

Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

# ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

(вариант 2011 г., глава 3)

Москва 2011

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>3 Синтез и сложность управляющих систем</b>	<b>7</b>
§1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и связанные с ними верхние оценки сложности функций. . . . .	7
§2 Некоторые нижние оценки сложности ФАЛ. Нижние мощностные оценки функций Шеннона. . . . .	14
§3 Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов. Метод Шеннона . . . . .	21
§4 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ . . . . .	28
§5 Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически оптимальный метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ , поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ. . . . .	33
§6 Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем . . . . .	38

<i>ОГЛАВЛЕНИЕ</i>	<b>3</b>
§7 Синтез схем для ФАЛ из специальных классов. Оценки сложности индивидуальных ФАЛ, минимальность некоторых схем. . . . .	<b>45</b>
<b>Литература</b>	<b>56</b>

## Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех студентов, обучающихся по специальности 01.02 — прикладная математика и информатика, а также бакалавров одноименного направления 510200 и направления 010400 — информационные технологии. При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от специализации и направления.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как инди-

видуальная задача, и тогда ее решением является конкретное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно попытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно попытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представ-

ления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

Во второй главе изучаются также эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывается полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

В четвертой главе представлены некоторые вопросы надежности и контроля схем (построение тестов для таблиц, синтез самокорректирующихся контактных схем).

## Глава 3

### Синтез и сложность управляющих систем

#### §1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и связанные с ними верхние оценки сложности функций.

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ  $F$  можно реализовать некоторой его схемой  $\Sigma$ , а  $\Psi$  — какой-либо функционал сложности схем класса  $\mathcal{U}$ , то есть отображение  $\mathcal{U}$  во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности  $\Psi$  обладает свойством *монотонности*, то есть  $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$ , если  $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$ , и  $\Sigma'$  получается из  $\Sigma$  в результате удаления вершин или ребер (ср.с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность  $\Psi(F)$  системы ФАЛ  $F$  относительно

### 8 ГЛАВА 3. СИНТЕЗ И СЛОЖНОСТЬ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

функционала  $\Psi$  в классе  $\mathcal{U}$  как минимальное значение величины  $\Psi(\Sigma)$  на множестве тех схем  $\Sigma$  из  $\mathcal{U}$ , которые реализуют  $F$ . При этом схема  $\Sigma$ , принадлежащая классу  $\mathcal{U}$ , которая реализует  $F$  и для которой  $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$ , называется *минимальной схемой* в классе  $\mathcal{U}$  относительно функционала  $\Psi$ . В силу монотонности функционала  $\Psi$ , минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину  $\Psi(F)$ , в том случае когда функционал  $\Psi$  совпадает с введенным в главе 2 функционалом  $L(D, R, \text{ и т. д.})$ , будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной, рангом, и т. д.*) *системы ФАЛ  $F$* . Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса  $\mathcal{U}$  относительно функционала сложности  $\Psi$* . В дальнейшем сложность системы ФАЛ  $F$  относительно функционала  $\Psi$  для любого из введенных классов вида  $\mathcal{U}_B^A$  (вида  $\mathcal{U}^A$ ) будем обозначать через  $\Psi_B^A(F)$  (соответственно  $\Psi^A(F)$ ), а функцию Шеннона для этого класса относительно  $\Psi$  — через  $\Psi_B^A(n)$  (соответственно  $\Psi^A(n)$ ). В обозначениях классов  $\mathcal{U}_B^C$ ,  $\mathcal{U}_B^\Phi$ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс  $B$  вида  $B_0$  будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей  $\Psi'(F)$  и  $\Psi''(F)$  системы ФАЛ  $F$  относительно функционала  $\Psi$  в классах схем  $\mathcal{U}'$  и  $\mathcal{U}''$  соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если  $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$ . В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F)$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют  $\pi$ -схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Заметим, что для сложности  $L(F)$  системы ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f_i).$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** *Для любой функции алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f \neq 0$ , существуют формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , и  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$ , которые реализуют  $f$  и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|. \quad (1.1)$$

**Следствие 1.** *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать  $\pi$ -схемой сложности 2, а также формулой из  $\mathcal{U}^\Phi$ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} L^C(n) &\leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1, \\ L^K(n) &\leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

**Следствие 2.** В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

**Лемма 1.2.** Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$  и  $f \neq 0$ , существуют  $\pi$ -схема  $\Sigma_f$  и формула  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$ , которые реализуют  $f$  и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

*Доказательство.* В качестве  $\Sigma_f$  можно взять  $\pi$ -схему, которая получается из  $(1, 2^n)$ -КД порядка  $n$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  (см. рис. 6.4а из §6 главы 2) в результате снятия тех его выходов, где реализуются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ  $f$ , отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула  $\mathcal{F}_f$  получается в результате моделирования построенной  $\pi$ -схемы  $\Sigma_f$  в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §2 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \quad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где  $L^-(\Sigma_f)$  — число размыкающих контактов в схеме  $\Sigma$ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка  $n$  равно  $2^n - 1$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (1.2)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (1.3)$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина  $w$  СФЭ  $\Sigma$  не достижима из ее вершины  $v$ , а СФЭ  $\Sigma'$  получается из СФЭ  $\Sigma$  в результате удаления вершины  $v$ , объявления вершины  $w$  начальной вершиной всех исходивших из  $v$  дуг и переноса в вершину  $w$  всех выходных БП, приписанных вершине  $v$ . Тогда СФЭ  $\Sigma'$  считается результатом применения к СФЭ  $\Sigma$  операции присоединения вершины  $v$  к вершине  $w$ . Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ  $\Sigma$  операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ  $\Sigma'$ , которая, очевидно, эквивалентна  $\Sigma$ .

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ  $G$ ,  $G \subseteq P_2(n)$ , через  $\vec{G}$  будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества  $G$ , упорядоченных в соответствии с номерами их столб-

### 12 ГЛАВА 3. СИНТЕЗ И СЛОЖНОСТЬ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

цов значений. При этом систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$  будем называть *универсальной системой* порядка  $n$ .

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка  $n$ , то есть ФАЛ  $\ell_n$  или ФАЛ  $\bar{\ell}_n$ ;
2. мультиплексорной ФАЛ  $\mu_n$  порядка  $n$ ;
3. дешифратора  $\vec{Q}_n$  (дизъюнктивного дешифратора  $\vec{J}_n$ ) порядка  $n$ ;
4. универсальной системы  $\vec{P}_2(n)$  порядка  $n$ .

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для указанных ФАЛ и систем ФАЛ. Будем, как обычно, называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

**Лемма 1.3.** *Для каждого натурального  $n$  в  $\mathcal{U}_B^C$  существует универсальная СФЭ  $U_n$  порядка  $n$ , сложность которой равна  $2^{2^n} - n$ .*

*Доказательство.* В силу полноты базиса, в  $\mathcal{U}_B^C$  существует система формул  $\Sigma$  от БП  $x_1, \dots, x_n$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{P}_2(n)$ . Искомая СФЭ  $U_n$  является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна  $\Sigma$  и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §4 главы 2). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ  $U_n$ , включая  $n$  ее входов, равно  $2^{2^n}$  и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана. □

**Следствие.**

$$L_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

**Лемма 1.4.** Для любого натурального  $n$  выполняются неравенства:

$$L^{\mathbb{C}}(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^{\mathbb{K}}(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2; \quad (1.4)$$

$$L^{\mathbb{C}}(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^{\mathbb{K}}(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 4; \quad (1.5)$$

$$L^{\pi}(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^{\Phi}(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3; \quad (1.6)$$

$$L^{\mathbb{C}}(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^{\mathbb{C}}(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (1.7)$$

*Доказательство.* В классе  $\mathcal{U}^{\mathbb{C}}$  построим схемный дешифратор порядка  $n$ , удовлетворяющий первому неравенству (1.4), следующим образом:

1. разобьем набор БП  $X(n)$  на группы  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ , где  $q = \lceil n/2 \rceil$ ;
2. возьмем дешифраторы  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  от БП  $x'$  и  $x''$  порядка  $q$  и  $(n - q)$  соответственно, реализующие каждую свою систему ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ , после чего конъюнктурируем каждый выход  $\Sigma'$  с каждым выходом  $\Sigma''$ , а выходы всех использованных для этого  $2^n$  ФЭ  $\&$  (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Аналогично строится дизъюнктивный дешифратор порядка  $n$  в классе  $\mathcal{U}^{\mathbb{C}}$ , удовлетворяющий (1.5).

