снятием. Введем, наконец, операцию *объединения схем*, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, как обычное объединение соответствующих графов (см. рис. 3.2а) и тоже будем относить ее к простейшим видам суперпозиции.

Будем говорить, что схема Σ' является результатом *операции присоединения входа x_i к выходу z_j* в схеме $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$, если:

1. $V(\Sigma') = V(\Sigma) \setminus \{u\}$, где u — вершина, связанная с входом x_i ;
2. множество $E(\Sigma')$ является результатом замены вершины u вершиной v , связанной с выходом z_j , в ребрах множества $E(\Sigma)$;
3. $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n; z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_m)$.

Заметим, что в общем случае операция присоединения может привести к образованию нежелательных «обратных связей» и поэтому во многих классах схем на эту операцию накладываются определенные ограничения (см. §3). При-

мер операции присоединения входа x_n к выходу z_1 в схеме $\Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ показан на рис. 3.2b.

Будем говорить, что схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, то есть является *суперпозицией схем* Σ'' и Σ' без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ' . Указанная суперпозиция считается *бесповторной*, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ' . Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется *стыковкой*, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ' и каждый вход Σ'' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Заметим, что операции объединения схем и переименования их входов (выходов) являются частными случаями введенной операции суперпозиции. Действительно, для объединения схем это очевидно, а любое переименование выходов (входов) схемы Σ можно задать суперпозицией вида $\Sigma''_2(\Sigma''_1(\Sigma))$ (соответственно $\Sigma(\Sigma'_1(\Sigma'_2))$), где схемы Σ'_i и Σ''_i , $i = 1, 2$, состоят из тождественных вершин различной кратности. Заметим также, что суперпозиция общего вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ всегда может быть сведена к стыковке вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где схемы $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' соответственно добавлением тождественных вершин и переименованием выходов. Стыковка вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, в свою очередь, может быть сведена к бесповторной стыковке вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где схемы $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' снятием выходов и отождествлением входов соответственно.

Для суперпозиции схем вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ характерно, как правило, то, что схема Σ реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или части) функций, реализованных схемой Σ' вместо (всех или части) входных переменных схемы Σ'' . В случае стыковки, например, это означает, что схема Σ реализует набор

функций вида $\mathcal{F}''(\mathcal{F}')$, где \mathcal{F}'' и \mathcal{F}' — наборы функций, реализованные схемами Σ'' и Σ' соответственно. Суперпозиция $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ считается *правильной*, если схема Σ обладает указанным свойством, и *корректной*, если, кроме того, в любой вершине Σ , которая соответствует выходной вершине Σ' , реализуется та же самая функция, что и в Σ' . Заметим, что правильная суперпозиция вида $\Sigma''(\Sigma')$ автоматически является корректной, если кратность любой выходной вершины Σ' больше числа присоединяемых к ней входов Σ'' . Заметим также, что с содержательной точки зрения корректность суперпозиции вида $\Sigma''(\Sigma')$ позволяет одновременно использовать выходы Σ' в других суперпозициях.

§2 Представление формул с помощью деревьев. Оптимизация подобных формул по глубине

В §1 главы 1 дано индуктивное определение формулы и реализуемой ею функции. Рассмотрим способ представления формул алгебры логики с помощью ориентированных упорядоченных деревьев.

Пусть, по-прежнему, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_b\}$ — базис, где ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$, зависит от k_i , $k_i \geq 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geq 2$. Предполагается, что \mathcal{B} — полный базис (см. §1 главы 1) и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом $\mathcal{B}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Сопоставим каждому ФС φ_i , $i = 1, \dots, b$, функциональный элемент (ФЭ) \mathcal{E}_i , имеющий k_i входов, причем входу с номером j соответствует j -я БП x_j ФАЛ φ_i , где $j = 1, \dots, k_i$, и один выход, на котором эта ФАЛ реализуется (см. рис. 2.1а). Упрощенный вариант изображения ФЭ \mathcal{E}_i в виде вершины графа с пометкой φ_i , в которую входят k_i упорядоченных,

то есть пронумерованных числами $1, \dots, k_i$ дуг, показан на рис. 2.1б. При этом предполагается, что дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$, соответствует j -му входу ФЭ \mathcal{E}_i . В дальнейшем мы, как правило, не будем делать различий между функциональным символом φ_i и функциональным элементом \mathcal{E}_i .

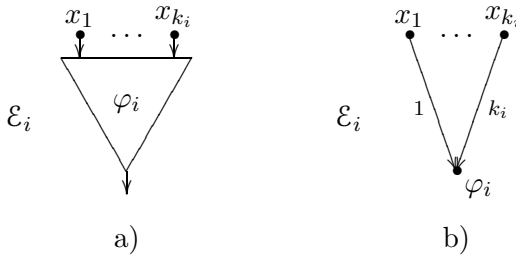


Рис. 2.1: функциональный элемент \mathcal{E}_i

Множество всех формул над базисом \mathcal{B} будем обозначать через $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$ и положим $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_0}^{\Phi} = \mathcal{U}^{\Phi}$. Индукцией по глубине каждой формуле глубины q над \mathcal{B} можно сопоставить упорядоченное ориентированное корневое дерево глубины q , каждому листу которого приписана БП из \mathcal{X} , а каждой внутренней вершине — ФС из \mathcal{B} . Формуле x_j глубины 0 сопоставим «тривиальное» дерево с единственной вершиной, являющейся корнем и листом одновременно, которой приписана БП x_j (см. рис. 2.2а). Формуле \mathcal{F} вида

$$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}), \tag{2.1}$$

которая является формулой глубины $(q + 1)$ над \mathcal{B} , где

$$q = \max \{q_1, \dots, q_{k_i}\}, \tag{2.2}$$

а q_j , $j = 1, \dots, k_i$, — глубина главной подформулы \mathcal{F}_j формулы \mathcal{F} , сопоставим дереву \mathcal{D} глубины $(q + 1)$ с корнем v ,

показанное на рис. 2.2b, где \mathcal{D}_j , $j = 1, \dots, k_i$ — дерево глубины q_j с корнем v_j , которое соответствует формуле \mathcal{F}_j .

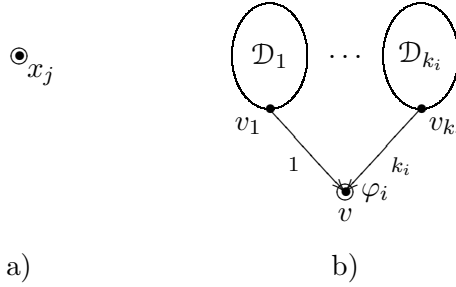


Рис. 2.2: представление формулы деревом

Заметим, что формула \mathcal{F} по сопоставленному ей дереву \mathcal{D} восстанавливается однозначно, и что при этом поддеревья дерева \mathcal{D} взаимнооднозначно сопоставляются подформулам формулы \mathcal{F} . На рис. 2.3a показано дерево, соответствующее формуле

$$\overline{((x_1 \vee x_2) \vee x_3)} \vee (x_3 (x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2), \quad (2.3)$$

которая является формулой глубины 4 над базисом B_0 и реализует ФАЛ $\mathfrak{S}_3^{\{0,2,3\}}$.

Для удобства будем считать, что в \mathcal{U}_B^Φ входят не только отдельные формулы, но и упорядоченные системы (наборы) формул над базисом B , что каждая такая система реализует набор, состоящий из ФАЛ, реализуемых ее формулами, и что этой системе формул соответствует система из деревьев, сопоставленных ее формулам.

Заметим, что ранг $R(\mathcal{F})$ формулы \mathcal{F} равен числу листьев связанного с ней дерева \mathcal{D} , ее сложность $L(\mathcal{F})$ равна числу остальных вершин \mathcal{D} , а ее глубина $D(\mathcal{F})$ — глубине его корня. Заметим также, что порядок вхождения БП в

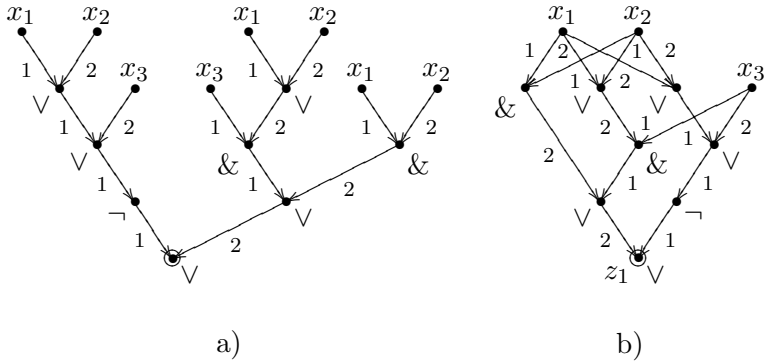


Рис. 2.3: представление формулы (2.3) деревом и квазидеревом

запись формулы \mathcal{F} при ее просмотре слева направо соответствует последовательности появления БП на листьях связанного с ней дерева, просматриваемых в «естественном» порядке (см. §1).

Рассмотрим теперь некоторые соотношения между параметрами формул над базисом B_0 . Заметим, что представляя формулы деревьями, такие соотношения можно доказывать более простым и наглядным способом. Так, индукцией по глубине формулы-дерева легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in U^\Phi$, выполняются неравенства*

$$R(\mathcal{F}) \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})}. \quad (2.4)$$

Следствие.

$$D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil. \quad (2.5)$$

Замечание. Ранг формулы \mathcal{F} на единицу больше числа Φ Э $\&$, \vee в ней, и поэтому первое из неравенств (2.4) переходит в равенство, если $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\{\&, \vee\}}^\Phi$.

Формулы, получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств коммутативности и ассоциативности (см. §1 гл. 1), называются *подобными*. Легко видеть, что подобные формулы получаются друг из друга перестановкой аргументов и изменением порядка выполнения однотипных двуместных базисных операций, образующих соответствующую многоместную операцию, и поэтому могут отличаться друг от друга только глубиной.

Заметим, что сложность характеризует время вычисления формулы на одном процессоре, а глубина — время ее параллельного вычисления на неограниченном числе процессоров. Поэтому оптимизация подобных формул по глубине является частным случаем «распараллеливания» вычислений.

Формулы из \mathcal{U}^Φ можно оптимизировать также по числу отрицаний с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств де Моргана

$$\overline{\overline{x_1}} = x_1, \quad \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} = \overline{x_1 \vee x_2}, \quad \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = \overline{x_1 \cdot x_2} \quad (2.6)$$

и преобразований подобия. Первое из тождеств (2.6) используется при этом для устранения нескольких последовательных вхождений ФС \neg в оптимизируемой формуле, а два других — для выполнения перехода

$$\mathcal{F}' = \overline{\overline{\mathcal{F}_1} \circ \dots \circ \overline{\mathcal{F}_t}} = \overline{\overline{\mathcal{F}_1} \diamond \dots \diamond \overline{\mathcal{F}_t}},$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$ и $t \geq 2$, во всех ее максимальных по включению подформулах вида \mathcal{F}' , формируемых с помощью преобразований подобия.

Формула, в которой все ФС \neg встречаются только над БП, называется *формулой с поднятыми отрицаниями*. Легко видеть, что с помощью тождеств (2.6) любую формулу

из \mathcal{U}^Φ можно преобразовать в формулу с поднятыми отрицаниями. Заметим, что преобразования подобия и эквивалентные преобразования формул на основе тождеств (2.6) не изменяют ранг этих формул и, следовательно, число ФС $\{\&, \vee\}$ в них.

Лемма 2.2. Пусть \mathcal{F} — формула вида $x_1 \circ \dots \circ x_t$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, и пусть для целых неотрицательных чисел d, d_1, \dots, d_t выполнено неравенство $2^{d_1} + \dots + 2^{d_t} \leq 2^d$. Тогда существует подобная \mathcal{F} формула $\check{\mathcal{F}}$, в которой исходящая глубина входа x_i , $i = 1, \dots, t$, не больше, чем $d - d_i$.

Доказательство. Перестановкой и переименованием БП (аргументов) в формуле \mathcal{F} можно добиться того, чтобы выполнялись неравенства:

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_t. \quad (2.7)$$

Пусть теперь \mathcal{F}' — формула вида $x_1 \circ \dots \circ x_{2^d}$, которой соответствует полное двоичное d -ярусное дерево, а формула \mathcal{F}'' получается из \mathcal{F}' удалением последних $(2^d - 2^{d_1} - \dots - 2^{d_t})$ вхождений БП вместе с теми ФС, которые с ними связаны. В силу (2.7) первые 2^{d_1} вхождений БП в \mathcal{F}'' составляют подформулу \mathcal{F}_1 , которой соответствует полное двоичное d_1 -ярусное дерево, содержащее 2^{d_1} вхождений БП в \mathcal{F}'' , следующие 2^{d_2} вхождений БП в \mathcal{F}'' — подформулу \mathcal{F}_2 , которой соответствует полное двоичное d_2 -ярусное дерево, и так далее, вплоть до последних 2^{d_t} вхождений БП в \mathcal{F}'' , составляющих подформулу \mathcal{F}_t , которой соответствует полное двоичное d_t -ярусное дерево. Обозначим через $\check{\mathcal{F}}$ формулу, которая получается из \mathcal{F}'' заменой подформулы \mathcal{F}_i на БП x_i , $i = 1, \dots, t$. Заметим, что $\check{\mathcal{F}}$ подобна \mathcal{F} и что исходящая глубина БП x_i в $\check{\mathcal{F}}$ не больше чем $d - d_i$, то есть $\check{\mathcal{F}}$ является искомой формулой.

Лемма доказана. □

Следствие. Для ЭК или ЭД \mathcal{F}' существует подобная формула $\check{\mathcal{F}}'$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}') = \lceil \log(L(\mathcal{F}') + 1) \rceil. \quad (2.8)$$

Действительно, если $\mathcal{F}' = \bar{x}_1 \circ \dots \circ \bar{x}_p \circ x_{p+1} \circ \dots \circ x_t$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, то искомая формула $\check{\mathcal{F}}'$ получается подстановкой \bar{x}_i вместо x_i , $i = 1, \dots, p$, в формулу $\check{\mathcal{F}}$, которая строится по доказанной лемме для формулы $\mathcal{F} = x_1 \circ \dots \circ x_t$ и целых неотрицательных чисел:

$$\begin{aligned} d &= \lceil \log(L(\mathcal{F}') + 1) \rceil = \lceil \log(p + t) \rceil, \\ d_1 &= \dots = d_p = 1, \quad d_{p+1} = \dots = d_t = 0. \end{aligned}$$

При этом в силу (2.5) оценка (2.8) неумлучшаема.

Для каждой формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, индукцией по глубине определим величину $\text{Alt}(\mathcal{F})$ так, что:

1. $\text{Alt}(\mathcal{F}) = 0$, если \mathcal{F} — ЭК или ЭД;
2. $\text{Alt}(\bar{\mathcal{F}}) = \text{Alt}(\mathcal{F}) + 1$, если \mathcal{F} не является переменной;
3. $\text{Alt}(\mathcal{F}_1 \circ \dots \circ \mathcal{F}_t) = \max\{\text{Alt}(\mathcal{F}_1), \dots, \text{Alt}(\mathcal{F}_t)\} + 1$, где $t \geq 2$ и $\circ \in \{\&, \vee\}$, если ни одна из формул $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$ не является формулой вида $\mathcal{F}' \circ \mathcal{F}''$ и хотя бы одна из них не является буквой.

Величину $\text{Alt}(\mathcal{F})$ будем называть *альтернированием* формулы \mathcal{F} . Легко видеть, что альтернирование формулы \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями равно максимальному числу изменений типов $\Phi\&$ и \vee в цепях дерева, соответствующего формуле \mathcal{F} . Очевидно также, что альтернирование любой (отличной от ЭК и ЭД) ДНФ или КНФ равно 1.

Лемма 2.3. Для любой формулы \mathcal{F} из \mathcal{U}^Φ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}). \quad (2.9)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по альтернированию формулы \mathcal{F} . Если $\text{Alt}(\mathcal{F}) = 0$, то исконая формула $\check{\mathcal{F}}$ строится в соответствии со следствием из леммы 2.2 и удовлетворяет неравенству (2.9) в силу (2.8).

Пусть неравенство (2.9) справедливо для любой формулы \mathcal{F}' такой, что $\text{Alt}(\mathcal{F}') \leq (a-1)$, где $a \geq 1$, и пусть формула \mathcal{F} имеет альтернирование a . Если $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}'}$, то $\text{Alt}(\mathcal{F}') \leq (a-1)$, а в качестве исконой формулы можно взять формулу $\check{\mathcal{F}} = \overline{\check{\mathcal{F}'}}$, где $\check{\mathcal{F}'}$ — подобная \mathcal{F}' формула, которая удовлетворяет (2.9) и существует в силу индуктивного предположения. В остальных случаях представим формулу \mathcal{F} в виде:

$$\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t),$$

где $t \geq 2$, формула $\Phi(y_1, \dots, y_t)$ при некотором $\circ, \circ \in \{\&, \vee\}$, имеет вид $y_1 \circ \dots \circ y_t$, а альтернирование подформулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$ формулы \mathcal{F} не больше, чем $(a-1)$. Положим

$$d = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + 1 \quad \text{и} \quad d_i = \lceil \log(L(\mathcal{F}_i) + 1) \rceil,$$

где $i = 1, \dots, t$, а затем для каждой формулы \mathcal{F}_i построим по индуктивному предположению подобную ей формулу $\check{\mathcal{F}}_i$ такую, что

$$D(\check{\mathcal{F}}_i) \leq d_i + (a-1).$$

Так как при этом

$$2^d \geq 2(L(\mathcal{F}) + 1) = \sum_{i=1}^t 2(L(\mathcal{F}_i) + 1) \geq \sum_{i=1}^t 2^{d_i},$$

то построим по лемме 2.2 подобную формуле Φ формулу $\check{\Phi}$, в которой БП $y_i, i = 1, \dots, t$, имеет исходящую глубину не больше, чем $d - d_i$. Следовательно, формула

$$\check{\mathcal{F}} = \check{\Phi}(\check{\mathcal{F}}_1, \dots, \check{\mathcal{F}}_t),$$

подобна формуле \mathcal{F} , имеет глубину не больше, чем

$$d + (a - 1) = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + a$$

и поэтому удовлетворяет неравенству (2.9).

Лемма доказана. \square

Следствие. Для любой ДНФ или КНФ \mathfrak{A} существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

Замечание. Для построенной в лемме формулы $\check{\mathcal{F}}$ наряду с (2.9) выполняется также более точное неравенство

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(R(\mathcal{F}) + t) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}),$$

где t — число ФС \neg над переменными формулы \mathcal{F} .

§3 Схемы из функциональных элементов и операции над ними. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим теперь более общую по сравнению с формулами модель — модель схем из функциональных элементов (СФЭ), в которой последовательность операций суперпозиции базисных ФАЛ задается с помощью ориентированного ациклического графа, обобщающего дерево, и где возможно многократное использование промежуточных результатов. По существу СФЭ получается из системы деревьев (системы формул) в результате отождествления некоторых изоморфных поддеревьев (совпадающих подформул).

Пусть \mathcal{Z} — счетный упорядоченный алфавит (выходных) БП, который не имеет общих БП с алфавитом \mathcal{X} .

Определение. Схемой из функциональных элементов над базисом B называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть Σ , входная выборка которой состоит из всех истоков Σ , а вершины помечены следующим образом:

1. каждому входу (выходу) Σ сопоставлена БП из X (соответственно Z), являющаяся пометкой связанной с ним вершины, причем различным входам (выходам) сопоставлены различные БП, а упорядоченность вершин во входной и выходной выборках Σ определяется упорядоченностью сопоставленных им БП;
2. каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена ФС φ_i , где $k_i = d_{\Sigma}^+(v)$.

Заметим, что в общем случае вершины в выходной выборке СФЭ могут повторяться, то есть одной и той же выходной вершине может быть сопоставлено несколько БП из Z . Если множество $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ ($Z = \{z_{j_1}, \dots, z_{j_m}\}$) состоит из всех входных (соответственно выходных) БП СФЭ Σ , перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавите X (соответственно Z), то, в соответствии с §1, будем записывать СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(X; Z)$ или $\Sigma = \Sigma(x; z)$, где $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \dots, z_{j_m})$ — наборы БП, соответствующие множествам X и Z .

Схема Σ , которая получается из дерева \mathcal{D} , связанного с формулой \mathcal{F} из \mathcal{U}_B^{Φ} , в результате отождествления листьев с одинаковыми пометками и приписывания его корню выходной БП из Z , называется *квазидеревом, соответствующим формуле \mathcal{F}* . Заметим, что указанное квазидерево Σ однозначно определяет формулу \mathcal{F} и является СФЭ над базисом B . Из этого квазидерева путем «отождествления» (наложения) его изоморфных квазиподдеревьев можно получать и другие СФЭ, задающие формулу \mathcal{F} . На рис. 2.3b показано квазидерево над базисом B_0 с входными БП x_1, x_2, x_3 и вы-

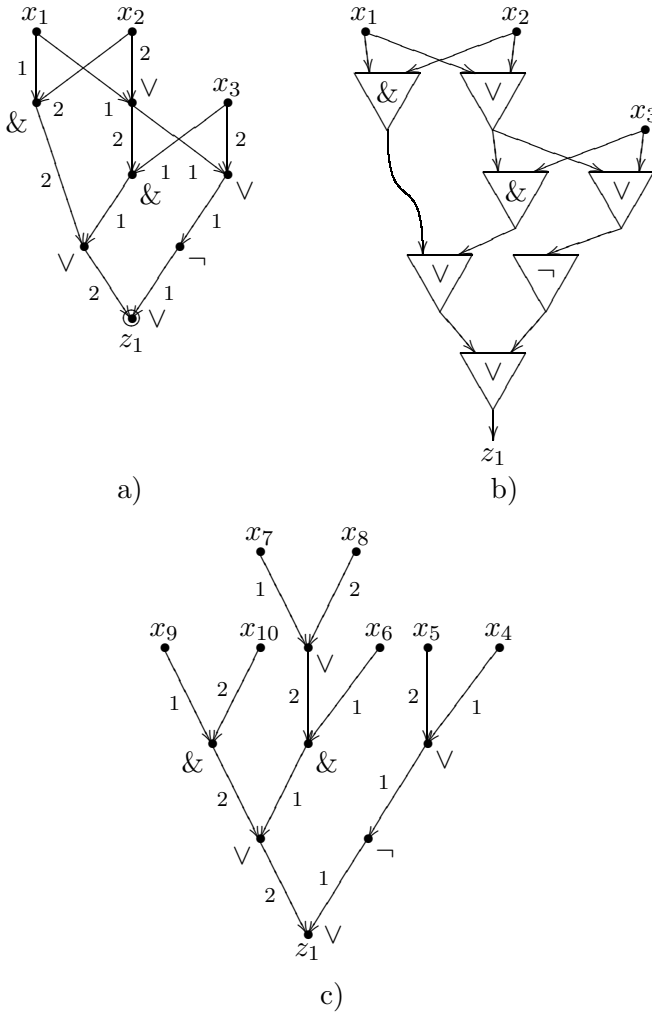


Рис. 3.1: СФЭ, полученная из квазидерева на рис. 2.3б, и ее каркас

ходной БП z_1 , которое получено из дерева, сопоставленного формуле (2.3) и изображенного на рис. 2.3а. На рис. 3.1а приведена СФЭ, полученная из данного квазидерева в результате отождествления двух его изоморфных квазиподдеревьев, а на рис. 3.1б дано более «наглядное» изображение этой СФЭ в виде системы соединенных соответствующим образом ФЭ.

Обозначим через \mathcal{U}_B^C множество всех СФЭ над базисом B , и пусть $\mathcal{U}^C = \mathcal{U}_{B_0}^C$. Заметим, что система квазидеревьев с общими входами, соответствующая системе формул над базисом B , является СФЭ над B , если выходам этих квазидеревьев приписаны различные выходные БП. В связи с этим формулы над B и их системы будем считать частным случаем СФЭ над B , полагая, что имеет место включение $\mathcal{U}_B^F \subseteq \mathcal{U}_B^C$. Заметим также, что СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, входит в \mathcal{U}_B^F тогда и только тогда, когда все стоки Σ , и только они, являются ее выходами, а из каждой вершины Σ , отличной от ее входов и выходов, исходит одна дуга.

Определим теперь функционирование СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ над базисом B . Сначала индукцией по q , $q = 0, 1, \dots$, определим для каждой вершины v глубины q в схеме Σ реализуемую в ней формулу $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}_v(x_1, \dots, x_n)$ глубины q над базисом B . Если $q = 0$, то есть v — вход Σ , положим $\mathcal{F}_v = x_j$, где x_j — входная БП, сопоставленная вершине v . Пусть теперь v — вершина глубины $q+1$, $q \geq 0$, схемы Σ , которая имеет пометку φ_i , и в которую входит k_i дуг, причем дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$, исходит из вершины v_j глубины q_j , где уже реализована формула $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{v_j}$ глубины q_j , а для чисел q, q_1, \dots, q_{k_i} выполнено (2.2). Тогда в вершине v реализуется формула $\mathcal{F} = \mathcal{F}_v$ вида (2.1), которая имеет глубину $(q+1)$. При этом считается, что в вершине v СФЭ Σ реализуется ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, если ФАЛ f реализуется формулой \mathcal{F}_v , и что СФЭ Σ реализует систему ФАЛ F , $F = (f_1, \dots, f_m)$, или реализует

систему булевых уравнений $z_1 = f_1, \dots, z_m = f_m$, если $f_j, j = 1, \dots, m$, — ФАЛ, реализованная в той выходной вершине СФЭ Σ , которой приписана БП z_j .

Заметим, что квазидерево, которое соответствует формуле \mathcal{F} , реализующей ФАЛ f , а также любая СФЭ, полученная из него отождествлением изоморфных квазиподдеревьев, реализует и формулу \mathcal{F} , и ФАЛ f . Так, СФЭ на рис. 3.1 реализует формулу (2.3) и ФАЛ $\mathfrak{s}_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$, или уравнение $z_1 = \mathfrak{s}_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$.

Также, как и для формул, для каждой СФЭ $\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, определим следующие параметры (функционалы сложности):

1. $L(\Sigma)$ — сложность Σ , то есть число всех ее ФЭ;
2. $D(\Sigma)$ — глубина Σ , то есть максимальная глубина ее вершин.

Эти параметры имеют такой же содержательный смысл, что и в случае формул (см. §2).

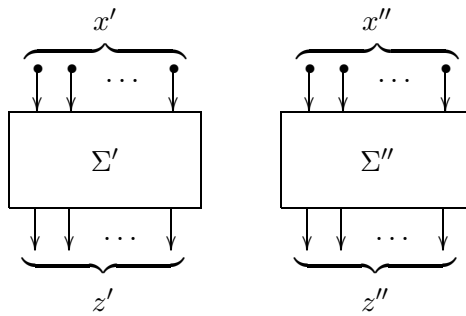
В соответствии с §1 две СФЭ считаются изоморфными, если они изоморфны как помеченные графы, и эквивалентными, если они реализуют равные системы ФАЛ. Заметим, что СФЭ всегда эквивалентна системе формул, реализуемых ею на своих выходах. Заметим также, что изменение нумерации дуг, входящих в такую вершину v СФЭ Σ , которой сопоставлен ФЭ \mathcal{E}_i с симметрической ФАЛ φ_i , не изменяет ФАЛ, реализуемую в вершине v , а значит, не влияет на функционирование Σ . В связи с этим в подобных случаях номера дуг, входящих в вершину v , могут не указываться. Легко видеть, что в соответствующих друг другу вершинах изоморфных СФЭ реализуются одинаковые формулы, а значит, и одинаковые ФАЛ. Следовательно, две изоморфные СФЭ эквивалентны, то есть для СФЭ справедливо неравенство (1.5).

Вершина СФЭ называется *висячей*, если она является стоком, но не является выходом схемы. Схема называется *приведенной*, если в ней нет висячих вершин. Заметим, что система формул является приведенной СФЭ, и что из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей приведенную СФЭ с помощью операции *удаления висячих вершин*. Заметим также, что приведенные СФЭ, и только они, получаются из систем квазидеревьев в результате отождествления некоторых изоморфных квазиподдеревьев, и что в приведенных СФЭ все вершины лежат на цепях, идущих от входов схемы к ее выходам. Удаление висячих вершин и отождествление изоморфных квазиподдеревьев являются примерами эквивалентных преобразований СФЭ, то есть преобразований, не изменяющих функционирование схем (см. гл. 3).

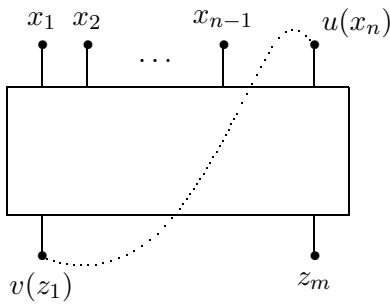
Рассмотрим теперь особенности операции суперпозиции в классе СФЭ. Заметим, что переименование входов и выходов СФЭ приводит к соответствующему переименованию (с возможным отождествлением) переменных у реализуемых ФАЛ и перестановке (с возможным повторением или удалением) этих ФАЛ. Заметим также, что в результате объединения СФЭ $\Sigma'(x'; z')$ и СФЭ $\Sigma''(x''; z'')$, реализующих системы ФАЛ F' и F'' соответственно, получается СФЭ $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$, которая имеет вид¹ $\Sigma = \Sigma((x', x''); (z', z''))$ и реализует систему ФАЛ (F', F'') (см. рис. 3.2а). При этом, очевидно, ФАЛ из набора F' (набора F'') не зависят существенно от БП из набора x'' (соответственно x').

Операцию присоединения входа схемы из функциональных элементов к ее выходу будем применять только тогда, когда вершина, соответствующая выходу, не достижима из вершины, соответствующей входу. Пусть, для определенно-

¹Предполагается, что номер любой БП из x' (z') меньше номера любой БП из x'' (соответственно z''). В остальных случаях происходит необходимая перестановка входных и выходных БП СФЭ Σ .



a)



b)

Рис. 3.2: к определению объединения схем и присоединения входа схемы к ее выходу

сти, СФЭ Σ' получается из СФЭ $\Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ в результате присоединения входа x_n , связанного с вершиной u , к выходу z_1 , связанному с вершиной v (см. рис. 3.2b). Пусть, далее, $f_w(x_1, \dots, x_n)$ — ФАЛ, реализуемая в вершине w СФЭ Σ , причем $f_w = g_w(x_1, \dots, x_{n-1})$, если w не достижима из вершины u . Из определений следует, что в вершине w СФЭ Σ' реализуется ФАЛ $g_w(x_1, \dots, x_{n-1})$, если w не достижима из вершины u в СФЭ Σ , и ФАЛ $f_w(x_1, \dots, x_{n-1}, g_v(x_1, \dots, x_{n-1}))$ в остальных случаях.

Заметим, что указанные выше функциональные свойства операций переименования, объединения и присоединения обеспечивают корректность любой суперпозиции СФЭ (см. §1). Действительно, в каждой вершине СФЭ Σ вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, соответствующей выходу Σ' , реализуется та же самая ФАЛ, что и в Σ' , а сама СФЭ Σ в том случае, когда суперпозиция $\Sigma''(\Sigma')$ является стыковкой, реализует систему ФАЛ вида $F''(F')$, где F'' и F' — системы ФАЛ, реализуемые СФЭ Σ'' и Σ' соответственно. Заметим также, что любая СФЭ может быть получена в результате многократного применения операции суперпозиции, на каждом шаге которой происходит дублирование выхода или присоединение одного ФЭ, к СФЭ, первоначально состоящей из тождественных вершин.

На рис. 3.3а показана СФЭ Σ_2^\oplus , имеющая сложность 4 и реализующая ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, а на рис. 3.3b — СФЭ Σ_q^\oplus , $q \geq 3$, которая является результатом «последовательной» суперпозиции $(q - 1)$ схем Σ_2^\oplus и реализует ФАЛ $\ell_q(x_1, \dots, x_q)$ со сложностью $4q - 4$.

Переменная, которая встречается в формуле только один раз, называется *бесповторной* переменной этой формулы. Формула называется *бесповторной*, если бесповторны все ее БП. Заметим, что СФЭ вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ' и Σ'' — системы формул, является системой формул тогда и только тогда, когда к каждому выходу Σ' , участвующему в присо-

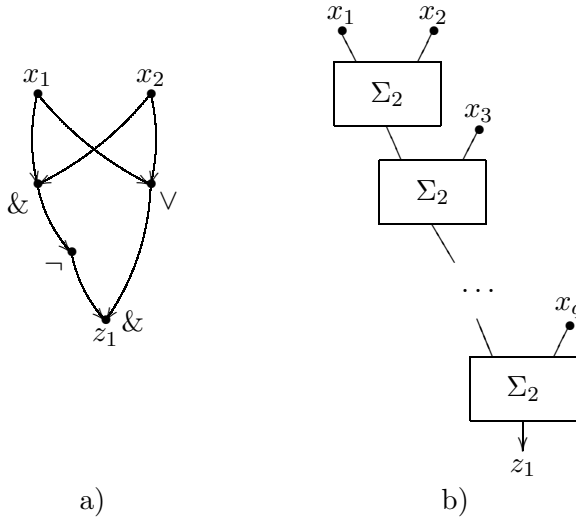


Рис. 3.3: пример суперпозиции СФЭ

единениях и совпадающему с выходом ФЭ, присоединяется в точности один неповторный вход Σ'' .

Бесповторная формула $\mathcal{F}(x_{n+1}, \dots, x_{n+p})$ называется *каркасом* приведенной СФЭ $\Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1)$, если вхождение БП x_{n+i} , $i \in [1, p]$, является i -м вхождением БП в \mathcal{F} , а дерево формулы \mathcal{F} отличается от наддерева СФЭ Σ только пометками листьев. При этом, очевидно,

$$L(\Sigma) = L(\mathcal{F}), \quad D(\Sigma) \geq D(\mathcal{F}). \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, в частности, что соотношения (2.4)–(2.5) верны для любой приведенной СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^C$, с одним выходом. На рис. 3.1с показан каркас СФЭ, изображенной на рис. 3.1а.

Легко видеть (см. рис. 3.4), что любая формула (приведенная СФЭ с одним выходом) Σ от БП x_1, \dots, x_n может быть получена из своего каркаса \mathcal{F} в результате применения

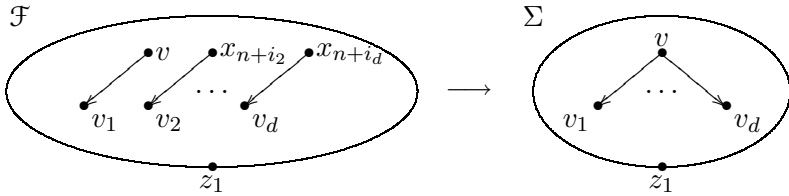


Рис. 3.4: получение схемы Σ из ее каркаса \mathcal{F}

ряда операций присоединения входов \mathcal{F} к входам x_1, \dots, x_n (соответственно к входам x_1, \dots, x_n и внутренним вершинам \mathcal{F}). Указанное присоединения можно рассматривать как операцию присоединения входов СФЭ к ее выходам, если те вершины, к которым присоединяются входы каркаса, предварительно объявить выходами.

Обозначим через $\mathcal{U}_B^C(L, n)$ ($\mathcal{U}_B^\Phi(L, n)$ и $\mathcal{U}_B^\Phi[D, n]$) множество приведенных СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1)$ (соответственно формул $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$) над базисом B , для которых $L(\Sigma) \leq L$ (соответственно $L(\mathcal{F}) \leq L$ и $D(\mathcal{F}) \leq D$), причем индекс B_0 будем, как обычно, опускать. Заметим, что из неравенства (2.4) вытекает включение

$$\mathcal{U}^\Phi[D, n] \subseteq \mathcal{U}^\Phi(2^D - 1, n). \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. *Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства*

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (32(L + n))^{L+1}, \quad (3.3)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (32n)^{L+1},$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| \leq (32n)^{2^D}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}^C(L, n)$, а $\check{\mathcal{F}}$ — каркас Σ . В силу (3.1) и леммы 2.1 формула $\check{\mathcal{F}}$ удовлетворяет соотношениям

$$R(\check{\mathcal{F}}) \leq L + 1, \quad |E(\check{\mathcal{F}})| \leq 2L(\check{\mathcal{F}}) \leq 2L.$$

Заметим (см. (1.4)), что число попарно не изоморфных корневых ориентированных упорядоченных деревьев с не более, чем $2L$, ребрами не превосходит 4^{2L} , а число способов пометки внутренних вершин такого дерева символами $\Phi\check{\Theta}$ из B_0 с подходящим числом входов не больше, чем 2^L . Следовательно, число попарно не изоморфных каркасов для схем из $\mathcal{U}^C(L, n)$ не превосходит 32^L .