Искомый контактным (каскадным) дешифратором порядка  $n$  является  $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рисунке 6.4а §6 главы 2, а инверсная к нему каскадная контактная схема (см. §10 гл. 2) представляет собой дизъюнктивный контактный дешифратор порядка  $n$ , удовлетворяющий (1.5).

Искомым контактным мультиплексором порядка  $n$  является  $\pi$ -схема, приведенная на рис. 6.7b §6 главы 2. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 6.4a и 6.7b, равна  $2^{n+1} - 2$  и  $3 \cdot 2^n - 2$  соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (1.4) и (1.6), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно  $2^n - 1$ .

В результате моделирования указанной  $\pi$ -схемы можно построить неповторную по информационным БП формулу

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) &= \\ &= \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left( \bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left( \dots \left( \bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

которая удовлетворяет второму неравенству (1.6), так как реализует ФАЛ  $\mu_n$ , имеет сложность  $4 \cdot 2^n - 3$  и альтернирование  $2n - 1$ .

Неравенства (1.7) при  $n = 1$ , очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ  $\ell_n$ ,  $n \geq 2$ , со сложностью (1.7), является СФЭ  $\Sigma_n^\oplus$ , показанная на рис. 9.1b главы 2. Аналогичная СФЭ для ФАЛ  $\bar{\ell}_n$  получается в результате замены ФЭ  $\&$  на ФЭ  $\vee$  и ФЭ  $\vee$  на ФЭ  $\&$  в первой подсхеме вида  $\Sigma_2^\oplus$  схемы  $\Sigma_n^\oplus$  (см. рис. 9.1a главы 2).

Лемма доказана.  $\square$

## §2 Некоторые нижние оценки сложности ФАЛ. Нижние мощностные оценки функций Шеннона.

Рассмотрим сначала некоторые нижние оценки сложности ФАЛ и примеры минимальных схем.

**Лемма 2.1.** *Если ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n. \quad (2.1)$$

Если при этом ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ (каждая БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ ), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k). \quad (2.2)$$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma_f$  — минимальная по сложности СФЭ из  $\mathcal{U}^C$ , реализующая ФАЛ  $f$ . Из существенной зависимости ФАЛ  $f$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  следует, что  $R(\Sigma_f) \geq n$ , и поэтому, в силу соотношений (2.6) главы 2,

$$L^C(f) \geq L_{\&, \vee}(\Sigma_f) \geq n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ  $f$  не является монотонной ФАЛ, то схема  $\Sigma_f$  должна содержать хотя бы один ФЭ  $\neg$  и, следовательно, в указанном случае

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.1) и (2.2) доказаны.

Пусть теперь  $\Sigma_f$  — минимальная по сложности  $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ  $f$ . Из существенной зависимости ФАЛ  $f$  от БП  $x_i$ ,  $i \in [1, n]$ , следует, что либо контакт вида  $x_i$ , либо контакт вида  $\bar{x}_i$  встречается в КС  $\Sigma_f$ , и поэтому

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Если же, кроме того, БП  $x_i$ ,  $i \in [1, k]$ , не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ  $f$ , то как контакт вида  $x_i$ , так и контакт вида  $\bar{x}_i$  входят в  $\Sigma_f$ , и, следовательно, в данном случае

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n + k.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

**Лемма 2.2.** Для системы  $F = (f_1, \dots, f_m)$ , состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m). \quad (2.3)$$

*Доказательство.* Второе из неравенств (2.3) вытекает из того, что все ФАЛ  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь  $\Sigma_F$  — приведенная  $(1, m)$ -КС, реализующая систему ФАЛ  $F$ . Из приведенности  $\Sigma_F$  и условий леммы вытекает, что  $\Sigma_F$  — связный граф с не менее чем  $(m+1)$  вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$\begin{aligned} L^C(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{Q}_n) &\geq 2^n, \\ L^C(\vec{J}_n) &\geq 2^n, & L^K(\vec{J}_n) &\geq 2^n, \\ L_B^C(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - n, & L^K(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - 2. \end{aligned}$$

*Замечание.* В силу следствия универсальная СФЭ  $U_n$ , построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе  $\mathcal{U}_B^C$ .

Установим теперь ряд нижних оценок для введенных в §1 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [32, 14], который основан на том, что число ФАЛ от БП  $x_1, \dots, x_n$  не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента  $n$ .

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из рассмотренных в главе 2 классов схем,  $\Psi$  — введенный там функционал сложности, а  $\Psi(n)$  — функция Шеннона для класса  $\mathcal{U}$  относительно  $\Psi$ . Обозначим через  $\mathcal{U}(\Psi, n)$  множество тех схем  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}$ , которые реализуют одну ФАЛ из  $P_2(n)$  и для которых  $\Psi(\Sigma) \leq \Psi$ . Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(n), n)\| = 2^{2^n}. \quad (2.4)$$

Заметим также, что если для некоторого натурального  $n$  и действительных  $\hat{\Psi}$ ,  $\delta$ , где  $0 < \delta < 1$ , выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}(\hat{\Psi}, n)\| \leq \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то } \Psi(f) \geq \hat{\Psi} \quad (2.5)$$

для не менее чем  $(1 - \delta) \cdot 2^{2^n}$  ФАЛ  $f$  из  $P_2(n)$ .

Верхние оценки величины  $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$ , установленные в главе 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (2.4)–(2.5) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. леммы 4.2, 4.3, 6.2, 6.3 из главы 2) для любых натураль-

ных  $n$  и  $L$  справедливы неравенства:

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L+n))^{L+1}, \quad (2.6)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}, \quad (2.7)$$

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L, \quad (2.8)$$

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L, \quad (2.9)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| \leq (8n)^{2^D}. \quad (2.10)$$

**Лемма 2.3.** Для положительных действительных чисел  $a$ ,  $y$ ,  $q$  из неравенств

$$a \log q > 1, \quad (ay)^y \geq q, \quad (2.11)$$

следует неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\log(a \log q)} \left( 1 + \frac{\log \log(a \log q)}{\log(ae \log q)} \right), \quad (2.12)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов, а из неравенств  $a > 1$ ,  $a^y \geq q$  — неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\log a}. \quad (2.13)$$

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда  $a = 1$  и  $\log q > 1$ . В этом случае неравенство (2.12) следует из того, что левая часть (2.11) монотонно возрастает по  $y$ , и для

$$y' = (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\log \log \log q}{\log(e \log q)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
& y' \log y' = \\
& = (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q} (\log \log q - \log \log \log q + \log e \ln(1 + \varepsilon)) \leq \\
& \leq \log q (1 + \varepsilon) \left( 1 - \frac{\log \log \log q}{\log \log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log \log q} \right) = \\
& = \log q (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) = \log q (1 - \varepsilon^2) \leq \log q.
\end{aligned}$$

Заметим, что в случае  $a > 0$  неравенство (2.11) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geq q^a,$$

и поэтому неравенство (2.12) получается из неравенства  $y \geq y'$  в результате замены  $y$  на  $ay$  и  $\log q$  на  $a \log q$ , если выполнено условие  $a \log q > 1$ .

Неравенство (2.13) в случае  $a > 1$  получается в результате логарифмирования неравенства  $a^y \geq q$  и деления обеих частей полученного неравенства на  $\log a$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 2.1.** *Для некоторой последовательности  $\varepsilon = \varepsilon(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , такой, что  $\varepsilon(n) \geq 0$  при  $n \geq n_0$  и  $\varepsilon(n)$  стремится к 0 при  $n$  стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , выполняются неравенства*

$$L^C(f) \geq (1 + \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (2.14)$$

$$L^\Phi(f) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (2.15)$$

$$L^K(f) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (2.16)$$

$$L^\pi(f) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (2.17)$$

$$D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon(n). \quad (2.18)$$

### 20 ГЛАВА 3. СИНТЕЗ И СЛОЖНОСТЬ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

*Доказательство.* Неравенства (2.14)–(2.17) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем  $\mathcal{U}$  с функционалом сложности  $L$  неравенства (2.6)–(2.9) на основе мощностного неравенства (2.5), где  $\delta = \frac{1}{n}$ , с использованием леммы 2.3, где  $q = \frac{2^{2^n}}{n}$ , и

- 1)  $a = 8, \quad y = L^C(n) + n, \quad \text{если } \mathcal{U} = \mathcal{U}^C;$
- 2)  $a = 8n, \quad y = L^\Phi(n) + 1, \quad \text{если } \mathcal{U} = \mathcal{U}^\Phi;$
- 3)  $a = 8n, \quad y = L^K(n), \quad \text{если } \mathcal{U} = \mathcal{U}^K;$
- 4)  $a = 12n, \quad y = L^\pi(n), \quad \text{если } \mathcal{U} = \mathcal{U}^\pi.$

Действительно, подставляя указанные значения в (2.12) получим, что доля тех ФАЛ  $f, f \in P_2(n)$ , для которых

$$\begin{aligned} 1) L^C(f) &\geq \frac{2^n}{n+3} \left( 1 + \frac{\log(n+3) - o(1)}{n+5} \right) - n \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{\log n - 3 - o(1)}{n} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$2) L^\Phi(f) \geq \frac{2^n - \log n}{\log n + 3} - 1 \geq \frac{2^n}{\log n} \left( 1 - \frac{3 + o(1)}{\log n} \right) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} 3) L^K(f) &\geq \frac{2^n}{n+3+\log n} \left( 1 + \frac{\log(n+3+\log n) - o(1)}{n+5+\log n} \right) \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left( 1 - \frac{3 + o(1)}{n} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

не меньше, чем  $1 - \frac{1}{n}$ .

Следовательно, неравенство (2.14) ((2.15), (2.16)) будет справедливо для достаточно больших  $n$  при  $\varepsilon(n) = \frac{\log n - 4}{n}$  (соответственно  $\varepsilon(n) = \frac{4}{\log n}, \varepsilon(n) = \frac{4}{n}$ ).

Аналогичным образом устанавливается справедливость (2.17) и (2.18) при  $\varepsilon(n) = \frac{6}{\log n}$ .

Теорема доказана.  $\square$

Следствие.

$$L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \quad L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^\pi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}.$$

### §3 Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов. Метод Шеннона

Приведенные в §1 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и  $\pi$ -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [20] является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики  $F = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $F \in P_2^m(n)$ , строить  $(1, m)$ -КС  $\Sigma_F$ ,  $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$ , и СФЭ  $U_F$ ,  $U_F \in \mathcal{U}^C$ , которые реализуют  $F$ . Будем считать, что все ФАЛ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  системы  $F$  различны, отличны от констант, и для каждой БП  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от  $x_i$ .

Разложим ФАЛ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  сначала по БП  $x_1$ , потом по БП  $x_2$  и так далее. При этом построим последовательности множеств  $G_i$  и  $\widehat{G}_i$ , состоящих из ФАЛ от БП  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , такие, что

1.  $G_i$  состоит из всех различных ФАЛ  $g(x_i, \dots, x_n)$  вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где  $1 \leq j \leq m$ ,  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$ ;

## 22 ГЛАВА 3. СИНТЕЗ И СЛОЖНОСТЬ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

2.  $\widehat{G}_i$  состоит из всех различных функций  $g$ ,  $g \in G_i$ , которые существенно зависят от  $x_i$ .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \widehat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ  $\widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_n$  не пусты и попарно не пересекаются.

Заметим, что любую ФАЛ  $g$ ,  $g \in \widehat{G}_i$ , где  $1 \leq i \leq n$ , можно представить (см. §10 главы 2) в виде

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1, \quad (3.1)$$

где  $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , и, следовательно,  $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$  для всех  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ . Если при этом для некоторого  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $g_\sigma$  равна 0, то вместо (3.1) будем использовать разложение

$$g = x_i^\sigma g_\sigma, \quad (3.2)$$

где  $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$ .

С помощью операций присоединения одного или двух противоположных контактов (см. §10 гл. 2) построим ККС  $\check{\Sigma}_F$ , которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}_F$ , где  $G_F = \widehat{G}_1 \cup \dots \cup \widehat{G}_n$ . При этом для каждого  $i$ ,  $i = n, (n-1), \dots, 1$ , каждая ФАЛ  $g$ ,  $g \in \widehat{G}_i$ , реализуется согласно (3.1) ((3.2)) на выходе  $v$ , который при  $\alpha = 0, 1$  (соответственно  $\alpha = \sigma$ ) соединен контактом вида  $x_i^\alpha$  с тем выходом  $v_\alpha$ , где реализуется ФАЛ  $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$  так, как это показано на рис. 10.1a (соответственно рис. 10.1b) главы 2.

Для получения искомой КС  $\Sigma_F$  достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС  $\check{\Sigma}_F$ , в которых реализуются ФАЛ, отличные от  $f_1, \dots, f_m$ .

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ  $\check{U}_F$ , реализующая систему ФАЛ  $\vec{G}_F$ , с той лишь разницей, что:

1. сначала реализуются все ФАЛ вида  $\bar{x}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , которые встречаются в КС  $\Sigma_F$ ;
2. для всех  $i$ ,  $i = (n-1), \dots, 1$ , разложение (3.1), где  $g \in \widehat{G}_i$  и  $g_0, g_1 \in \check{G}_{i+1}$ , реализуется так, как показано на рис. 10.2а главы 2, а разложение (3.2), применяемое в случае  $g_{\bar{\sigma}} = 0$  (разложение

$$g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} x_i^{\sigma} = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} \quad (3.3)$$

в случае  $g_{\bar{\sigma}} = 1$ ), — так, как показано на рис. 10.2b (соответственно 10.2c главы 2);

3. каждая ФАЛ вида  $g_{\sigma} x_i^{\sigma}$ , используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (3.1) или (3.2) для различных ФАЛ  $g$ , реализуется только один раз.

Как и в случае КС, СФЭ  $U_F$ , реализующая систему ФАЛ  $F$  и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ  $\check{U}_F$  в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из  $F$ .

Пусть, например,  $F = (f_1, f_2)$ , где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\ f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\ \widehat{G}_2 &= \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_2 = \widehat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\ \widehat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_3 = \widehat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\ \widehat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}. \end{aligned}$$

На рис. 3.1 показана построенная для данной системы ФАЛ КС  $\check{\Sigma}_F$ , вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 3.2 — соответствующая ей КС  $\Sigma_F$ , а на рис. 3.3 — СФЭ  $U_F$ .