Напомним, далее, что любая формула \mathcal{F} (СФЭ Σ) из $\mathcal{U}^C(L, n)$ может быть получена в результате присоединения каждого из $R(\check{\mathcal{F}}) \leq L + 1$ входов формулы $\check{\mathcal{F}}$, являющейся ее каркасом, к входам x_1, \dots, x_n (соответственно к входам x_1, \dots, x_n и внутренним вершинам $\check{\mathcal{F}}$), которое можно осуществить не более, чем n^{L+1} (соответственно $(L + n)^{L+1}$) способами. Таким образом, в силу (1.5), (3.2)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| &\leq 32^L \cdot n^{L+1} \leq (32n)^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^C(L, n)\| &\leq 32^L \cdot (L + n)^{L+1} \leq (32(L + n))^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| &\leq \|\mathcal{U}^\Phi(2^D - 1, n)\| \leq (32n)^{2^D}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

§4 Некоторые модификации схем из функциональных элементов. Оценка числа схем в произвольном базисе

Схема Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, с монотонной нумерацией вершин (см. §1), называется *вычисляющей программой (ВП) над базисом B* (см., например, [11]). Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$, и пусть, для определенности, v_i , $i \in [1, p]$, где $p = |V(\Sigma)|$, — вершина с номером i , причем вершины v_1, \dots, v_n имеют пометки x_1, \dots, x_n , а вершины v_{j_1}, \dots, v_{j_m} — пометки z_1, \dots, z_m соответственно. Сопоставим вершине v_i , $i \in [1, p]$, «внутреннюю» БП u_i и будем считать, что v_i выполняет команду с номером i , которая является:

- а) командой ввода $u_i = x_i$, если $i \in [1, n]$;
- б) вычисляющей командой $u_i = \varphi^{(i)}(u_1^{(i)}, \dots, u_{k^{(i)}}^{(i)})$, где $\varphi^{(i)}$ — ФС от $k^{(i)}$ БП, приписанный вершине v_i в Σ , а $u_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, k^{(i)}$, — БП, сопоставленная начальной вершине дуги с номером j , входящей в v_i , если $i \in (n, p]$.

Кроме того, будем считать, что каждой вершине v_{j_i} , $i \in [1, m]$, соответствует команда с номером $(p + i)$, являющаяся командой вывода $z_i = u_{j_i}$.

Предполагается, что команды ВП Σ выполняются последовательно в соответствии с их номерами в моменты времени $1, 2, \dots, p + m$ и что значение БП u_i , вычисленное момент времени i , $i \in (n, p]$, занимает отдельную битовую ячейку памяти на отрезке времени $[i, a_i)$, где a_i — максимальный номер команды, в которой встречается u_i . Максимальное число отрезков вида $[i, a_i)$, где $i \in (n, p]$, имеющих непустое пересечение, называется *шириной* ВП Σ , и определяет минимальное число ячеек памяти, необходимых для хранения ее внутренних БП u_{n+1}, \dots, u_p . Заметим, что число ФЭ ВП Σ характеризует время выполнения ее вычисляющих команд на одном процессоре, а максимальная глубина вершин Σ — время выполнения ее вычисляющих команд на параллельных процессорах.

Так, на рис. 4.1а приведена монотонная нумерация вершин для СФЭ, показанной на рис. 3.1а, которая задает ВП ширины 3, а на рис. 4.1б — эквивалентная ей ВП ширины 2. Действительно, при выполнении первой (второй) из этих ВП для хранения всех внутренних БП, принадлежащих каждому из множеств $\{u_4\}$, $\{u_5, u_7, u_8\}$ и $\{u_6, u_9, u_{10}\}$ (соответственно $\{u_4, u_7, u_9\}$ и $\{u_5, u_6, u_8, u_{10}\}$) можно использовать одну и ту же ячейку памяти. Легко видеть также, что глубина обеих рассматриваемых СФЭ равна 4.

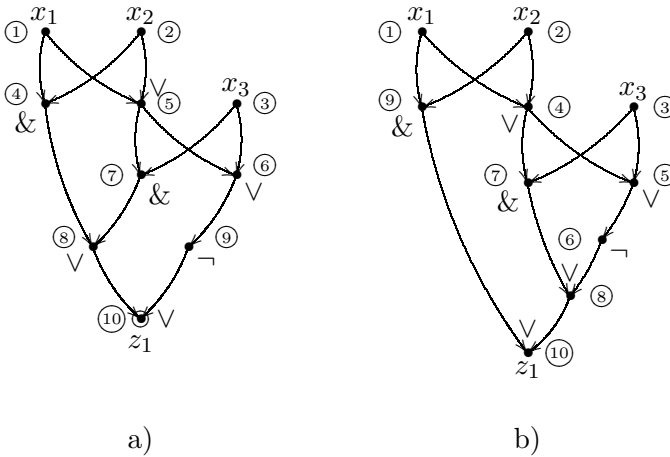


Рис. 4.1: эквивалентные ВП ширины 3 и 2

Индукцией по длине можно показать что любая ДНФ или КНФ после ее оптимизации по числу отрицаний и выполнения некоторых преобразований подобия (см. §2), а также при подходящей монотонной нумерации вершин переходит в ВП ширины 2. Действительно, пусть ВП Σ' над базисом B_0 на шаге с номером t вычисляет значение u_t ДНФ \mathcal{A}' от БП $X(n)$, помещая его в ячейку памяти с номером $(n+1)$, и пусть ДНФ \mathcal{A} имеет вид

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \vee K = \mathcal{A}' \vee (\overline{x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_r}}) \cdot x_{j_{r+1}} \cdot \dots \cdot x_{j_q}.$$

Тогда ВП Σ , вычисляющая ДНФ \mathcal{A} , получается добавлением к Σ' команд¹:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= u_{j_1} \vee u_{j_2}, \quad u_{t+2} = u_{t+1} \vee u_{j_3}, \quad \dots, \quad u_{t+r-1} = u_{t+r-2} \vee u_{j_r}, \\ u_{t+r} &= \overline{u_{t+r-1}}, \quad u_{t+r+1} = u_{t+r} \cdot u_{j_{r+1}}, \quad \dots, \quad u_{t+q} = u_{t+q-1} \cdot u_{j_q}, \\ u_{t+q+1} &= u_t \vee u_{t+q}, \end{aligned}$$

¹Приведенный список команд естественным образом видоизменяется в случае $r \leq 1$ или $r = q$.

где внутренние БП u_{t+1}, \dots, u_{t+q} помещаются в ячейку памяти с номером $(n+2)$, а БП u_{t+q+1} — в ячейку с номером $(n+1)$.

Будем рассматривать формулы и СФЭ с различными ограничениями на соединения ФЭ. Так, для базисов Б, имеющих одноходовые неконстантные ФЭ, введем понятие *усилительной* СФЭ — СФЭ, в которой «ветвятся» выходы только одноходовых ФЭ. Заметим, что указанное ограничение выполняется во многих классах электронных схем, причем в соответствующих базисах имеются специальные «усилительные» ФЭ, реализующие тождественную ФАЛ.

Введем теперь «взвешенные» функционалы сложности и глубины СФЭ. Будем считать, что каждому функциональному элементу \mathcal{E}_i , $i = 1, \dots, b$, сопоставлены положительные действительные числа \mathcal{L}_i и T_i , называемые его «весом» и «задержкой», которые характеризуют сложность («размер») и время срабатывания \mathcal{E}_i соответственно. Предполагается, что «вес» и «задержка» любого ФЭ стандартного базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ равны 1. Если (v_0, v_t) -цепь C длины t в СФЭ Σ проходит через вершины v_1, \dots, v_{t-1} , и вершине v_j , $j = 1, \dots, t$, при этом соответствует ФЭ \mathcal{E}_{i_j} базиса Б, то число $T(C) = T_{i_1} + \dots + T_{i_t}$ будем называть *задержкой* этой цепи.

По аналогии с глубиной (см. §1) определим *задержку* вершины v СФЭ Σ как максимальную задержку тех цепей Σ , которые начинаются в одной из ее входных вершин и заканчиваются в вершине v . Для каждой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, помимо сложности $L(\Sigma)$, глубины $D(\Sigma)$ и ранга $R(\Sigma)$ определим следующие параметры (функционалы сложности):

1. $\mathcal{L}(\Sigma)$ — *размер* Σ , то есть сумма «весов» всех ее ФЭ;
2. $T(\Sigma)$ — *задержка* Σ , то есть максимальная задержка ее вершин;

Заметим, что функционал $L(D)$ является частным случаем функционала \mathcal{L} (соответственно, T), когда веса (соответственно, задержки) всех ФЭ базиса B равны 1. Введем также «частичный» размер $\mathcal{L}_{B'}(\Sigma)$ (задержку $T_{B'}(\Sigma)$), который равен сумме весов ФЭ Σ типа \mathcal{E}_i , где $\mathcal{E}_i \in B'$, в СФЭ Σ (соответственно, максимальной сумме задержек ФЭ указанного вида, лежащих на одной цепи Σ). Аналогичным образом вводится «частичная» сложность $L_{B'}(\Sigma)$ и «частичная» глубина $D_{B'}(\Sigma)$ для СФЭ Σ .

Для некоторых типов СФЭ можно рассматривать и другие функционалы сложности. Так, например, для ДНФ мы уже рассматривали их длину, то есть число ЭК, а для СФЭ с монотонной нумерацией вершин — их ширину. С содержательной точки зрения различные меры сложности отражают различные параметры моделируемых схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом глубина схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах, ширина программы — число ячеек памяти, необходимых для хранения тех ее внутренних БП, которые отличаются от входных БП, и т. д.

Обобщим лемму 2.1 и теорему 3.1 на случай произвольного базиса $B = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$. Положим $\widehat{B} = \{\mathcal{E}_i : k_i \geq 2\}$ и заметим, что множество \widehat{B} не пусто в силу полноты базиса B . Для ФЭ \mathcal{E}_i , $\mathcal{E}_i \in \widehat{B}$, определим его *приведенный вес* ρ_i и *приведенную задержку* τ_i следующим образом:

$$\rho_i = \frac{\mathcal{L}_i}{k_i - 1}, \quad \tau_i = \frac{T_i}{\log k_i}.$$

Введем, далее, величины

$$\rho_B = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{B}} \rho_i \quad \text{и} \quad \tau_B = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{B}} \tau_i,$$

которые назовем *приведенным весом* и *приведенной задержкой базиса* \mathcal{B} соответственно. Для базиса \mathcal{B}_0 , очевидно,

$$\widehat{\mathcal{B}}_0 = \{\&, \vee\}, \quad \rho_{\mathcal{B}_0} = \tau_{\mathcal{B}_0} = 1.$$

Для функционала сложности ψ типа L, \mathcal{L}, D, T через $\widehat{\psi}(\Sigma)$ будем обозначать величину $\psi_{\widehat{\mathcal{B}}}(\Sigma)$.

Лемма 4.1. *Для любой формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$, выполняются неравенства*

$$R(\mathcal{F}) \leq \frac{1}{\rho_{\mathcal{B}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1, \quad R(\mathcal{F}) \leq 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\mathcal{B}}}}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть для каждого i , $i = 1, \dots, b$, формула \mathcal{F} содержит s_i ФЭ \mathcal{E}_i . При этом для числа ребер квазидерева \mathcal{F} будут выполняться равенства

$$|E(\mathcal{F})| = \sum_{i=1}^b s_i \cdot k_i = R(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^b s_i - 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R(\mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^b s_i (k_i - 1) + 1 = \sum_{k_i \geq 2} \frac{k_i - 1}{\mathcal{L}_i} \cdot \mathcal{L}_i s_i + 1 \leq \\ &\leq \frac{1}{\rho_{\mathcal{B}}} \sum_{k_i \geq 2} \mathcal{L}_i s_i + 1 = \frac{1}{\rho_{\mathcal{B}}} \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + 1 \end{aligned}$$

и первое неравенство (4.1) доказано.

Второе неравенство (4.1) доказывается индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, при $D(\mathcal{F}) = 0$, когда $\mathcal{F} = x_j$, оно, очевидно, выполняется. Пусть теперь второе неравенство (4.1) верно для любой формулы глубины меньше, чем d , и пусть

$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i})$, где $D(\mathcal{F}) = d$ и $D(\mathcal{F}_j) < d$, $\widehat{T}(\mathcal{F}_j) = t_j$ при всех $j = 1, \dots, k_i$. Тогда

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{k_i} R(\mathcal{F}_j) \leq k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_B}},$$

где $t = \max_{1 \leq j \leq k_i} t_j$. Следовательно, при $k_i = 1$ формула \mathcal{F} удовлетворяет второму неравенству (4.1), так как в этом случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t$. При $k_i \geq 2$ в соответствии с определением τ_B выполняется неравенство

$$k_i \leq 2^{\frac{T_i}{\tau_B}},$$

используя которое и учитывая, что в данном случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t + T_i$, получим

$$R(\mathcal{F}) \leq k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_B}} \leq 2^{\frac{t+T_i}{\tau_B}} = 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_B}}.$$

Лемма доказана. \square

Замечание. Аналогично первому неравенству (4.1) доказывается, что число ребер квазидерева, соответствующего формуле \mathcal{F} , в которой нет трех и более последовательно соединенных одноходовых $\Phi\Theta$, удовлетворяет неравенству

$$|E(\mathcal{F})| \leq 6(R(\mathcal{F}) - 1). \quad (4.2)$$

Действительно, если \mathcal{F} содержит s_i $\Phi\Theta \mathcal{E}_i$, $i = 1, \dots, b$, то

$$\begin{aligned} R(\mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^b s_i (k_i - 1) + 1 \geq \widehat{L}(\mathcal{F}) + 1, \\ |E(\mathcal{F})| &\leq 3 \left(R(\mathcal{F}) + \widehat{L}(\mathcal{F}) - 1 \right) \leq \\ &\leq 3(2R(\mathcal{F}) - 2) = 6(R(\mathcal{F}) - 1). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{U}_B^C \langle \mathcal{L}, n \rangle$ ($\mathcal{U}_B^\Phi \langle \mathcal{L}, n \rangle$, $\mathcal{U}_B^\Phi \{T, n\}$) — множество всех приведенных схем из функциональных элементов вида $\Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1)$ (соответственно формул $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$) над базисом B , для которых $\mathcal{L}(\Sigma) \leq \mathcal{L}$ (соответственно $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \leq \mathcal{L}$, $T(\mathcal{F}) \leq T$). Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 3.1 с использованием (1.4), (4.1), (4.2) и с учетом того, что в любом введенном выше множестве схем \mathcal{U} для любой схемы Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}$, найдется эквивалентная схема, в которой нет трех и более последовательно соединенных одноходовых ФЭ.

Теорема 4.1. *Для любых $\mathcal{L} \geq 0$, $T \geq 0$ и любого натурального n справедливы неравенства*

$$\|\mathcal{U}_B^C \langle \mathcal{L}, n \rangle\| \leq (c(\mathcal{L} + n))^{\frac{1}{\rho_B} \mathcal{L} + 1}, \quad (4.3)$$

$$\|\mathcal{U}_B^\Phi \langle \mathcal{L}, n \rangle\| \leq (cn)^{\frac{1}{\rho_B} \mathcal{L} + 1}, \quad (4.4)$$

$$\|\mathcal{U}_B^\Phi \{T, n\}\| \leq (cn)^{2 \frac{T}{\rho_B}}, \quad (4.5)$$

где c — некоторая константа, зависящая от базиса B .

Замечание 1. Для любого $\mathcal{L} \geq 0$ и любого натурального n выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}_B^{YC} \langle \mathcal{L}, n \rangle\| \leq \left(\frac{c(\mathcal{L} + n)}{\log(\mathcal{L} + n)} \right)^{\frac{1}{\rho_B} (\mathcal{L} + n)}, \quad (4.6)$$

где $\mathcal{U}_B^{YC} \langle \mathcal{L}, n \rangle$ — множество всех усилительных СФЭ из $\mathcal{U}_B^C \langle \mathcal{L}, n \rangle$, а c — некоторая константа, зависящая от базиса.

Действительно, для любой усилительной СФЭ Σ' существует эквивалентная ей усилительная СФЭ Σ такая, что $\mathcal{L}(\Sigma) \leq \mathcal{L}(\Sigma')$, которая является приведенной СФЭ и в которой нет трех и более последовательно соединенных одноходовых ФЭ. Следовательно, для каркаса \mathcal{F} СФЭ Σ указанного вида будут выполняться неравенства (4.1)–(4.2), а

число рассматриваемых СФЭ Σ , имеющих один и тот же каркас \mathcal{F} , при условии $\mathcal{L}(\Sigma) \leq \mathcal{L}$ не больше, чем (ср. с доказательством теоремы 3.1)

$$\left(\mathcal{L}(\mathcal{F}) - \widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{F}) + n \right)^{R(\mathcal{F})} \leq c_1 \left(\mathcal{L} - \widehat{\mathcal{L}} + n \right)^{\frac{1}{\rho_{\mathcal{B}}} \widehat{\mathcal{L}} + 1}.$$

Перемножая полученную оценку с оценкой числа каркасов рассматриваемых СФЭ и максимизируя их произведение как функцию параметра $\widehat{\mathcal{L}}$, принимающего значения из действительного отрезка $[0, \mathcal{L}]$, стандартными приемами математического анализа (см., например, [24, 25]) приходим к (4.6).

Замечание 2. Если все ФЭ из $\widehat{\mathcal{B}}$ реализуют либо только линейные ФАЛ, либо только монотонные ЭК, либо только монотонные ЭД, то аналогичным способом, используя симметричность любой ФАЛ, реализуемой бесповторной формулой над $\widehat{\mathcal{B}}$, можно усилить оценку (4.6) следующим образом:

$$\| \mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\text{YC}} \langle \mathcal{L}, n \rangle \| \leq \left(\frac{c(\mathcal{L} + n)}{\log^2(\mathcal{L} + n)} \right)^{\frac{1}{\rho_{\mathcal{B}}}(\mathcal{L} + n)} \quad (4.7)$$

§5 Контактные схемы с одним входом и π -схемы, оценка их числа

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов (см. §3), а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой x_i (\bar{x}_i) называется *замыкающим* (соответственно *размыкающим*) контактом БП x_i (см. рис. 5.1).

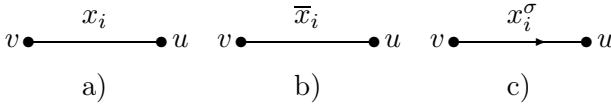


Рис. 5.1: типы контактов

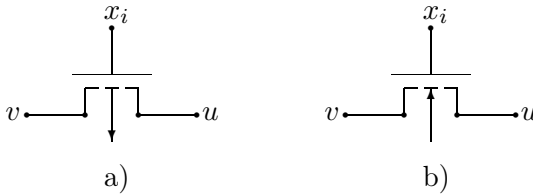


Рис. 5.2: физическая интерпретация контактов

Считается, что контакт вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$, проводит тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma$, причем ориентированный контакт, то есть контакт, связанный с дугой, проводит только в соответствующем направлении.

С точки зрения управления проводимостью неориентированный размыкающий (замыкающий) контакт БП x_i функционирует как p -МОП (соответственно n -МОП) транзистор, на затвор которого поступает БП x_i (см. рис. 5.2а и 5.2б), а аналогичный ориентированный контакт — как МОП-транзистор соответствующего типа с диодом Шоттки [17, 23]. Кроме того, ориентированный контакт вида x_i^σ , идущий из вершины v в вершину u (см. рис. 5.1с), часто рассматривают как команду условного перехода из v в u , который выполняется, если $x_i = \sigma$ (см. также §7).

Сеть Σ с входами a'_1, \dots, a'_p и выходами a''_1, \dots, a''_q , в которой все ребра (дуги) помечены переменными x_1, \dots, x_n или их отрицаниями $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, называется (p, q) -контактной схемой (КС) от БП x_1, \dots, x_n и обозначается $\Sigma =$

$= \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$. При этом число контактов называется *сложностью* КС Σ и обозначается через $L(\Sigma)$. На рис. 5.3а–с показаны некоторые конкретные КС от БП x_1, x_2, x_3 с входом a_1 и выходами a_2, a_3 .

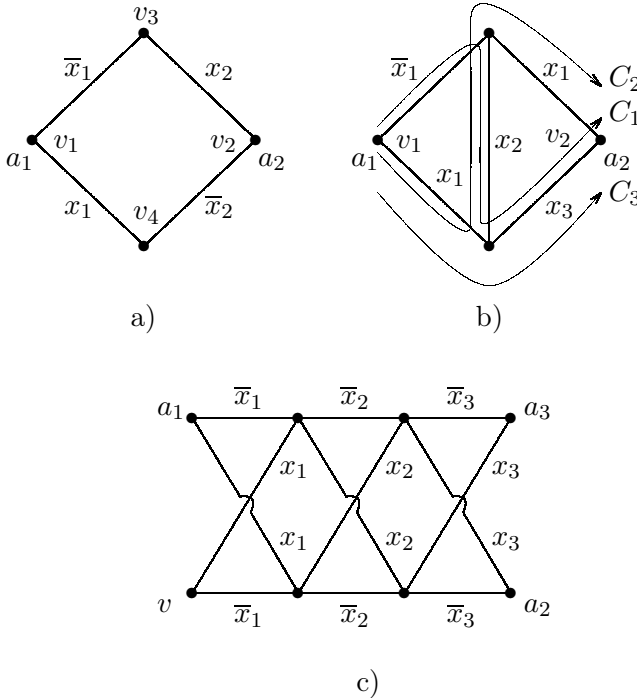


Рис. 5.3: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

Пусть Σ — КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор из B^n . Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \dots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α , и снятия пометок с остальных ребер Σ . Для вершин

v и u КС Σ введем функцию проводимости от вершины v к вершине u как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v - u)$ -цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u . Будем говорить также, что ФАЛ $g_{v,u}$ является функцией достижимости вершины u из вершины v или, иначе, реализуется между вершинами v и u . Из определения следует, что для нахождения ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$ достаточно просмотреть все наборы α , $\alpha \in B^n$, и для каждого из них выяснить наличие или отсутствие в Σ цепи, состоящей из проводящих на наборе α контактов, которая идет из v в u . Так, просматривая все наборы значений БП x_1, x_2 , можно убедиться в том, что ФАЛ проводимости $g_{v_1, v_2}(x_1, x_2)$ в КС Σ , показанной на рис. 5.3а, равна $x_1 \oplus x_2$, а ФАЛ проводимости g_{v_3, v_4} равна 0.

Будем считать, что в каждой вершине $(1, m)$ -КС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2, \dots, a_{m+1})$ реализуется ФАЛ проводимости от входа a_1 к этой вершине и что Σ реализует систему ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$, где f_j — ФАЛ проводимости от a_1 к выходу с пометкой a_{j+1} , $j \in [1, m]$. При этом, очевидно, в вершине a_1 реализуется ФАЛ 1, которую в дальнейшем по умолчанию будем использовать в качестве пометки единственного входа $(1, m)$ -КС. Так, КС, изображенные на рис. 5.3а, 5.3б и 5.3с, реализуют ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, $H(x_1, x_2, x_3)$ и набор ФАЛ $(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)$ соответственно. На рис. 5.4а показана $(1, 2^n)$ -КС $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; 1; a_0, \dots, a_{2^n-1})$, которая называется $(1, 2^n)$ -контактным деревом порядка n от БП $X(n)$. Легко видеть, что в выходной вершине a_i , $i = 0, \dots, 2^n - 1$, этого контактного дерева (КД) реализуется ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (i - 1)$, и что ФАЛ проводимости между любыми его выходами равна 0. Таким об-

разом, $(1, 2^n)$ -КД порядка n является дешифратором порядка n , то есть схемой, реализующей систему Q_n из всех ЭК ранга n от БП $X(n)$.

Схемы Σ' и Σ'' считаются, как обычно, *изоморфными*, если изоморфны соответствующие им графы, и *эквивалентными*, если они реализуют равные системы ФАЛ. Изоморфные КС, очевидно, эквивалентны.

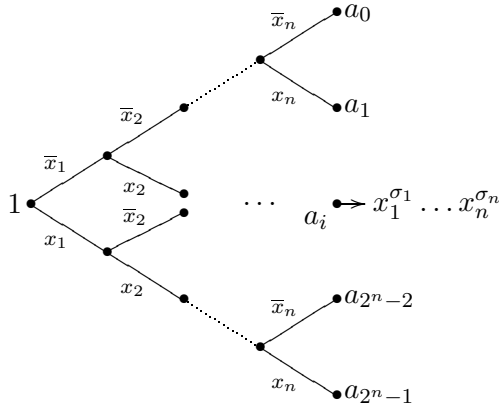
Для множества C , состоящего из контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_r}$ в КС Σ , определим его *функцию проводимости* $K(C)$ и *функцию отделимости* $J(C)$ как ФАЛ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}$ и $x_{i_1}^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\bar{\sigma}_r}$ соответственно. При этом множество C называется *проводящим (отделимым)*, если $K(C) \neq 0$ ($J(C) \neq 1$), и *нулевым* (соответственно, *единичным*) в противном случае. Заметим, что в результате приведения подобных (см. §2 гл. 1) отличная от 0 ФАЛ $K(C)$ и отличная от 1 ФАЛ $J(C)$ могут быть преобразованы в ЭК и ЭД соответственно. Очевидно, также, что

$$K(C') \geq K(C) \quad \text{и} \quad J(C') \leq J(C),$$

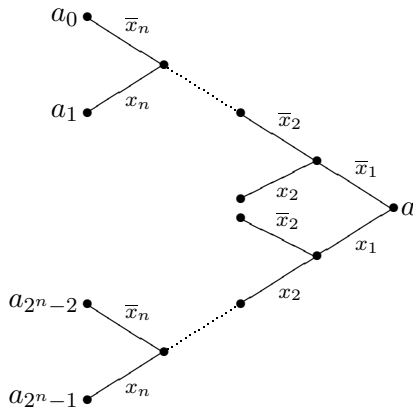
если $C' \subseteq C$.

Множество S , которое состоит из ребер графа $G = (V, E)$ и обладает тем свойством, что вершина u , $u \in V$, достижима из вершины v , $v \in V$, в графе G , но не достижима из нее в графе $(V, E \setminus S)$, называется $(u|v)$ -*сечением* графа G . Легко видеть, что любая $(u - v)$ -цепь графа G имеет хотя бы одно общее ребро с любым $(u|v)$ -сечением этого графа. Сечение, которое не имеет собственных подмножеств, являющихся сечением, называется *тупиковым*.

Из введенных определений (см. также §1) следует, что ФАЛ g , реализуемая КС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$, обращается в 1 (обращается в 0) на наборе α , $\alpha \in B^n$, тогда и только тогда, когда в Σ существует множество контактов C , образующее простую проводящую $(a_1 - a_2)$ -цепь (соответственно, тупиковое отделимое $(a_1|a_2)$ -сечение), для которого $K(C) = 1$



a)



b)

Рис. 5.4: $(1, 2^n)$ - и $(2^n, 1)$ - контактные деревья порядка n

(соответственно, $J(C) = 0$) на наборе α . Таким образом,

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= K(C_1) \vee \dots \vee K(C_t) = \\ &= J(S_1) \& \dots \& J(S_r), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где C_1, \dots, C_t и S_1, \dots, S_r — все простые проводящие $(a_1 - a_2)$ -цепи и все тупиковые отделимые $(a_1|a_2)$ -сечения КС Σ .

Заметим, что первая из формул (5.1) может быть преобразована в ДНФ, а вторая — в КНФ, в результате приведения подобных (см. §2 главы 1), если $g \neq 0$ и $g \neq 1$ соответственно. Так, в КС, показанной на рис. 5.3б, имеются три простые проводящие цепи C_1 , C_2 и C_3 , которые идут из a_1 в a_2 . При этом

$$K(C_1) = \bar{x}_1 x_2 x_3, \quad K(C_2) = x_1 x_2 x_1 = x_1 x_2, \quad K(C_3) = x_1 x_3$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \\ &= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1 = H(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Первое соотношение (5.1) можно использовать для построения $(1, 1)$ -КС Σ' , в которой ФАЛ проводимости от входа a_1 к выходу a_2 описывается заданной ДНФ вида

$$\mathfrak{A} = K_1 \vee \dots \vee K_t,$$

где K_1, \dots, K_t — различные ЭК, и которая «моделирует» ДНФ \mathfrak{A} . Указанная контактная схема Σ' получается в результате проведения из a_1 в a_2 цепей C_1, \dots, C_t без обших контактов и внутренних вершин так, что $K(C_i) = K_i$, $i = 1, \dots, t$ (см. рис. 5.5а). Заметим, что при этом $L(\Sigma') = R(\mathfrak{A})$. Схема, моделирующая совершенную ДНФ ФАЛ f , называется *канонической* КС для этой ФАЛ.

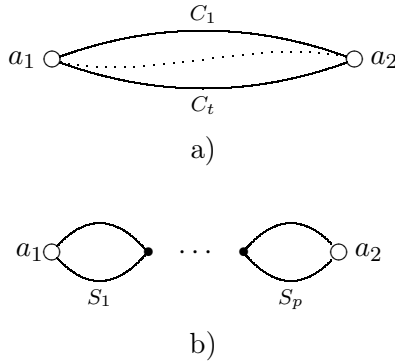


Рис. 5.5: КС, моделирующие ДНФ и КНФ

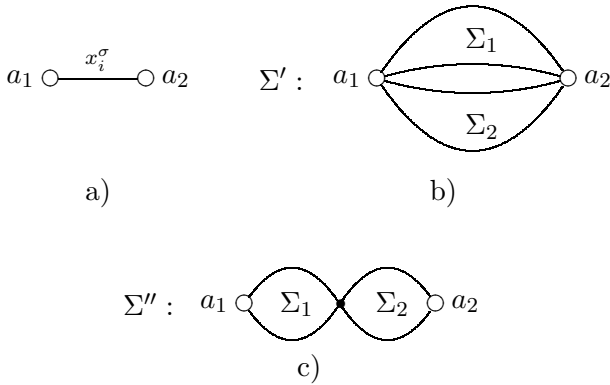
Аналогичным образом на основе второго соотношения (5.1) строится $(1, 1)$ -КС Σ'' , которая «моделирует» КНФ

$$\mathfrak{B} = J_1 \& \dots \& J_r,$$

и для которой по-прежнему $L(\Sigma'') = R(\mathfrak{B})$. Эта КС с входом a_1 и выходом a_2 получается (см. рис. 5.5b) в результате последовательного соединения КС S_1, \dots, S_r , где КС S_j , $j = 1, \dots, r$, реализует ЭД J_j и состоит из параллельно соединенных контактов, соответствующих буквам ЭД J_j .

Схемы, моделирующие ДНФ или КНФ, являются частным случаем т. н. параллельно-последовательных КС или, иначе, π -схем.

Простейшей π -схемой считается любая $(1, 1)$ -КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса (см. рис. 5.6a). Если π -схемы Σ_1 и Σ_2 уже определены, то $(1, 1)$ -КС Σ' (Σ''), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения (см. рис. 5.6b и 5.6c) тоже является π -схемой. Заметим, что при этом вход (выход) Σ' является результатом отожд-

Рис. 5.6: к определению π -схемы

действия входов (соответственно выходов) Σ_1 и Σ_2 , тогда как входом Σ'' является вход Σ_1 , выходом Σ'' — выход Σ_2 , а выход Σ_1 отождествляется с входом Σ_2 и становится внутренней вершиной Σ'' . Легко видеть, что π -схема, показанная на рис. 5.6а, реализует ФАЛ x_i^σ , а π -схемы Σ' и Σ'' (см. рис. 5.6б и 5.6с) — ФАЛ $f_1 \vee f_2$ и $f_1 \& f_2$ соответственно, где f_1 и f_2 — ФАЛ, реализуемые π -схемами Σ_1 и Σ_2 соответственно.

Лемма 5.1. *Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу F из \mathcal{U}^Φ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(F) = L(\Sigma)$ и обратно.*

Доказательство. Построим формулу F индукцией по строению π -схемы Σ . Если Σ — простейшая π -схема вида x_i^σ , то положим $F = x_i^\sigma$. Если π -схемам Σ_1 и Σ_2 уже сопоставлены формулы F_1 и F_2 с поднятыми отрицаниями, то π -схеме Σ' (Σ''), получающейся в результате параллельного (соответственно последовательного) соединения Σ_1 и Σ_2 сопоставим

формулу $F' = F_1 \vee F_2$ (соответственно $F'' = F_1 \& F_2$). При этом

$$R(F') = R(F'') = R(F_1) + R(F_2)$$

и, следовательно, по индуктивному предположению,

$$R(F') = R(F'') = L(\Sigma_1) + L(\Sigma_2) = L(\Sigma).$$

Аналогичным образом, индукцией по строению формулы F с поднятыми отрицаниями можно найти эквивалентную ей π -схему Σ такую, что $L(\Sigma) = R(F)$.

Лемма доказана. □

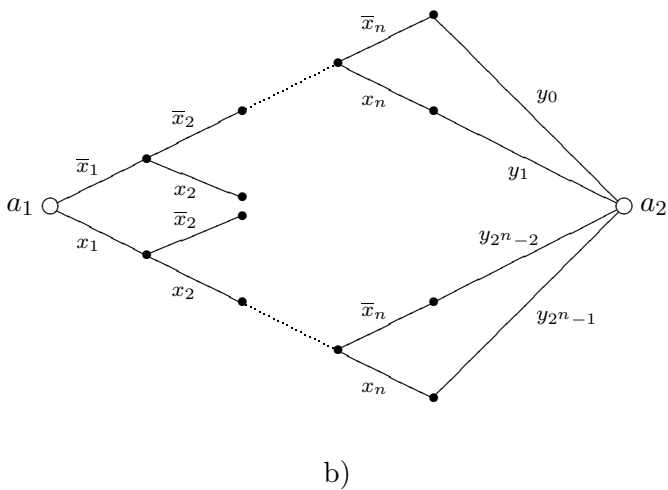
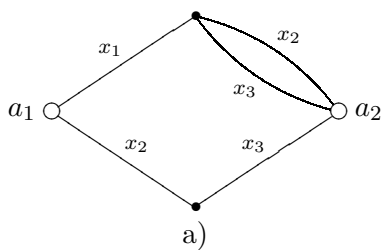
На рис 5.7а показана π -схема, которая реализует ФАЛ $H(x_1, x_2, x_3)$ и соответствует формуле:

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3,$$

а на рис. 5.7b — π -схема, которая построена на основе контактного дерева и реализует ФАЛ μ_n — мультиплексорную ФАЛ порядка n , — в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \\ = \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\dots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Будем называть $(1, m)$ -КС *приведенной*, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее вход и выходы. При этом КС $\widehat{\Sigma}$, которая получается из КС Σ удалением «лишних», то есть не принадлежащих цепям указанного вида, неполюсных вершин и контактов, является эквивалентной Σ приведенной КС такой, что $L(\widehat{\Sigma}) \leq L(\Sigma)$. Заметим, что приведенная КС не содержит петель, а приведенная КС,

Рис. 5.7: примеры π -схем

не реализующая нулевых ФАЛ, является связным графом. Так, КС, показанная на рис. 5.3с, не является приведенной, а соответствующая ей приведенная КС получается из нее удалением вершины v .

Рассмотрим, в заключение, некоторые оценки числа контактных схем различных типов. Пусть \mathcal{U}^K , $\mathcal{U}^{\bar{K}}$ и \mathcal{U}^π — множество всех КС из неориентированных контактов, множество всех КС из ориентированных контактов и множество всех π -схем соответственно. Пусть, кроме того, \mathcal{U}^{KBC} — множество т. н. *контактно-вентильных схем* (КВС), то есть схем из неориентированных контактов и дуг без пометок, которые проводят в соответствующем направлении при любых значениях управляющих БП и называются *вентильными*. Если \mathcal{U}^A — один из указанных классов схем, то через $\mathcal{U}^A(L, n)$ будем обозначать множество приведенных $(1, 1)$ -схем Σ из \mathcal{U}^A от БП $X(n)$, для которых $L(\Sigma) \leq L$. Для любого множества схем \mathcal{U} в соответствии с §1 через $|\mathcal{U}|$ и $\|\mathcal{U}\|$ будем по-прежнему обозначать число попарно не изоморфных и попарно не эквивалентных схем в \mathcal{U} соответственно. При этом для любого из введенных выше множеств схем неравенство (1.5) будет выполняться.