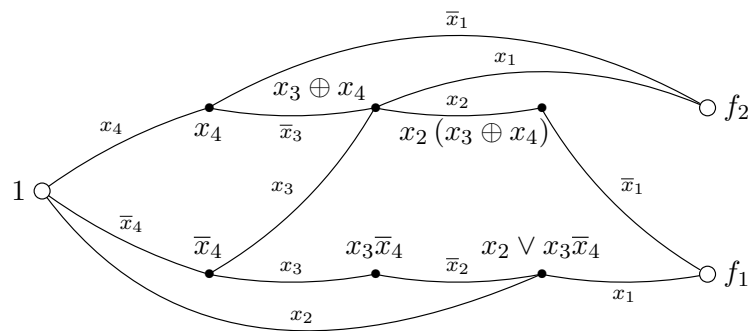


Рис. 3.1: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

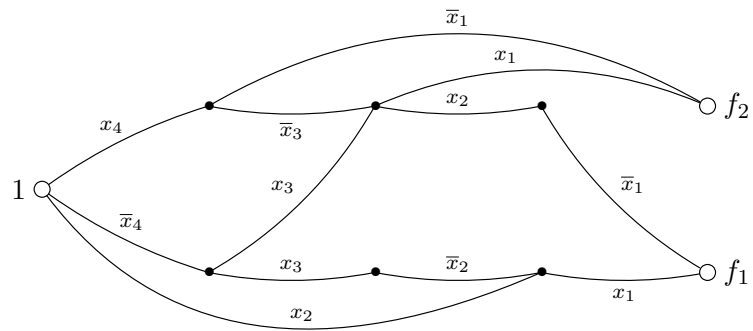


Рис. 3.2: пример КС, построенной методом каскадов

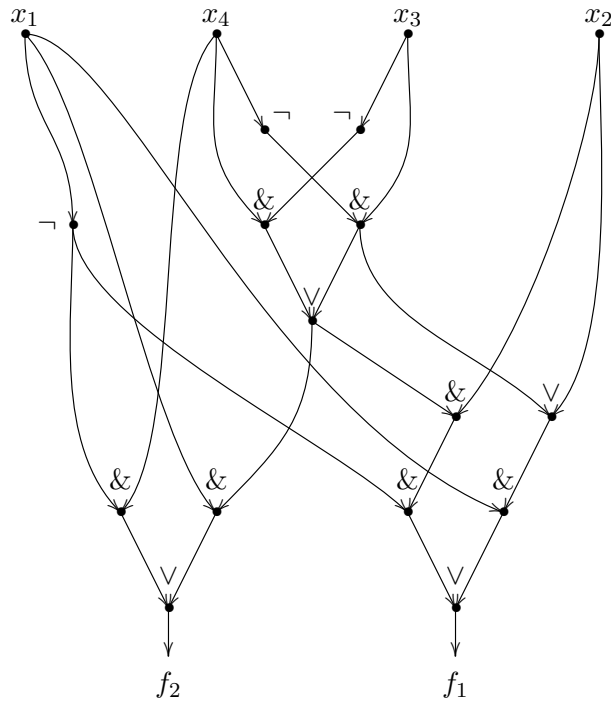


Рис. 3.3: СФЭ для системы ФАЛ  $F$ , построенная методом каскадов

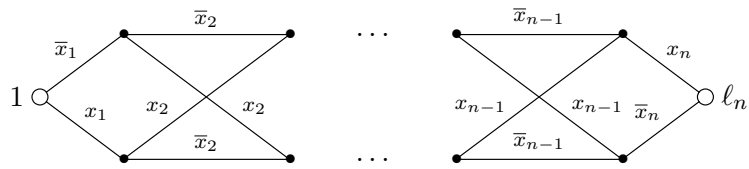


Рис. 3.4: схема Кардо для линейной функции  $l_n$

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ  $\ell_n$ , где  $n \geq 2$ , является известная схема Кардо [31], показанная на рис. 3.4. Заметим, что эта КС имеет сложность  $(4n - 4)$  и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для  $\ell_n$ ,  $n \geq 2$ , по методу каскадов имеет сложность  $(7n - 9)$  и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой  $\Sigma_n^\oplus$  сложности  $(4n - 4)$ , показанной на рис. 9.1 главы 2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ  $\bar{\ell}_n$  (см. лемму 1.4).

При построении по методу каскадов  $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики  $\vec{Q}_n$ , мы получим контактное дерево порядка  $n$ , показанное на рис. 6.4а из §6 главы 2. Как будет показано в §4 это КД не является минимальным контактным дешифратором.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный универсальный многополюсник сложности не больше, чем  $2 \cdot 2^{2^n}$ , а также контактный мультиплексор порядка  $n$  и сложности  $3 \cdot 2^n - 2$ , показанный на рис. 6.7б главы 2 (см. лемму 1.4). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ  $\mu_n$  сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка  $n$ , построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ  $\mu_n$  сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка  $2^n$  от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем  $2^{2^n+1}$ . Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним леммы 1.3 и 1.4 следующим утверждением.

**Лемма 3.1.** *Для любого натурального  $n$  и  $\sigma \in B$  выполня-*

ются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n}.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [32, 14]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$  (см. §2).

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра  $q$ ,  $1 \leq q \leq n$ , и построении схемы  $\Sigma_f$ , реализующей произвольную ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  на основе ее разложения по части переменных (см. равенство (2.5) из гл. 1):

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (3.4)$$

где  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$  при всех  $\sigma''$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ . При этом схема  $\Sigma_f$  представляет собой корректную суперпозицию вида  $\Sigma''(\Sigma')$ , где  $\Sigma''$  — мультиплексор порядка  $(n-q)$  от адресных БП  $x''$ , информационные входы которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника  $\Sigma'$  порядка  $q$  от БП  $x'$  в соответствии с (3.4).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  указанным выше способом КС (СФЭ в базисе  $B_0$ )  $\Sigma_f$ , где  $\Sigma''$  —  $(2^{n-q}, 1)$ -КД порядка  $(n-q)$  из §6 главы 2 (соответственно формула  $\mathcal{F}_{n-q}$  из леммы 1.4), а  $\Sigma'$  — универсальный многополюсник из леммы 3.1 (соответственно леммы 1.3). Корректность построенной суперпозиции в случае КС обеспечивается разделительностью КД. Для сложности полученной схемы  $\Sigma_f$  будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$ , и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** *Для функций Шеннона  $L^K(n)$  и  $L^C(n)$  выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

#### §4 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим метод синтеза схем из класса  $\mathcal{U}^C$ , который был предложен О.Б. Лупановым [14] и позволил впервые установить асимптотику функции Шеннона  $L^C(n)$ . Этот метод, как и метод Шеннона (см. §3), основан на представлении реализуемой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , в виде (3.4) и построении искомой СФЭ  $\Sigma_f$ , реализующей ФАЛ  $f$ , как суперпозиции схем вида  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ . При этом схема  $\Sigma''$  по-прежнему является мультиплексором порядка  $(n - q)$  от адресных БП  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ , а схема  $\Sigma'$  реализует все ФАЛ вида  $f_{\sigma''}(x')$ , где  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ , и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ . Однако, в отличие от метода Шеннона, каждая ФАЛ  $f_{\sigma''}(x')$  берется не с выхода универсального многополюсника от БП  $x'$ , а реализуется на выходе  $\Sigma'$  как дизъюнкция некоторых ФАЛ, выбранных из специального множества  $G$ ,  $G \subseteq P_2(q)$ , реализованного на выходах соответствующей подсхемы схемы  $\Sigma'$ .

Множество ФАЛ  $G$ ,  $G \subseteq P_2(m)$ , называется *дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) порядка  $m$  и ранга  $p$* , если любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p,$$

где  $g_i \in G$  при всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

Пусть  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  — разбиение куба  $B^m$ , и пусть для всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , ФАЛ  $\psi_i(x_1, \dots, x_m)$  — характеристическая ФАЛ множества  $\pi_i$ , а  $G^{(i)}$  — множество всех тех ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , которые обращаются в 0 вне  $\pi_i$ . Заметим, что множество ФАЛ  $G$  вида

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$$

является ДУМ порядка  $m$  и ранга  $p$ . Действительно, любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p, \quad (4.1)$$

где  $g_i = \psi_i g$  и, следовательно,  $g_i \in G^{(i)}$  для всех  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Заметим также, что мощность множества  $G^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , равна  $2^{s_i}$ , где  $s_i = |\pi_i|$ , и что множество  $G^{(i)} \cap G^{(j)}$  состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если  $1 \leq i < j \leq p$ . Следовательно,

$$\lambda = |G| = \sum_{i=1}^p |G^{(i)}| - (p-1) \leq \sum_{i=1}^p 2^{s_i} \leq p2^s,$$