Лемма 5.2. *При любых натуральных L и n выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (64n)^L. \tag{5.2}$$

Доказательство. В силу леммы 5.1 достаточно доказать, что число попарно не эквивалентных формул $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ с поднятыми отрицаниями над базисом B_0 , для которых $R(\mathcal{F}) \leq L$, не превосходит $(64n)^L$. Для этого, сопоставим формуле \mathcal{F} указанного вида формулу \mathcal{F}' из $\mathcal{U}_{\{\&, \vee\}}^\Phi$ от БП x_1, \dots, x_{2n} , которая получается из \mathcal{F} заменой каждой ее подформулы \bar{x}_i , $i \in [1, n]$, формулой x_{i+n} и для которой в силу замечания к лемме 2.1

$$L(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}) - 1 \leq L - 1.$$

При таком сопоставлении неэквивалентные формулы переходят в неэквивалентные, и поэтому число попарно не эквивалентных формул рассматриваемого вида не больше, чем $\|\mathcal{U}^\Phi(L-1, 2n)\|$, откуда в силу (3.3) следует (5.2).

Лемма доказана. \square

Лемма 5.3. *При любых натуральных L и n выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

Доказательство. Возьмем произвольную КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$, $\Sigma \in \mathcal{U}^K(L, n)$, и выделим в ней остовное дерево \mathcal{D} с корнем a_2 так, чтобы в \mathcal{D} вошли все инцидентные a_2 контакты Σ , а вершина a_1 была листом \mathcal{D} . Пусть, далее, \mathcal{D}' — связанное с \mathcal{D} остовное наддерево КС Σ , которое получается путем присоединения каждого из не вошедших в \mathcal{D} ребер Σ к одной из своих концевых вершин, отличной от a_1 (см. §1). Рассмотрим ориентированное упорядоченное дерево \mathcal{D}'' , получающееся из \mathcal{D}' введением (условной) ориентации всех его ребер по направлению к корню и таким их упорядочением, при котором вершина a_1 становится первым листом \mathcal{D}'' (см. §1).

Заметим, что число ребер (вершин, листьев) дерева \mathcal{D}'' не больше, чем L (соответственно $L+1, L$), и поэтому в силу (1.4) число таких деревьев с учетом пометок их ребер символами $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ не больше, чем $(8n)^L$. Заметим также, что КС Σ может быть получена в результате присоединения каждого листа дерева \mathcal{D}'' к одной из его вершин, отличной от a_2 . Следовательно,

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq |\mathcal{U}^K(L, n)| \leq (8nL)^L.$$

Лемма доказана. \square

Замечание. Аналогичным образом доказываются неравенства

$$\|\mathcal{U}^{\bar{K}}(L, n)\| \leq (16nL)^L, \quad \|\mathcal{U}^{\text{KBC}}(L, n)\| \leq (8(n+1)L)^L.$$

§6 Многополюсные контактные схемы и их суперпозиции. Разделительные схемы, лемма Шеннона

Рассмотрим сначала особенности функционирования КС с несколькими входами.

Для произвольных выборок $V' = (v'_1, \dots, v'_p)$ и $V'' = (v''_1, \dots, v''_q)$ из множества $V(G)$ графа G определим матрицу достижимости выборки V' из выборки V'' как матрицу M , $M \in B^{p,q}$, для которой

$$M \langle i, j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } v''_j \text{ достижима из } v'_i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что в случае $V' = V''$ матрица M является рефлексивной и транзитивной¹, а если, кроме того, G — неориентированный граф, то и симметричной матрицей. Заметим также, что транзитивность рефлексивной матрицы M , $M \in B^{m,m}$, имеет место тогда и только тогда, когда²

$$M^2 = M. \quad (6.1)$$

¹Матрица M , $M \in B^{m,m}$, считается рефлексивной (транзитивной) тогда и только тогда, когда она задает рефлексивное (соответственно транзитивное) отношение на множестве $[1, m]$, то есть

$$M \langle i, i \rangle = 1 \quad (\text{соответственно } M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \geq M \langle i, j \rangle)$$

для любого i (соответственно любых i, j и t) из отрезка $[1, m]$.

²Считаем, что при умножении матриц из 0 и 1 вместо операции сложения используется операция дизъюнкции.

Действительно, полагая $\widehat{M} = M^2$, получим

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = \bigvee_{t=1}^m M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \quad (6.2)$$

и, следовательно, в случае $\widehat{M} = M$ неравенства транзитивности

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \geq M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle$$

будут выполнены при любых i, j, t из отрезка $[1, m]$. С другой стороны, из транзитивности рефлексивной матрицы M в силу (6.2) следует, что

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \vee \left(\bigvee_{\substack{1 \leq t \leq m \\ t \neq i, j}} M \langle i, j \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \right) = M \langle i, j \rangle.$$

Матрица достижимости выходной выборки сети из ее входной выборки называется *матрицей достижимости* этой сети.

Будем считать, что в каждой вершине (p, q) -КС Σ реализуется столбец, составленный из p ФАЛ проводимости от входов Σ к этой вершине, а сама КС Σ реализует матрицу, которая состоит из q столбцов, реализованных на ее выходах. Таким образом, функционирование КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$ представляет собой матрицу $F = F(x_1, \dots, x_n)$ с p строками, q столбцами и элементами из $P_2(n)$, для которой $F \langle i, j \rangle$ — ФАЛ, реализуемая между a'_i и a''_j , где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, q]$, то есть при любом $\alpha, \alpha \in B^n$, матрица $F(\alpha)$ является матрицей достижимости сети $\Sigma|_\alpha$. В частности, функционирование $(1, q)$ -КС представляет собой набор (строку) из q ФАЛ проводимости от ее входа к выходам, а функционирование $(p, 1)$ -КС — столбец из p ФАЛ проводимости от ее входов к выходу.

Так, КС $\Sigma(x_1, x_2, x_3; a_1, v; a_2, a_3)$, показанная на рисунке 5.3с реализует матрицу $\begin{bmatrix} l_3 & \bar{l}_3 \\ \bar{l}_3 & l_3 \end{bmatrix}$ от БП $X(3)$, а на рис. 5.4б приведено $(2^n, 1)$ -КД порядка n от БП $X(n)$, которое имеет вид $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; a_0, \dots, a_{2^n-1}; a)$ и реализует столбец из всех ЭК множества Q_n , упорядоченных сверху вниз по возрастанию их номеров.

В соответствии с общими правилами из §1 функционирование КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ с неразделенными полюсами определяется как функционирование КС с разделенными полюсами вида $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m; a_1, \dots, a_m)$. В этом случае матрица F является рефлексивной и транзитивной матрицей, а если, кроме того, Σ — неориентированная сеть, то и — симметричной матрицей. Заметим также, что функционирование $(1, 1)$ -КС из неориентированных контактов по существу не отличается от функционирования соответствующей двухполюсной КС с неразделенными полюсами.

В частности, показанная на рис. 5.3с КС с неразделенными полюсами a_1, a_2, a_3 реализует матрицу $\begin{bmatrix} 1 & l_3 & \bar{l}_3 \\ l_3 & 1 & 0 \\ \bar{l}_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, КС из тождественных вершин реализует единичную матрицу, если каждая ее вершина является входом и выходом с одним и тем же номером и т. д.

С другой стороны, любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица F , $F \in (P_2(n))^{m,m}$, реализуется КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, которая представляет собой объединение всех КС $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i, a_j)$, где $1 \leq i < j \leq m$, а КС Σ_{ij} построена по совершенной ДНФ ФАЛ $F\langle i, j \rangle$ (см. §5) и считается *канонической КС матрицы F* .

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с нахождением функционирования для суперпозиций сетей или КС. Из соображений удобства будем допускать наличие в КС вентилей и неориентированных ребер без пометок, которые про-

водят при любых значениях управляющих входных БП и называются *проводниками*. Это позволяет считать, что сети являются частным случаем КС и реализуют свои матрицы достижимости, состоящие из константных ФАЛ.

Операция суперпозиции КС и все ее частные случаи определяются обычным образом (см. §1). При этом пометками входов и выходов КС, в отличие от СФЭ, не обязательно являются переменные, а БП, управляющие проводимостью контактов КС, никак не связаны с ее входами.

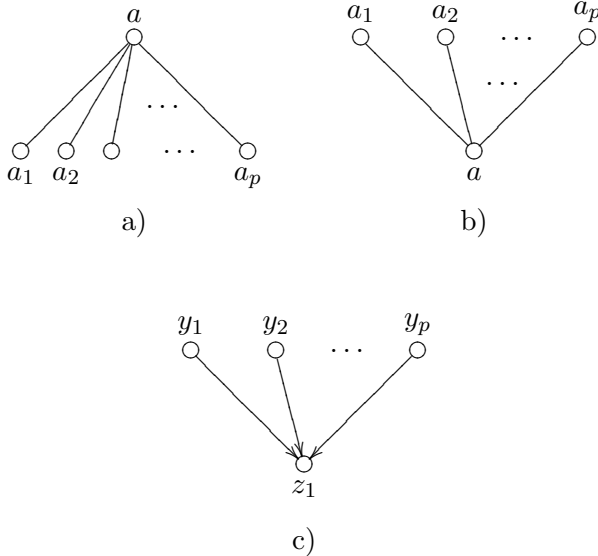
Легко видеть, что перестановка входов(выходов) КС порождает в реализуемой ею матрице такую же перестановку связанных с ними строк (соответственно столбцов), а снятие (дублирование) выходов этой КС — удаление (соответственно добавление) связанных с ними столбцов. Заметим также, что КС Σ , которая является объединением КС Σ' и Σ'' , реализующих матрицы F' и F'' соответственно, реализует матрицу F вида¹:

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline F' & 0 \\ \hline 0 & F'' \\ \hline \end{array}$$

Обратимся, далее, к особенностям функционирования КС, получающихся в результате применения операций суперпозиции общего вида. Напомним (см. §1), что суперпозиция общего вида сводится к последовательному выполнению операций переименования выходов, добавления тождественных вершин и стыковки. При этом стыковка, в свою очередь, сводится к снятию выходов, отождествлению входов и неповторной стыковке.

Заметим, что результат отождествления первых p входов КС Σ эквивалентен результату стыковки вида $\Sigma(\Sigma')$,

¹Предполагается, что номер любого входа (выхода) КС Σ' меньше номера любого входа (соответственно выхода) КС Σ'' в КС Σ , а внутренняя упорядоченность полюсов КС Σ' и Σ'' в КС Σ сохраняется. В остальных случаях происходит необходимая перестановка входов и выходов КС Σ .

Рис. 6.1: проводящие и вентильная звезды порядка p

а результат p -кратного дублирования первого выхода КС Σ — результату стыковки $\Sigma''(\Sigma)$, где КС Σ' , Σ'' состоят из $(1, p)$ -проводящей звезды (см. рис. 6.1a, a — вход) и тождественных вершин. Заметим также, что стыковка вида $\Sigma(\widehat{\Sigma})$, где КС $\widehat{\Sigma}$ состоит из $(p, 1)$ -проводящей звезды (см. рис. 6.1b, a — выход) и тождественных вершин, соответствует отождествлению первых p выходов КС Σ .

Схема называется *разделительной по входам (выходам)*, если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0. Так $(p, 1)$ -схема $\Sigma'' = \Sigma''(y_1, \dots, y_p; z_1)$, показанная на рисунке 6.1c, является разделительной по входам схемой, которая называется *вентильной звездой порядка p* . Примером разделительной по выходам (входам) КС может служить $(1, 2^n)$ - (соответ-

ственно $(2^n, 1)$ -контактное дерево порядка n (см. рис. 5.4). Будем говорить, что КС Σ от БП x_1, \dots, x_n *разделительна на наборе* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_\alpha$.

Лемма 6.1. Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$, а F, F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'', \quad (6.3)$$

если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Доказательство. Пусть КС Σ является сначала результатом бесповторной стыковки (p, q) -КС Σ' и (q, s) -КС Σ'' от БП x_1, \dots, x_n . Пусть, кроме того, v' (v'') — произвольная вершина КС Σ' (соответственно Σ''), а ФАЛ f'_j (соответственно f''_j), $j \in [1, q]$, — ФАЛ проводимости от вершины v' к j -му выходу в КС Σ' (соответственно от j -го входа к вершине v'' в КС Σ''). Докажем, что для ФАЛ f — ФАЛ проводимости от вершины v' к вершине v'' в КС Σ , — справедливо неравенство

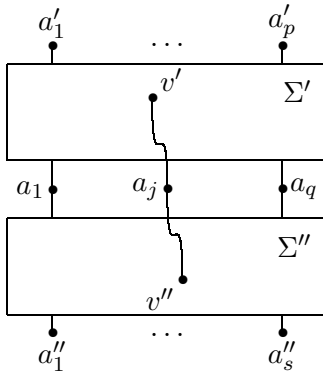
$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (6.4)$$

которое переходит в равенство

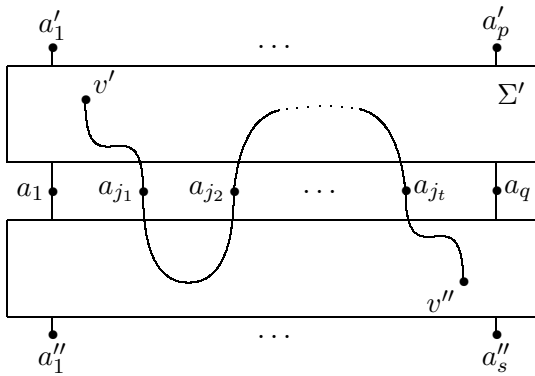
$$f(x_1, \dots, x_n) = f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (6.5)$$

если КС Σ' разделительна по выходам или КС Σ'' разделительна по входам.

Действительно, пусть a_j , $j \in [1, q]$, — вершина КС Σ , которая получается в результате присоединения j -го входа КС Σ'' к j -му выходу КС Σ' (см. рис. 6.2а). Справедливость неравенства (6.4) следует из того, что его правая



a)



b)

Рис. 6.2: к доказательству леммы 6.1

часть описывает «суммарную» проводимость тех $(v' - v'')$ -цепей КС Σ , которые проходят через вершины a_1, \dots, a_q ровно один раз (см. рис. 6.2а). Любая другая $(v' - v'')$ -цепь КС Σ проходит через указанные вершины не меньше трех раз (см. рис. 6.2б) и в случае разделительности КС Σ' по выходам или разделительности КС Σ'' по входам имеет нулевую проводимость.

Из (6.4) и (6.5) непосредственно вытекает (6.3) с учетом того, что при $v' = a'_i$ и $v'' = a''_j$, где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, s]$, левая(правая) часть этих соотношений равна элементу матрицы F (соответственно, $F' \cdot F''$), расположенному в i -й строке и j -м столбце.

Пусть теперь КС Σ получается из КС Σ'' в результате применения операции отождествления входов, то есть Σ эквивалентна бесповторной стыковке вида Σ'' (Σ'), где КС Σ' состоит из проводящей звезды и тождественных вершин. В этом случае неравенство (6.3) имеет вид $F \geq \widehat{F}''$, где матрица \widehat{F}'' получается из матрицы F'' в результате поразрядной дизъюнкции строк, соответствующих отождествляемым входам КС Σ'' , и по-прежнему переходит в равенство, если КС Σ'' разделительна по входам. В последнем случае, кроме того, из аналогичного равенства, связанного с КС $\widetilde{\Sigma}''$, которая получается из КС Σ'' в результате объявления ее входов входами и, одновременно, выходами $\widetilde{\Sigma}''$, следует разделительность КС Σ по входам.

Заметим, наконец, что стыковка общего вида $\Sigma = \Sigma''$ (Σ') сводится к последовательному выполнению отождествления входов вида $\widehat{\Sigma}'' = \Sigma''$ ($\check{\Sigma}''$) и бесповторной стыковки вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''$ ($\widehat{\Sigma}'$), где КС $\check{\Sigma}''$ состоит из проводящей звезды и тождественных вершин, а КС $\widehat{\Sigma}'$ получается из КС Σ' снятием некоторых выходов. При этом неравенство (в случае разделительности КС Σ'' по входам равенство) (6.3) для КС Σ , Σ' , Σ'' вытекает из установленных выше аналогичных соотношений для КС $\widehat{\Sigma}''$, $\check{\Sigma}''$, Σ'' и КС Σ , $\widehat{\Sigma}'$, $\widehat{\Sigma}''$ в силу ассоци-

активности произведения матриц. Случай разделительности КС Σ' по выходам рассматривается аналогично.

Лемма доказана. \square

Следствие 1. *В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ , $\Sigma = \Sigma''(\Sigma)$, которая соответствует выходу КС Σ' , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ' .*

Действительно, полагая $v' = a'_i$ и $v'' = a_j$, где $i \in [1, p]$, а $j \in [1, q]$ из (6.5) получим требуемое равенство $f = f'_j$. Случай стыковки общего вида рассматривается аналогично.

Следствие 2. *Равенство (6.3) выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.*

Стыковка (суперпозиция) КС вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma)'$ называется *правильной*, если она удовлетворяет равенству (6.3), и считается *корректной*, если она, кроме того, удовлетворяет требованиям следствия 1 из леммы 6.1¹ Аналогичным образом определяется правильность и корректность суперпозиции КС на заданном наборе значений управляющих БП. Заметим, что при правильной стыковке $(1, p)$ -КС и $(p, 1)$ -КС, реализующих строку и столбец из ФАЛ $\{f'_1, \dots, f'_p\}$ и $\{f''_1, \dots, f''_p\}$ соответственно, получается $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ $f'_1 f''_1 \vee \dots \vee f'_p f''_p$, при правильном отождествлении входов (выходов) КС в реализуемой ею матрице происходит поразрядная дизъюнкция тех строк (соответственно столбцов), которые соответствуют отождествленным входам (соответственно выходам) и т. п.

¹Эти определения соответствуют определениям §1 в рамках модели преобразующих КС (см. §7). Требования следствия 1 леммы 6.1 не распространяются, как правило, на тождественные вершины КС Σ' , добавленные для согласования числа ее выходов с числом входов КС Σ'' .

Легко видеть, что операции переименования входов без отождествления, переименования выходов и объединения корректны в любом случае. Из леммы 6.1 и ее следствий вытекает, что для разделительной по входам КС Σ'' любая суперпозиция вида $\Sigma'' (\Sigma')$ является корректной. Это относится, в частности, к последовательному соединению $(1, 1)$ -КС (см. §5). В то же время параллельное соединение $(1, 1)$ -КС, при котором сначала отождествляются входы, а затем выходы соединяемых КС и полученная КС реализует дизъюнкцию ФАЛ, реализуемых исходными КС, является правильной, но не является корректной операцией суперпозиции. Заметим, что корректное дизъюнктивное соединение выходных ФАЛ можно осуществить с помощью стыковки исходной КС с вентильной звездой (см. рис. 6.1с).

Важным примером корректной суперпозиции является операция присоединения одного или двух противоположных контактов, которая лежит в основе метода каскадов (см. §3 главы 4) и заключается в следующем. Пусть $(1, m)$ -КС Σ получается из $(1, \check{m})$ -КС $\check{\Sigma}$ в результате добавления новой выходной вершины v , которая соединяется с выходными вершинами v_0 и v_1 КС $\check{\Sigma}$ контактами \bar{x}_i и x_i соответственно (см. рис. 6.3а). Тогда в вершинах v_0 и v_1 КС Σ в силу разделительности по входам присоединяемой $(2, 1)$ -КС реализуются те же самые ФАЛ g_0 и g_1 , что и в КС $\check{\Sigma}$, а в вершине v — ФАЛ g вида

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1. \quad (6.6)$$

Аналогичные соотношения будут справедливы и тогда, когда вершина v КС Σ связана с КС $\check{\Sigma}$ только одним контактом вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$, соединяющим ее с вершиной v_σ (см. рис. 6.3б). В этом случае в вершине v КС Σ реализуется ФАЛ

$$g = x_i^\sigma g_\sigma. \quad (6.7)$$

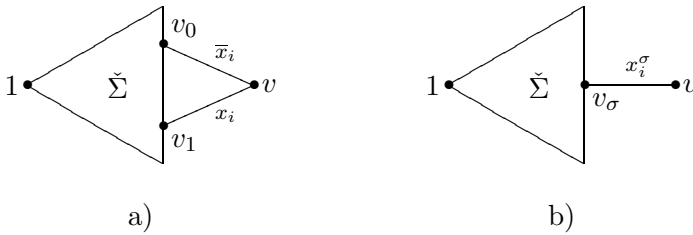


Рис. 6.3: присоединение одного или двух противоположных контактов

Естественным обобщением операции присоединения двух противоположных контактов является операция суперпозиции вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ' — $(1, m)$ -КС, а Σ'' — $(2^n, 1)$ -КД от БП $X(n)$, показанное на рис. 5.4b, которая лежит в основе метода Шеннона (см. §3 гл. 4). При этом в силу разделительности КС Σ'' по входам указанная суперпозиция является корректной и в выходной вершине Σ , соответствующей выходу, то есть корню, КД Σ'' , реализуется ФАЛ вида

$$f = \mu_n(x_1, \dots, x_n, g_0, g_1, \dots, g_{2^n-1}), \quad (6.8)$$

где g_i — ФАЛ, реализуемая на том выходе Σ' , к которому присоединяется i -й вход Σ'' , $i \in [0, 2^n)$.

Рассмотрим, в заключение, вопросы правильности суперпозиции для схем, не обладающих свойством разделительности. Схема Σ от БП $X(n)$ с 1 выходом называется *слаборазделительной*, если для любого набора α , $\alpha \in B^n$, такого, что множество входов сети $\Sigma|_\alpha$, из которых достигим ее выход, не пусто, множество всех остальных входов этой сети обладает свойством разделительности. Аналогичным образом определяется слаборазделительная КС с одним входом. Доказательство следующего утверждения по существу повторяет доказательство леммы 6.1.

Лемма 6.2. Стыковка КС вида $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$ является правильной, если хотя бы одна из КС Σ' , Σ'' слаборазделительна.

Из леммы 6.2 следует, в частности, что отождествление всех входов (выходов) КС является правильной операцией суперпозиции, так как проводящие звезды (см. рис. 6.1а, 6.1б) — слаборазделительные КС.

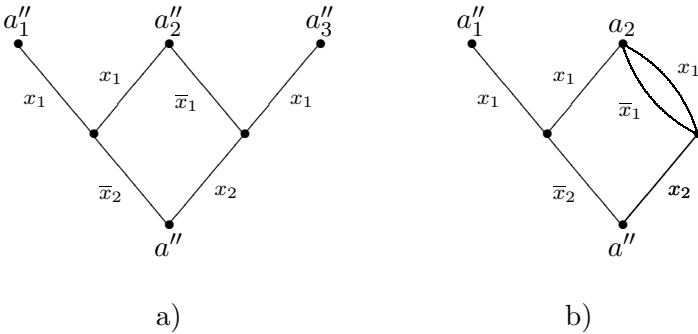


Рис. 6.4: отождествление входов у $(3, 1)$ -КС Σ''

В общем случае операции отождествления входов, а также операции стыковки не всегда являются правильными. Так на рис. 6.4а изображена $(3, 1)$ -КС $\Sigma'' (x_1, x_2; a_1'', a_2'', a_3''; a'')$, которая реализует столбец f'' из ФАЛ

$$f_1'' = x_1 \bar{x}_2, \quad f_2'' = x_1 \oplus x_2 \quad \text{и} \quad f_3'' = x_1 x_2,$$

а на рисунке 6.4б — $(2, 1)$ -КС $\widehat{\Sigma}'' (x_1, x_2; a_1'', a_2; a'')$, которая получается из Σ'' в результате отождествления входов $a_2'' = a_3'' = a_2$ и реализует столбец \widehat{f}'' из ФАЛ

$$\widehat{f}_1'' = x_1 \neq f_1'', \quad \widehat{f}_2'' = x_1 \vee x_2.$$

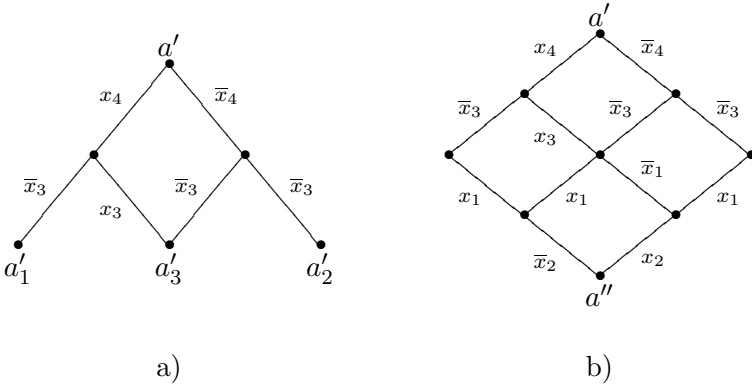


Рис. 6.5: (1, 3)-КС Σ' и $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$

На рис. 6.5а показана (1, 3)-КС $\Sigma'(x_3, x_4; a'; a'_1, a'_2, a'_3)$, которая реализует набор f' из ФАЛ

$$f'_1 = \bar{x}_3 x_4, \quad f'_2 = x_3 \sim x_3, \quad f'_3 = \bar{x}_3 \bar{x}_4,$$

а на рис. 6.5b — (1, 1)-КС $\Sigma(x_1, x_2, x_3, x_4; a'; a'')$, которая является результатом бесповторной стыковки вида $\Sigma''(\Sigma)'$ и реализует ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ такую, что

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= \bar{x}_3 x_4 x_1 \vee (x_3 \sim x_4) \cdot (x_1 \oplus x_2) \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 x_2 \neq \\ &\neq f'_1 \cdot f''_1 \vee f'_2 \cdot f''_2 \vee f'_3 \cdot f''_3. \end{aligned}$$

§7 Некоторые частные случаи и модификации контактных схем. Оценка числа схем различных типов

Определим, сначала, каскадную КС как приведенную КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных кон-

тактов (см. §6) и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается *полной*, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта. Так, например, КС, показанная на рис. 5.3с, является полной ККС, если её входами считать вершины a_1 и v , а выходами — вершины a_2 и a_3 , или наоборот. К числу ККС относятся также контактные деревья, показанные на рис. 5.4, причем $(2^n, 1)$ -КД является полной ККС.

Индукцией по числу контактов ККС легко показать, что если две проводящие цепи, соединяющие входы ККС с другими ее вершинами, имеют общий контакт, то они проходят его в одном и том же направлении. Заметим, далее, что в силу корректности рассматриваемых операций присоединения контактов (см. §6) ККС является разделительной по входам КС. Отсюда следует, что в каждой вершине ККС реализуется столбец, в котором никакие две ФАЛ не обращаются в единицу одновременно, причем в случае полной ККС дизъюнкция всех ФАЛ этого столбца дает 1. Так, в частности, в каждой вершине полной ККС с двумя входами реализуется столбец из двух противоположных ФАЛ.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется *неполной вершиной* этой ККС. Будем говорить, что ККС Σ'' является *дополнением* неполной ККС Σ' , если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом, очевидно,

$$L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma'), \quad (7.1)$$

объединение Σ' и Σ'' является полной ККС, а ККС Σ'' в силу отмеченных выше свойств полных ККС реализует систему ФАЛ \bar{F}' , если ККС Σ' имеет один вход и реализует систему ФАЛ F' .

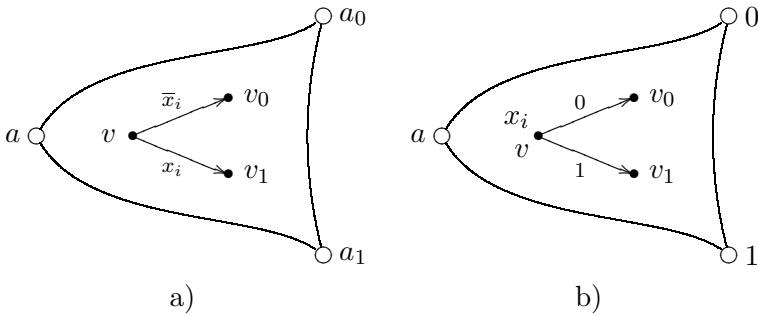
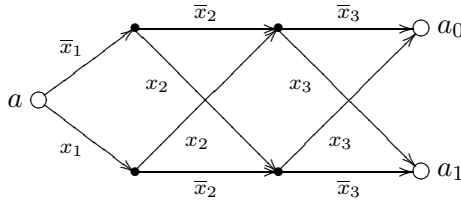


Рис. 7.1: к определению BDD

В последние годы активно изучается (см., например, [31]) один специальный класс ориентированных КС — т. н. двоичные решающие диаграммы (BDD), которые представляют собой, по существу, частный случай ККС. Схема Σ с одним входом a и двумя выходами a_0, a_1 , называется *двоичной решающей диаграммой*, если она состоит из ориентированных контактов и не имеет (ориентированных) циклов, а из каждой ее вершины v , отличной от выходов, исходят две дуги с противоположными пометками вида x_i, \bar{x}_i (см. рис. 7.1a). При этом вершине v (a_0, a_1), обычно, сопоставляют пометку x_i (соответственно $0, 1$), а пометки \bar{x}_i и x_i у исходящих из v ребер заменяют пометками 0 и 1 соответственно (см. рис. 7.1b). Заметим, что BDD Σ указанного вида от БП x_1, \dots, x_n получается из некоторой полной $(2, 1)$ -ККС $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_0, a_1; a)$ введением ориентации каждого контакта $\widehat{\Sigma}$ по направлению движения проходящих через него проводящих цепей $\widehat{\Sigma}$, идущих от a к a_0, a_1 . При этом, очевидно, схемы Σ и $\widehat{\Sigma}$ реализуют между вершинами a и a_1 некоторую ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, между вершинами a и a_0 — ФАЛ $\bar{f}(x_1, \dots, x_n)$, а ФАЛ проводимости от a_0 к a_1 и обратно равна 0 . В таком случае, обычно, считается что

Рис. 7.2: BDD для l_3

Σ реализует ФАЛ f . Так, например, BDD Σ , показанная на рис. 7.2 (ср. с рис. 5.3с), реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Заметим, что BDD можно интерпретировать, как адресующие бинарные программы (см., например, [11]). Действительно, сопоставим каждой отличной от выхода вершине v BDD Σ (см. рис. 7.1b) команду условного перехода на команду сопоставленную вершине v_σ , $\sigma \in B$, если $x_i = \sigma$, а выходной вершине с пометкой σ , $\sigma \in B$, — команду присвоения вычисляемой ФАЛ значения σ . Полученная таким образом программа начинает свою работу с команды, сопоставленной входу Σ , и вычисляет ту же самую ФАЛ, что и BDD Σ .

Наряду со сложностью $L(\Sigma)$ BDD Σ введем также ее размер $\mathcal{L}(\Sigma)$, равный числу вершин Σ , отличных от выходов, и заметим, что $L(\Sigma) = 2\mathcal{L}(\Sigma)$. Пусть, как обычно, $\mathcal{U}^{\text{BDD}}\{\mathcal{L}, n\}$ — множество тех BDD Σ от БП $X(n)$, размер которых не больше, чем \mathcal{L} .

Лемма 7.1. *Для любых натуральных \mathcal{L}, n справедливо неравенство:*

$$\|\mathcal{U}^{\text{BDD}}\{\mathcal{L}, n\}\| \leq (16n(\mathcal{L} + 2))^{\mathcal{L}+1}.$$

Доказательство. Сопоставим BDD Σ рассматриваемого вида граф $\widehat{\Sigma}$, получающийся из нее изменением ориентации всех дуг. Заметим, что указанное сопоставление является

взаимно однозначным с точностью до изоморфизма, а $\widehat{\Sigma}$ — ориентированный ациклический граф с одним стоком и двумя истоками, помеченными символами 0, 1, в котором каждая отличная от истока вершина имеет две входящие дуги и помечена одной из БП x_1, \dots, x_n . Используя рассуждения из доказательства теоремы 3.1, число попарно не изоморфных графов $\widehat{\Sigma}$ указанного вида можно оценить сверху числом $(16n(\mathcal{L} + 2))^{\mathcal{L}+1}$.

Лемма доказана. □

Для того, чтобы приблизить функционирование КС с несколькими входами к функционированию СФЭ, рассмотрим следующую модификацию КС. Будем считать, что БП из алфавита X являются управляющими (адресными) входными БП и введем еще один алфавит входных БП — алфавит $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$, который состоит из информационных (преобразуемых) БП. Контактную (p, q) -схему, входам(выходам) которой сопоставлены в качестве пометок БП из Y (соответственно Z), так, что вход (соответственно выход) с бóльшим номером помечен БП с бóльшим номером, будем называть *преобразующей контактной схемой* (ПКС).

Будем считать, что в вершине v ПКС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_q)$ реализуется ФАЛ вида

$$f_v(x, y) = y_1 \cdot g_v^{(1)}(x) \vee \dots \vee y_p \cdot g_v^{(p)}(x) \quad (7.2)$$

где $x = x(n)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$, а $g_v^{(i)}(x)$ — ФАЛ проводимости от i -го входа Σ к вершине v , $i \in [1, p]$, и что КС Σ реализует систему \mathcal{F} , состоящую из q ФАЛ, реализуемых на ее выходах, или, иначе, систему уравнений $z = \mathcal{F}(x, y)$, где $z = (z_1, \dots, z_q)$. Заметим, что при этом

$$f_v(x, y) = y \cdot g_v(x) \text{ и } \mathcal{F}(x, y) = y \cdot F(x) \quad (7.3)$$

где $g_v(x)$ — столбец, а $F(x)$ — матрица из ФАЛ, которые реализуются «обычным» способом в вершине v и на выходах КС Σ соответственно.

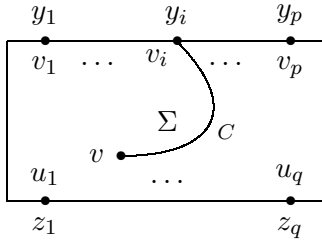


Рис. 7.3: к определению преобразующей контактной схемы

Соотношение (7.2) имеет следующий содержательный смысл: ФАЛ f_v обращается в 1 при $x = \alpha$ и $y = \beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ тогда и только тогда, когда из некоторой входной вершины v_i с сопоставленной ей БП y_i такой, что $\beta_i = 1$, в вершину v идет проводящая при $x = \alpha$ цепь C (см. рис. 7.3). В соответствии с (7.2) в каждой входной вершине v_i , $i = 1, \dots, p$, тоже реализуется ФАЛ $f_{v_i}(x, y)$, для которой $f_{v_i}(x, y) \geq y_i$.

Так, вентиляльная звезда порядка p , приведенная на рис. 6.1с, является ПКС, реализующей ФАЛ $y_1 \vee \dots \vee y_p$. На рис. 7.4а показана ПКС Σ от БП $(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_p; z_1)$, которая называется *неоднородной звездой порядка p* , имеет *степень* $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ и реализует ФАЛ $x_1^{\sigma_1} y_1 \vee \dots \vee x_p^{\sigma_p} y_p$. На рис. 7.4б изображена ПКС $\hat{\Sigma}$, которая получается из указанной ПКС Σ , где $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p = \sigma$, в результате отождествления БП $x_1 = x_2 = \dots = x_p = x$, называется *однородной звездой порядка p* , имеет *степень* σ и реализует ФАЛ $x^\sigma (y_1 \vee \dots \vee y_p)$. Если в $(2^n, 1)$ -КД, показанном на рис. 5.4б, пометки a_0, \dots, a_{2^n-1} его входов заменить на информационные БП y_0, \dots, y_{2^n-1} , а пометку a его выхода — на выходную БП z_1 , то мы получим $(2^n, 1)$ -ПКС $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; y_0, \dots, y_{2^n-1}; z_1)$, которая является ПКС-мультиплексором порядка n , то есть реализует ФАЛ $\mu_n(x_1, \dots, x_n; y_0, \dots, y_{2^n-1})$.

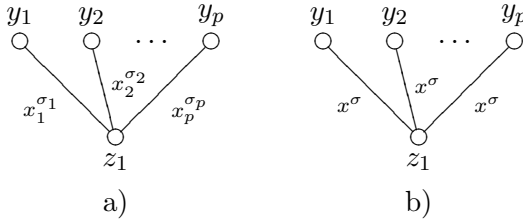


Рис. 7.4: неоднородная и однородная звезды порядка p

Суперпозиция ПКС понимается как суперпозиция связанных с ними КС и считается правильной (корректной) в случае правильности (соответственно корректности) последней. Отметим, что правильная суперпозиция ПКС реализует соответствующую ей суперпозицию ФАЛ. Действительно, пусть, для определенности, ПКС $\Sigma(x; y; z)$ является результатом правильной стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, где ПКС $\Sigma'(x; y; z')$ и $\Sigma''(x; y''; z)$ реализуют системы ФАЛ

$$\mathcal{F}'(x, y) = y \cdot F'(x) \text{ и } \mathcal{F}''(x, y'') = y'' \cdot F''(x)$$

соответственно (см. (7.3)). Тогда в силу правильности рассматриваемой суперпозиции система ФАЛ $\mathcal{F}(x, y)$, реализующая ПКС Σ , имеет вид (см. равенство (6.3))

$$\mathcal{F}(x, y) = y \cdot F'(x) \cdot F''(x) = \mathcal{F}''(x, \mathcal{F}'(x, y)),$$

то есть задается соответствующей суперпозицией систем ФАЛ \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' . Аналогичным образом рассматривается и суперпозиция общего вида.