где

$$s = \max_{1 \leq i \leq p} s_i.$$

	$x_1 \ x_2 \dots \ x_{m-1} \ x_m$	$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \dots \mathfrak{g}_{2^s}$	$\mathfrak{g}_{2^s+1} \dots \mathfrak{g}_{2^{s+1}-1}$	$\dots$	$\mathfrak{g}_{(p-1)(2^s-1)+2} \dots \mathfrak{g}_\lambda$	
$\pi_1$	0 0 ... 0 0	0 1 ... 1	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	$s=s_1$
	0 0 ... 0 1	0 0 ... 1	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	0 0 ... 1	0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
$\pi_2$	$\dots$	0 0 ... 0	1 ... 1	$\dots$	0 ... 0	$s=s_2$
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 1	$\dots$	0 ... 0	
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 1	$\dots$	0 ... 0	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$\pi_{p-1}$	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	$s=s_{p-1}$
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
$\pi_p$	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	1 ... 1	$s_p \leq s$
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 1	
	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\dots$	0 0 ... 0	0 ... 0	$\dots$	0 ... 0	
		$\longleftarrow 2^s \longrightarrow$	$\longleftarrow 2^s - 1 \longrightarrow$	$\longleftarrow 2^s p - 1 \longrightarrow$		

Рис. 4.1: к определению стандартного дизъюнктивно-универсального множества

Указанное ДУМ  $G$  будем называть ДУМ, *связанным с разбиением  $\Pi$* . Компоненты разбиения  $\Pi$  будем при этом называть *полосами* ДУМ  $G$ , а ФАЛ  $\chi_{\delta_1}, \dots, \chi_{\delta_p}$  — его *характеристическими* ФАЛ. Заметим, что характеристические ФАЛ попарно ортогональны, то есть одновременно в 1 не обращаются, и принадлежат  $G$ . Заметим также, что представление (4.1) в случае рассматриваемого ДУМ  $G$  равно-

сильно представлению:

$$g = \psi_1 g_1 \vee \psi_2 g_2 \vee \cdots \vee \psi_p g_p \quad (4.2)$$

Будем считать *стандартным* ДУМ порядка  $m$  и высоты  $s$ , где

$$s \leq 2^m, \quad (4.3)$$

ДУМ, связанное с разбиением  $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$  куба  $B^m$  на последовательные отрезки, для которого номер любого набора из множества  $\pi_i$  меньше номера любого набора из множества  $\pi_j$ , если  $i < j$ , и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} p &= \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \quad s_1 = s_2 = \cdots = s_{p-1} = s, \\ s_p &= 2^m - (p-1)s \leq s. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таблица значений ФАЛ ДУМ  $G$  приведена на рис. 4.1.

Из проведенных построений и отмеченных выше свойств стандартного ДУМ вытекает справедливость следующего утверждения.

**Лемма 4.1.** *Для любых натуральных  $p$ ,  $m$  и  $s$ , где  $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$ , существует стандартное ДУМ  $G$  порядка  $m$  и высоты  $s$ , которое является ДУМ ранга  $p$  и для которого:*

1.  $\lambda = |G| \leq p2^s$ ;
2. система из  $p$  ортогональных характеристических ФАЛ  $\psi_1, \dots, \psi_p$  ДУМ  $G$  обладает тем свойством, что для любой ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m)$ , и некоторых ФАЛ  $g_1, \dots, g_p$  из  $G$  справедливо не только представление (4.1), но и представление (4.2).

**Теорема 4.1.** *Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , существует реализующая ее СФЭ  $\Sigma_f$ ,  $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$ , такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (4.5)$$

*Доказательство.* Пусть  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$  для всех  $\sigma''$  из  $B^{n-q}$ . Пусть, далее,  $\Sigma''$  — мультиплексор порядка  $(n - q)$  от адресных БП  $x''$  и информационных БП  $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$ , который построен в соответствии с леммой 1.4, представляет собой формулу  $\mathcal{F}_{n-q}$  и реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_{n-q}(x'', y)$ .

Пусть  $s$  — некоторый параметр, удовлетворяющий (4.3), а  $G$  — стандартное ДУМ порядка  $m = q$  и высоты  $s$ , удовлетворяющее требованиям леммы 4.1. Обозначим через  $\Sigma_G$  СФЭ, которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}$  и представляет собой объединение схем, построенных для каждой из них в соответствии с леммой 1.2. Заметим, что, в силу леммы 1.4, (1.3) и леммы 4.1, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma'') &\leq 4 \cdot 2^{n-q}, \\ L(\Sigma_G) &\leq 3p2^{s+q}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Схема  $\Sigma'$  содержит СФЭ  $\Sigma_G$  в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ  $f_{\sigma''}(x')$ , где  $\sigma'' \in B^{n-q}$ , на одном из своих выходов как ФАЛ  $g(x')$  вида (4.1) с помощью СФЭ из  $(p - 1)$  ФЭ  $\vee$ , входы которой присоединены к соответствующим выходам  $\Sigma_G$ . Искомая СФЭ  $\Sigma_f$  имеет вид  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$  и реализует ФАЛ  $f$  в соответствии с разложением (3.4). Для нее, в силу (4.6), будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq 2^{n-q}(p - 1) + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leq \\ &\leq 2^{n-q}(p - 1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q}, \end{aligned}$$

## §5. РЕГУЛЯРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО КУБА

из которых, выбрав значения параметров

$$\begin{aligned}s &= \lceil n - 5 \log n \rceil, \\ m &= q = \lceil 2 \log n \rceil,\end{aligned}$$

удовлетворяющие (4.3), в соответствии с леммой 4.1 получим

$$\begin{aligned}L(\Sigma_f) &\leq \frac{2^n}{n - 5 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = \\ &= \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right).\end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Из (4.5) с учетом следствия из теоремы 2.1 вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Отметим, в заключение, что в соответствии с (4.5) и теоремой 2.1 сложность  $L^C(f)$  для почти всех ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , асимптотически равна функции Шеннона  $L^C(n)$ , то есть сложности самой сложной ФАЛ из  $P_2(n)$ . Тем самым, в отличие от класса ДНФ (см. §7 главы 1), в классе схем  $\mathcal{U}^C$  имеет место т. н. эффект Шеннона — асимптотическое равенство сложности почти всех ФАЛ и сложности самой сложной ФАЛ от заданного числа БП, стремящегося к бесконечности.

### §5 Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически оптимальный метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ , поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ.

Множество  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , называется  $m$ -регулярным множеством наборов куба  $B^q$ , если  $m < q$ ,  $|\delta| = 2^m$  и все пре-

фиксы<sup>1</sup> длины  $m$  наборов из  $\delta$  различны. Заметим, что  $m$ -регулярному множеству  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$  из  $P_2^{q-m}(m)$  так, что набор  $\alpha = (\beta, \gamma)$ , где  $\beta \in B^m$  и  $\gamma \in B^{q-m}$ , принадлежит  $\delta$  тогда и только тогда, когда  $\psi(\beta) = \gamma$ . Заметим также, что любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(q)$ , совпадает на  $m$ -регулярном множестве наборов  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , с некоторой ФАЛ из  $P_2(m)$ , если рассматривать  $P_2(m)$  как множество всех ФАЛ из  $P_2(q)$  с несущественными БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ . При этом любая ФАЛ из связанной с  $\delta$  системы функций совпадает на  $\delta$  с соответствующей БП куба  $B^q$ .

Для наборов  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$  и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  через  $\beta \oplus \alpha$  будем обозначать набор вида  $(\beta_1 \oplus \alpha_1, \dots, \beta_q \oplus \alpha_q)$ . Для множества  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , и набора  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^q$ , определим множество  $\delta \oplus \alpha$  как множество различных наборов вида  $\beta \oplus \alpha$ , где  $\beta \in \delta$ , то есть множество, получающееся из множества  $\delta$  сдвигом (параллельным переносом) на набор  $\alpha$ . Заметим, что для  $m$ -регулярного множества  $\delta$ ,  $\delta \subseteq B^q$ , и любого набора  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^q$ , множество  $\delta \oplus \alpha$  также является  $m$ -регулярным. Если при этом  $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$ , то есть

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \gamma),$$

где  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q-m})$  и  $\nu(\gamma) = \nu(\alpha)$ , а множество наборов  $\delta$  соответствует системе ФАЛ  $g = (g_1, \dots, g_{q-m})$ , то множество наборов  $\delta \oplus \alpha$  будет соответствовать системе ФАЛ  $(g_1 \oplus \gamma_1, \dots, g_{q-m} \oplus \gamma_{q-m})$ , получающейся из системы  $g$  инвертированием некоторых ФАЛ.