В случае ПКС будем использовать еще один тип суперпозиции — подстановку константы 1 вместо информационных БП. Схему Σ' , которая получается из ПКС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_q)$ в результате замены пометок y_{i_1}, \dots, y_{i_s} , где $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq p$ на пометку 1 будем

называть *преобразующей контактной схемой с 1-входами* (ПКС1). При этом считается, что информационными входными БП Σ' являются БП из набора y' , который получается удалением БП y_{i_1}, \dots, y_{i_s} из набора y_1, \dots, y_p , что вершины, соответствующие БП y_{i_1}, \dots, y_{i_s} в Σ , становятся 1-входами Σ' , и что ФАЛ $f'_v(x, y')$, реализуемая в вершине v схемы Σ' , задается формулой, которая получается из правой части (7.2) в результате подстановки константы 1 вместо БП y_{i_1}, \dots, y_{i_s} .

Легко видеть, что подстановка константы 1 является корректной операцией суперпозиции, и что любая ПКС1 эквивалентна ПКС1, которая получается из нее в результате «склейки» всех 1-входов в один такой вход. Заметим также, что функционирование $(1, m)$ -ПКС1 с 1-входом совпадает с функционированием соответствующей ей $(1, m)$ -КС. Так, если в $(1, 2^n)$ -КД, показанном на рис. 5.4а, пометки a_0, \dots, a_{2^n-1} его выходов заменить на выходные БП z_0, \dots, z_{2^n-1} , то мы получим $(1, 2^n)$ -ПКС1, которая является ПКС1-дешифратором порядка n .

Рассмотрим теперь следующий класс контактных схем, который является удобной математической моделью интегральных схем на дополняющих МОП-транзисторах (см., например, [17, 23]). Пусть $(2, m)$ -КС вида $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a', a''; a_1, \dots, a_m)$ получается из $(1, m)$ -КС вида $\Sigma'(x_1, \dots, x_n; a'; a'_1, \dots, a'_m)$, которая реализует набор ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$, и $(1, m)$ -КС вида $\Sigma''(x_1, \dots, x_n; a''; a''_1, \dots, a''_m)$, которая реализует набор ФАЛ $\bar{F} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$, в результате следующего отождествления вершин: $a'_i = a''_i = a_i$, где $i = 1, \dots, m$ (см. рис. 7.5а). Заметим, что на любом наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений БП x_1, \dots, x_n и при любом $j, j = 1, \dots, m$ в КС Σ имеется проводящая цепь либо из a' , если $f_j(\alpha) = 1$, либо из a'' , если $f_j(\alpha) = 0$, в a_j . Заметим также, что ФАЛ проводимости между входами a' и a'' в КС Σ равна 0. Действительно, пусть

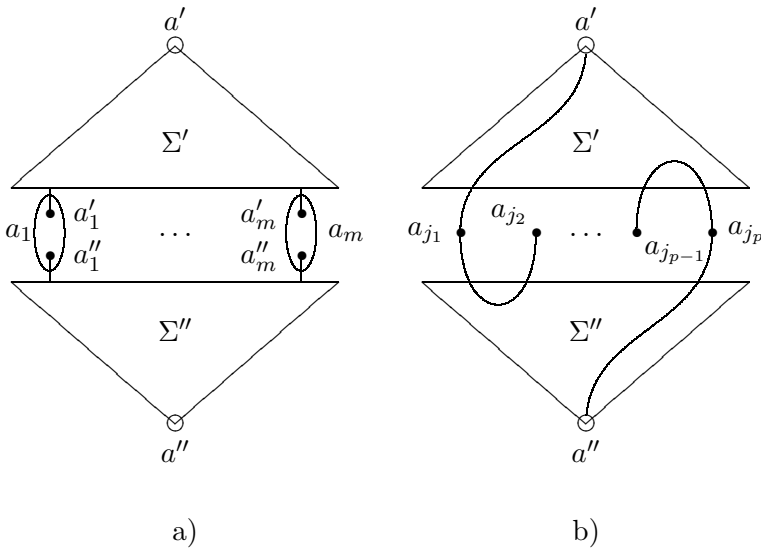


Рис. 7.5: к построению модели ИС на дополняющих МОП-транзисторах

на наборе $x = \alpha$ в Σ имеется проводящая цепь C из a' в a'' последовательно переходящая из Σ' в Σ'' и обратно в вершинах a_{j_1}, \dots, a_{j_p} (см. рис. 7.5b). Тогда, в силу специфики структуры КС Σ , будут справедливы равенства:

$$f_{j_1}(\alpha) = 1, \quad \bar{f}_{j_1}(\alpha) = \bar{f}_{j_2}(\alpha), \\ f_{j_2}(\alpha) = f_{j_3}(\alpha), \dots, \quad f_{j_p}(\alpha) = 0,$$

которые образуют противоречивую систему.

Отмеченные выше особенности КС Σ позволяют использовать ее для построения схемы на дополняющих МОП-транзисторах, реализующей набор ФАЛ F . Для этого достаточно подключить ее вход a' (a'') к источнику высокого (соответственно низкого) потенциала, а каждый контакт

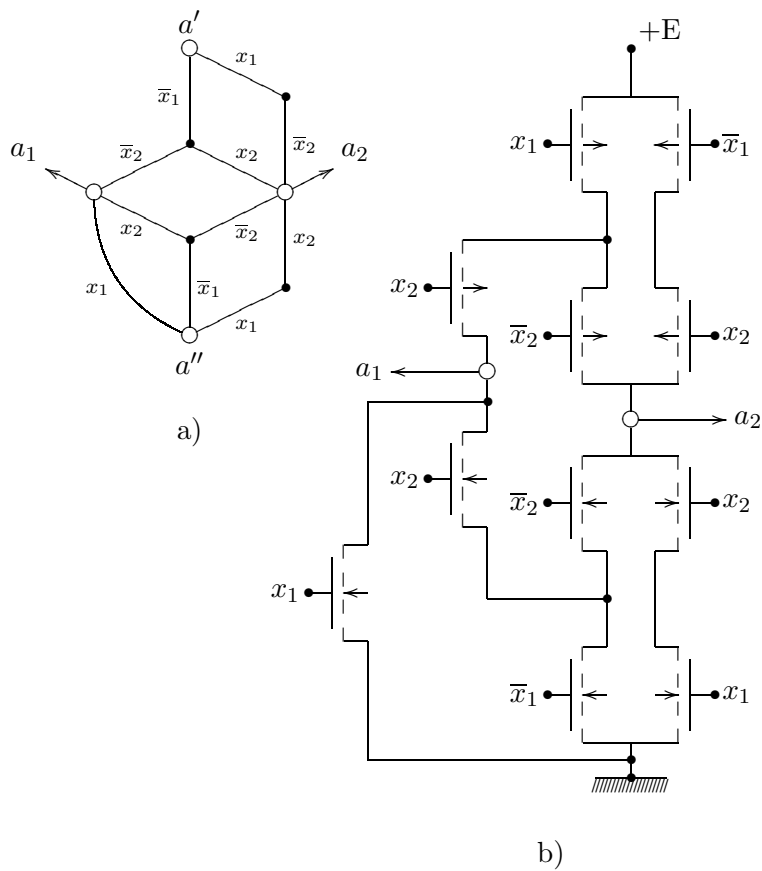


Рис. 7.6: модель интегральной схемы на дополняющих МОП-транзисторах

вида x_i^σ КС Σ' (Σ'') заменить p -МОП (соответственно n -МОП) транзистором, на затвор которого подана ФАЛ $x_i^{\bar{\sigma}}$ (соответственно x_i^σ). На рис. 7.6а показана КС Σ указанного вида, а на рис. 7.6б — соответствующая ей схема на дополняющих МОП-транзисторах, реализующая набор ФАЛ $F = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, x_1 \oplus x_2)$.

Рассмотрим, в заключение, еще одну модификацию КС, которая является по существу, частным случаем т. н. релейно-контактных схем (см., например, [15]) и связана с операцией присоединения управляющих БП (входов) КС к ее выходам (ср. с §1, §3).

Для КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; 1; z_1, \dots, z_m)$ определим обычным образом (см. §1) операцию *присоединения ее управляющей БП x_i к выходу z_j* , которая применима, если БП x_i входит в Σ без отрицаний, а ее контакты не лежат на простых проводящих цепях, соединяющих вход 1 с выходом z_j (ср. с §3). Заметим, что при этом ФАЛ f_j , реализуемая на выходе z_j КС Σ , не зависит от x_i . В результате выполнения указанной операции в графе КС Σ происходит снятие БП z_j , сопоставление связанной с ней вершине внутренней БП u и замена всех пометок x_i на пометку u . Полученная таким образом схема Σ' имеет вид $\Sigma'(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n; a; z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_m)$ и реализует в каждой своей вершине ФАЛ, получающуюся в результате подстановки ФАЛ f_j вместо переменной x_i в ту ФАЛ, которая реализовывалась в этой вершине в КС Σ . Функционирование самой схемы Σ' представляет собой, как обычно, набор из ФАЛ, реализуемых на ее выходах.

Аналогично определяется операция (одновременного) присоединения нескольких управляющих БП КС Σ к ее выходам, при выполнении которой каждой участвующей в присоединениях выходной вершине Σ сопоставляется только одна внутренняя БП, причем разным вершинам сопоставляются разные БП. Любая из полученных таким образом схем

называется *итеративной контактной схемой (ИКС)* на базе КС Σ . Под сложностью $L(\Sigma')$ ИКС Σ' на базе КС Σ понимается сложность $L(\Sigma)$. На рис. 7.7, где $x' = (x_1, \dots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ и $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, показан итеративный контактный дешифратор порядка n , который имеет сложность $2^n + O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$.

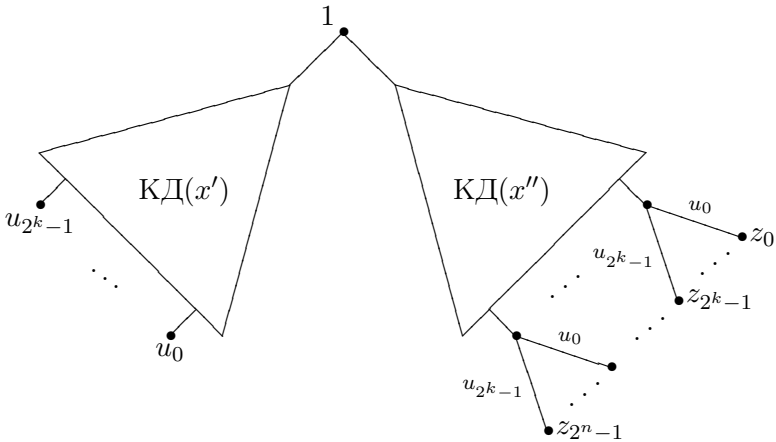


Рис. 7.7: итеративный контактный дешифратор порядка n и сложности $2^n + O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$

Обозначим, как обычно, через $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}$ класс всех ИКС, а через $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}(L, n)$ — множество ИКС от БП $X(n)$, которые имеют один выход, приведенную базу из неориентированных контактов и сложность не более L . Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 5.3 с учетом того, что пометками ребер у схем из $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}(L, n)$ могут быть как БП x_1, \dots, x_n или их отрицания, так и внутренние БП, связанные с вершинами ее базы.

Лемма 7.2. *Для любых натуральных L, n справедливо неравенство*

$$\mathcal{U}^{\text{ИКС}}(L, n) \leq (2(L + 2n))^{2L}$$

Заметим, что на основе ИКС можно рассматривать КМОП-схемы и некоторые другие типы КС.

Глава 3

Эквивалентные преобразования управляющих систем

§1 Эквивалентные преобразования схем на основе тождеств. Моделирование эквивалентных преобразований формул в классе схем из функциональных элементов и их «ускорение»

Эквивалентные преобразования (ЭП), то есть преобразования, не изменяющие функционирования схем, играют важную роль при решении различных задач теории управляющих систем и, в частности, задачи синтеза схем (см. §1 главы 4). Рассмотрим сначала ряд понятий, связанных с эквивалентными преобразованиями формул над базисом B на основе тождеств. Напомним, что некоторые ЭП формул базиса B_0 уже использовались для раскрытия скобок и приведения подобных при построении сокращенной ДНФ (см. §3 главы 1), для оптимизации подобных формул по глубине и поднятия отрицаний (см. §2 главы 2).

Для того, чтобы выделить набор $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, который состоит из всех различных БП алфавита X , встречающихся в формуле \mathcal{F} и перечисленных в порядке возрастания их номеров, будем записывать ее в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$. При этом формулу, которая получается из \mathcal{F} в результате замены каждого вхождения БП x_{i_j} , $j = 1, \dots, n$, формулой \mathcal{F}_j будем

считать результатом подстановки формулы \mathcal{F}_j вместо БП x_{ij} , $j = 1, \dots, n$, в формулу \mathcal{F} и будем обозначать ее через $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. Заметим, что формула $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ реализует ФАЛ $f(f_1, \dots, f_n)$, где ФАЛ f (ФАЛ f_j) — ФАЛ, реализуемая формулой \mathcal{F} (соответственно \mathcal{F}_j , $j = 1, \dots, n$). Отсюда следует, что если указанную подстановку применить к обеим частям тождества $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(x)$ и $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}''(x)$, мы получим тождество

$$\hat{t} : \hat{\mathcal{F}}' = \hat{\mathcal{F}}'',$$

где $\hat{\mathcal{F}}' = \mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ и $\hat{\mathcal{F}}'' = \mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$, которое называется *подстановкой для тождества t* .

Напомним, что формулы, полученные в процессе индуктивного построения (см. §1 главы 1) формулы \mathcal{F} , называются ее *подформулами*. Из определений следует, что для формул имеет место так называемый принцип эквивалентной замены. Это означает, что если подформулу $\hat{\mathcal{F}}'$ (подформулу $\hat{\mathcal{F}}''$) формулы \mathcal{F} заменить, учитывая тождество \hat{t} эквивалентной ей формулой $\check{\mathcal{F}}''$ (соответственно $\check{\mathcal{F}}'$), то полученная в результате такой замены формула $\check{\mathcal{F}}$ будет эквивалентна формуле \mathcal{F} , то есть будет справедливо тождество

$$\check{t} : \mathcal{F} = \check{\mathcal{F}}.$$

Указанный переход от \mathcal{F} к $\check{\mathcal{F}}$ (от t к \check{t}) будем записывать в виде однократной выводимости вида $\mathcal{F} \xrightarrow[t]{\check{t}} \check{\mathcal{F}}$ (соответственно $t \mapsto \check{t}$). Аналогичный переход от \mathcal{F} к $\tilde{\mathcal{F}}$ в результате применения одного из тождеств системы τ (нескольких последовательных применений тождеств из τ) будем записывать в виде однократной (соответственно кратной) выводимости вида $\mathcal{F} \xrightarrow[\tau]{\tilde{t}} \tilde{\mathcal{F}}$ (соответственно $\mathcal{F} \xrightarrow[\tau]{\tilde{t}} \tilde{\mathcal{F}}$). При этом считается, что тождество

$$\tilde{t} : \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$$

выводится из системы тождеств τ , и этот факт записывается в виде выводимости $\tau \mapsto \tilde{t}$ или $\tau \stackrel{\tau}{\mapsto} \tilde{t}$ в зависимости от числа использованных переходов. Переход вида $\mathcal{F} \stackrel{\tau}{\mapsto} \tilde{\mathcal{F}}$ будем называть также *эквивалентным преобразованием формулы \mathcal{F} в формулу $\tilde{\mathcal{F}}$ на основе системы тождеств τ* . Заметим, что в силу обратимости ЭП из выводимости $\mathcal{F} \stackrel{\tau}{\mapsto} \tilde{\mathcal{F}}$ следует обратная выводимость $\tilde{\mathcal{F}} \stackrel{\tau}{\mapsto} \mathcal{F}$. Система тождеств τ называется *полной* для ЭП формул над B , если для любых двух эквивалентных формул \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' над B имеет место выводимость $\mathcal{F}' \stackrel{\tau}{\mapsto} \mathcal{F}''$.

Рассмотрим, в частности, систему, которая состоит из тождества

$$t_{\&}^M : \overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2,$$

— тождества де Моргана для конъюнкции (см. тождества (2.6) из главы 2) и тождества

$$t_{1,\&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1,$$

— тождества подстановки константы $1 = x_2 \vee \bar{x}_2$ в конъюнкцию (см. тождества (2.2) из главы 1). Пример ЭП формул из \mathcal{U}^Φ с помощью этой системы тождеств дает следующая цепочка выводимостей:

$$x_1 (x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \stackrel{t_{\&}^M}{\mapsto} x_1 (x_2 x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \stackrel{t_{1,\&}^{\text{ПК}}}{\mapsto} x_1. \quad (1.1)$$

Распространим теперь введенные выше понятия и обозначения на произвольный класс схем \mathcal{U} из главы 2. В соответствии с определениями из §1 этой главы эквивалентность схем Σ' и Σ'' из \mathcal{U} имеет место тогда и только тогда, когда Σ' и Σ'' реализуют равные системы (матрицы) ФАЛ. При этом, обычно, предполагается, что соответствующие друг другу

полюса (выходы, входы) в Σ' и Σ'' имеют одинаковые пометки, а эквивалентность Σ' и Σ'' записывается в виде тождества

$$t : \Sigma' \sim \Sigma''.$$

Для схем из \mathcal{U} , как и для формул, определяется ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем, которые называются *подстановками*. Тождество

$$\hat{t} : \hat{\Sigma}' \sim \hat{\Sigma}'',$$

которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$, называется *подстановкой тождества t* . Схема Σ' называется *подсхемой* схемы Σ , если

$$V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma), \quad E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$$

и любая вершина v , $v \in V(\Sigma')$, которая либо относится к множеству входов (выходов) Σ , либо служит конечной (соответственно, начальной) вершиной некоторого ребра из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, является входом (соответственно, выходом) Σ' .

Из определений следует, что для СФЭ и КС с неразделенными полюсами, как и для формул, имеет место принцип эквивалентной замены. При этом все введенные выше для случая эквивалентных преобразований формул понятия (однократная и кратная выводимость, полнота системы тождеств и др.), а также связанные с ними обозначения переносятся на случай ЭП указанных классов схем без изменений.

Рассмотрим эти вопросы на примере ЭП СФЭ. Мы будем использовать все введенные выше общие понятия и определения, касающиеся ЭП схем, считая подстановкой СФЭ переименование (с возможным отождествлением) ее входных БП и переименование (с возможным дублированием и

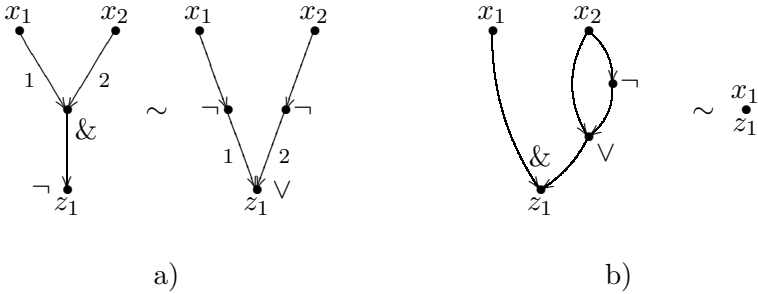


Рис. 1.1: тождества $\underline{t}_{\&}^M$ и $\underline{t}_{1,\&}^{ПК}$

снятием) ее выходных БП. Напомним, что формулы представляют собой частный случай СФЭ, и для определенности будем считать, что любая формула \mathcal{F} из \mathcal{U}_B^Φ является формулой-словом (см. §1 главы 1), а соответствующую ей формулу-граф, т. е. квазидерево (см. §3 главы 2), будем обозначать через $\underline{\mathcal{F}}$. При этом тождеству $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' — формулы из \mathcal{U}_B^Φ , будет соответствовать тождество $\underline{t} : \underline{\mathcal{F}}' \sim \underline{\mathcal{F}}''$, где $\underline{\mathcal{F}}'$ и $\underline{\mathcal{F}}''$ — соответствующие \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' схемы из \mathcal{U}_B^C , являющееся «схемным» аналогом тождества t . Множество СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$, будем обозначать через $\underline{\mathfrak{F}}$, а систему тождеств вида \underline{t} , где $t \in \tau$, а τ — система тождеств для \mathcal{U}_B^Φ , — через $\underline{\tau}$. Так, на рис. 1.1a и 1.1b приведены тождества $\underline{t}_{\&}^M$ и $\underline{t}_{1,\&}^{ПК}$, являющиеся схемными аналогами введенных выше формульных тождеств $t_{\&}^M$ и $t_{1,\&}^{ПК}$.

На рис. 1.2a и 1.2b показаны тождество ветвления $t_{\mathcal{E}_i}^B$ и тождество снятия $t_{\mathcal{E}_i}^C$ для функционального элемента \mathcal{E}_i , $i \in [1, b]$, соответственно, а на рис. 1.2c — тождество снятия входа $t_{вх}^C$. Заметим, что применение тождества снятия равносильно выполнению операции удаления висячей вершины соответствующего типа (см. §3 главы 2). Заметим

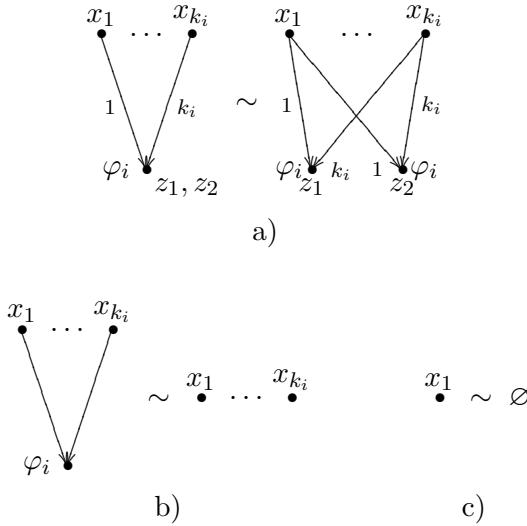


Рис. 1.2: тождества ветвления, снятия ФЭ и снятия входа

также, что тождества $t_{\mathcal{E}_i}^B, t_{\mathcal{E}_i}^C, t_{\text{вх}}^C$ не являются аналогами формульных тождеств и положим

$$\tau_B^B = \{t_{\mathcal{E}_i}^B\}_{i=1}^b, \quad \tau_B^C = \{t_{\mathcal{E}_i}^C\}_{i=1}^b \cup \{t_{\text{вх}}^C\}.$$

Очевидно, что с помощью этих тождеств можно избавиться от всех висячих вершин и всех внутренних ветвлений, имеющих в СФЭ. Следовательно, для любой СФЭ $\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, существует ЭП вида $\Sigma \xrightarrow{\tau_B^C, \tau_B^B} \underline{\mathcal{F}}$, где \mathcal{F} — формула (система

формул) из \mathcal{U}_B^Φ .

Пусть, далее, $\mathcal{F} \xrightarrow{t} \widehat{\mathcal{F}}$ — однократное ЭП для формул из \mathcal{U}_B^Φ , где тождество t имеет вид

$$t : \mathcal{F}'(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}''(x_1, \dots, x_n),$$

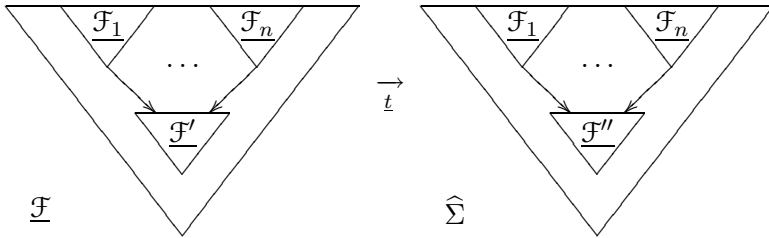


Рис. 1.3: моделирование ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

а формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается из формулы \mathcal{F} заменой подформулы $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулой $\mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. Сопоставим этому ЭП «моделирующее» его однократное ЭП СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\underline{t}} \widehat{\Sigma}$ (см. рис. 1.3). Заметим, что в том случае, когда формулы \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' являются неповторными формулами, а БП x_1, \dots, x_n — их существенными БП, СФЭ $\widehat{\Sigma}$ совпадает с СФЭ $\underline{\mathcal{F}}''$. В остальных случаях из подформулы вида $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулы \mathcal{F} необходимо с помощью тождеств τ_B^B сформировать сначала подсхему $\underline{\mathcal{F}}'(\underline{\mathcal{F}}_1, \dots, \underline{\mathcal{F}}_n)$, а затем применить тождество \underline{t} . При этом в СФЭ $\widehat{\Sigma}$ могут появиться висячие вершины или внутренние «ветвления» и для перехода от $\widehat{\Sigma}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ необходимо провести ЭП вида $\widehat{\Sigma} \xrightarrow{\{\tau^C, \tau^B\}} \widehat{\mathcal{F}}$.

Следовательно, для любого ЭП вида $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \widehat{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, существует моделирующее его ЭП вида

$$\underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\{\underline{t}, \tau_B^B, \tau_B^C\}} \widehat{\mathcal{F}}.$$

На рис. 1.4 показано ЭП СФЭ из \mathcal{U}^C , которое моделирует ЭП (1.1) для формул из \mathcal{U}^Φ .

Из описанного выше способа «моделирования» ЭП формул с помощью ЭП СФЭ, а также способа перехода от фор-

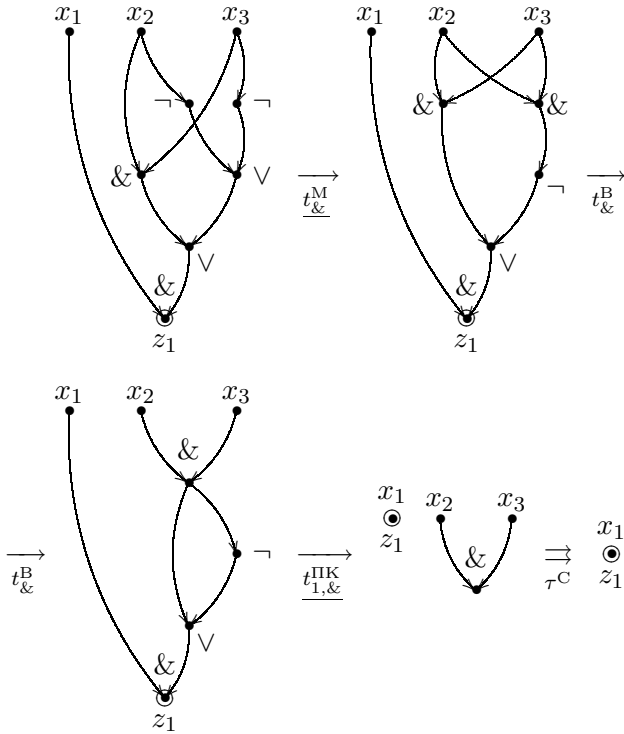


Рис. 1.4: пример моделирования ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

мул к СФЭ и обратно на основе ЭП с помощью тождеств τ_B^B , τ_B^C вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из \mathcal{U}_B^B , то $\{\underline{\tau}, \tau^C, \tau^B\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из \mathcal{U}_B^C .*

Заметим, что вопрос о существовании конечной полной системы тождеств (КПСТ) является одним из основных вопросов, связанных с изучением ЭП схем из заданного класса \mathcal{U} .

Отметим, что ЭП схем на основе тождеств имеют, в определенном смысле, локальный характер. Их локальность связана с тем, что для выполнения однократного ЭП схемы, то есть применения к ней тождества, достаточно найти в преобразуемой схеме подсхему, соответствующую одной части данного тождества, и заменить ее подсхемой, которая соответствует другой части тождества. При этом совершенно не обязательно знать, как функционирует схема в целом или какие-то другие ее подсхемы. Вместе с этим, имея дополнительную информацию о функционировании схемы, можно «ускорять» ее ЭП, применяя к ней одношаговые ЭП «нелокального» характера. Примером таких ЭП является, в частности, построение тупиковой ДНФ какой-либо ФАЛ удалением ЭК из ее сокращенной ДНФ.

Другой пример «ускорения» ЭП дает операция присоединения эквивалентных вершин СФЭ. Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v , а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v , объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v . Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ операции присоединения вершины v к вершине w , которая обобщает операцию присоединения входа СФЭ к ее выходу (см. §3 главы 2). Заметим, что для любых двух

вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ Σ операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ Σ' , которая, очевидно, эквивалентна Σ .

Приведенная схема (система формул) называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин (соответственно эквивалентных вершин, лежащих на одной цепи). Из любой СФЭ (системы формул) можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ (соответственно систему формул) с помощью операции присоединения эквивалентных вершин (соответственно эквивалентных вершин, лежащих на одной цепи) и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин. При этом «исходящими» контактами вершины v КС Σ будем считать все инцидентные ей ребра (дуги) вида $\{v, u\}$ (соответственно (v, u)), которые принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим входы Σ с ее выходами, и проходятся хотя бы одной из этих цепей по направлению от вершины v к вершине u . Заметим, что в общем случае все инцидентные вершины v контакты могут оказаться ее «исходящими» контактами, и тогда присоединение вершины v к вершине w сводятся к простому отождествлению этих вершин.

Так же, как и в случае СФЭ, две вершины КС считаются *эквивалентными*, если в них реализуются равные столбцы ФАЛ, а приведенная КС, в которой нет эквивалентных вершин, называется *строго приведенной*. Заметим, что присоединение одной из двух эквивалентных вершин к другой является ЭП КС, и что из любой КС можно получить экви-

валентную ей строго приведенную КС в результате выполнения ряда операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления «лишних» (см. §5 главы 2) вершин и контактов.

§2 Эквивалентные преобразования формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$. Полнота системы основных тождеств

В данном параграфе будем рассматривать только формулы над базисом B_0 , называя их просто формулами. Заметим, что имеют место (см., в частности, §1–§3 главы 1, §2 главы 2, а также §1) следующие тождества ассоциативности

$$t_{\circ}^A : x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3,$$

тождества коммутативности

$$t_{\circ}^K : x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$$

и тождества отождествления БП

$$t_{\circ}^{OP} : x \circ x = x,$$

где $\circ \in \{\&, \vee\}$, тождества дистрибутивности « \circ » относительно « \diamond »

$$t_{\circ, \diamond}^D : x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$

и тождества («правила») де Моргана

$$t_{\neg}^M : \overline{(\overline{x_1})} = x_1, \quad t_{\circ}^M : \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\overline{x_1}) \diamond (\overline{x_2}),$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$, тождества подстановки констант¹

$$\begin{aligned} t_{0,\&}^{\text{ПК}} : x_1(x_2 \cdot \bar{x}_2) = x_2 \cdot \bar{x}_2, & \quad t_{1,\&}^{\text{ПК}} : x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1, \\ t_{0,\vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_2 = x_1, & \quad t_{1,\vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_2 \vee \bar{x}_2, \end{aligned}$$

а также тождество поглощения

$$t^{\text{П}} : x_1 \vee x_1 x_2 = x_1,$$

тождество обобщенного склеивания

$$t^{\text{ОС}} : x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

и другие.

Примером ЭП формул с помощью введенных тождеств является ЭП (1.1). Докажем, далее, что

$$\{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^{\text{M}}\} \quad \text{и} \quad \{t_{\&}^{\text{K}}, \tau^{\text{M}}\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^{\text{K}}\},$$

где $\tau^{\text{M}} = \{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}, t_{\vee}^{\text{M}}\}$. Действительно,

$$\overline{x_1 \vee x_2} \underset{t_{\neg}^{\text{M}}}{\Leftrightarrow} \overline{(\bar{x}_1) \vee (\bar{x}_2)} \underset{t_{\&}^{\text{M}}}{\Leftrightarrow} \overline{(\bar{x}_1) \cdot (\bar{x}_2)} \underset{t_{\neg}^{\text{M}}}{\Leftrightarrow} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$$

и

$$x_1 \vee x_2 \underset{t_{\neg}^{\text{M}}}{\Leftrightarrow} \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} \underset{t_{\vee}^{\text{M}}}{\Leftrightarrow} \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} \underset{t_{\&}^{\text{K}}}{\Leftrightarrow} \overline{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1} \underset{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}}{\Leftrightarrow} x_2 \vee x_1.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\begin{aligned} \{t_{\&}^{\text{A}}, \tau^{\text{M}}\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^{\text{A}}\}, \quad \{t_{\&}^{\text{ОП}}, \tau^{\text{M}}\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \\ \{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{M}}\} \Leftrightarrow \{t_{\vee,\&}^{\text{D}}\} \quad \text{и} \quad \{t_{\sigma,\&}^{\text{ПК}}, \tau^{\text{M}}\} \Leftrightarrow \{t_{\sigma,\vee}^{\text{ПК}}\}, \end{aligned}$$

¹В отличие от тождеств (2.1)–(2.2) главы 1 данные тождества подстановки констант ориентированы на базис B_0 , где роль константы 0 (константы 1) играет формула вида $x_i \cdot \bar{x}_i$ (соответственно $x_i \vee \bar{x}_i$).

где $\sigma \in \{0, 1\}$. Завершая примеры выводимостей, докажем, что

$$\{t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{\vee}^{\text{A}}, t_{\vee}^{\text{K}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\} \models t^{\Pi}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_1 x_2 &\xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_2 \xrightarrow[t_{\&,\vee}^{\text{D}}]{} x_1 ((x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2) \\ &\xrightarrow[t_{\vee, \text{тК}}]{} x_1 ((x_2 \vee x_2) \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{\vee}^{\text{ОП}}]{} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \tau^{\text{осн}} &= \{t_{\&}^{\text{M}}, t_{\neg}^{\text{M}}, t_{\&}^{\text{A}}, t_{\&}^{\text{K}}, t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}\}, \\ \tau^{\text{A}} &= \{t_{\&}^{\text{A}}, t_{\vee}^{\text{A}}\}, \\ \tau^{\text{K}} &= \{t_{\&}^{\text{K}}, t_{\vee}^{\text{K}}\}, \\ \tau^{\text{ОП}} &= \{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \\ \tau^{\text{D}} &= \{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{\vee,\&}^{\text{D}}\}, \\ \tau^{\text{ПК}} &= \{t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}, t_{1,\vee}^{\text{ПК}}\}, \\ \tilde{\tau}^{\text{осн}} &= \{\tau^{\text{M}}, \tau^{\text{A}}, \tau^{\text{K}}, \tau^{\text{ОП}}, \tau^{\text{D}}, \tau^{\text{ПК}}, t^{\Pi}\}. \end{aligned}$$

Систему $\tau^{\text{осн}}$ будем называть *системой основных тождеств*, а систему $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ — *расширенной системой основных тождеств*. Рассмотренные выше примеры выводимостей доказывают следующее утверждение.

Лемма 2.1. Система $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Покажем теперь, что с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ из любой формулы можно получить совершенную ДНФ или формулу $x_1 \bar{x}_1$. Введем для этого некоторые понятия, характеризующие формулы, появляющиеся на промежуточных этапах указанного ЭП. Произвольную

конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторяющиеся или противоположные буквы, будем называть *обобщенной ЭК* (ОЭК), а дизъюнкцию таких конъюнкций, содержащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», — *обобщенной ДНФ* (ОДНФ). Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_1 \cdot \bar{x}_1$ будем считать *канонической ОЭК* (соответственно *канонической ОДНФ*), а совершенную ДНФ и формулу $x_1 \cdot \bar{x}_1$ — *совершенными ОДНФ*. Напомним (см. §2 главы 2), что формула, в которой все ФС \neg применяются только к БП и нет двух последовательно применяемых ФС \neg , называется *формулой с поднятыми отрицаниями*.