**Лемма 5.1.** *Для любых натуральных  $m$ ,  $\lambda$  и  $q = m + \lambda$  и для любой системы ФАЛ  $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$  из  $P_2^\lambda(m)$  существует  $m$ -регулярное разбиение  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^q-m})$  куба  $B^q$*

<sup>1</sup>Для слова (набора)  $\alpha$  вида  $\alpha = \beta\gamma$  слово  $\beta$  ( $\gamma$ ) считается его префиксом (соответственно суффиксом).

§5. РЕГУЛЯРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО КУБА 35

такое, что любая ФАЛ  $g_i$  на любой компоненте  $\delta_j$  совпадает либо с одной из БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$ , либо с её отрицанием.

*Доказательство.* Пусть  $\delta = \delta_1$  —  $m$ -регулярное множество, соответствующее системе ФАЛ  $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$ , и пусть  $\delta_i = \delta_1 \oplus \alpha$ , где  $\nu(\alpha) = i - 1$ , для всех  $i, i = 1, \dots, 2^{q-m}$ . Из построения системы множеств  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$  следует, что каждое из них обладает требуемым свойством, связанным с можелированием ФАЛ из  $g$  с помощью БП.

Покажем теперь, что  $\Delta$  — покрытие куба  $B^q$ . Для этого возьмем произвольный набор из  $B^q$  вида  $(\beta, \gamma)$ , где  $\beta \in B^m$  и  $\gamma \in B^{q-m}$ , а по нему найдем в множестве  $\delta$  набор вида  $(\beta, \hat{\gamma})$ , который имеется в  $\delta$  в силу  $m$ -регулярности этого множества. Следовательно,

$$(\beta, \gamma) = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \underbrace{(0, \dots, 0)}_m, \hat{\gamma} \oplus \gamma = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \alpha,$$

где  $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$ . Таким образом, система  $\Delta$  образует покрытие куба  $B^m$ .

С другой стороны, из  $m$ -регулярности  $\delta$  следует  $m$ -регулярность любого из множеств  $\delta_i, i = 1, \dots, 2^{q-m}$ , и поэтому

$$\sum_{i=1}^{2^{q-m}} |\delta_i| = 2^m 2^{q-m} = 2^q.$$

Следовательно, система  $\Delta$  образует разбиение куба  $B^q$ .

Лемма доказана.  $\square$

Применим технику моделирования ФАЛ из ДУМ переменными для синтеза формул в стандартном базисе.

**Теорема 5.1** (ср. [14]). *Для любой ФАЛ  $f, f \in P_2(n)$ , в  $\mathcal{U}^\Phi$  существует реализующая ее формула  $\mathcal{F}_f$ , для которой*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left( 1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n} \right). \quad (5.1)$$

*Доказательство.* Пусть параметры  $m$ ,  $s$  и  $p$  удовлетворяют соотношениям

$$s \leq 2^m, \quad p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \quad p \cdot 2^s \leq n,$$

а  $G$  — стандартное ДУМ порядка  $m$  и высоты  $s$ , для которого  $|G| = \lambda \leq p \cdot 2^s$  (см. §4). Пусть далее  $q = m + \lambda$ , а  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^\lambda})$  — разбиение куба  $B^q$ , полученное по лемме 5.1 для системы ФАЛ  $\vec{G}$ . Для ФАЛ  $f(x)$  из  $P_2(n)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  рассмотрим ее представление в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ &= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \left( \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') f_{\sigma'',i}(x') \right) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \left( \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} f_{\sigma'',i}(x') \right), \quad (5.2) \end{aligned}$$

где  $\chi_i(x')$  — характеристическая ФАЛ множества  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ , и  $f_{\sigma'',i}(x')$  — произвольная ФАЛ, совпадающая на  $\delta_i$  с ФАЛ  $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ .

Построим для ФАЛ  $f$  на основе (5.2) формулу  $\tilde{\mathcal{F}}_f$  с поднятными отрицаниями, которая имеет вид

$$\tilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_i(x') \widehat{\mathcal{F}}_{n-q} \left( x'', J_{\tilde{0},i}, \dots, J_{\tilde{1},i} \right),$$

где  $\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}(x'', y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$  — неповторная по информационным БП формула из леммы 1.4, реализующая ФАЛ  $\mu_{n-q}$ ,  $\mathfrak{A}_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , — совершенная ДНФ ФАЛ  $\chi_i$ , а ЭД  $J_{\sigma'',i}$  ранга  $p$  от БП  $x_{m+1}, \dots, x_q$  на компоненте  $\delta_i$  моделирует ФАЛ  $f_{\sigma'',i}$ , где  $\sigma'' \in B^{n-q}$  и  $i \in [1, 2^\lambda]$ .

§5. РЕГУЛЯРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО КУБА 37

Пусть, далее, формула  $\mathcal{F}_f$  получается из формулы  $\widetilde{\mathcal{F}}_f$  оптимизацией ЭД по числу отрицаний, то есть заменой каждой ЭД  $J_{\sigma'',i}$  вида  $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \overline{x_{j_{t+1}}} \vee \dots \vee \overline{x_{j_p}}$ , где  $t \leq p$ , формулой  $\widehat{J}_{\sigma'',i}$  вида  $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \overline{x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_p}}$ , которая увеличивает глубину не больше, чем на 1. Заметим, что число ФЭ  $\neg$  во всех формулах  $\mathfrak{A}_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , равно половине их суммарного ранга, что в каждой формуле вида  $\widehat{J}_{\sigma'',i}$  имеется один ФЭ  $\neg$ , и напомним (см. лемму 1.4), что  $R(\mathcal{F}_{n-q}) \leq 3 \cdot 2^{n-q}$  и  $L_-(\mathcal{F}_{n-q}) \leq 2 \cdot 2^{n-q}$ . Следовательно, в силу леммы 2.1 главы 2,

$$L_{\&, \vee}(\mathcal{F}_f) \leq 2^{q-m} (q \cdot 2^m + (p-1)2^{n-q} + 3 \cdot 2^{n-q}), \quad (5.3)$$

$$L_-(\mathcal{F}_f) \leq q \cdot 2^q + 2 \cdot 2^{n-m}. \quad (5.4)$$

Выбирая значения параметров  $m$  и  $s$  так, что

$$m = \lfloor 3 \log \log n \rfloor - 1, \quad s = \lfloor \log n - 2 \log \log n \rfloor - 1,$$

и подставляя эти значения в (5.3), (5.4), получим неравенство

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n - 2 \log \log n} + O\left(\frac{2^n}{\log^2 n}\right),$$

из которого для сложности формулы  $\mathcal{F}_f$  следует оценка (5.1).

Теорема доказана.  $\square$

*Замечание.* Установленная оценка справедлива и для сложности  $\pi$ -схемы  $\widetilde{\Sigma}_f$ , которая моделирует построенную в ходе получения формулы  $\mathcal{F}_f$  формулу  $\widetilde{\mathcal{F}}_f$  с поднятыми отрицаниями и реализует ФАЛ  $f$ .