Пусть формула $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ реализует ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$. Докажем существование ЭП вида

$$\mathcal{F} \stackrel{\tau^M}{\equiv} \mathcal{F}' \stackrel{\{t_{\&, \vee}^D, t_{\&}^K\}}{\equiv} \mathcal{F}'' \stackrel{\tau^{\text{ПП}}}{\equiv} \widehat{\mathcal{F}} \stackrel{\{t_{\&, \vee}^D, \tau^{\text{ПП}}\}}{\equiv} \widetilde{\mathcal{F}}, \quad (2.1)$$

где $\tau^{\text{ПП}} = \{\tau^A, \tau^K, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}, t^{\text{П}}\}$, \mathcal{F}' — формула с поднятыми отрицаниями, \mathcal{F}'' — обобщенная ДНФ, а $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}$ — каноническая и совершенная ОДНФ ФАЛ f соответственно. Действительно, *поднятие отрицаний*, то есть переход от \mathcal{F} к \mathcal{F}' в (2.1) (см. §2 главы 2) можно осуществить применением тождеств t_{\neg}^M , $t_{\&}^M$ и t_{\vee}^M к подформулам вида $\overline{(\mathcal{F}_1)}$, $\overline{(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)}$ и $\overline{(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)}$ соответственно до тех пор, пока все такие подформулы не будут «устранены». Переход от \mathcal{F}' к \mathcal{F}'' в (2.1), который называется *раскрытием скобок*, осуществляется применением тождеств $\{t_{\&, \vee}^D, t_{\&}^K\}$ к подформулам вида $\mathcal{F}_1 \cdot (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3)$ или $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cdot \mathcal{F}_3$ до тех пор, пока они встречаются в преобразуемой формуле.

Переход от \mathcal{F}'' к $\widehat{\mathcal{F}}$ в (2.1), который называется *приведением подобных*, выполняется в три этапа. На первом этапе каждая ОЭК K'' из ОДНФ \mathcal{F}'' преобразуется в каноническую ОЭК K с помощью тождеств $\{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{0, \&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^A, t_{\&}^K\}$, а

также тождества

$$x_i \cdot \bar{x}_i = x_1 \cdot \bar{x}_1, \quad (2.2)$$

которое выводится из них следующим образом:

$$x_i \cdot \bar{x}_i \xrightarrow[t_{0,\&}^{\text{ПК}}]{} (x_1 \cdot \bar{x}_1) \cdot (x_i \cdot \bar{x}_i) \xrightarrow[t_{\&}^{\text{К}}]{} (x_i \cdot \bar{x}_i) \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_1) \xrightarrow[t_{0,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1 \cdot \bar{x}_1.$$

На втором этапе полученная формула \mathcal{F} преобразуется в $\widehat{\mathcal{F}}$ путем «устранения» повторных вхождений равных элементарных конъюнкций или подформул $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{\tau^A, \tau^K, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}$ и, в случае $f \neq 0$, последующего «устранения» ОЭК $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{t_{\vee}^A, t_{\vee}^K, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}\}$.

Заметим, что первые два этапа приведения подобных, на которых происходит приведение повторений БП в ОЭК и ЭК, уже дают нам искомую формулу $\widehat{\mathcal{F}}$. Однако, для уменьшения числа шагов в последующих ЭП можно выполнить третий этап приведения подобных — этап приведения поглощений ЭК. На каждом шаге этого этапа в полученной ДНФ с помощью тождеств $\{\tau^A, \tau^K\}$ выделяется подформула вида $K'' \vee K'' \cdot K$, где K'' и K — некоторые ЭК, а затем ЭК $K'' \cdot K$ «устраняется» с помощью ЭП

$$K'' \vee K'' \cdot K \xrightarrow[t^{\text{П}}]{} K''.$$

Заметим также, что раскрытие скобок и различные этапы приведения подобных можно чередовать друг с другом при ЭП подформул формулы \mathcal{F}' или формул \mathcal{F}' , $\widehat{\mathcal{F}}$.

Переход от $\widehat{\mathcal{F}}$ к $\widetilde{\mathcal{F}}$ в (2.1) выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК \widehat{K} из $\widehat{\mathcal{F}}$, которая имеет ранг r , где $r = n - q < n$, и не содержит букв БП x_{i_1}, \dots, x_{i_q} , приводится к ее совершенной ДНФ \widetilde{K} от БП $X(n)$ в результате следующего ЭП:

$$\widehat{K} \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} \widehat{K}(x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_1}) \cdots (x_{i_q} \vee \bar{x}_{i_q}) \xrightarrow[t_{\&,\vee}^{\text{Д}}]{} \widetilde{K}.$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения слагаемых так, как это делалось ранее при переходе от $\hat{\mathcal{F}}$ к \mathcal{F} , и в результате мы приходим к совершенной ОДНФ $\tilde{\mathcal{F}}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$, реализующую ФАЛ f , с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.*

Рассмотрим описанные выше ЭП на примере формулы

$$\mathcal{F} = (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{(x_1 \cdot x_3)} \cdot (x_2 \vee x_3),$$

для которой

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\xrightarrow{t_{\&}^M} (x_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_3) &&= \mathcal{F}', \\ \mathcal{F}' &\stackrel{\{\tau_{\&,\vee}^D, \tau^{\text{ПП}} \setminus t^{\text{П}}\}}{\Leftrightarrow} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 &&= \check{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}, \\ \hat{\mathcal{F}} &\stackrel{\{\tau^A, \tau^K, t^{\text{П}}\}}{\Leftrightarrow} \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 &&= \hat{\mathcal{F}}', \\ \hat{\mathcal{F}}' &\stackrel{\{t_{\&,\vee}^D, \tau^{\text{ПП}}\}}{\Leftrightarrow} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 &&= \tilde{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Теорема 2.1. *Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.*

Доказательство. Пусть \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' — эквивалентные формулы, реализующие равные ФАЛ f' и f'' соответственно, а набор $x(n) = x$ содержит все различные БП, встречающиеся в \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' . Пусть, далее, ФАЛ $f(x)$ равна f' и f'' , а $\tilde{\mathcal{F}}$ — совершенная ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$. В силу леммы 2.2 имеет место ЭП

$$\mathcal{F}' \stackrel{\tau^{\text{осн}}}{\Leftrightarrow} \tilde{\mathcal{F}} \stackrel{\tau^{\text{осн}}}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}'',$$

которое доказывает теорему. □

Следствие. Система тождеств $\{\tau^{\text{осн}}, \tau^{\text{B}}, \tau^{\text{C}}\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из \mathcal{U}^{C} .

Коснемся, в заключение, вопроса о наличии в системе $\tau^{\text{осн}}$ тождеств, которые можно вывести из других тождеств этой системы. Рассмотрим сначала ЭП вида

$$x_1 x_1 \xrightarrow[t_{0,\vee}^{\text{ПК}}]{} x_1 x_1 \vee x_1 \bar{x}_1 \xrightarrow[t_{\&,\vee}^{\text{D}}]{} x_1 (x_1 \vee \bar{x}_1) \xrightarrow[t_{1,\&1}^{\text{ПК}}]{} x,$$

которое, с учетом установленных ранее выводимостей, доказывает, что

$$\{\tau^{\text{M}}, t_{\&,\vee}^{\text{D}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}\} \vdash t_{\&}^{\text{ОП}}.$$

Заметим, далее, что тождество (2.2) можно вывести из системы $\tau' = \{\tau^{\text{M}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^{\text{K}}\}$. Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \bar{x}_1 &\xrightarrow[\tau^{\text{M}}]{} \overline{(x_1 \vee x_1)} \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} \overline{(x_1 \vee x_1)} \cdot \overline{(x_2 \vee \bar{x}_2)} \xrightarrow[t_{\&}^{\text{K}}]{} \\ &\xrightarrow[t_{\&}^{\text{K}}]{} \overline{(x_2 \vee \bar{x}_2)} \cdot \overline{(x_1 \vee x_1)} \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} \overline{(x_2 \vee \bar{x}_2)} \xrightarrow[\tau^{\text{M}}]{} \bar{x}_2 \cdot x_2 \xrightarrow[t_{\&}^{\text{K}}]{} x_2 \cdot \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что из системы тождеств $\{\tau', t_{\&}^{\text{A}}, t_{\&}^{\text{ОП}}\}$ можно вывести тождество $t_{0,\&}^{\text{ПК}}$, так как

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_2) \xrightarrow[\tau']{} x_1 \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_1) \xrightarrow[t_{\&}^{\text{A}}]{} (x_1 \cdot x_1) \cdot \bar{x}_1 \xrightarrow[t_{\&}^{\text{ОП}}]{} x_1 \cdot \bar{x}_1 \xrightarrow[\tau']{} x_2 \cdot \bar{x}_2.$$

Таким образом, тождества $t_{\&}^{\text{ОП}}$ и $t_{0,\&}^{\text{ПК}}$ выводятся из остальных тождеств системы $\tau^{\text{осн}}$.

§3 Структурное моделирование и эквивалентные преобразования формул и схем из функциональных элементов в различных базисах. Теорема перехода

Рассмотрим сначала вопросы структурного моделирования формул в различных базисах. Пусть помимо базиса $B = \{\varphi_i\}_{i=1}^b$ у нас имеется другой конечный полный базис $B' = \{\varphi'_i\}_{i=1}^{b'}$, и пусть формула $\Phi'_i(x_1, \dots, x_{k'_i})$ из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, где $k'_i \geq k_i$, реализует ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$. Заметим, что в случае $k'_i > k_i$ БП $x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i}$ являются фиктивными БП формулы Φ'_i и будем считать, что в случае, когда φ_i — константа и, следовательно, $k_i = 1$, имеет место равенство $k'_i = 2$, а формула Φ'_i зависит только от БП x_2 . Положим

$$\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b), \quad \Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b),$$

где Π'_i — тождество вида $\varphi_i = \Phi'_i$, $i = 1, \dots, b$, и формулы из Φ' (тождества из Π') будем называть *формулами* (соответственно *тождествами*) *перехода от базиса B к базису B'*.

Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, обозначим через $\Pi'(\mathcal{F})$ формулу над базисом B' , которая получается из \mathcal{F} заменой каждой ее подформулы вида $\varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i})$ формулой $\Phi'_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i})$, то есть является результатом подстановки формулы \mathcal{F}_j вместо БП x_j в формулу Φ'_i для всех j , $j = 1, \dots, k_i$. Переход от формулы \mathcal{F} к формуле $\Pi'(\mathcal{F})$ будем называть *структурным моделированием формулы F в базисе B' на основе формул перехода Phi'* или, иначе, *на основе тождеств перехода Pi'*. Заметим, что этот переход является специальным ЭП вида

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Pi'} \Pi'(\mathcal{F})$$

для формул над базисом $B \cup B'$. Отсюда следует, в частности, что в результате указанного структурного моделирования обеих частей тождества t , являющихся формулами из \mathcal{U}_B^Φ , получается тождество t' для формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, которое мы будем обозначать через $\Pi'(t)$. Множество формул вида $\Pi'(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$, будем обозначать через $\Pi'(\mathfrak{F})$, а множество тождеств вида $\Pi'(t)$, где $t \in \tau$ — тождество над \mathcal{U}_B^Φ , — через $\Pi'(\tau)$.

Напомним, что переменная, входящая в запись формулы ровно один раз, называется *бесповторной* БП этой формулы. Формула \mathcal{F} называется *квазибесповторной*, если все существенные БП реализуемой ею ФАЛ являются бесповторными для \mathcal{F} . Заметим, что бесповторная формула (см. §3 главы 2) является квазибесповторной, а другие примеры квазибесповторных формул дают, в частности, формулы $x_1 \cdot \bar{x}_1$ и $x_2(x_1 \vee \bar{x}_1)$. Будем говорить, что базис B допускает *бесповторное* (квазибесповторное) *моделирование* в базисе B' , если в \mathcal{U}_B^Φ существуют бесповторные (соответственно квазибесповторные) формулы Φ'_1, \dots, Φ'_b , реализующие ФАЛ $\varphi_1, \dots, \varphi_b$ соответственно.

Лемма 3.1. *Если базис B допускает квазибесповторное моделирование в базисе B' , то для любой формулы \mathcal{F} из \mathcal{U}_B^Φ существует эквивалентная ей формула \mathcal{F}' из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, такая, что*

$$\begin{aligned} L(\mathcal{F}') &\leq c_1 L(\mathcal{F}), & R(\mathcal{F}') &\leq c_2 R(\mathcal{F}), \\ D(\mathcal{F}') &\leq c_3 D(\mathcal{F}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы, зависящие только от базисов B, B' .

Доказательство. Пусть $\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b)$ — система из квазибесповторных формул перехода от базиса B к базису B' , а Π' — связанная с ней система тождеств перехода, и пусть

$\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$. Справедливость для \mathcal{F}' неравенств (3.1), где c_1 и c_3 — максимальная сложность и максимальная глубина формул Φ'_i соответственно, а c_2 — максимальное отношение k'_i/k_i , $i \in [1, b]$, докажем индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, для формул глубины 1 эти неравенства выполняются в силу выбора констант. Пусть, далее, неравенства (3.1) выполняются для любой формулы глубины не больше, чем $(d - 1)$, где $d \geq 1$, и пусть формула \mathcal{F} глубины d имеет вид

$$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}),$$

где $D(\mathcal{F}_j) \leq d - 1$ для всех j , $j \in [1, k_i]$. Тогда

$$\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F}) = \Phi'_i(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i}),$$

где $\mathcal{F}'_j = \Pi'(\mathcal{F}_j)$, $j = 1, \dots, k_i$, и, следовательно,

$$D(\mathcal{F}') \leq D(\Phi'_i) + c_3 \max_{1 \leq j \leq k_i} D(\mathcal{F}_j) \leq c_3 D(\mathcal{F}).$$

Аналогичным образом, но уже с учетом квазибесповторности формул перехода, доказываются неравенства (3.1) с константами c_1 и c_2 для сложности и ранга формулы \mathcal{F}' соответственно.

Лемма доказана. \square

Замечание. Неравенство (3.1) для глубины \mathcal{F}' выполняется с определенной выше константой c_3 для произвольных базисов B' , B .

Пусть $B_+ = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \cdot x_2, 1\}$, а базис B'' получается из базиса B_+ заменой функционального элемента, реализующего ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, на ФЭ, реализующий функцию «голосования» $H(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1$. Заметим, что базис B_0 допускает квазибесповторное моделирование в базисе B'' . Действительно, формулы $H(x_1, x_2, y \oplus y)$, $H(x_1, x_2, 1)$ и

$x \oplus 1$ являются квазибесповторными формулами над B'' , которые реализуют ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и \bar{x} соответственно. Базис B_0 допускает квазибесповторное моделирование и в базисе B_+ , поскольку квазибесповторные формулы $x_1 \oplus 1$ и $((x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \oplus 1)$ над B_+ реализуют ФАЛ \bar{x}_1 и $x_1 \vee x_2$ соответственно. Оказывается, что базис B_0 допускает квазибесповторное моделирование в любом базисе B . Именно это означает следующее утверждение, которое вытекает, по существу, из полноты системы базисных ФАЛ $\{\varphi_i\}_{i=1}^b$ и из леммы о немонотонной и нелинейной ФАЛ (см. [26]).

Лемма 3.2. *Существуют квазибесповторные формулы \mathcal{F}_- , $\mathcal{F}_\&$ и \mathcal{F}_\vee над базисом B , которые реализуют ФАЛ \bar{x}_1 , $x_1 \cdot x_2$ и $x_1 \vee x_2$ соответственно.*

Доказательство. В силу полноты системы ФАЛ $\{\varphi_i\}_{i=1}^b$ можно построить формулы \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_1 от БП y над B , которые реализуют константы 0, 1 и являются квазибесповторными в связи с отсутствием существенных БП. Из полноты следует также, что среди базисных ФАЛ есть немонотонная ФАЛ $\varphi'(x_1, \dots, x_{k'})$ и нелинейная ФАЛ $\varphi''(x_1, \dots, x_{k''})$. В силу леммы о немонотонной ФАЛ найдется набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k'})$ из $B^{k'}$ и число i , $1 \leq i \leq k'$, такие, что

$$\varphi'(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k'}) = \bar{x}_i.$$

Следовательно, формула

$$\mathcal{F}_-(x) = \mathcal{F}_-(x, y) = \varphi'(\mathcal{F}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}, x, \mathcal{F}_{\alpha_{i+1}}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_{k'}})$$

является бесповторной формулой над B , реализующей ФАЛ \bar{x} . Положим:

$$\mathcal{F}_-^{(1)}(x, y) = \mathcal{F}_-(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_-^{(0)}(x, y) = x.$$

Из доказательства леммы о нелинейной ФАЛ следует, что найдется такой набор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k''})$ из $B^{k''}$, натуральные

числа i и j , $1 \leq i < j \leq k''$, а также константа γ , $\gamma \in B$, для которых

$$\varphi''(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x_i \oplus \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \dots, \beta_{j-1}, x_j \oplus \beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{k''}) = x_i \cdot x_j \oplus \gamma.$$

Тогда формула $\mathcal{F}_{\&}$ вида

$$\mathcal{F}_{\&}(x_1, x_2, y) = \mathcal{F}_{-}^{(\gamma)}\left(\varphi''(\mathcal{F}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\beta_{i-1}}, \mathcal{F}_{-}^{(\beta_i)}(x_1, y), \mathcal{F}_{\beta_{i+1}}, \dots, \mathcal{F}_{\beta_{j-1}}, \mathcal{F}_{-}^{(\beta_j)}(x_2, y), \mathcal{F}_{\beta_{j+1}}, \dots, \mathcal{F}_{\beta_{k''}}), y)\right)$$

является квазибесповторной формулой над B и реализует ФАЛ $x_1 \cdot x_2$. Квазибесповторная формула $\mathcal{F}_{\vee}(x_1, x_2, y)$, которая реализует ФАЛ $x_1 \vee x_2$, получается из формулы

$$\mathcal{F}_{-}(\mathcal{F}_{\&}(\mathcal{F}_{-}(x_1, y), \mathcal{F}_{-}(x_2, y), y), y)$$

«удалением» всех вхождений двух последовательных формул \mathcal{F}_{-} .

Лемма доказана. □

Заметим, что базис B_{+} не допускает квазибесповторного моделирования в базисе B_0 , поскольку ФАЛ $x_1 \oplus x_2$ не может быть реализована в нем квазибесповторной формулой.

Рассмотрим теперь вопросы моделирования ЭП формул в базисе B с помощью ЭП формул базиса B' . Пусть $\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b)$ — система формул перехода от базиса B к базису B' , а $\Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b)$ — система тождеств перехода, связанная с Φ' . Заметим, что любое ЭП для формул из \mathcal{U}_{B}^{Φ} , имеющее вид

$$\mathcal{F} \xrightarrow[\tau]{} \widehat{\mathcal{F}}, \tag{3.2}$$

может быть «промоделировано» с помощью ЭП для формул из $\mathcal{U}_{B'}^{\Phi}$ вида

$$\mathcal{F}' \xrightarrow[\tau']{} \widehat{\mathcal{F}}', \tag{3.3}$$

где $\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$, $\widehat{\mathcal{F}}' = \Pi'(\widehat{\mathcal{F}})$ и $\tau' = \Pi'(\tau)$. Действительно, пусть ЭП (3.2) является однократным ЭП на основе тождества t , $t \in \tau$, которое имеет вид

$$t: \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_q) = \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_q),$$

и пусть формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается в результате замены подформулы $\mathfrak{A}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$ формулы \mathcal{F} формулой $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$. Тогда тождество $t' = \Pi'(t)$ имеет вид

$$t': \mathfrak{A}'(x_1, \dots, x_1) = \mathfrak{B}'(x_1, \dots, x_q),$$

где $\mathfrak{A}' = \Pi'(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}' = \Pi'(\mathfrak{B})$, а формула $\widehat{\mathcal{F}}'$ может быть получена из формулы \mathcal{F}' в результате замены ее подформулы $\mathfrak{A}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$, где $\mathcal{F}'_j = \Pi'(\mathcal{F}_j)$ для всех j , $j \in [1, q]$, формулой $\mathfrak{B}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$. Моделирование кратного ЭП вида (3.2) с помощью кратного ЭП вида (3.3) осуществляется путем последовательного моделирования однократных ЭП, составляющих ЭП (3.2).

Описанное выше моделирование позволяет выполнять ЭП для тех эквивалентных формул из $\mathcal{U}_{B'}^{\Phi}$, которые принадлежат множеству $\Pi'(\mathcal{U}_B^{\Phi})$, то есть являются «моделями» формул из \mathcal{U}_B^{Φ} , на основе системы тождеств $\Pi'(\tau)$, являющихся «моделями» тождеств из τ . Для того, чтобы проводить ЭП для произвольных формул из $\mathcal{U}_{B'}^{\Phi}$ с использованием системы тождеств $\Pi'(\tau)$, выберем какую-либо систему формул перехода $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{b'})$ от базиса B' к базису B и рассмотрим связанную с ней систему тождеств перехода $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_{b'})$. Пусть $\check{\Pi}$ — система тождеств вида $\check{\Pi} = \Pi'(\Pi)$ для ЭП формул из $\mathcal{U}_{B'}^{\Phi}$, которая получается в результате структурного моделирования правых частей тождеств из Π на основе системы тождеств Π' . Для произвольной формулы \mathcal{F}' , $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}_{B'}^{\Phi}$, положим

$$\check{\Pi}(\mathcal{F}') = \Pi'(\Pi(\mathcal{F}'))$$

и заметим, что

$$\mathcal{F}' \underset{\Pi}{\overset{\check{\Pi}}{\rightleftharpoons}} \check{\mathcal{F}}' = \check{\Pi}(\mathcal{F}'), \quad \check{\mathcal{F}}' \in \Pi'(\mathcal{U}_B^\Phi).$$

В силу сказанного выше отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1 (теорема перехода). Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ , а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса B к базису B' и от базиса B' к базису B соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ .

Следствие. Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из \mathcal{U}^Φ (см. §2) указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе B .

Отметим, в заключение, что вопросы структурного моделирования СФЭ в различных базисах рассматриваются и решаются аналогично тому, как это делалось для формул, причем решаются, зачастую, более просто. Так, в случае СФЭ оценки леммы 3.1 будут справедливы для любых базисов B и B' , КПСТ для ЭП СФЭ из \mathcal{U}_B^C получается на основе теоремы 1.1 и следствия из теоремы 3.1 и т. п.

§4 Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств

Рассмотрим вопросы ЭП для КС из \mathcal{U}^K с неразделенными (бесповторными) полюсами. В соответствии с §1, §6 главы 2 эквивалентность КС $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ и $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ означает, что для любых i и j из отрезка $[1, m]$ ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ' равна ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ'' . На рис. 4.1а–4.1е и

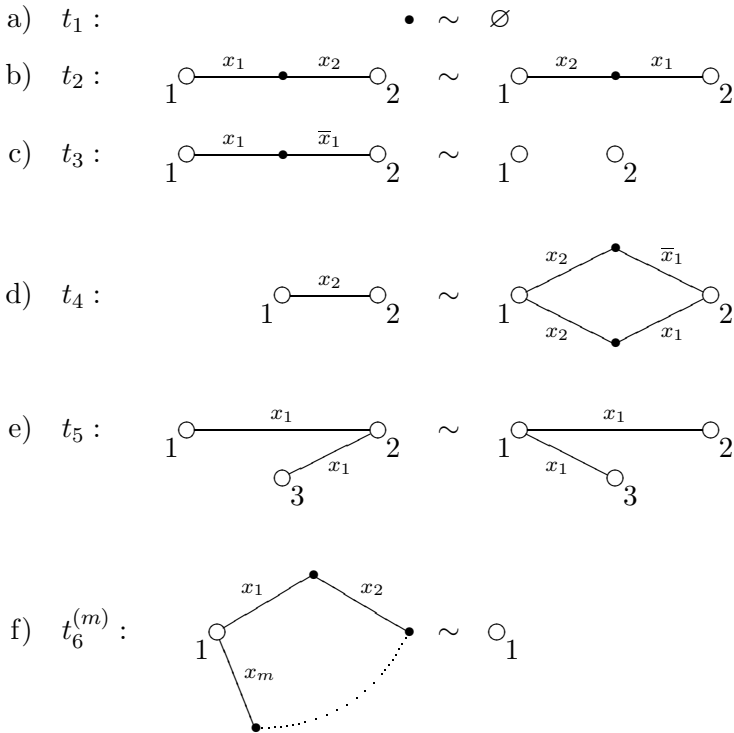


Рис. 4.1: основные тождества для КС

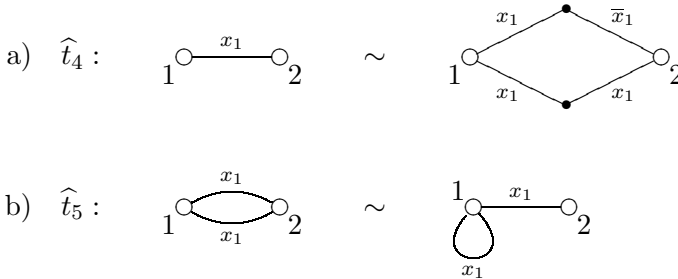


Рис. 4.2: подстановки для основных тождеств

4.1f приведены пары эквивалентных КС, образующие тождества t_1 – t_5 и $t_6^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, соответственно, которые мы будем называть *основными тождествами* для ЭП КС.

Определим подстановку для КС как переименование (с возможным отождествлением и инвертированием) БП, а также переименование (с возможным отождествлением и снятием) полюсов. Заметим, что применяя одну и ту же подстановку к двум эквивалентным КС мы получим эквивалентные КС. Действительно, для переименования БП и переименования без отождествления полюсов это очевидно, а в случае отождествления полюсов эквивалентность получаемых КС вытекает из того, что матрица достижимости КС, являющейся результатом отождествления, однозначно определяется матрицей достижимости исходной КС. На рис. 4.2a (4.2b) показана подстановка \hat{t}_4 тождества t_4 (соответственно \hat{t}_5 тождества t_5), связанная с переименованием БП x_2 в x_1 (соответственно полюсов $1 = 3$ в 1).

Рассмотрим примеры ЭП контактных схем с помощью системы основных тождеств. На рис. 4.3a–4.3e приведены тождества t_7 – t_{11} , которые мы будем называть *вспомогательными*. Заметим, что выводимость $\{t_5, t_6^{(1)}\} \Rightarrow t_7$ дока-

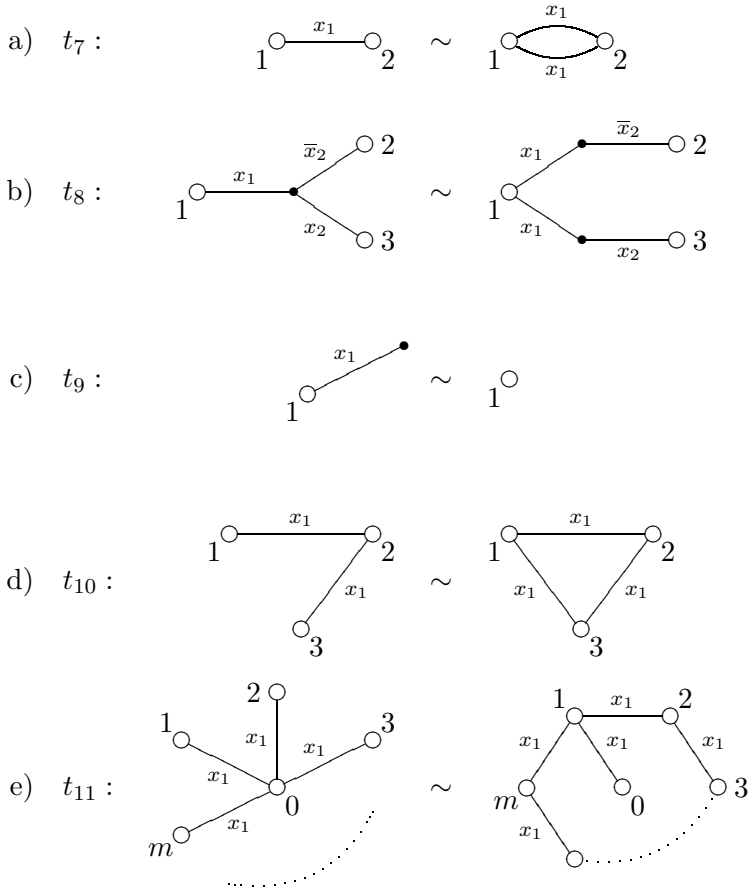


Рис. 4.3: вспомогательные тождества для КС

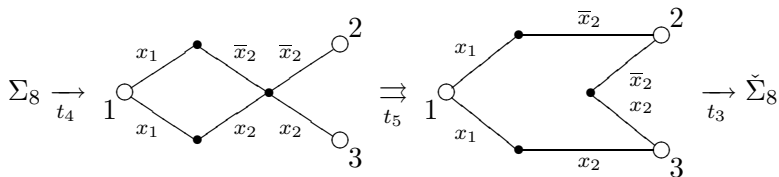


Рис. 4.4: вывод t_8

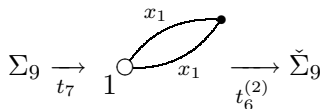


Рис. 4.5: вывод t_9

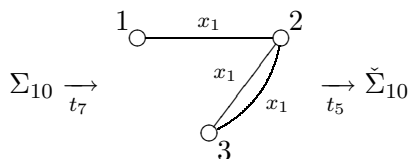


Рис. 4.6: вывод t_{10}

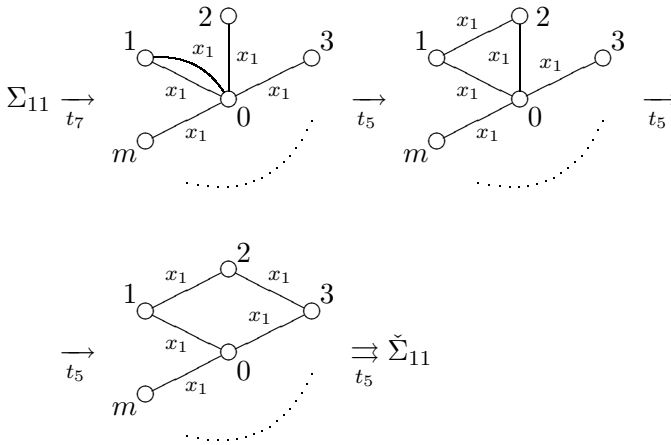


Рис. 4.7: вывод t_{11}

зывается применением тождества $t_6^{(1)}$ к правой части тождества \hat{t}_5 (см. рис. 4.2а) для удаления из нее «висячего» цикла длины 1. Выводимость тождеств t_8 – t_{11} из основных тождеств $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\}$ показана на рис. 4.4–4.7 соответственно, где Σ_i и $\check{\Sigma}_i$ — левая и правая части тождества t_i , $i \in [8, 11]$. Тождество t_{10} называют иногда тождеством замыкания по транзитивности, а тождество t_{11} — «леммой» о звезде.

Обобщим тождества t_1 – t_{11} на случай КС от БП $X(n)$, где $n \geq 2$. Для каждого i , $i \in [1, 2^n]$, сопоставим ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = i - 1$, моделирующую ее цепочку $I_i^{(n)}$ (см. §5 главы 2), и пусть

$$\begin{aligned}
 I_i^{(n)} &= I_i, & i \in [1, 2^n], & & I &= I_{2^n}; \\
 I_i^{(n-1)} &= I'_i, & i \in [1, 2^{n-1}], & & I' &= I'_{2^{n-1}}; \\
 I_i^{(n-2)} &= I''_i, & i \in [1, 2^{n-2}], & & I'' &= I''_{2^{n-2}}.
 \end{aligned}$$

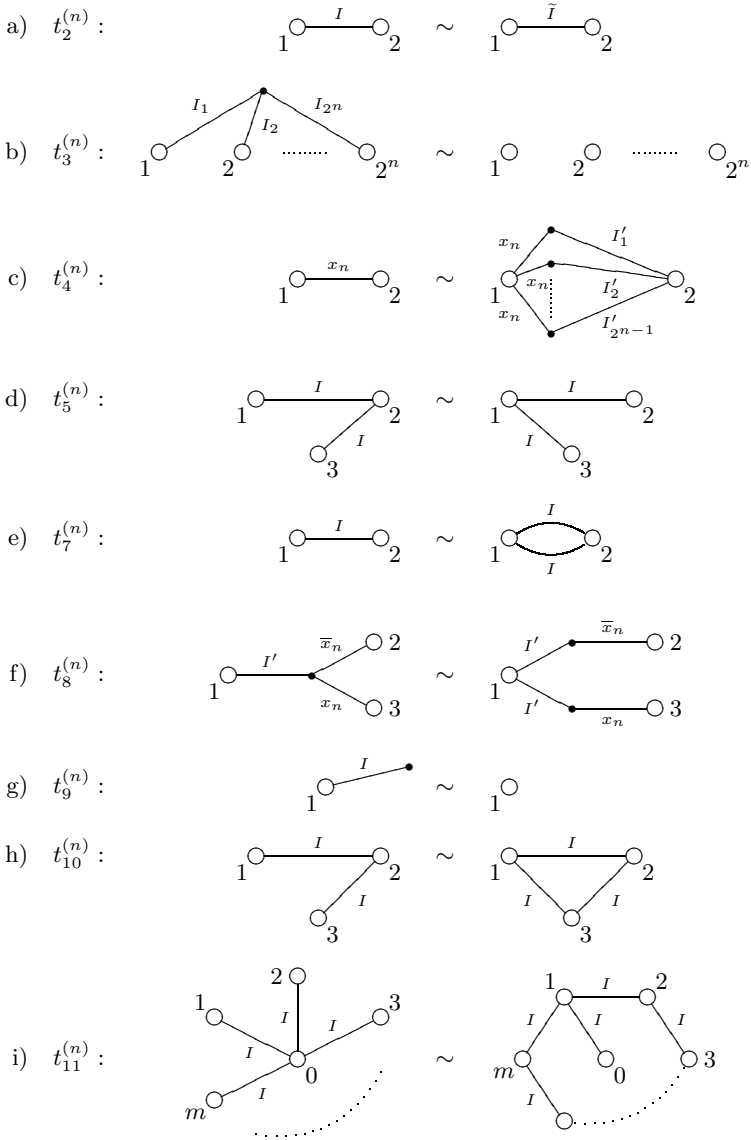


Рис. 4.8: обобщенные тождества порядка n для КС

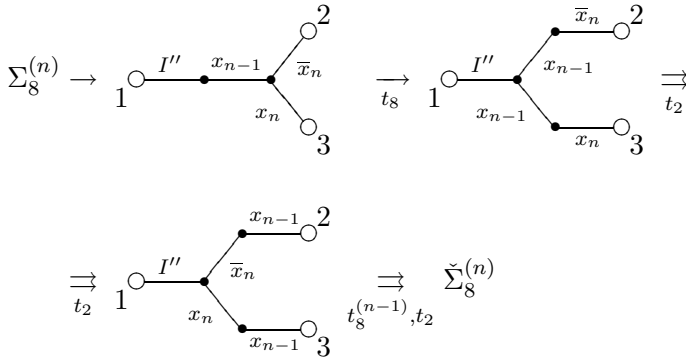


Рис. 4.9: вывод $t_8^{(n)}$

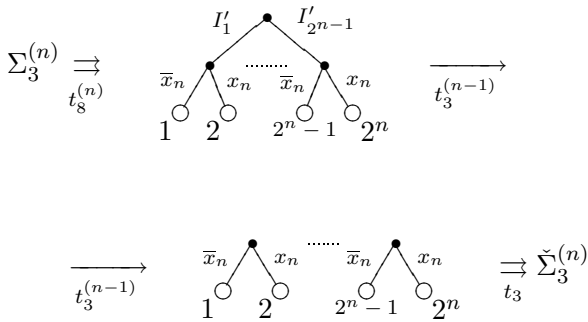


Рис. 4.10: вывод $t_3^{(n)}$

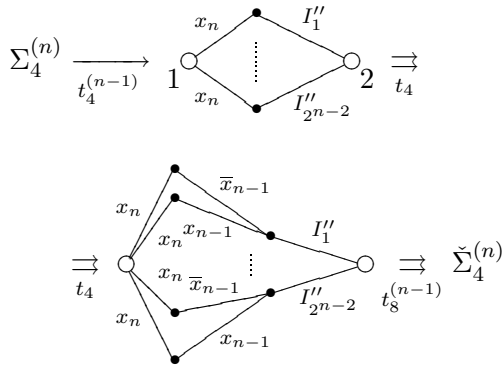


Рис. 4.11: вывод $t_4^{(n)}$

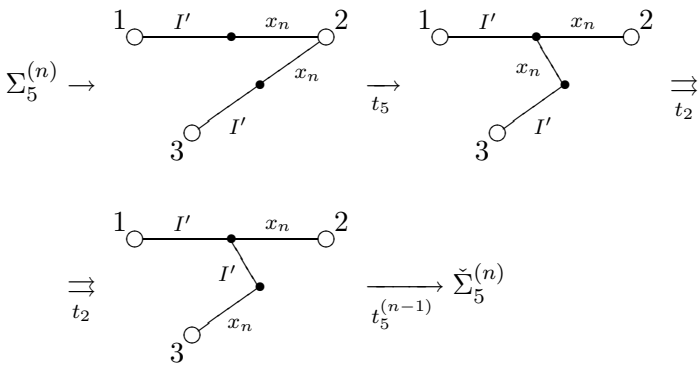


Рис. 4.12: вывод $t_5^{(n)}$

Систему тождеств $\tau^{(n)} = \{t_1^{(n)}, \dots, t_{11}^{(n)}\}$, где $t_1^{(n)} = t_1, t_6^{(n)}$ — соответствующее основное тождество (см. рис. 4.1f), $t_2^{(n)}$ — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 4.8a, где \tilde{I} — произвольная перестановка цепочки I , а остальные тождества приведены на рис. 4.8b–4.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка n* . При этом система $\tau_n = \{t_1, \dots, t_5, t_6^{(1)}, \dots, t_6^{(n)}\}$ считается системой основных тождеств порядка n , а система всех основных тождеств обозначается через τ_∞ .

Лемма 4.1. *При $n \geq 2$ имеет место выводимость $\tau_n \Rightarrow \tau^{(n)}$.*

Доказательство. Отметим сначала следующие очевидные выводимости:

$$\{t_2\} \Rightarrow t_2^{(n)}, \quad \{t_9\} \Rightarrow t_9^{(n)}.$$

Выводимость $\tau_n \Rightarrow t_i^{(n)}$, $i = 8, 3, 4, 5$ докажем индукцией по n , $n \geq n_i$, где $n_3 = n_5 = 1$ и $n_8 = n_4 = 2$. Базис этой индукции составляет тождество $t_i = t_i^{(n_i)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, а обоснование индуктивного перехода дает выводимость правой части $\check{\Sigma}_i^{(n)}$ тождества $t_i^{(n)}$, $n > n_i$, из его левой части $\Sigma_i^{(n)}$, показанная на рис. 4.9–4.12.

Легко видеть, что выводимости

$$\{t_2^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow t_7^{(n)}, \quad \{t_7^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow \{t_{10}^{(n)}, t_{11}^{(n)}\}$$

при $n \geq 2$ доказываются аналогично тому, как это делалось для случая $n = 1$ (см. рис. 4.6, 4.7).

Лемма доказана. □

§5 Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Докажем сначала полноту системы основных тождеств τ_∞ для ЭП КС. Для этого, как обычно, достаточно доказать, что с помощью ЭП на основе системы τ_∞ произвольную КС из \mathcal{U}^K можно привести к каноническому виду. Напомним (см. §5, §6 главы 2), что каноническая КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ или, иначе, *каноническая КС порядка n* , представляет собой объединение канонических $(1, 1)$ -КС вида $\widehat{\Sigma}_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i, a_j)$, построенных на основе совершенных ДНФ ФАЛ проводимости от a_i к a_j для всех i и j таких, что $1 \leq i < j \leq m$.

Любую цепь $I_i^{(n)}$ (см. §4), где $i \in [1, 2^n]$, а также любую цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ перестановкой контактов, будем называть *канонической цепью порядка n* . Заметим, что КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ является канонической КС порядка n тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1. любой контакт $\widehat{\Sigma}$ принадлежит некоторой канонической цепи порядка n , являющейся подсхемой схемы $\widehat{\Sigma}$, причем полюсами этой подсхемы служат только контактные вершины данной цепи;
2. любая внутренняя вершина $\widehat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта 1;
3. в КС $\widehat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» (см. тождество $t_6^{(n)}$) и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка n из пункта 1, которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;

4. в КС $\widehat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t (см. рис. 5.1a), влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс a_j с полюсом a_t (см. рис. 5.1b).

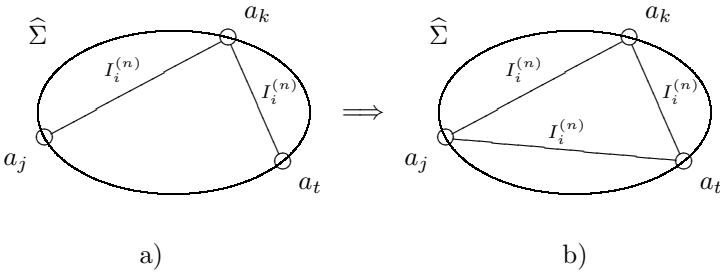


Рис. 5.1: к свойству 4 КС канонического вида

Лемма 5.1. Для любой КС Σ , где $\Sigma \in \mathcal{U}^K$ и $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \xRightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}$.

Доказательство. Построим ЭП вида

$$\Sigma \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_1 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_2 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_3 \xRightarrow{\tau_n} \Sigma_4 = \widehat{\Sigma},$$

где КС Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, обладает отмеченными выше свойствами $1, \dots, i$, отличающими канонические КС. Первое из этих ЭП имеет вид

$$\Sigma \xRightarrow{t_4^{(n)}} \Sigma_1$$

и связано с применением к каждому контакту тождества $t_4^{(n)}$.

Существование ЭП

$$\Sigma_1 \quad \rightrightarrows \quad \Sigma_2 \quad (5.1)$$

$$\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}$$

докажем индукцией по числу тех внутренних вершин КС Σ_1 , которые не являются внутренними вершинами ее канонических цепей. Базис индукции составляют схемы Σ_1 , которые не имеют указанных вершин и для которых, следовательно, $\Sigma_2 = \Sigma_1$. Пусть теперь КС Σ_1 имеет хотя бы одну вершину указанного вида и пусть v — одна из таких вершин. Удалим с помощью тождества $t_6^{(n)}$ все присоединенные к v «висячие» циклы и рассмотрим все остальные цепи C_1, \dots, C_q , конечной вершиной которых она является (см. рис. 5.2а). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для некоторых натуральных чисел

$$a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_p < a_{p+1} = q + 1$$

и любого j , $j \in [1, p]$, цепи $C_{a_j}, \dots, C_{a_{j+1}-1}$ являются цепями типа $I_{i_j}^{(n)} = I_{i_j}$, где i_1, \dots, i_p — различные числа отрезка $[1, 2^n]$. Применяя к каждой из этих p групп цепей одного типа тождество $t_{11}^{(n)}$, получим КС Σ'_1 , в которой из вершины v выходит по одной цепи каждого типа I_{i_j} , $j \in [1, p]$ (см. рис. 5.2b). Пусть, далее, КС Σ''_1 получается из КС Σ'_1 присоединением к вершине v с помощью тождества $t_9^{(n)}$ «висячих» цепей C_{p+1}, \dots, C_{2^n} всех отсутствующих среди I_{i_1}, \dots, I_{i_p} типов (см. рис. 5.2c), а КС Σ'''_1 получается из КС Σ''_1 в результате удаления с помощью тождества $t_3^{(n)}$ вершины v вместе со всеми «инцидентными» ей цепями и устранения с помощью тождества t_1 образовавшихся при этом изолированных вершин — конечных вершин цепей C_{p+1}, \dots, C_{2^n} (см. рис. 5.2d). По индуктивному предположению для КС

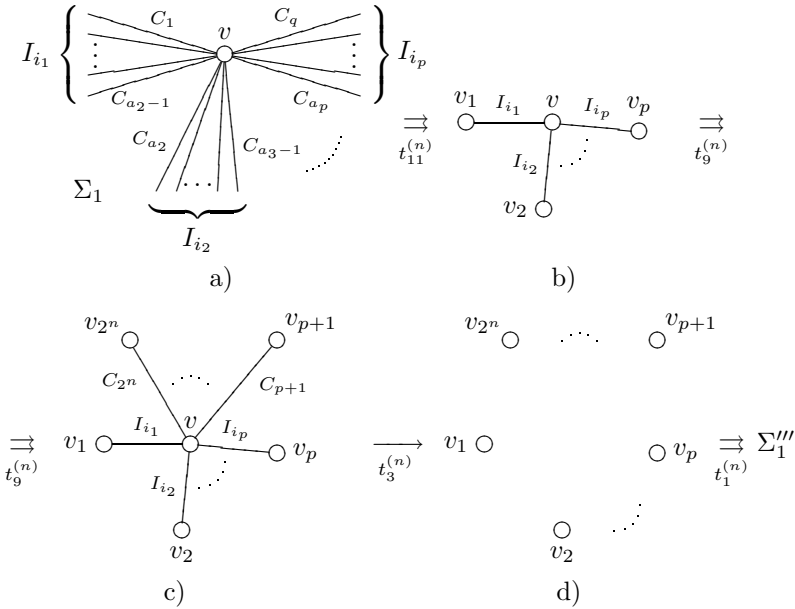


Рис. 5.2: к доказательству леммы 5.1

Σ''' существует ЭП вида

$$\Sigma''' \xrightarrow{\quad} \Sigma_2$$

$$\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}$$

и, следовательно, для КС Σ_1 существует ЭП (5.1).

Переход от КС Σ_2 к КС Σ_3 осуществляется с помощью тождеств $t_6^{(n)}$ и $t_7^{(n)}$, а от КС Σ_2 к КС Σ_3 — с помощью тождеств $t_{10}^{(n)}$.

Лемма доказана. □

Теорема 5.1. Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП x_1, \dots, x_n существует ЭП вида $\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''$.

Доказательство. Пусть $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ — канонические КС от БП x_1, \dots, x_n , эквивалентные КС Σ' и Σ'' соответственно. Из определений следует, что $\widehat{\Sigma}' \xrightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}''$, и поэтому в силу леммы 5.1 существует ЭП вида

$$\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}' \xrightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}'' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''.$$

Теорема доказана. \square

Следствие 1. Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K от БП x_1, \dots, x_n .

Следствие 2. Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K .

Докажем теперь отсутствие КПСТ в классе \mathcal{U}^K . Для КС Σ от БП x_1, \dots, x_n и набора $\alpha, \alpha \in B^n$, определим величину

$$\Theta(\Sigma, \alpha) = |E(\Sigma|_\alpha)| - |V(\Sigma|_\alpha)| + |c(\Sigma|_\alpha)|,$$

которая (см. §1 главы 2) задает цикломатическое число графа $\Sigma|_\alpha$. Положим, далее,

$$\Theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \Theta(\Sigma, \alpha).$$

Лемма 5.2. Если $\Sigma'(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\{t_1-t_5\}} \Sigma''(x_1, \dots, x_n)$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \xrightarrow{\tau_k} \Sigma''$, где $k < n$, то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k} .

Доказательство. Докажем, что $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, если $\Sigma' \xrightarrow{t_i} \Sigma''$ для любого i из отрезка $[1, 5]$. Действительно, пусть КС Σ'' получается из КС Σ' заменой ее подсхемы $\widehat{\Sigma}'_i$, которая имеет вид левой части тождества t_i , на соответствующую ей

правую часть $\widehat{\Sigma}_i''$ этого тождества. Нетрудно проверить, что для любого i , $i \in [1, 5]$, число линейно независимых циклов графов $\Sigma|_{\alpha'}$ и $\Sigma|_{\alpha''}$ одинаково при всех α , $\alpha \in B^n$, и, следовательно, $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$.

Пусть теперь $\Sigma' \xrightarrow{\tau_k} \Sigma''$, причем $k < n$. Если КС Σ' содержит в качестве подсхемы цикл из k контактов с одним полюсом, то КС Σ'' содержит вместо него один лишь полюс. Рассмотрим цикломатическое число сети $\Sigma'|_{\alpha}$ для различных α , $\alpha \in B^n$. Если цикл указанного вида в КС Σ' содержит контакты, помеченные различными буквами одной и той же БП, то, очевидно, для любого α , $\alpha \in B^n$, $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 0$. В противном случае пусть x_{j_1}, \dots, x_{j_m} — все различные БП, встречающиеся среди пометок указанного цикла, причем $m \leq k$. Заметим, что если цикл проводит на наборе α , $\alpha \in B^n$, то он проводит и на всех 2^{n-m} наборах, в которых значения переменных с индексами j_1, \dots, j_m совпадают со значениями соответствующих переменных набора α . Таким образом, разность

$$\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (\Theta(\Sigma'|_{\alpha}) - \Theta(\Sigma''|_{\alpha}))$$

делится на 2^{n-m} и, следовательно, делится на 2^{n-k}

Лемма доказана. \square

Теорема 5.2. *В классе \mathcal{U}^K не существует конечной полной системы тождеств.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного: пусть τ — КПСТ для ЭП КС \mathcal{U}^K , и пусть n — максимальное число БП, встречающихся в тождествах системы τ . Тогда $\tau_n \xrightarrow{\tau} \tau$ и τ_n — КПСТ для \mathcal{U}^K . Докажем, что $\tau_n \not\xrightarrow{\tau} t_6^{(n+1)}$. Для этого рассмотрим КС Σ' , состоящую из простого цикла длины $(n+1)$, содержащего контакты с по-

метками x_i , $i \in [1, n + 1]$, и имеющую единственный полюс с пометкой 1, которая является левой частью тождества $t_6^{(n+1)}$. Очевидно, что ей эквивалентна КС Σ'' , содержащая изолированный полюс 1, которая является правой частью тождества $t_6^{(n+1)}$. Если $\tau_n \rightrightarrows t_6^{(n+1)}$, то $\Sigma' \rightrightarrows \Sigma''$. Согласно данным выше определениям, $\Theta(\Sigma') = 1$, $\Theta(\Sigma'') = 0$ и разность $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 1$ не делится на 2, что противоречит утверждению леммы 5.2. Таким образом, тождество $t_6^{(n+1)}$ не выводится из системы τ_n , а значит, и из системы τ . Отсюда следует, что τ не может являться КПСТ для ЭП КС из класса \mathcal{U}^K .

Теорема доказана. □

Глава 4

Синтез и сложность управляющих систем

§1 Задача синтеза и связанные с ней понятия. Простейшие методы синтеза схем

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть \mathcal{U} — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ F можно реализовать некоторой его схемой Σ , а Ψ — какой-либо функционал сложности схем класса \mathcal{U} , то есть отображение \mathcal{U} во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством *монотонности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер (ср. с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе \mathcal{U} как минималь-

ное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из \mathcal{U} , которые реализуют F . При этом схема Σ , принадлежащая классу \mathcal{U} , которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе \mathcal{U} относительно функционала Ψ . В силу монотонности функционала Ψ минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем, а во многих случаях — среди строго приведенных схем (см. §1 главы 3).

Величину $\Psi(F)$ в том случае, когда функционал Ψ совпадает с введенным в главе 2 функционалом $L(\mathcal{L}, D, T, R, \text{ и т. д.})$ будем называть *сложностью* (соответственно, *размером*, *глубиной*, *задержкой*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ F* . Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса \mathcal{U} относительно функционала сложности Ψ* . В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида $\mathcal{U}_B^A(\mathcal{U}^A)$ будем обозначать через $\Psi_B^A(F)$ (соответственно, $\Psi^A(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через $\Psi_B^A(n)$ (соответственно, $\Psi^A(n)$). В обозначениях классов \mathcal{U}_B^C , \mathcal{U}_B^Φ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс B вида B_0 будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей $\Psi'(F)$ и $\Psi''(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классах схем \mathcal{U}' и \mathcal{U}'' соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$. В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F),$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют каскадные КС, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Для любой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, которая реализует систему ФАЛ F , существует эквивалентная формула (система формул) \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, которая состоит из формул, реализуемых на выходах Σ , и получается из Σ с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств τ^B в результате «поднятия» ветвлений к входам (см. §1 гл. 3). Следовательно,

$$D(\Sigma) = D(F), \quad T(\Sigma) = T(\mathcal{F}),$$

и поэтому

$$D_B^C(F) = D_B^\Phi(F), \quad T_B^C(F) = T_B^\Phi(F).$$

Положим:

$$\begin{aligned} D_B(F) &= D_B^C(F) = D_B^\Phi(F), \\ T_B(F) &= T_B^C(F) = T_B^\Phi(F), \end{aligned}$$

и введем функции Шеннона

$$\begin{aligned} D_B(n) &= D_B^C(n) = D_B^\Phi(n), \\ T_B(n) &= T_B^C(n) = T_B^\Phi(n). \end{aligned}$$

При этом для системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ будут справедливы равенства

$$D_B(F) = \max_{1 \leq i \leq m} D_B(f_i), \quad T_B(F) = \max_{1 \leq i \leq m} T_B(f_i).$$

Заметим также, что для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем

выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f)_i.$$

В общем случае задачу синтеза приходится рассматривать не для произвольной ФАЛ из $P_2(n)$, а для произвольной ФАЛ, принадлежащей некоторому подмножеству $\mathcal{Q}(n)$ множества $P_2(n)$. Если при этом подмножество $\mathcal{Q}(n)$, $\mathcal{Q}(n) \subseteq P_2(n)$, определено для любого n , $n = 1, 2, \dots$, то последовательность \mathcal{Q} вида $\mathcal{Q}(1), \mathcal{Q}(2), \dots$, будем называть *классом* ФАЛ и будем говорить о задаче синтеза для ФАЛ из класса \mathcal{Q} . При решении указанной задачи в полном классе схем \mathcal{U} с функционалом сложности Ψ обычным образом вводится функция

$$\Psi(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} \Psi(f),$$

которая называется *функцией Шеннона для класса схем \mathcal{U} относительно функционала сложности Ψ при реализации в нем функций класса \mathcal{Q}* . Очевидно, что «обычная» функция Шеннона $\Psi(n)$ совпадает с введенной таким образом функцией Шеннона $\Psi(P_2(n))$.

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма (см. §7 главы 1), который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число ВП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования с учетом результатов §2 главы 2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.1. Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, существует формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π -схема Σ_f , которые реализуют f , и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|. \quad (1.1)$$

Следствие 1. В соответствии с леммой 2.3 из §2 главы 2 формулу \mathcal{F}_f можно выбрать так, что

$$T(\mathcal{F}_f) \leq \lceil \log n + \log |N_f| \rceil + 1. \quad (1.2)$$

Следствие 2. В силу (1.1), (1.2) с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π -схемой сложности 2, а также формулой из \mathcal{U}^Φ , имеющей сложность 2 и глубину 2 выполняются неравенства

$$\begin{aligned} L^C(n) &\leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1}, \\ D(n) &\leq n + \lceil \log n \rceil + 1, \\ L^K(n) &\leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

Лемма 1.2. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, и $f \neq 0$, существует π -схема Σ_f и формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f , и для которых наряду с (1.1) справедливы также неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Доказательство. В качестве Σ_f можно взять π -схему, которая получается из $(1, 2^n)$ -КД порядка n от БП x_1, \dots, x_n (см. рис. 5.4а из §5 главы 2), в результате снятия тех его выходов, где реализуются ЭК, не входящие в совершенную

ДНФ ФАЛ f , отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула \mathcal{F}_f получается в результате моделирования построенной π -схемы Σ_f в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §5 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \quad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где $L^-(\Sigma_f)$ — число размыкающих контактов в схеме Σ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка n равно $2^n - 1$.

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (1.3)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (1.4)$$

§2 Реализация некоторых функций и оценка их сложности

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка n , то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\bar{\ell}_n$;
2. мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка n ;
3. дешифратора Q_n (дизъюнктивного дешифратора J_n) порядка n ;

4. универсальной системы $\vec{P}_2(n)$ порядка n , состоящей из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для указанных ФАЛ и систем ФАЛ. Следуя §1 главы 2, будем называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ. Примером контактного дешифратора порядка n является $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рисунке 5.4, а пример контактного мультиплексора порядка n дает π -схема, приведенная на рис. 5.7b.

Лемма 2.1. *Для любого натурального n выполняются неравенства:*

$$L^C(Q_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^C(\mathcal{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad (2.1)$$

$$L^K(Q_n) \leq 2^{n+1} - 2;$$

$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3; \quad (2.2)$$

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (2.3)$$

Доказательство. В классе \mathcal{U}^C построим схемный дешифратор порядка n , удовлетворяющий первому неравенству (2.1), следующим образом:

1. разобьем набор БП $X(n)$ на группы $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, где $q = \lceil n/2 \rceil$;
2. возьмем дешифраторы Σ' и Σ'' от БП x' и x'' порядка q и $(n - q)$ соответственно, реализующие каждую свою ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ Σ' и Σ'' , после чего конъюнктурируем каждый выход Σ' с каждым выходом Σ'' , а выходы всех

использованных для этого 2^n ФЭ & (и только их) объёмным выходами искомого дешифратора.

Дизъюнктивный дешифратор порядка n , удовлетворяющий второму неравенству (2.1), строится аналогично.

Искомым контактным дешифратором порядка n является $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рисунке 5.4а, а искомым контактным мультиплексором порядка n — π -схема, приведенная на рис. 5.7б. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 5.4а и 5.7б, равна $2^{n+1} - 2$ и $3 \cdot 2^n - 2$ соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (2.1) и (2.2), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно $2^n - 1$.

В результате моделирования π -схемы, показанной на 5.7б, можно построить бесповторную по информационным БП формулу (см. §5 главы 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) &= \\ &= \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\dots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

которая удовлетворяет второму неравенству (2.2), так как реализует ФАЛ μ_n , имеет сложность $4 \cdot 2^n - 3$ и альтернирование $2n - 1$. Наряду с этой формулой будем использовать для реализации мультиплексорной ФАЛ μ_n бесповторную по информационным БП формулу

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) &= \\ &= \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-t}) \in B^{n-t}} x_1^{\sigma_1} \dots x_{n-t}^{\sigma_{n-t}} \& \\ &\& \left(\bigvee_{(\sigma_{n-t+1}, \dots, \sigma_n) \in B^t} x_{n-t+1}^{\sigma_{n-t+1}} \dots x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right), \end{aligned}$$

где $t = \lfloor \log n \rfloor$. Заметим что альтернирование формулы $\widehat{\mathcal{F}}_n$ равно 3 и что

$$\begin{aligned} R(\widehat{\mathcal{F}}_n) &= 2^n + t \cdot 2^n + (n - t) \cdot 2^{n-t} \leq (3 + \log n)2^n, \\ L(\widehat{\mathcal{F}}_n) &\leq 2^n + \frac{3}{2} (R(\widehat{\mathcal{F}}_n) - 2^n) \leq \left(4 + \frac{3}{2} \log n\right) 2^n \end{aligned} \quad (2.4)$$

поскольку вхождение адресных БП в формулу $\widehat{\mathcal{F}}_n$ с отрицаниями составляют ровно половину всех вхождений в нее этих БП.

Неравенства (2.3) при $n = 1$, очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ ℓ_n , $n \geq 2$, со сложностью (2.3), является СФЭ Σ_n^\oplus , показанная на рис. 3.3 главы 2. Аналогичная СФЭ для ФАЛ $\bar{\ell}_n$ получается в результате замены ФЭ & на ФЭ \vee и ФЭ \vee на ФЭ & в первой подсхеме вида Σ_2^\oplus схемы Σ_n^\oplus (см. рис. 3.3b главы 2).

Лемма доказана. \square

Рассмотрим, далее, некоторые нижние оценки сложности ФАЛ и примеры минимальных схем.

Лемма 2.2. *Если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n. \quad (2.5)$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^C(f) \geq n, \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k) \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть Σ_f — минимальная по сложности СФЭ из \mathcal{U}^C реализующая ФАЛ f и пусть \mathcal{F}_f — каркас Σ_f . Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_1, \dots, x_n следует,

что $R(\mathcal{F}_f) \geq n$, и поэтому в силу соотношений (2.4), (3.1) главы 2

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) = L(\mathcal{F}_f) \geq n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ f не является монотонной ФАЛ, то формула \mathcal{F}_f должна содержать хотя бы один ФЭ \neg и, следовательно, в силу замечания к лемме 2.1 главы 2 в указанном случае

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) = L(\mathcal{F}_f) \geq n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.5) и (2.6) доказаны.

Пусть теперь Σ_f — минимальная по сложности $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ f . Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_i , $i \in [1, n]$, следует, что либо контакт вида x_i , либо контакт вида \bar{x}_i встречается в КС Σ_f , и поэтому

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Если же, кроме того, БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f , то как контакт вида x_i , так и контакт вида \bar{x}_i , входят в Σ_f и, следовательно, в данном случае

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n + k.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

Лемма 2.3. Для системы $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^K(F) \geq m, \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m). \quad (2.7)$$

Доказательство. Второе из неравенств (2.7) вытекает из того, что все ФАЛ $f_i, i = 1, \dots, m$, реализуются на попарно различных выходах СФЭ отличных от ее входов.

Пусть теперь Σ_F — приведенная $(1, m)$ -КС, реализующая систему ФАЛ F . Из приведенности Σ_F и условий леммы вытекает, что Σ_F — связный граф с не менее чем $(m + 1)$ вершиной, и поэтому в силу неравенства (1.2) главы 2

$$L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m.$$

Лемма доказана. □

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(Q_n) &\geq 2^n, & L^K(Q_n) &\geq 2^n, \\ L^C(\mathcal{J}_n) &\geq 2^n, & L^K(\mathcal{J}_n) &\geq 2^n, \\ L_B^C(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - n, & L^K(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - 2. \end{aligned}$$

Лемма 2.4. Для каждого натурального n в \mathcal{U}_B^C существует универсальная СФЭ U_n порядка n , сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Доказательство. В силу полноты базиса в \mathcal{U}_B^C существует система формул Σ от БП x_1, \dots, x_n , которая реализует систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна Σ и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §1 главы 3). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ U_n , включая n ее входов, равно 2^{2^n} и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана. □

Замечание. В силу следствия из леммы 2.3 построенная схема U_n является минимальной по сложности универсальной СФЭ порядка n и поэтому, в частности,

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) = 2^{2^n} - n.$$

Докажем, что $(1, 2^n)$ -контактное дерево — минимальный контактный дешифратор порядка n в классе разделительных (по выходам) КС.

Лемма 2.5. *Если разделительная по выходам $(1, m)$ -КС Σ реализует m различных ФАЛ отличных от 0, то*

$$L(\Sigma) \geq 2m - 2.$$

Доказательство. Пусть Σ — приведенная и, следовательно, связная КС от БП x_1, \dots, x_n . Из разделительности Σ следует, что при любом α , $\alpha \in B^n$, сеть $\Sigma|_\alpha$ состоит не менее, чем из m , связных компонент. Заметим, что удаление всякого ребра увеличивает число связных компонент графа не более, чем на единицу, и поэтому число $|E(\Sigma|_\alpha)|$ — число контактов не проводящих на наборе α , — удовлетворяет неравенству

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq m - 1. \quad (2.8)$$

Суммируя (2.8) по всем α , $\alpha \in B^n$, и учитывая, что каждый контакт КС Σ не проводит ровно на половине всех наборов куба B^n , получим

$$2^{n-1}L(\Sigma) \geq 2^n(m - 1), \quad L(\Sigma) \geq 2m - 2.$$

Лемма доказана. \square

Следствие. *Контактное дерево порядка n является минимальной разделительной $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему ФАЛ Q_n .*

Действительно, в соответствии с леммой 2.5 сложность разделительной $(1, 2^n)$ -КС не меньше чем $2^{n+1} - 2$, то есть не меньше сложности $(1, 2^n)$ -контактного дерева порядка n .

Лемма 2.6. *Если система ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то*

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

Доказательство. Возьмем приведенную $(1, m)$ -КС Σ , реализующую систему ФАЛ F , и заметим, что при любом α , $\alpha \in B^n$, в сети $\Sigma|_\alpha$ имеется связная компонента, которая содержит вход Σ и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе α . Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq f_1(\alpha) + \dots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам α , $\alpha \in B^n$, придем (см. доказательство леммы 2.5) к неравенству

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geq \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.

Лемма доказана. □

Следствие. $L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2$

§3 Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов. Метод Шеннона

Приведенные в §1 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и π -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [20] является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Для построения соответствующей контактной схемы используется (см. §6 главы 2) операция присоединения двух противоположных контактов, которая позволяет реализовать разложение вида

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1, \quad (3.1)$$

(см. (6.6) и рис. 6.3а), и операция присоединения одного контакта (см. (6.7) и рис. 6.3б), если необходимо реализовать разложение

$$g = x_i^\sigma g_\sigma. \quad (3.2)$$

Переход от СФЭ \check{U} , $\check{U} \in \mathcal{U}^C$, которая реализует в выходных вершинах v_0 и v_1 ФАЛ g_0 и g_1 соответственно, к СФЭ U , $U \in \mathcal{U}^C$, которая реализует ФАЛ g , удовлетворяющую (3.1) ((3.2)), показан на рис. 3.1а (соответственно 3.1б).

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики $F = (f_1, \dots, f_m)$, $F \in P_2^m(n)$, строить $(1, m)$ -КС Σ_F , $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$, и СФЭ U_F , $U_F \in \mathcal{U}^C$, которые реализуют F . Будем считать, что все ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m системы F различны, отличны от констант, и для каждой БП x_i , $1 \leq i \leq n$, среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от x_i .

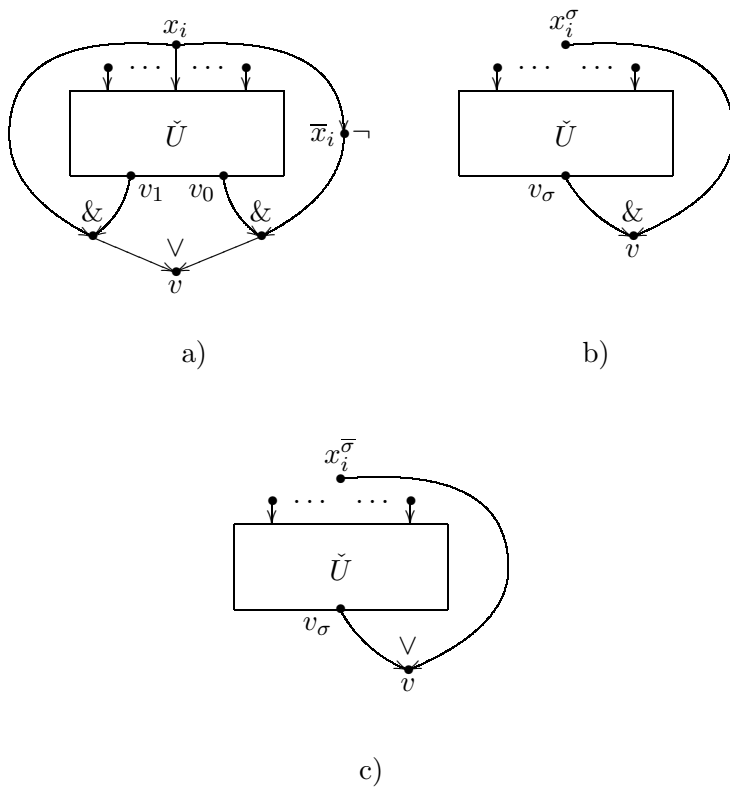


Рис. 3.1: к описанию метода каскадов для СФЭ

Разложим ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m сначала по БП x_1 , потом по БП x_2 , и так далее. При этом построим последовательности множеств G_i и \widehat{G}_i , состоящих из ФАЛ от БП x_i, x_{i+1}, \dots, x_n , где $i = 1, 2, \dots, n$, такие, что

1. G_i состоит из всех различных ФАЛ $g(x_i, \dots, x_n)$ вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $1 \leq j \leq m$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$;

2. \widehat{G}_i состоит из всех различных функций g , $g \in G_i$, которые существенно зависят от x_i .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \widehat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ $\widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_n$ не пусты и попарно не пересекаются. Положим, далее,

$$\check{G}_i = \bigcup_{j=i}^n \widehat{G}_j, \quad \check{m}_i = |\check{G}_i| + 1,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, и пусть

$$\widehat{G}_{n+1} = \check{G}_{n+1} = \emptyset, \quad \check{m}_{n+1} = 1.$$

Заметим, что любую ФАЛ g , $g \in \widehat{G}_i$, где $1 \leq i \leq n$, можно представить в виде (3.1), где $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$, и, следовательно, $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$ для всех σ , $\sigma \in B$. Если при этом для некоторого σ , $\sigma \in B$, ФАЛ g_σ равна 0, то вместо (3.1) будем использовать разложение (3.2), где $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$.

Пусть $(1, 1)$ -КС $\check{\Sigma}_{n+1}$ представляет собой изолированный вход, который одновременно является выходом, и реализует константу 1. Пусть, далее, для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, уже построена $(1, \check{m}_{i+1})$ -КС $\check{\Sigma}_{i+1}$, реализующая систему ФАЛ $\check{G}_{i+1} \cup \{1\}$. Построим тогда $(1, \check{m}_i)$ -КС $\check{\Sigma}_i$, которая реализует систему ФАЛ $\check{G}_i \cup \{1\}$ следующим образом:

1. КС $\check{\Sigma}_i$ содержит КС $\check{\Sigma}_{i+1}$ в качестве подсхемы, на выходах которой (они одновременно являются выходами $\check{\Sigma}_i$) реализуются ФАЛ из множества $\check{G}_{i+1} \cup \{1\}$;
2. Каждая ФАЛ g , $g \in \widehat{G}_i$, реализуется согласно (3.1) ((3.2)) на выходе v КС $\check{\Sigma}_i$, который при $\alpha = 0, 1$ (соответственно $\alpha = \sigma$) соединен контактом вида x_i^α с тем выходом v_α подсхемы $\check{\Sigma}_{i+1}$, где реализуется ФАЛ $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$ так, как это показано на рис. 6.3а (соответственно рис. 6.3б) из §6 главы 2.

Таким образом, построенная указанным выше способом КС $\check{\Sigma}_1$ реализует систему ФАЛ $\check{G}_1 \cup \{1\}$, и для получения искомой КС Σ_F достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС $\check{\Sigma}_1$, в которых реализуются ФАЛ, отличные от f_1, \dots, f_m . При этом константа 1 всегда реализуется КС $\check{\Sigma}_1$, а константа 0 может быть реализована в изолированной вершине, и поэтому их включение в систему ФАЛ F не влияет на построение КС Σ_F и ее сложность. Заметим также, что если при построении КС Σ_F все контакты ориентировать по направлению от вершины v_α к вершине v (см. второй этап построения КС $\check{\Sigma}_i$), мы получим ориентированную ациклическую $(1, m)$ -КС $\vec{\Sigma}_F$, которая реализует систему ФАЛ F .

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ U_F , реализующая систему ФАЛ F , с той лишь разницей, что:

1. СФЭ \check{U}_n реализует систему ФАЛ I , состоящую из БП x_1, \dots, x_n , а также ФАЛ вида \bar{x}_i , $1 \leq i \leq n$, которые встречаются в КС Σ_F ;
2. для всех i , $i = (n - 1), \dots, 1$, при переходе от СФЭ \check{U}_{i+1} , реализующей систему ФАЛ $\check{G}_{i+1} \cup I$, к СФЭ \check{U}_i , реализующей систему ФАЛ $\check{G}_i \cup I$, разложение (3.1), где $g \in \widehat{G}_i$ и $g_0, g_1 \in \check{G}_{i+1}$, реализуется так, как пока-

зано на рис. 3.1а, а разложение (3.2), применяемое в случае $g_{\bar{\sigma}} = 0$ (разложение $g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} x_i^{\sigma} = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma}$ в случае $g_{\bar{\sigma}} = 1$), — так, как показано на рис. 3.1б (соответственно, 3.1с);

3. каждая ФАЛ вида $g_{\sigma} x_i^{\sigma}$, используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (3.1) или (3.2) для различных ФАЛ g , реализуется только один раз.

Как и в случае КС, СФЭ U_F , реализующая систему ФАЛ F и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ \check{U}_1 в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из F .

Пусть теперь Σ_f — (1, 1)-КС, построенная по методу каскадов для функции алгебры логики f , $f \in P_2(n)$, a_1 и a — вход и выход Σ_f соответственно, а a_0 — дополнительная изолированная вершина. Рассмотрим (1, 2)-КС $\tilde{\Sigma}_f$ с входом a и выходами a_0, a_1 , которая строится аналогично Σ_f с той лишь разницей, что контакты ориентированы от вершины v к вершине v_{α} (см. второй этап построения КС $\check{\Sigma}_i$), и что при их проведении используется только разложение (3.1), а в случае, когда $g_{\sigma} = 0$, контакт x_i^{σ} идет из вершины v в вершину a_0 . Заметим, что КС Σ_f представляет собой (1, 1)-ККС (см. §7 главы 2), а КС $\tilde{\Sigma}_f$ получается из полной (2, 1)-ККС, являющейся объединением ККС Σ_f и ее дополнения, в результате введения ориентации всех контактов по направлению к a_0, a_1 и объявления этих вершин выходами, а вершины a — входом $\tilde{\Sigma}_f$. Таким образом, КС $\tilde{\Sigma}_f$ является BDD (см. §7 главы 2) и реализует ФАЛ f .