*Замечание.*  $Alt(\widetilde{\mathcal{F}}_f) \leq Alt(\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}) + 3$

**Следствие.** Из (5.1) и замечания 1, с учетом нижних оценок следствия из теоремы 2.1, вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}, \quad L^\pi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

**Теорема 5.2.** Для  $n = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство

$$D(n) \leq n - \log \log n + O(1)$$

*Доказательство.* Для получения требуемой верхней оценки глубины ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , достаточно при построении формулы  $\widetilde{F}_f$  из теоремы 5.1 вместо формулы  $\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}$ , реализующей ФАЛ  $\mu_{n-q}$ , использовать формулу  $\mathcal{F}_{n-q}$  из леммы 7.5. При этом для искомой формулы  $F_f$ , которая получается из построенной формулы оптимизацией по глубине, в силу леммы 7.5 и замечания к теореме 5.1 выполняется неравенство

$$D(\widetilde{F}_f) \leq n - \log \log n - O(1)$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Из доказанного утверждения с учетом нижних оценок теоремы 2.1, вытекает, что

$$D(n) = n - \log \log n \pm O(1)$$

## §6 Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем

Заметим сначала, что асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ из §4 без существенных изменений переносится на класс контактно-вентильных схем (КВС), в которых наряду с контактами можно использовать «вентили», то есть ориентированные ребра, проводящие только в направлении своей ориентации. Действительно, для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , реализующая ее  $(1, 1)$ -КВС  $\widetilde{\Sigma}_f$  может быть получена на основе разложения (3.4) так же, как и СФЭ  $\Sigma_f$  из теоремы 4.1. Она является результатом корректной суперпозиции (см. §9 главы 2) вида  $\widetilde{\Sigma}_f = \Sigma''(\Sigma')$ , где  $\Sigma''$  —  $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП  $x''$ , а  $(1, 2^{n-q})$ -КВС  $\Sigma'$  реализует систему всех ФАЛ вида

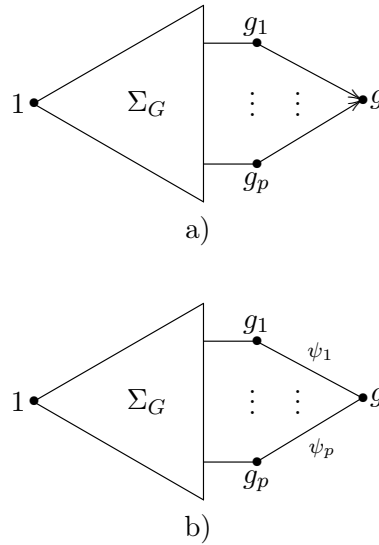


Рис. 6.1: Корректная реализация дизъюнкции ФАЛ  $g_1, \dots, g_p$  в классах КВС и ИКС

$f_{\sigma''}(x')$ ,  $\sigma'' \in B^{n-q}$ . При этом схема  $\Sigma'$  по-прежнему содержит в качестве подсхемы  $(1, \lambda)$ -КС  $\Sigma_G$ , реализующую систему ФАЛ  $\vec{G}$  на основе леммы 1.2, и реализует каждую ФАЛ  $g(x')$  типа  $f_{\sigma''}(x')$  на основе ее представления (4.1) в виде дизъюнкции  $g = g_1 \vee \dots \vee g_p$  с помощью присоединения входов вентиляльной звезды порядка  $p$  к соответствующим выходам КС  $\Sigma_G$  (см. рис. 6.1а, а также рис. 9.2с из главы 2), которое является корректной суперпозицией. Сложность построенной КВС  $\tilde{\Sigma}_f$  при тех же значениях параметров, что и в теореме 4.1, будет удовлетворять неравенству 4.5.

Напомним (см. §4), что в силу специфики стандартного ДУМ  $G$  вместо представления (4.1) для ФАЛ  $g$  можно

использовать эквивалентное (4.1) представление (4.2) вида

$$g = \psi_1 \cdot g_1 \vee \cdots \vee \psi_p \cdot g_p \quad (6.1)$$

и на его основе реализовать ФАЛ  $g$  с помощью корректной суперпозиции т.н. итеративно-контактных схем, показанной на рис. 6.1b, где ФАЛ  $\psi_1, \dots, \psi_p$  управляют проводимостью соответствующих контактов. Асимптотически наилучший метод синтеза КС связан с «моделированием» этой суперпозиции и представления (6.1) на компонентах подходящего  $m$ -регулярного разбиения куба  $B^{m+p}$ .

Пусть  $\check{\delta}$  —  $m$ -регулярное множество наборов куба  $B^{m+p}$ , соответствующее системе ФАЛ  $\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_p)$  (см. рис. 6.2a), а  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2p})$  — построенное для нее по лемме 5.1 разбиение куба  $B^{m+p}$ . Заметим, что любая ФАЛ  $g$ ,  $g \in P_2(m+p)$ , на любой компоненте этого разбиения вида  $\check{\delta} \oplus \alpha$ , где

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+p}),$$

совпадает с ФАЛ

$$\check{g} = x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \dots \vee x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}} \cdot g_p, \quad (6.2)$$

где  $g_i = g\psi_i \in G^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ . При этом ФАЛ  $\check{g}$  может быть реализована в результате операции присоединения звезды из контактов вида  $x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}}, \dots, x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}}$  к выходам  $(1, \lambda)$ -КС  $\Sigma_G$ , реализующей систему ФАЛ  $\vec{G}$ , так, как это показано на рис. 6.2b. Заметим также, что указанная операция суперпозиции является корректной на множестве наборов  $\check{\delta} \oplus \alpha$  в силу разделительности присоединяемой  $(p, 1)$ -КС на этом множестве.

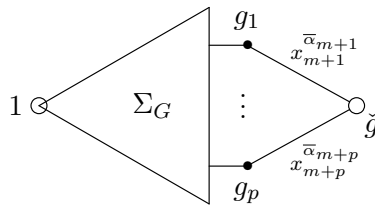
**Теорема 6.1** (ср. [14]). *Для любой ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , существует реализующая ее КС  $\Sigma_f$  такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (6.3)$$

§6. АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЙ МЕТОД СИНТЕЗА КС41

	$x_1 \dots x_{m-1} x_m$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\dots$	$\psi_p$
$\pi_1$	0 ... 0 0	1	0		0
	0 ... 0 1	1	0		0
	...	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	...	1	0		0
$\pi_2$	...	0	1		0
	...	0	1		0
	...	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	...	0	1		0
	...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\pi_p$	...	0	0		1
	...	0	0		1
	...	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	1 ... 1 1	0	0		1

a)



b)

Рис. 6.2:  $m$ -регулярное множество  $\check{\delta}$  и связанная с ним суперпозиция КС

*Доказательство.* Пусть  $q = m + p$ , а  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^p})$  — описанное выше разбиение куба  $B^q$ , с помощью которого ФАЛ  $f$  можно представить в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^p} \chi_i(x') \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \check{g}_{\sigma'', i}(x'), \quad (6.4)$$

где  $\chi_i$  — характеристическая ФАЛ  $\delta_i$ , а в качестве ФАЛ  $f_{\sigma'', i}$  при всех  $\sigma'', \sigma'' \in B^{n-q}$ , и  $i, i \in [1, 2^p]$ , берется ФАЛ  $\check{g}_{\sigma'', i}$  вида (6.2), совпадающая с ФАЛ  $f_{\sigma''}(x')$  на компоненте  $\delta_i = \check{\delta} \oplus \alpha$ .

Пусть  $\Sigma_G$  —  $(1, \lambda)$ -КС, которая реализует систему ФАЛ  $\vec{G}$  по их совершенным ДНФ на основе контактного дерева (см. лемму 1.2 и оценку (1.2)). Для каждого  $i, i = 1, \dots, 2^p$ , построим  $(1, 2^{n-q})$ -КС  $\Sigma'_i$  (см. рис. 6.3а), которая содержит КС  $\Sigma_G$  в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ  $\check{g}_{\sigma'', i}$  вида (6.2) с помощью корректной на множестве наборов  $\delta_i$  суперпозиции, показанной на рисунке 6.2б. Пусть, далее  $(1, 2^{n-m})$ -КС  $\Sigma'$  получается в результате отождествления входов у построенных выше КС  $\Sigma'_i, i \in [1, 2^p]$ , и реализует систему из всех ФАЛ вида  $\check{g}_{\sigma'', i}$ , где  $\sigma'' \in B^{n-q}, i \in [1, 2^p]$ . Заметим, что при этом выполняются неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_G) &\leq \lambda 2^{m+1}, \\ L(\Sigma'_i) &\leq L(\Sigma_G) + p 2^{n-q}, \\ L(\Sigma') &\leq p 2^{n-m} + \lambda 2^{q+1}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Построим, наконец, разделительную по входам  $(2^{n-m}, 1)$ -КС  $\Sigma''$ , которая реализует столбец из всех ФАЛ вида  $\chi_i(x') \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$ , где  $i \in [1, 2^p]$  и  $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n) \in B^{n-q}$ . Эта КС получается в результате объединения  $2^p$  схем типа  $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП  $x''$ , к выходам которых присоединены входы  $(2^p, 1)$ -КС, реализующей столбец из ФАЛ  $\chi_i$ ,