Пусть, например, $F = (f_1, f_2)$, где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\ f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\widehat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\ \widehat{G}_2 &= \{x_2(x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_2 = \widehat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\ \widehat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_3 = \widehat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\ \widehat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}.\end{aligned}$$

На рис. 3.2 показана построенная для данной системы ФАЛ КС $\check{\Sigma}_1$, вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 3.3 — соответствующая ей КС Σ_F , на рис. 3.4 — строго приведенная СФЭ U_F , а на рис. 3.5 — BDD, реализующая ФАЛ f_1 .

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ ℓ_n , где $n \geq 2$, является известная схема Кардо [29], показанная на рис. 3.6. Заметим, что эта КС имеет сложность $(4n - 4)$ и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для ℓ_n , $n \geq 2$, по методу каскадов имеет сложность $(7n - 9)$ и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой Σ_n^\oplus сложности $(4n - 4)$, показанной на рис. 3.3 главы 2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ $\bar{\ell}_n$ (см. лемму 2.1).

При построении по методу каскадов $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики $Q_n(J_n)$, мы получим контактное дерево (соответственно дизъюнктивное контактное дерево) порядка n , показанное на рис. 5.4а из §5 главы 2 (соответственно на рис. 3.7, где $i = \nu((\sigma_1, \dots, \sigma_n))$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$). Как будет показано в §7, эти КД не являются минимальными контактными дешифраторами соответствующего типа.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный универсальный многополюсник сложности не больше, чем $2 \cdot 2^{2^n}$, а также контактный мультиплексор порядка n и сложности $3 \cdot 2^n - 2$, показанный на

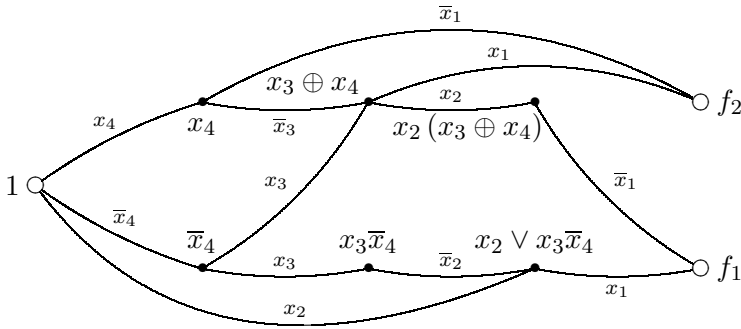


Рис. 3.2: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

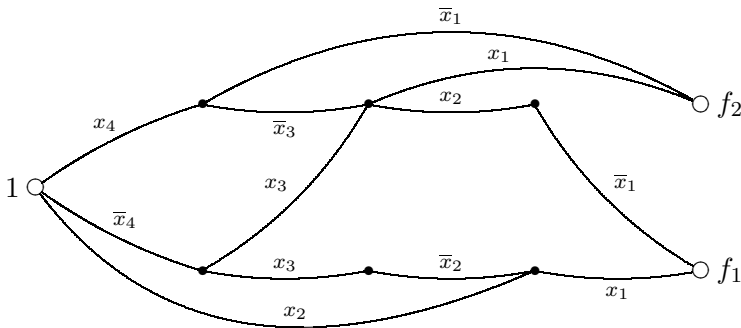


Рис. 3.3: пример КС, построенной методом каскадов

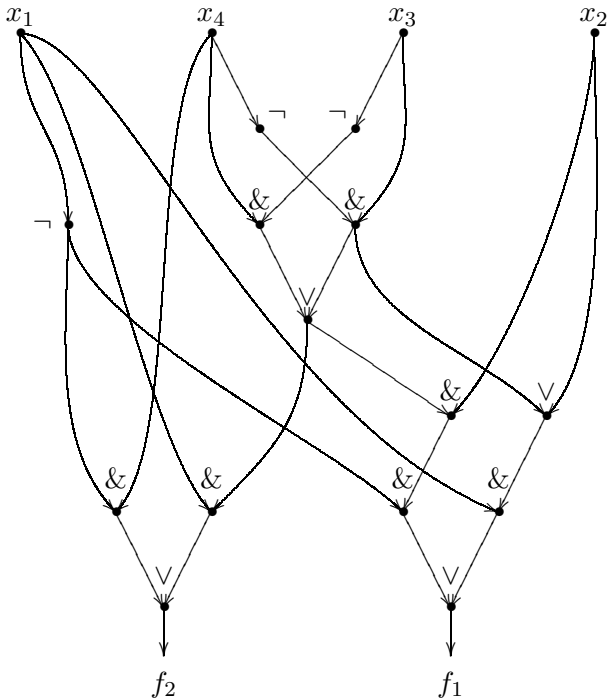


Рис. 3.4: СФЭ для системы ФАЛ F , построенная методом каскадов

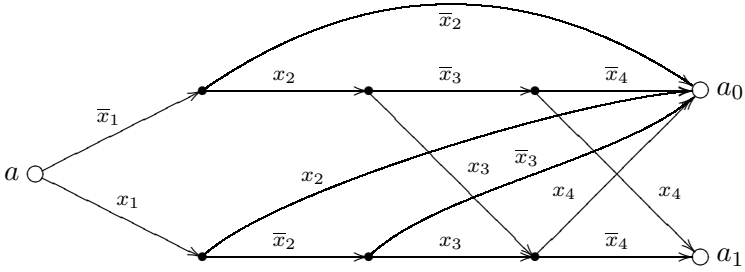


Рис. 3.5: BDD для f_1 , построенная методом каскадов

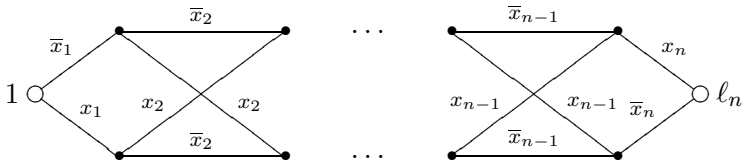


Рис. 3.6: схема Карно для линейной функции ℓ_n

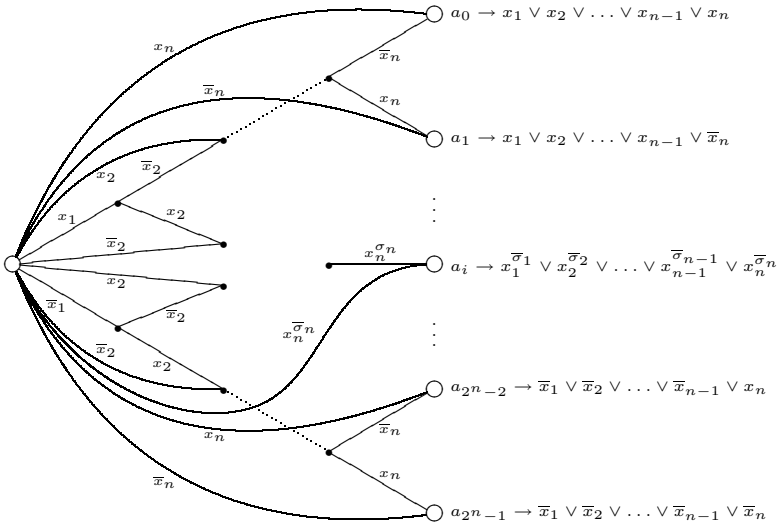


Рис. 3.7: дизъюнктивное контактное дерево

рис. 5.7b главы 2 (см. лемму 2.1). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ μ_n сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка n , построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ μ_n сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка 2^n от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем 2^{2^n+1} . Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним лемму 2.1 следующим утверждением.

Лемма 3.1. Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n}.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [30, 14]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ (см. §4).

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра q , $1 \leq q \leq n$, и построении схемы Σ_f , реализующей произвольную ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ на основе ее разложения по части переменных (см. равенство (2.5) из гл. 1):

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (3.3)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ при всех σ'' , $\sigma'' \in B^{n-q}$. При этом схема Σ_f представляет собой корректную суперпозицию вида $\Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексор порядка $(n - q)$ от адресных БП x'' , информационные входы которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника Σ' порядка q от БП x' в соответствии с (3.3).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ указанным выше способом КС (СФЭ в базисе B_0) Σ_f , где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$ -КД порядка $(n - q)$ из §6 главы 2 (соответственно, формула \mathcal{F}_{n-q} из леммы 2.1), а Σ' — универсальный многополюсник из леммы 3.1 (соответственно леммы 2.4). Корректность построенной суперпозиции в случае КС обеспечивается разделительностью

КД, которая влечет за собой соотношение (6.8) из §6 главы 2. Для сложности полученной схемы Σ_f будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$, и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

§4 Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим ряд нижних оценок для введенных в §1 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [30, 14], который основан на том, что число ФАЛ от БП x_1, \dots, x_n не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n .

Пусть \mathcal{U} — один из рассмотренных в главе 2 классов схем, Ψ — введенный там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса \mathcal{U} относительно Ψ . Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$, и для которых $\Psi(\Sigma) \leq \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из

определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(n), n)\| = 2^{2^n}. \quad (4.1)$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}, \delta$, где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}(\widehat{\Psi}, n)\| \leq \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то } \Psi(f) \geq \widehat{\Psi} \quad (4.2)$$

для не менее, чем $(1 - \delta) \cdot 2^{2^n}$, ФАЛ f из $P_2(n)$.

Верхние оценки величины $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$, установленные в главе 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (4.1)–(4.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. теорему 3.1 и лемму 5.3 из главы 2) для каждого натурального n справедливы неравенства:

$$|\mathcal{U}^C(L, n)| \leq (32(L + n))^{L+1}, \quad (4.3)$$

$$|\mathcal{U}^\Phi(L, n)| \leq (32n)^{L+1}, \quad (4.4)$$

$$|\mathcal{U}^K(L, n)| \leq (8nL)^L, \quad (4.5)$$

$$|\mathcal{U}^\Phi[T, n]| \leq (64n)^{2^T}. \quad (4.6)$$

Лемма 4.1. Для $\gamma \in \{0, 1\}$ и положительных действительных чисел a, α, y, q , таких, что

$$(ay^\gamma)^{\alpha y} \geq q, \quad (4.7)$$

в случае $\gamma = 1$ и $\frac{a}{\alpha} \log q > 1$ выполняется неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\alpha \log \left(\frac{a}{\alpha} \log q\right)} \left(1 + \frac{\log \log \left(\frac{a}{\alpha} \log q\right)}{\log \left(\frac{ae}{\alpha} \log q\right)}\right), \quad (4.8)$$

где e — основание натуральных логарифмов, а в случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ — неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\alpha \log a}. \quad (4.9)$$

Доказательство. В случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ неравенство (4.9) получается в результате логарифмирования (4.7) и деления обеих частей полученного неравенства на $\alpha \log a$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \alpha = a = 1$ и $\log q > 1$. В этом случае неравенство (4.8) следует из того, что левая часть (4.7) монотонно возрастает по y , и для

$$y' = (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\log \log \log q}{\log (e \log q)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y' \log y' &= \\ &= (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q} (\log \log q - \log \log \log q + \log e \ln (1 + \varepsilon)) \leq \\ &\leq \log q (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{\log \log \log q}{\log \log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log \log q} \right) = \\ &= \log q (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) = \log q (1 - \varepsilon^2) \leq \log q. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае $\gamma = 1$, $\alpha > 0$, $a > 0$ неравенство (4.7) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geq q^{\frac{a}{\alpha}},$$

и поэтому неравенство (4.8) получается из неравенства $y \geq y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $\frac{a}{\alpha} \log q$, если выполнено условие $\frac{a}{\alpha} \log q > 1$.

Лемма доказана. □

Теорема 4.1. Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \dots$, такой, что $\varepsilon(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства

$$L^C(n) \geq (1 + \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (4.10)$$

$$L^\Phi(n) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (4.11)$$

$$L^K(n) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (4.12)$$

$$D(n) \geq n - \log \log n - \varepsilon(n). \quad (4.13)$$

Доказательство. Неравенства (4.10)–(4.12) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем \mathcal{U} с функционалом сложности L неравенства (4.3)–(4.5) на основе мощностного равенства (4.1) с использованием леммы 4.1, где $q = 2^{2^n}$, $\alpha = 1$ и

- 1) $\gamma = 1$, $a = 32$, $y = L^C(n) + n$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^C$;
- 2) $\gamma = 0$, $a = 32n$, $y = L^\Phi(n) + 1$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\Phi$;
- 3) $\gamma = 1$, $a = 8n$, $y = L^K(n)$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^K$;

Действительно, подставляя указанные значения в (4.8) и (4.9), получим

$$\begin{aligned} 1) \quad L^C(n) &\geq \frac{2^n}{n+5} \left(1 + \frac{\log(n+5)}{n+7} \right) - n \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n - 5 - o(1)}{n} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$2) \quad L^\Phi(n) \geq \frac{2^n}{\log n + 5} - 1 \geq \frac{2^n}{\log n} \left(1 - \frac{5 + o(1)}{\log n} \right) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad L^K(n) &\geq \frac{2^n}{n+3+\log n} \left(1 + \frac{\log(n+3+\log n)}{n+5+\log n} \right) \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left(1 - \frac{3+o(1)}{n} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Следовательно, неравенство (4.10) ((4.11), (4.12)) будет справедливо для достаточно больших n при $\varepsilon(n) = \frac{\log n - 6}{n}$ (соответственно $\varepsilon(n) = \frac{6}{\log n}$, $\varepsilon(n) = \frac{4}{n}$).

Аналогичным образом на основе неравенства (4.6) и равенства (4.1) с использованием леммы 4.1, где $q = 2^{2^n}$, $y = 2^{D(n)}$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$ и $a = 64n$, устанавливается справедливость (4.13) при $\varepsilon(n) = \frac{12}{\log n}$.

Теорема доказана. \square

Следствие 1.

$$L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \quad L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$T(n) \geq n - \log \log n - o(1).$$

Следствие 2. Нижние оценки (4.10)–(4.13) при указанных в доказательстве значениях $\varepsilon(n)$ справедливы для сложности (глубины) почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, при их реализации в соответствующих классах схем.

Действительно, замена величины $q = 2^{2^n}$ величиной $q = \frac{1}{n}2^{2^n}$ при получении оценок (4.14)–(4.16) с помощью леммы 4.1 повлияет только на участвующие в их последних неравенствах функции вида $o(1)$. При этом в силу (4.2), где $q = \frac{1}{n}$, а $\widehat{\Psi}$ — правая часть соответствующего неравенства (4.10)–(4.12), вновь полученная оценка будет справедлива для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$. Справедливость нижней оценки (4.13) для почти всех ФАЛ устанавливается аналогично.

Рассмотрим теперь нижние оценки функций Шеннона для сложности π -схем, КС из ориентированных контактов, BDD и КВС. Следующее утверждение доказывается на основе мощностных соотношений (4.1), (4.2) и леммы 4.1 с использованием оценок леммы 5.2, замечания к лемме 5.3, а также леммы 7.1 главы 2 аналогично тому, как доказывалась теорема 4.1.

Теорема 4.2. Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \dots$, такой, что $\varepsilon(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства

$$L^\pi(n) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (4.17)$$

$$L^{\vec{K}}(n) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (4.18)$$

$$\mathcal{L}^{\text{BDD}}(n) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (4.19)$$

$$L^{\text{KBC}}(n) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}. \quad (4.20)$$

Следствие 1.

$$\begin{aligned} L^\pi(n) &\gtrsim \frac{2^n}{\log n}, & L^{\vec{K}}(n) &\gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \\ \mathcal{L}^{\text{BDD}}(n) &\gtrsim \frac{2^n}{\log n}, & L^{\text{KBC}}(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}. \end{aligned}$$

Следствие 2. Нижние оценки (4.17)–(4.20) справедливы для сложности почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$.

Мощностные соображения можно использовать при получении нижних оценок для функций Шеннона, связанных с реализацией ФАЛ из класса \mathcal{Q} , $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(1), \mathcal{Q}(2), \dots, \mathcal{Q}(n), \dots$, где

$$\mathcal{Q} \subseteq P_2 \text{ и } \mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q} \cap P_2(n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть \mathcal{U} — один из рассмотренных в главе 2 классов схем, Ψ — введенный там функционал сложности, а $\Psi(\mathcal{Q}(n))$ — функция Шеннона (для класса схем \mathcal{U} относительно функционала сложности Ψ), связанная с классом ФАЛ \mathcal{Q} . Следующее «мощностное» неравенство обобщает равенство (4.1) и вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(\mathcal{Q}(n)), n)\| \geq |\mathcal{Q}(n)|. \quad (4.21)$$

Оно позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона $\Psi(\mathcal{Q}(n))$ на основе известной верхней оценки величины $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$.

Рассмотрим, в частности, нижние мощностные оценки для функций $L^C(\mathcal{Q}(n))$ и $L^K(\mathcal{Q}(n))$, то есть функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из класса \mathcal{Q} схемами из классов \mathcal{U}^C и \mathcal{U}^K соответственно. На основе мощностных соображений (см. (4.21)) аналогично тому, как это было сделано в теореме 4.1 для случая $\mathcal{Q} = P_2$, доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Для класса ФАЛ \mathcal{Q} такого, что $\log n = o(\log \log |\mathcal{Q}(n)|)$, выполняются следующие асимптотические неравенства*

$$\begin{aligned} L^K(\mathcal{Q}(n)) &\gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}, \\ L^C(\mathcal{Q}(n)) &\gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Пусть, например, класс \mathcal{Q} состоит из всех ФАЛ симметричных по первым двум БП. Легко видеть, что при этом $|\mathcal{Q}(n)| = 2^{\frac{3}{4}2^n}$, так как $f \in \mathcal{Q}(n)$ тогда и только тогда, когда вторая и третья четверти столбца значений $\tilde{\alpha}_f$ совпадают. Следовательно, в силу леммы 4.2 отсюда вытекает, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}. \quad (4.23)$$

Рассмотрим, наконец, мощностные нижние оценки для ИКС, а также для СФЭ и формул в произвольном базисе \mathcal{B} . Следующее утверждение доказывается на основе мощностных соотношений (4.1), (4.2) и леммы 4.1 с использованием оценок леммы 7.2 и теоремы 4.1 главы 2 аналогично тому, как доказывалась теорема 4.1.

Теорема 4.3. Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \dots$, такой, что $\varepsilon(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства

$$L^{\text{ИКС}}(n) \geq (1 + \varepsilon(n)) \frac{2^{n-1}}{n}, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{L}_B^{\text{С}}(n) \geq \rho_B \frac{2^n}{n} (1 + \varepsilon(n)), \quad (4.25)$$

$$\mathcal{L}_B^{\Phi}(n) \geq \rho_B \frac{2^n}{\log n} (1 - \varepsilon(n)), \quad (4.26)$$

$$T_B(n) \geq \tau_B (n - \log \log n - \varepsilon(n)). \quad (4.27)$$

Следствие 1.

$$\begin{aligned} L^{\text{ИКС}}(n) &\gtrsim \frac{2^{n-1}}{n}, & \mathcal{L}_B^{\text{С}}(n) &\gtrsim \rho_B \frac{2^n}{n}, \\ \mathcal{L}_B^{\Phi}(n) &\gtrsim \rho_B \frac{2^n}{\log n}, & T_B(n) &\geq \tau_B (n - \log \log n - o(1)). \end{aligned}$$

Следствие 2. Нижние оценки (4.24)–(4.27) справедливы для почти всех ФАЛ f из $P_2(n)$.

Замечание. Аналогичным образом, используя оценки (4.6) и (4.7) главы 2 можно доказать, что

$$\mathcal{L}_B^{\text{УС}}(n) \geq \rho_B \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{2 \log n - O(1)}{n} \right) \quad (4.28)$$

и что

$$\mathcal{L}_B^{\text{УС}}(n) \geq \rho_B \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{3 \log n - O(1)}{n} \right), \quad (4.29)$$

если базис B удовлетворяет условиям замечания 2 к теореме 4.1 главы 2.

§5 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим метод синтеза схем из класса \mathcal{U}^C , который был предложен О.Б. Лупановым [14] и позволил впервые установить асимптотику функции Шеннона $L^C(n)$. Этот метод, как и метод Шеннона (см. §3), основан на представлении реализуемой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в виде (3.3) и построении искомой СФЭ Σ_f , реализующей ФАЛ f , как суперпозиции схем вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$. При этом схема Σ'' по-прежнему является мультиплексором порядка $(n - q)$ от адресных БП $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, а схема Σ' реализует все ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. Однако, в отличие от метода Шеннона, каждая ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ берется не с выхода универсального многополосника от БП x' , а реализуется на выходе Σ' как дизъюнкция некоторых ФАЛ, выбранных из специального множества G , $G \subseteq P_2(q)$, реализованного на выходах соответствующей подсхемы схемы Σ' .

Множество ФАЛ G , $G \subseteq P_2(m)$, называется *дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) порядка m и ранга p* , если любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p,$$

где $g_i \in G$ при всех i , $i = 1, \dots, p$. Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

Пусть $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ — разбиение куба B^m , и пусть для всех i , $i = 1, \dots, p$, ФАЛ $\chi_i(x_1, \dots, x_m)$ — характеристическая ФАЛ множества π_i , а $G^{(i)}$ — множество всех тех ФАЛ

$g, g \in P_2(m)$, которые обращаются в 0 вне π_i . Заметим, что множество ФАЛ G вида

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$$

является ДУМ порядка m и ранга p . Действительно, любая ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p, \quad (5.1)$$

где $g_i = \chi_i g$ и, следовательно, $g_i \in G^{(i)}$ для всех $i, i = 1, \dots, p$. Заметим также, что мощность множества $G^{(i)}, i = 1, \dots, p$, равна 2^{s_i} , где $s_i = |\pi_i|$, и что множество $G^{(i)} \cap G^{(j)}$ состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если $1 \leq i < j \leq p$. Следовательно,

$$\lambda = |G| = \sum_{i=1}^p |G^{(i)}| - (p-1) \leq \sum_{i=1}^p 2^{s_i} \leq p2^s, \quad (5.2)$$

где

$$s = \max_{1 \leq i \leq p} s_i.$$

В дальнейшем, на протяжении §5–§8, будем рассматривать разбиение куба B^m на последовательные отрезки, то есть такое разбиение $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ куба B^m , где $p \geq m$, от БП (x_1, \dots, x_m) , что номер любого набора из множества π_i меньше номера любого набора из множества π_j , если $i < j$. Компоненты разбиения Π будем при этом называть *полосами* куба B^m . Кроме того, будем предполагать, что для

$$s \leq 2^m, \quad (5.3)$$

выполнены соотношения

$$p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \quad s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s, \quad (5.4)$$

$$s_p = 2^m - (p-1)s \leq s.$$

		x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m	1	2	\dots	2^s	2^s+1	\dots	2^s+1-1	\dots	$(p-1)(2^s-1)+2$	\dots	λ	
π_1	}	0	0	\dots	0	0	0	1	\dots	1	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	↑ $s=s_1$
		0	0	\dots	0	1	0	0	\dots	1	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	
		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
		\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	1	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	\dots	
π_2	}	\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	1	\dots	1	\dots	0	\dots	0	↑ $s=s_2$	
		\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	1	\dots	0	\dots	0		
		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		\dots
		\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	1	\dots	0	\dots	0		\dots
\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		
π_{p-1}	}	\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	↑ $s=s_{p-1}$	
		\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0		
		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		\dots
		\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0		\dots
π_p	}	\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	1	\dots	1	↑ $s_p \leq s$
		\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	1		
		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
		\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	\dots	

$\longleftarrow 2^s \longrightarrow$

$\longleftarrow 2^s-1 \longrightarrow$

$\longleftarrow 2^s p-1 \longrightarrow$

Рис. 5.1: к определению дизъюнктивно-универсального множества

С этим разбиением будем связывать введенные выше обозначения G , λ и $G^{(i)}$, χ_i , s_i , где $i = 1, \dots, p$, а через \vec{G} будем обозначать набор $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_\lambda)$ из $P_2^\lambda(q)$, который состоит из всех различных ФАЛ множества G , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений (см. рис. 5.1).

Заметим, что значения параметров s и m , которые однозначно определяют все введенные выше величины, будут выбираться в каждом параграфе по-своему.

Теорема 5.1. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ Σ_f , $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$, такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (5.5)$$

Доказательство. Пусть $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ для всех σ'' из B^{n-q} . Пусть, далее, Σ'' — мультиплексор порядка $(n - q)$ от адресных БП x'' и информационных БП $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$, который построен в соответствии с леммой 2.1, представляет собой формулу \mathcal{F}_{n-q} и реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_{n-q}(x'', y)$. Обозначим через Σ_G СФЭ, которая реализует систему ФАЛ \vec{G} и представляет собой объединение схем, построенных для каждой из них в соответствии с леммой 1.2. Заметим, что в силу леммы 2.1, (1.4) и (5.2) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma'') &\leq 4 \cdot 2^{n-q}, \\ L(\Sigma_G) &\leq 3p2^{s+q}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Схема Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, где $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов как ФАЛ $g(x')$ вида (5.1) с помощью СФЭ из $(p - 1)$ ФЭ \vee , входы которой присоединены к соответствующим выходам Σ_G . Искомая СФЭ Σ_f имеет вид $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ и реализует ФАЛ f в соответствии с разложением (3.3). Для нее в силу (5.6) будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq 2^{n-q}(p - 1) + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leq \\ &\leq 2^{n-q}(p - 1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q}, \end{aligned}$$

из которых, выбрав значения параметров

$$\begin{aligned} s &= \lceil n - 5 \log n \rceil, \\ m &= q = \lceil 2 \log n \rceil, \end{aligned}$$

удовлетворяющие (5.3), в соответствии с (5.4) получим

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq \frac{2^n}{n - 5 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = \\ &= \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Следствие. Из (5.5) и (4.10) (см. также следствие 1 из теоремы 4.1) вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание. При разложении ФАЛ из G по БП x_q получится не более, чем $2p2^{\frac{s+1}{2}}$, различных ФАЛ из $P_2(q-1)$, каждую из которых можно реализовать по методу каскадов (см. §3) со сложностью не больше, чем $3 \cdot 2^{q-1}$. Следовательно, сложность СФЭ, реализующей систему ФАЛ \vec{G} по методу каскадов при их разложении по БП x_q, x_{q-1}, \dots, x_1 , не больше, чем

$$3p \cdot 2^s + O\left(p2^{q+\frac{s}{2}}\right).$$

Используя эту схему вместо СФЭ Σ_G и выбирая значения параметров так, что

$$s = \lceil n - 3 \log n \rceil, \quad q = \lceil 2 \log n \rceil,$$

можно получить СФЭ $\check{\Sigma}_f$, которая реализует f со сложностью

$$L(\check{\Sigma}_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{3 \log n + O(1)}{n}\right). \quad (5.7)$$

Описанный выше асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ ориентирован, вообще говоря, на произвольную

или самую «сложную» ФАЛ. Тем не менее, во многих случаях он служит основой асимптотически наилучшего метода синтеза СФЭ для ФАЛ из заданного специального класса \mathcal{Q} (см. §1) и позволяет установить для этого класса «стандартную» (см. (4.22)) асимптотику вида

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}{\log |\mathcal{Q}(n)|}. \quad (5.8)$$

Заметим, что асимптотика (5.8) устанавливается, как правило, путем сведения задачи синтеза СФЭ для любой ФАЛ из $\mathcal{Q}(n)$ к задаче синтеза СФЭ для системы из одной или нескольких произвольных ФАЛ от меньшего числа БП. При этом требуется, чтобы двоичный логарифм числа тех систем ФАЛ, к реализации которых сводится реализация ФАЛ из $\mathcal{Q}(n)$, был асимптотически равен $\log |\mathcal{Q}(n)|$, а сложность вспомогательных ФАЛ, обеспечивающих данное сведение, была бы существенно меньше правой части (5.8).

Возьмем в качестве примера введенный в §4 класс ФАЛ \mathcal{Q} , состоящий из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП и докажем, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \lesssim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n},$$

то есть с учетом (4.23) установим для него асимптотику (5.8) вида

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Действительно, разлагая ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ из $\mathcal{Q}(n)$ по БП x_1, x_2 , получим

$$f(x_1, x_2, x') = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2) \in B^2} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} f_{\sigma_1, \sigma_2}(x'), \quad (5.9)$$

где $x' = (x_3, \dots, x_n)$ и $f_{\sigma_1, \sigma_2}(x') = f_{\sigma_1, \sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2, x')$, причем $f_{01} = f_{10}$ в силу симметричности ФАЛ f по БП x_1, x_2 . Искомая СФЭ Σ_f реализует ФАЛ f в соответствии с (5.9) и имеет

вид $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексорная СФЭ порядка 2 от адресных БП x_1, x_2 , а СФЭ Σ' от БП x' реализует асимптотически наилучшим способом ФАЛ $f_{00}, f_{01} = f_{10}$ и f_{11} от БП x' . Легко видеть, что сложность построенной схемы Σ_f асимптотически не больше, чем $\frac{3}{4} \frac{2^n}{n}$.

Отметим в заключение, что в соответствии с (5.5) и следствиями из теорем 4.1, 5.1 сложность $L^C(f)$ для почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, асимптотически равна функции Шеннона $L^C(n)$, то есть сложности самой сложной ФАЛ из $P_2(n)$. Тем самым, в отличие от класса ДНФ (см. §7 главы 1), в классе схем \mathcal{U}^C имеет место т. н. эффект Шеннона — асимптотическое равенство сложности почти всех ФАЛ и сложности самой сложной ФАЛ от заданного числа БП, стремящегося к бесконечности.

Заметим также, что схему $\check{\Sigma}_f$ из замечания к теореме 5.1, сложность которой удовлетворяет (5.7), всегда можно выбрать из класса $\mathcal{U}_{B'_0}^{YC}$ — класса усилительных СФЭ в базисе $B'_0 = \{\vee, \neg\}$ (см. §4 главы 2). Таким образом, из (5.7) следует, что

$$L_{B'_0}^{YC}(n) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{3 \log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (5.10)$$

В силу (4.29) оценка (5.10) является асимптотической оценкой высокой степени точности [12], которая устанавливает поведение функции Шеннона $L_{B'_0}^{YC}(n)$ с точностью до слагаемого вида $O\left(\frac{2^n}{n^2}\right)$ и определяет асимптотику первого остаточного члена ее асимптотического разложения.

§6 Регулярные сдвиговые разбиения единичного куба. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Построенное в §5 для синтеза СФЭ ДУМ G будем использовать и далее (см. §6–§7), хотя прямая реализация представления (5.1) в других классах схем не всегда возможна. Так, при синтезе формул (КС) все ФАЛ (соответственно часть ФАЛ) множества G должны быть «промоделированы» переменными или их отрицаниями. Для реализации такого моделирования в данном параграфе строятся специальные разбиения единичного куба, а затем рассматриваются связанные с ними разложения ФАЛ, на основе которых синтезируются формулы в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, являющиеся асимптотически оптимальными и по сложности, и по глубине для почти всех функций.

Множество δ , $\delta \subseteq B^q$, называется m -регулярным множеством наборов куба B^q , если $m < q$, $|\delta| = 2^m$, и все префиксы¹ длины m наборов из δ различны. Заметим, что m -регулярному множеству δ , $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $\psi(\beta) = \gamma$. Заметим также, что любая ФАЛ g , $g \in P_2(q)$, совпадает на m -регулярном множестве наборов δ , $\delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП x_{m+1}, \dots, x_q . При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q .

Так, строки таблицы, показанной на рис. 5.1, образуют m -регулярное множество $\hat{\delta}$ наборов куба $B^{m+\lambda}$, кото-

¹Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его префиксом (соответственно, суффиксом).

рое соответствует системе ФАЛ \vec{G} . При этом из свойств ДУМ G следует, что любая ФАЛ из $P_2(m + \lambda)$ совпадает на множестве $\widehat{\delta}$ с некоторой монотонной ЭД ранга p от БП $x_{m+1}, \dots, x_{m+\lambda}$.

Для наборов $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ через $\beta \oplus \alpha$ будем обозначать набор вида $(\beta_1 \oplus \alpha_1, \dots, \beta_q \oplus \alpha_q)$. Для множества δ , $\delta \subseteq B^q$, и набора α , $\alpha \in B^q$, определим множество $\delta \oplus \alpha$ как множество различных наборов вида $\beta \oplus \alpha$, где $\beta \in \delta$, то есть множество, получающееся из множества δ сдвигом (параллельным переносом) на набор α . Заметим, что для m -регулярного множества δ , $\delta \subseteq B^q$, и любого набора α , $\alpha \in B^q$, множество $\delta \oplus \alpha$ также является m -регулярным. Если при этом $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$, то есть

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \gamma),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q-m})$, и $\nu(\gamma) = \nu(\alpha)$, а множество наборов δ соответствует системе ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$, то множество наборов $\delta \oplus \alpha$ будет соответствовать системе ФАЛ $(\psi_1 \oplus \gamma_1, \dots, \psi_{q-m} \oplus \gamma_{q-m})$, получающейся из системы ψ инвертированием некоторых ФАЛ.

В частности, из отмеченных выше свойств множества $\widehat{\delta}$, $\widehat{\delta} \subseteq B^{m+\lambda}$, следует, что любая ФАЛ из $P_2(m + \lambda)$ совпадает на любом множестве $\widehat{\delta} \oplus \alpha$, где $\alpha \in B^{m+\lambda}$ и $\nu(\alpha) < 2^\lambda$, с некоторой ЭД ранга p от БП $x_{m+1}, \dots, x_{m+\lambda}$.

Лемма 6.1. *Для любого m -регулярного множества наборов δ , $\delta \subseteq B^q$, система множеств $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$, где $\delta_i = \delta \oplus \alpha$ и $\nu(\alpha) = i - 1$ при всех i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, образует разбиение куба B^q на m -регулярные подмножества.*

Доказательство. Покажем сначала, что Δ — покрытие куба B^q . Для этого возьмем произвольный набор из B^q вида (β, γ) , где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, а по нему найдем в множе-

стве δ набор вида $(\beta, \hat{\gamma})$, который имеется в δ в силу m -регулярности этого множества. Следовательно,

$$(\beta, \gamma) = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \underbrace{(0, \dots, 0)}_m \oplus \hat{\gamma} \oplus \gamma = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \alpha,$$

где $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$. Таким образом, система Δ образует покрытие куба B^m .

С другой стороны, из m -регулярности δ следует m -регулярность любого из множеств δ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{2^{q-m}} |\delta_i| = 2^m 2^{q-m} = 2^q.$$

Следовательно, система Δ образует разбиение куба B^q .

Лемма доказана. \square

В §6–§8 мы будем выбирать параметр m так, что

$$m \leq q \leq n, \quad (6.1)$$

и будем рассматривать разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1, \dots, x_q)$, построенное по лемме 6.1 для некоторого m -регулярного множества наборов $\delta = \delta_1$. При этом для произвольной ФАЛ $f(x)$ из $P_2(n)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, вместо обычного разложения f по БП набора $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ (см. (3.3)) будем рассматривать ее представление в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ &= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \left(\bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') f_{\sigma'',i}(x') \right) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \left(\bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} f_{\sigma'',i}(x') \right), \quad (6.2) \end{aligned}$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ множества δ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ и $f_{\sigma'',i}(x')$ — произвольная ФАЛ, совпадающая на δ_i с ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. Для реализации ФАЛ f в соответствии с (6.2) будем по-прежнему использовать суперпозицию вида $\Sigma''(\Sigma')$, где схема Σ' реализует систему всех ФАЛ $f_{\sigma'',i}$, а схема Σ'' — «внешнюю» часть разложения (6.2).

Теорема 6.1. *Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в U^Φ существует реализующая ее формула \mathcal{F}_f , для которой*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left(1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n} \right), \quad (6.3)$$

$$D(\mathcal{F}_f) \leq n - \log \log n + 8 + o(1). \quad (6.4)$$

Доказательство. Пусть $q = m + \lambda$, а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^\lambda})$ — разбиение куба B^q , полученное по лемме 6.1 для описанного выше множества наборов $\hat{\delta}$. Построим сначала для ФАЛ f на основе (6.2) формулу $\tilde{\mathcal{F}}_f$ с поднятыми отрицаниями, которая имеет вид

$$\tilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_i(x') \hat{\mathcal{F}}_{n-q}(x'', J_{0,i}, \dots, J_{1,i}),$$

где $\hat{\mathcal{F}}_{n-q}(x'', y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$ — неповторная по информационным БП формула из доказательства леммы 2.1, реализующая ФАЛ μ_{n-q} , \mathfrak{A}_i , $i \in [1, 2^\lambda]$, — совершенная ДНФ ФАЛ χ , а ЭД $J_{\sigma'',i}$ ранга p от БП x_{m+1}, \dots, x_q задает ФАЛ $f_{\sigma'',i}$, $\sigma'' \in B^{n-q}$ и $i \in [1, 2^\lambda]$.

Пусть, далее, формула $\hat{\mathcal{F}}_f$ получается из формулы $\tilde{\mathcal{F}}_f$ оптимизацией ее ЭД по числу отрицаний (см. §2 главы 2), то есть заменой каждой ЭД $J_{\sigma'',i}$ вида $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \bar{x}_{j_{t+1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{j_p}$, где $t \leq p$, формулой $\hat{J}_{\sigma'',i}$ вида $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \overline{x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_p}}$.

Заметим, что в формуле $\widehat{\mathcal{F}}_f$ на каждую подформулу $\widehat{J}_{\sigma'',i}$ приходится не более одного ФЭ \neg , а число остальных ФЭ \neg равно половине числа всех остальных вхождений в нее БП. Следовательно, в силу замечания к лемме 2.1 главы 2

$$\begin{aligned} L\left(\widehat{\mathcal{F}}_f\right) &\leq R\left(\widehat{\mathcal{F}}_f\right) + 2^{n-m} + \frac{1}{2}\left(R\left(\widehat{\mathcal{F}}_f\right) - p \cdot 2^{n-m}\right) \leq \\ &\leq p \cdot 2^{n-m} + 2^{n-m} + \frac{3}{2}\left(R\left(\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}\right) - 2^{n-q}\right) 2^\lambda + \frac{3}{2}q \cdot 2^q, \end{aligned}$$

то есть, учитывая (2.4), приходим к неравенству

$$L\left(\widehat{\mathcal{F}}_f\right) \leq p \cdot 2^{n-m} + 4 \cdot 2^{n-m} + \frac{3}{2}\left(\log n \cdot 2^{n-m} + q \cdot 2^q\right). \quad (6.5)$$

Выбирая значения параметров m и s , удовлетворяющие (5.3), так, что

$$m = \lfloor 3 \log \log n \rfloor, \quad s = \lfloor \log n - 2 \log \log n \rfloor - 1,$$

получим следующие оценки остальных параметров

$$p \leq \frac{2^m}{s} + 1, \quad \lambda \leq p 2^s \lesssim \frac{2^{m+s}}{s} \lesssim \frac{n}{2}, \quad q = m + \lambda \lesssim \frac{n}{2},$$

для которых при больших n выполняется неравенство (6.1). Подставляя эти значения и оценки в (6.5), получим неравенство

$$L\left(\widehat{\mathcal{F}}_f\right) \leq \frac{2^n}{\log n - 2 \log \log n} + O\left(\frac{2^n}{\log^2 n}\right), \quad (6.6)$$

из которого для сложности формулы $\widehat{\mathcal{F}}_f$ следует оценка (6.3).

Искомая формула \mathcal{F}_f подобна формуле $\widehat{\mathcal{F}}_f$ и получается из нее с помощью леммы 2.3 из §2 главы 2. При этом из (6.6), учитывая то, что

$$L(\mathcal{F}_f) = L(\widehat{\mathcal{F}}_f) \quad \text{и} \quad \text{Alt}\left(\widehat{\mathcal{F}}_f\right) \leq 8,$$

непосредственно выводятся неравенства (6.3), (6.4).

Теорема доказана. \square

Следствие. Из (6.3), (6.4) с учетом нижних оценок (4.11), (4.13) вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}, \quad D(n) = n - \log \log n \pm O(1).$$

Замечание. Сложность π -схемы Σ_f , моделирующей построенную при доказательстве теоремы формулу $\tilde{\mathcal{F}}_f$ с поднятыми отрицаниями, в силу леммы 5.1 главы 2 и (6.6), удовлетворяет соотношениям

$$L(\Sigma_f) = R(\tilde{\mathcal{F}}_f) = R(\widehat{\mathcal{F}}_f) \leq L(\widehat{\mathcal{F}}_f) + 1 \lesssim \frac{2^n}{\log n},$$

из которых с учетом нижней оценки (4.17) вытекает, что

$$L^\pi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}$$

§7 Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Асимптотика сложности контактных дешифраторов

Заметим сначала, что асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ из §5 без существенных изменений переносится на класс $\mathcal{U}^{\text{КВС}}$ — класс контактно-вентильных схем из §6 главы 2. Действительно, для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, реализующая ее $(1, 1)$ -КВС $\tilde{\Sigma}_f$ так же, как и СФЭ Σ_f из теоремы 5.1, может быть получена на основе разложения (3.3) в результате корректной суперпозиции (см. §6 главы 2) вида $\tilde{\Sigma}_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП x'' , $(1, 2^{n-q})$ -КВС Σ' реализует систему всех ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$. При этом схема Σ' по-прежнему содержит в качестве подсхемы $(1, \lambda)$ -КС Σ_G , реализующую систему ФАЛ \vec{G} на основе леммы 1.2, и реализует каждую ФАЛ $g(x')$ типа $f_{\sigma''}(x')$ на основе ее представления (5.1) в виде дизъюнкции

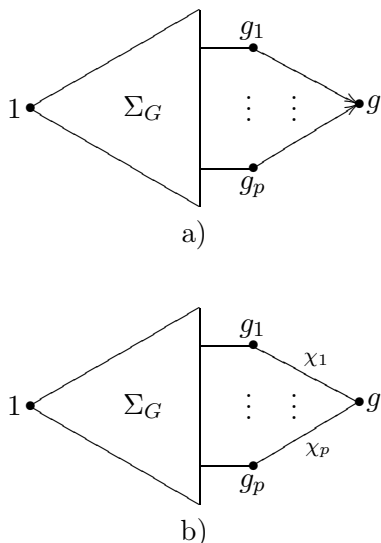


Рис. 7.1: Корректная реализация дизъюнкции ФАЛ g_1, \dots, g_p в классах КВС и ИКС

$g = g_1 \vee \dots \vee g_p$ с помощью присоединения входов вентилярной звезды порядка p к соответствующим выходам КС Σ_G (см. рис. 7.1а, а также рис. 6.1с из главы 2), которое является корректной суперпозицией. Сложность построенной КВС $\tilde{\Sigma}_f$ при тех же значениях параметров, что и в теореме 5.1, будет удовлетворять неравенству (5.5) и поэтому в силу нижней оценки (4.20) справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.1. Для функции Шеннона $L^{\text{КВС}}(n)$ имеет место асимптотическое равенство

$$L^{\text{КВС}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Напомним (см. §5), что в представлении (5.1) ФАЛ g_1, \dots, g_p берутся из множеств $G^{(1)}, \dots, G^{(p)}$ соответственно и что для всех i , $i \in [1, p]$, $g_i = g \cdot \chi_i = g_i \cdot \chi_i$, где χ_i , $\chi_i \in G^{(i)}$, — характеристическая ФАЛ компоненты π_i разбиения $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ куба B^m (см. рис. 7.2a). Учитывая эти особенности ФАЛ g_1, \dots, g_p , их дизъюнкцию g можно реализовать на основе эквивалентного (5.1) представления

$$g = \chi_1 \cdot g_1 \vee \dots \vee \chi_p \cdot g_p \quad (7.1)$$

с помощью корректной суперпозиции ИКС (см. §7 главы 2), показанной на рис. 7.1b. Асимптотически наилучший метод синтеза КС связан с «моделированием» этой суперпозиции и представления (7.1) на компонентах подходящего m -регулярного разбиения куба B^{m+p} .

Пусть $\check{\delta}$ — m -регулярное множество наборов куба B^{m+p} , соответствующее системе ФАЛ $\vec{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_p)$ (см. рис. 7.2a), а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2p})$ — построенное для него по лемме 6.1 разбиение куба B^{m+p} . Заметим, что любая ФАЛ g , $g \in P_2(m+p)$, на любой компоненте этого разбиения вида $\check{\delta} \oplus \alpha$, где

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+p}),$$

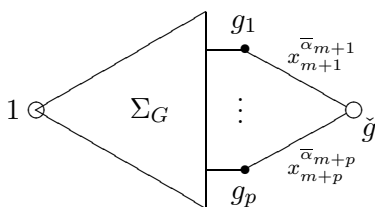
совпадает с ФАЛ

$$\check{g} = x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \dots \vee x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}} \cdot g_p, \quad (7.2)$$

где $g_i = g\chi_i \in G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$. При этом ФАЛ \check{g} может быть реализована в результате операции присоединения звезды из контактов вида $x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}}, \dots, x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}}$ к выходам $(1, \lambda)$ -КС Σ_G , реализующей систему ФАЛ \vec{G} , так, как это показано на рис. 7.2b. Заметим также, что указанная операция суперпозиции является корректной на множестве наборов $\check{\delta} \oplus \alpha$ в силу разделительности присоединяемой $(p, 1)$ -КС на этом множестве.

	$x_1 \cdots x_{m-1} x_m$	χ_1	χ_2	\cdots	χ_p
π_1	$0 \cdots 0 \ 0$	1	0		0
	$0 \cdots 0 \ 1$	1	0	\cdots	0
	\cdots	\vdots	\vdots		\vdots
	\cdots	1	0		0
π_2	\cdots	0	1		0
	\cdots	0	1	\cdots	0
	\cdots	\vdots	\vdots		\vdots
	\cdots	0	1		0
	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
π_p	\cdots	0	0		1
	\cdots	0	0	\cdots	1
	\cdots	\vdots	\vdots		\vdots
	$1 \cdots 1 \ 1$	0	0		1

a)



b)

Рис. 7.2: m -регулярное множество $\check{\delta}$ и связанная с ним суперпозиция КС

Теорема 7.1. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (7.3)$$

Доказательство. Пусть $q = m + p$, а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^p})$ — описанное выше разбиение куба B^q , для которого представление (6.2) ФАЛ f имеет вид

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^p} \chi_i(x') \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} g_{\sigma'', i}(x'), \quad (7.4)$$

где в качестве ФАЛ $f_{\sigma'', i}$ из разложения (6.2) при всех $\sigma'', \sigma'' \in B^{n-q}$, и $i, i \in [1, 2^p]$, берется ФАЛ $\check{g}_{\sigma'', i}$ вида (7.2), совпадающая с ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ на компоненте $\delta_i = \check{\delta} \oplus \alpha$.

Пусть Σ_G — $(1, \lambda)$ -КС, которая реализует систему ФАЛ \vec{G} по их совершенным ДНФ на основе контактного дерева (см. лемму 1.2 и оценку (1.4)). Для каждого $i, i = 1, \dots, 2^p$, построим $(1, 2^{n-q})$ -КС Σ'_i (см. рис. 7.3а), которая содержит КС Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $\check{g}_{\sigma'', i}$ вида (7.2) с помощью корректной на множестве наборов δ_i суперпозиции, показанной на рисунке 7.2б. Пусть, далее $(1, 2^{n-m})$ -КС Σ' получается в результате отождествления входов у построенных выше КС $\Sigma'_i, i \in [1, 2^p]$, и реализует систему из всех ФАЛ вида $\check{g}_{\sigma'', i}$, где $\sigma'' \in B^{n-q}, i \in [1, 2^p]$. Заметим, что при этом выполняются неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_G) &\leq \lambda 2^{m+1}, \\ L(\Sigma'_i) &\leq L(\Sigma_G) + p 2^{n-q}, \\ L(\Sigma') &\leq p 2^{n-m} + \lambda 2^{q+1}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Построим, наконец, разделительную по входам $(2^{n-m}, 1)$ -КС Σ'' , которая реализует столбец из всех

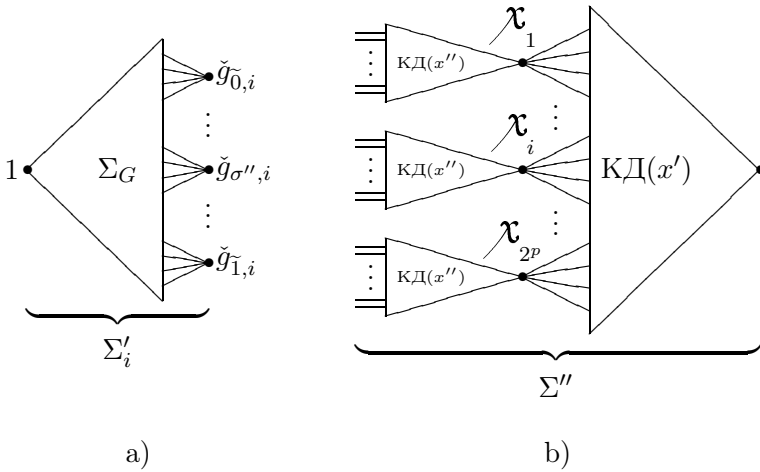


Рис. 7.3: к доказательству теоремы 7.1

ФАЛ вида $\chi_i(x') \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $i \in [1, 2^p]$ и $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n) \in B^{n-q}$. Эта КС получается в результате объединения 2^p схем типа $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП x'' к выходам которых присоединены входы $(2^p, 1)$ -КС, реализующей столбец из ФАЛ χ_i , $i \in [1, 2^p]$, и получающейся из $(2^q, 1)$ -КД от БП x' в результате соответствующего отождествления входов (см. рис. 7.3b). Легко видеть, что при этом

$$L(\Sigma'') \leq 2^{q+1} + 2^{n-m+1} \quad (7.6)$$

Искомая КС Σ_f является результатом корректной стыковки вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, полученной в результате присоединения входов КС Σ'' к выходам КС Σ' в соответствии с представлением (7.4), сложность которой в силу (7.5)–(7.6) удовлетворяет неравенству

$$L(\Sigma_f) \leq (p+2)2^{n-m} + (\lambda+1)2^{q+1}.$$

Из этого неравенства при $q = m + p$ и

$$m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor, \quad s = \lceil n - 2\sqrt{n} \rceil,$$

при которых выполнены условия (5.3) и (6.1), в силу (5.2) и (5.4) вытекает неравенство (7.3) для сложности Σ_f , так как

$$\begin{aligned} (p+2)2^{n-m} &\leq \frac{2^n}{s} + 3 \cdot 2^{n-m} = \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right), \\ (\lambda+1)2^{q+1} &\leq p2^s \cdot 2^{m+p+2} \leq \frac{2^{2m+s+p+3}}{s} \leq \\ &\leq \frac{32}{s} 2^{n-\sqrt{n}+3\log n} = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Следствие. Из (7.3) с учетом нижней оценки (4.12) вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание 1. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda+1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа. Для этого достаточно контакты всех звезд, показанных на рис. 7.2b, перераспределить в звезды из однотипных контактов, «центрами» которых являются выходы подсхем Σ_G схем Σ'_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, а любой из остальных контактов КС Σ_f считать отдельной звездой.

Замечание 2. При построении КС $\vec{\Sigma}_f$, $\vec{\Sigma}_f \in \mathcal{U}^{\vec{K}}$, которая реализует ФАЛ f указанным выше способом, вместо звезды, показанной на рис. 7.2b, необходимо использовать звезду из соответствующих ориентированных контактов вида $x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}, \dots, x_{m+p}^{\alpha_{m+p}}$, которая является разделительной $(p, 1)$ -ИКС и обеспечивает корректность всех операций суперпозиции с ее участием. Следовательно, используя для всех КС Σ'_i одну и ту же подсхему Σ_G , при

$$m = \lfloor 2 \log n \rfloor - 1, \quad s = \lceil n - 5 \log n \rceil$$

получим неравенство

$$L(\vec{\Sigma}_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right), \quad (7.7)$$

из которого, с учетом нижней оценки (4.18) вытекает, в частности, что

$$L^{\vec{K}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Воспользуемся, в заключение, конструкцией теоремы 7.1, для построения асимптотики оптимальных по сложности контактных дешифраторов.

Лемма 7.2. *Для системы ФАЛ Q_n при $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство*

$$L^K(Q_n) \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right) \quad (7.8)$$

Доказательство. Заметим сначала, что если при построении КС Σ_f в доказательстве теоремы 7.1 к входам КС Σ'' присоединить выходы всех звезд, входящих в КС Σ' и показанных на рис. 7.2b, не используя при этом КС Σ_G , то мы получим $(p2^{n-m}, 1)$ -КС $\vec{\Sigma}''$ вида

$\check{\Sigma}'' = \check{\Sigma}''(x_1, \dots, x_n; a_0, \dots, a_{p2^{n-m-1}}; a)$ (см. рис. 7.4), которая реализует столбец из всех ФАЛ вида $\chi_i(x') \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot \chi_j(x_1, \dots, x_m)$, где $i \in [1, 2^p]$, $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n) \in B^{n-q}$, $j \in [1, p]$. Заметим также, что при $s = 1$ эта система ФАЛ совпадает с системой ФАЛ Q_n и обозначим через $\Sigma_n^{(\&)}$ ту КС, которая при

$$s = 1, \quad m = \lfloor \log(n - 3 \log n) \rfloor$$

получается из соответствующей КС $\check{\Sigma}''$ в результате объявления всех ее входов — выходами, а выхода — входом, то есть $\Sigma_n^{(\&)} = \check{\Sigma}''(x_1, \dots, x_n; a; a_0, \dots, a_{p2^{n-m-1}})$. Так как при этом

$$\begin{aligned} p = 2^m \leq n - 3 \log n, \quad q = m + p \leq n - 2 \log n, \\ 2^m \geq \frac{n - 3 \log n}{2}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

то сложность построенной $(1, 2^n)$ -КС $\Sigma_n^{(\&)}$, являющейся контактным дешифратором порядка n , удовлетворяет в силу (7.6) неравенствам:

$$L\left(\Sigma_n^{(\&)}\right) \leq p2^{n-m} + 2^{n-m+1} + 2^{q+1} \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

из которых вытекает неравенство (7.8).

Лемма доказана. □

Следствие. *Оценки леммы 7.2 и следствия из леммы 2.3 дают асимптотическое равенство*

$$L^K(Q_n) \sim 2^n$$

Лемма 7.3. *Для системы ФАЛ J_n при $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство*

$$L^K(J_n) \leq 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right). \tag{7.10}$$

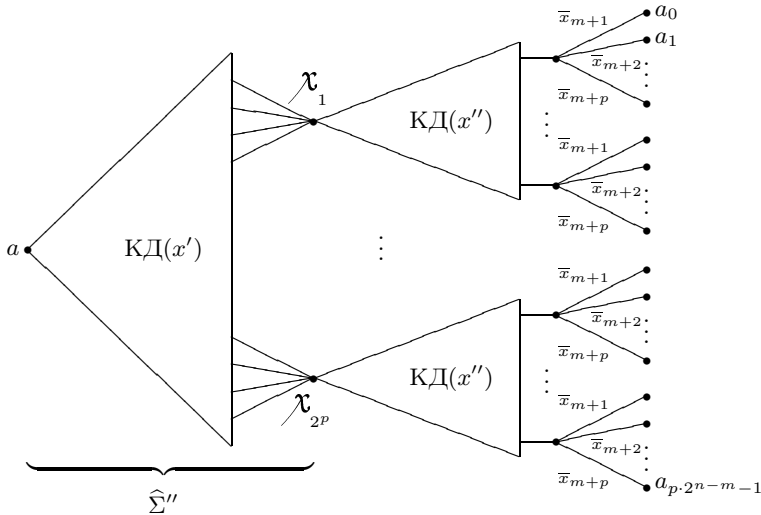


Рис. 7.4: к доказательству леммы 7.2

Доказательство. Выделим в КС $\Sigma_n^{(\&)}$ из леммы 7.2 под-схему $\widehat{\Sigma}''$ (см. рис. 7.4), которая является разделитель-ной по входам $(1, 2^p)$ -КС и реализует систему ФАЛ $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_{2^p})$. Так как никакие две ФАЛ системы χ не обра-щаются в единицу на одном и том же наборе значений БП x' , то построенная для нее по методу каскадов (см. §3) $(1, 2^p)$ -КС $\widetilde{\Sigma}''$ тоже разделительна по выходам. Следова-тельно, КС $\widetilde{\Sigma}_n^{(\&)}$, которая получается из КС $\Sigma_n^{(\&)}$ в результате замены ее подсхемы $\widehat{\Sigma}''$ схемой $\widetilde{\Sigma}''$ по прежнему реализует систему ФАЛ Q_n , а ее сложность по прежнему оценивается сверху правой частью (7.8), так как

$$L(\widetilde{\Sigma}'') \leq q2^q$$

и поэтому, с учетом (7.9), сложность КС $\widetilde{\Sigma}_n^{(\&)}$ удовлетворяет

неравенству

$$L\left(\tilde{\Sigma}_n^{(\&)}\right) \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right) \quad (7.11)$$

Заметим, что КС $\Sigma_n^{(\&)}$ является каскадной КС, а ее дополнение $\Sigma_n^{(\vee)}$ (см. §7 главы 2) реализует систему ФАЛ J_n со сложностью, которая в силу (7.11) и неравенства (7.1) главы 2 оценивается сверху правой частью неравенства (7.10).

Лемма доказана. \square

Следствие. *Оценки леммы 7.3 и следствия из леммы 2.6 дают асимптотическое равенство*

$$L^K(J_n) \sim 2^{n+1}.$$

§8 Асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов и формул в произвольном базисе, итеративных контактных схем и BDD

Обобщим понятие ДУМ ФАЛ следующим образом. Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_p)$ — существенная ФАЛ, то есть ФАЛ, существенно зависящая от всех своих БП. Множество ФАЛ G , $G \in P_2(m)$, называется φ -универсальным множеством (φ -УМ) порядка m , если любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = \varphi(g_1, \dots, g_p), \quad (8.1)$$

где $g_i \in G$ при всех i , $i = 1, \dots, p$. Заметим, что в случае $\varphi(y_1, \dots, y_p) = y_1 \vee \dots \vee y_p$ понятие φ -УМ совпадает с введенным в §5 понятие ДУМ ранга p . Так же, как и в §5, будем строить φ -УМ порядка m на основе разбиения $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ единичного куба B^m . Для каждого i , $i = 1, \dots, p$, в силу существенной зависимости ФАЛ φ от

БП y_i найдется набор двоичных констант $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p}$ такой, что

$$\varphi(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1}, y_i, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}. \quad (8.2)$$

Обозначим через $G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, множество всех тех ФАЛ из $P_2(m)$, которые при любом j , $1 \leq j \leq p$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_j , и пусть

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что равенство (8.1) имеет место для любой функции g , $g \in P_2(m)$, если g_i , $i = 1, \dots, p$, — ФАЛ из $G^{(i)}$, совпадающая на δ_i с ФАЛ $g \oplus \alpha_{i,i}$. Действительно, для любого i , $i = 1, \dots, p$, и любого набора α , $\alpha \in \delta_i$, в силу (8.2) получим:

$$\begin{aligned} \varphi(g_1(\alpha), \dots, g_p(\alpha)) &= \\ &= \varphi(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1}, g(\alpha) \oplus \alpha_{i,i}, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,p}) = g(\alpha). \end{aligned}$$

Следовательно, множество G является φ -УМ порядка m .

Найдем среди ФЭ базиса Б, $B = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$, элемент \mathcal{E}_j , на котором достигается приведенный вес $\rho_j = \rho_B$ (см. §4 главы 2), то есть

$$\rho_j = \frac{\mathcal{L}_j}{k_j - 1} = \min_{k_i \geq 2} \rho_i = \rho_B. \quad (8.3)$$

Пусть, далее, m, s, t, p — натуральные числа, такие, что

$$p = t(k_j - 1) + 1, \quad (8.4)$$

$$k_j \leq \frac{2^m}{s} \leq p < \frac{2^m}{s} + (k_j - 1), \quad (8.5)$$

а $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ — такое разбиение куба B^m на последовательные отрезки (см. §5), что

$$|\pi_i| = s_i \leq s \quad (8.6)$$

для всех i , $i = 1, \dots, p$ (ср. с (5.4)). Рассмотрим неповторную формулу \mathcal{F} , построенную из t ФЭ \mathcal{E}_j , которая с учетом (8.4) и в соответствии с леммой 4.1 главы 2 имеет p входов и реализует существенную ФАЛ $\varphi(y_1, \dots, y_p)$. Построим φ -УМ G порядка m на основе разбиения Π . Пусть $\vec{G} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_\lambda)$ — система, состоящая из всех различных ФАЛ множества G , для которой в силу (8.6) по-прежнему выполняется неравенство (см. §5)

$$\lambda \leq p2^s. \quad (8.7)$$

Теорема 8.1. *Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ Σ_f , $\Sigma_f \in \mathcal{U}_B^C$, такая, что*

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leq \rho_B \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{4 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (8.8)$$

Доказательство. Искомая СФЭ Σ_f строится аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 5.1, с той лишь разницей, что:

1. G — указанное выше φ -УМ порядка m от БП x' ;
2. в схемах Σ'' и Σ_G вместо ФЭ $\&$, \vee , \neg используются моделирующие их СФЭ из \mathcal{U}_B^C (см. §3 главы 3);
3. схема Σ' реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ на выходе формулы \mathcal{F} , входы которой присоединены к выходам схемы Σ_G в соответствии с представлением

$$f_{\sigma''}(x') = \varphi(g_{\sigma'',1}, \dots, g_{\sigma'',p}) \quad (8.9)$$

(см. (8.1)), где $g_{\sigma'',i} \in G$ при всех i , $i = 1, \dots, p$.

Сложность построенной СФЭ Σ_f с учетом (8.7) и по аналогии с (5.7) будет удовлетворять неравенству

$$\mathcal{L}(\Sigma_f) \leq \mathcal{L}_j t 2^{n-m} + O(2^{n-m} + p2^{s+m}), \quad (8.10)$$

из которого при тех же значениях параметров s, t , что и в §5, в силу (8.3)–(8.5) следует (8.8).

Теорема доказана. \square

Следствие 1. Из (8.8) и (4.25) вытекает асимптотическое равенство

$$\mathcal{L}_B^C(n) \sim \rho_B \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 2. Для класса схем \mathcal{U}_B^C с функционалом размера \mathcal{L} имеет место эффект Шеннона (см. §5).

Лемма 8.1. Если $q = t + ar$, и t -регулярное множество наборов δ , $\delta \in B^q$, соответствует системе ФАЛ

$$\left(\underbrace{\psi, \dots, \psi}_a \right),$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in P_2^r(q)$, то число тех компонент разбиения Δ , построенного для множества δ по лемме 6.1, на которых каждая ФАЛ системы ψ совпадает с некоторой БП куба B^q , не меньше, чем

$$\left(1 - \frac{r}{2^a}\right) 2^{q-m}.$$

Доказательство. Заметим, что для любого фиксированного j , $1 \leq j \leq r$, доля тех компонент δ_i , $1 \leq i \leq 2^{q-m}$, разбиения Δ , на которых ФАЛ ψ_j не совпадает ни с одной из БП куба B^q , не больше, чем $\frac{1}{2^a}$. Следовательно, доля тех компонент разбиения Δ , на которых хотя бы одна из ФАЛ системы ψ не совпадает ни с одной из БП куба B^q , не больше, чем $\frac{r}{2^a}$.

Лемма доказана. \square

Теорема 8.2. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}_B^\Phi$, такая, что

$$\mathcal{L}(n) \leq \rho_B \frac{2^n}{\log n} \left(1 + \frac{3 \log \log n + O(1)}{\log n} \right). \quad (8.11)$$

Доказательство. Искомая формула \mathcal{F}_f строится аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 6.1, с той лишь разницей, что:

1. разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^q-m})$ куба B^q , где $q = m + \lambda a$, выбирается для указанной выше системы ФАЛ \vec{G} на основе леммы 8.1;
2. каждая ФАЛ $f_{\sigma'', i}(x')$, где $\sigma'' \in B^{n-q}$ и $i = 1, 2, \dots, 2^{q-m}$, представляет собой ФАЛ вида $\varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p})$, где $m+1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq q$, если на компоненте δ_i любая ФАЛ из \vec{G} совпадает с некоторой БП (см. лемму 8.1), и ФАЛ вида $\varphi(x_{j_1}^{\sigma''}, \dots, x_{j_p}^{\sigma''})$ в остальных случаях;
3. вместо ФЭ $\&, \vee, \neg$ используются моделирующие их квазибесповторные формулы базиса B (см. §3 главы 3)), а каждая ФАЛ φ реализуется с помощью построенной выше формулы \mathcal{F} .

Сложность полученной таким образом формулы \mathcal{F}_f с учетом леммы 8.1 и по аналогии с (6.5) будет удовлетворять неравенству

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \mathcal{L}_j t 2^{n-m} + O \left(2^{n-m} \left(\log n + \frac{t\lambda}{2a} \right) + q2^q \right),$$

из которого в силу (8.3)–(8.7) вытекает (8.11) при следующих значениях параметров

$$m = \lfloor 3 \log \log n \rfloor, \quad s = \lfloor \log n - 3 \log \log n \rfloor - 1, \quad a = \lceil \log n \rceil,$$

удовлетворяющих (6.1) и (8.5) при достаточно больших n .

Теорема доказана. \square

Следствие 1. Из (8.11) и (4.26) вытекает асимптотическое равенство

$$L_{\mathbb{B}}^{\Phi}(n) \sim \rho_{\mathbb{B}} \frac{2^n}{\log n}.$$

Следствие 2. Для класса формул $\mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\Phi}$ с функционалом размера \mathcal{L} имеет место эффект Шеннона.

Рассмотрим теперь асимптотические наилучшие методы синтеза ИКС и BDD.

Теорема 8.3. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$ существует реализующая ее ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ такая, что

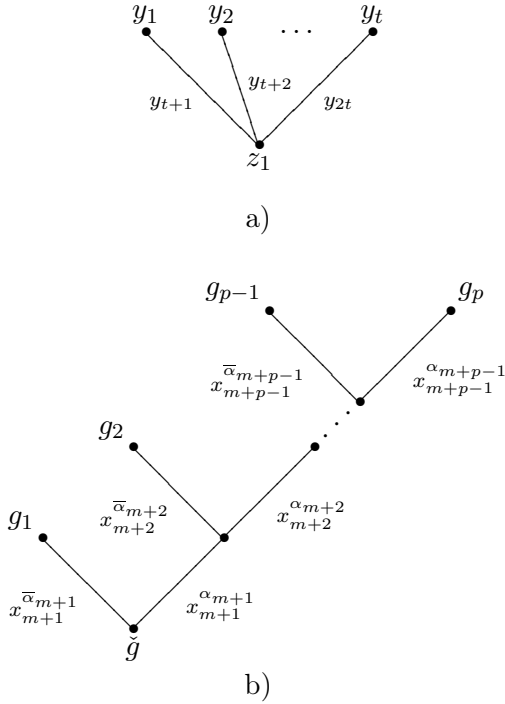
$$L(\widehat{\Sigma}_f) \leq \frac{2^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{4 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (8.12)$$

Доказательство. Пусть, как это уже было в теореме 5.1 или теореме 8.1, $m = q$, $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ для всех σ'' из B^{n-q} . При построении ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ в качестве основного «макроэлемента» аналогичного формуле \mathcal{F} из теорем 8.1, 8.2 будем использовать $(t, 1)$ -ПКС $\widehat{\Sigma}$, показанную на рис. 8.1а, которая реализует ФАЛ φ от БП y_1, \dots, y_p , где $p = 2t$, такую, что

$$\varphi(y_1, \dots, y_p) = y_1 y_{t+1} \vee \dots \vee y_t y_{2t}.$$

Заметим, что константы $\alpha_{i,j}$, где $1 \leq i, j \leq p$, удовлетворяют при этом (8.2), если $\alpha_{i,j} = 1$ тогда и только тогда, когда $|j - i| = t$. Построим для данного набора констант φ -УМ $G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$ так, как это описано выше, предполагая, что параметры $p = 2t$ и s удовлетворяют (8.5)–(8.7) при $k_j = 2$ и $\lambda = |G|$.

Искомая ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ получается по аналогии с КВС $\widetilde{\Sigma}_f$ из леммы 7.1 и СФЭ Σ_f из теоремы 8.1 в результате суперпозиции вида $\widehat{\Sigma}_f = \Sigma''(\Sigma')$, где:

Рис. 8.1: ИКС $\widehat{\Sigma}$ и ККС $\check{\Sigma}$

1. ИКС Σ' содержит в качестве подсхемы $(1, \lambda)$ -КС Σ_G , реализующую все ФАЛ системы \vec{G} на основе их совершенных ДНФ и КД от БП x' ;
2. ИКС Σ' реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов, который является выходом ПКС $\widehat{\Sigma}$, присоединенной входами y_1, \dots, y_t и управляющими БП y_{t+1}, \dots, y_p к выходам Σ_G в соответствии с (8.9);
3. входы $(2^{n-q}, 1)$ -КД Σ'' от БП x'' присоединяются к выходам Σ' в соответствии с (3.3).

Заметим, что корректность всех операций суперпозиции на втором этапе построения ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ обеспечивается отсутствием в любой присоединяемой на нем ПКС вида $\widehat{\Sigma}$ двух проводящих на каком-либо наборе α' , $\alpha' \in B^{n-q}$, контактов, так как $g_i(\alpha') \cdot g_k(\alpha') = 0$, если $g_i \in G^{(i)}$, $g_k \in G^{(k)}$ и $t < i \leq k \leq p$. Корректность присоединения КД Σ'' на третьем этапе построения ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ обусловлена его раздельностью. Заметим также, что при $k_j = 2$ и $\mathcal{L}_j = 1$ сложность ИКС $\widehat{\Sigma}_f$ удовлетворяет неравенству (8.10), из которого при тех же значениях параметров s и $m = q$, что и в §5, аналогично теореме 8.1 (см. (8.5)-(8.7)) вытекает (8.12).

Теорема доказана. \square

Следствие 1. Из (8.12) и (4.24) вытекает асимптотическое равенство

$$L^{\text{ИКС}}(n) \sim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Следствие 2. Для класса схем $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}$ с функционалом сложности L имеет место эффект Шеннона.

Теорема 8.4. Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее BDD $\check{\Sigma}_f$ такая, что

$$\mathcal{L}(\check{\Sigma}_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right) \quad (8.13)$$

Доказательство. Достаточно построить полную $(2, 1)$ -ККС $\check{\Sigma}_f$ (см. §7 главы 2), которая реализует столбец из ФАЛ \bar{f} , f , со сложностью $L(\check{\Sigma}_f)$, не превосходящей удвоенной правой части (8.13). Эта ККС строится аналогично тому, как строилась при доказательстве теоремы 7.1 КС Σ_f , с той лишь разницей, что:

1. вместо $(1, \lambda)$ -КС Σ_G используется полная $(2, \lambda)$ -ККС $\check{\Sigma}_G$, построенная по методу каскадов и реализующая матрицу, вторая строка которой равна строке \vec{G} , а первая — отрицанию \vec{G} (см. §7 главы 2);
2. вместо присоединения $(p, 1)$ -контактной звезды, показанного на рис. 7.2b, присоединяется эквивалентная ей на множестве наборов $\check{\delta} \oplus \alpha$ полная $(p, 1)$ -ККС $\check{\Sigma}$ так, как это показано на рис. 8.1b;
3. в силу разделительности ККС $\check{\Sigma}$ по входам, обеспечивающей корректность ее присоединения, одна и та же ККС $\check{\Sigma}_G$ используется для всех компонент разбиения Δ (см. замечание 2 к теореме 7.1);
4. параметры конструкции выбираются также, как при построении КС $\vec{\Sigma}_f$ в замечании 2 к теореме 7.1.

Полученная КС $\check{\Sigma}_f$ является, очевидно, полной $(2, 1)$ -ККС, реализующей столбец из ФАЛ \bar{f} , f , а размер связанной с ней BDD (см. §7 главы 2) в силу (7.7) и с учетом того, что $L(\check{\Sigma}_f) \leq 2L(\vec{\Sigma}_f)$, удовлетворяет (8.13).

Теорема доказана. □

Следствие 1. Из (8.13) и (4.19) вытекает асимптотическое равенство

$$\mathcal{L}^{\text{BDD}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 2. Для класса \mathcal{U}^{BDD} с функционалом размера \mathcal{L} имеет место эффект Шеннона.

Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном n -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Сб. «Дискретный анализ». Вып. 3. Новосибирск, 1964. С. 41–77.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // В сб. «Проблемы кибернетики». Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.

- [17] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.
- [18] *Нечипорук Э. И.*
- [19] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [20] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [21] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [22] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2001.
- [23] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [24] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1963.
- [25] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [26] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [27] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [28] *Яблонский С. В.* Эквивалентные преобразования управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1986.

-
- [29] *Cardot C.* Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [30] *Shannon C. E.* The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [31] *Wegener I.* Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.