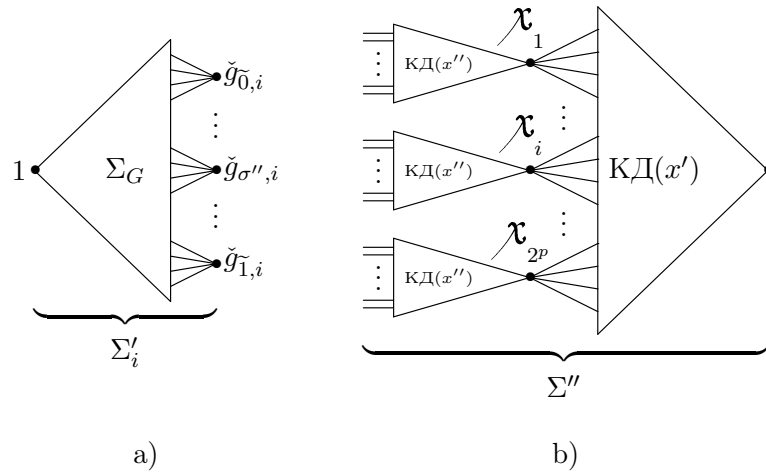


Рис. 6.3: к доказательству теоремы 6.1

$i \in [1, 2^p]$ , и получающейся из  $(2^q, 1)$ -КД от БП  $x'$  в результате соответствующего отождествления входов (см. рис. 6.3b). Легко видеть, что при этом

$$L(\Sigma'') \leq 2^{q+1} + 2^{n-m+1}. \quad (6.6)$$

Искомая КС  $\Sigma_f$  является результатом корректной стыковки вида  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ , полученной в результате присоединения входов КС  $\Sigma''$  к выходам КС  $\Sigma'$  в соответствии с представлением (6.4), сложность которой, в силу (6.5)–(6.6), удовлетворяет неравенству

$$L(\Sigma_f) \leq (p+2)2^{n-m} + (\lambda+1)2^{q+1}.$$

Из этого неравенства при

$$m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor \quad \text{и} \quad s = \lceil n - 2\sqrt{n} \rceil,$$

при которых выполнены условия

$$s \leq 2^m, p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil \text{ и } q = m + p \leq n,$$

вытекает неравенство (6.3) для сложности  $\Sigma_f$ , так как

$$\begin{aligned} (p+2)2^{n-m} &\leq \frac{2^n}{s} + 3 \cdot 2^{n-m} = \frac{2^n}{n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right), \\ (\lambda+1)2^{q+1} &\leq p2^s \cdot 2^{m+p+2} \leq \frac{2^{2m+s+p+3}}{s} \leq \\ &\leq \frac{32}{s} 2^{n-\sqrt{n}+3\log n} = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Из (6.3) с учетом нижней оценки следствия теоремы 2.1 вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

*Замечание.* Построенную КС  $\Sigma_f$  можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda+1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа. Для этого достаточно контакты всех звезд, показанных на рис. 6.2b, перераспределить в звезды из однотипных контактов, «центрами» которых являются выходы подсхем  $\Sigma_G$  схем  $\Sigma'_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ , а любой из остальных контактов КС  $\Sigma_f$  считать отдельной звездой.

**§7 Синтез схем для ФАЛ из специальных классов. Оценки сложности индивидуальных ФАЛ, минимальность некоторых схем.**

Мощностные соображения можно использовать при получении нижних оценок для функций Шеннона, связанных с реализацией ФАЛ из класса  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(1), \mathcal{Q}(2), \dots, \mathcal{Q}(n), \dots$ , где

$$\mathcal{Q} \subseteq P_2 \text{ и } \mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q} \cap P_2(n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть  $\mathcal{U}$  — один из рассмотренных в главе 2 классов схем,  $\Psi$  — введенный там функционал сложности, а  $\Psi(\mathcal{Q}(n))$  — функция Шеннона (для класса схем  $\mathcal{U}$  относительно функционала сложности  $\Psi$ ), связанная с классом ФАЛ  $\mathcal{Q}$ , то есть

$$\Psi(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} \Psi(f).$$

Следующее «мощностное» неравенство обобщает равенство (2.4) и вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(\mathcal{Q}(n)), n)\| \geq |\mathcal{Q}(n)|. \quad (7.1)$$

Оно позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона  $\Psi(\mathcal{Q}(n))$  на основе известной верхней оценки величины  $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$ .

Рассмотрим, в частности, нижние мощностные оценки для функций  $L^C(\mathcal{Q}(n))$  и  $L^K(\mathcal{Q}(n))$ , то есть функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из класса  $\mathcal{Q}$  схемами из классов  $\mathcal{U}^C$  и  $\mathcal{U}^K$  соответственно. На основе мощностных соображений (см. (7.1)) аналогично тому, как это было сделано в теореме 2.1 для случая  $\mathcal{Q} = P_2$ , доказывается следующее утверждение.

**Лемма 7.1.** Для класса ФАЛ  $\mathcal{Q}$  такого, что  $n = o\left(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\right)$  ( $\log n = o(\log\log|\mathcal{Q}(n)|)$ ), выполняются следующие асимптотические неравенства

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}, \quad (7.2)$$

$$\text{(соответственно } L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\text{)}. \quad (7.3)$$

Пусть, например, класс  $\mathcal{Q}$  состоит из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП. Легко видеть, что при этом  $|\mathcal{Q}(n)| = 2^{\frac{3}{4}2^n}$ , так как  $f \in \mathcal{Q}(n)$  тогда и только тогда, когда вторая и третья четверти столбца значений  $\tilde{\alpha}_f$  совпадают. Следовательно, в силу леммы 7.1, отсюда вытекает, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}. \quad (7.4)$$

Описанные выше асимптотически наилучшие методы синтеза схем ориентированы, вообще говоря, на произвольную или самую «сложную» ФАЛ. Тем не менее, во многих случаях они служат основой асимптотически наилучшего метода синтеза СФЭ или КС для ФАЛ из заданного специального класса  $\mathcal{Q}$  и позволяют установить для этого класса «стандартную» (см. (7.2) и (7.3)) асимптотику вида

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log|\mathcal{Q}(n)|}, \quad (7.5)$$

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log|\mathcal{Q}(n)|}. \quad (7.6)$$

Заметим, что асимптотика (7.5) устанавливается, как правило, путем сведения задачи синтеза СФЭ для любой ФАЛ из  $\mathcal{Q}(n)$  к задаче синтеза СФЭ для системы из одной или нескольких произвольных ФАЛ от меньшего числа БП. При

## §7. СИНТЕЗ СХЕМ ДЛЯ ФАЛ ИЗ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ 47

этом требуется, чтобы двоичный логарифм числа тех систем ФАЛ, к реализации которых сводится реализация ФАЛ из  $\mathcal{Q}(n)$ , был асимптотически равен  $\log |\mathcal{Q}(n)|$ , а сложность вспомогательных ФАЛ, обеспечивающих данное сведение, была бы существенно меньше правой части (7.5). Аналогичным образом обстоит дело с классом КС.

Возьмем в качестве примера введенный выше класс ФАЛ  $\mathcal{Q}$ , состоящий из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП, и докажем, что

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \lesssim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n},$$

то есть, с учетом (7.3), установим для него асимптотику (7.5) вида

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Действительно, разлагая ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  из  $\mathcal{Q}(n)$  по БП  $x_1, x_2$ , получим

$$f(x_1, x_2, x') = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2) \in B^2} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} f_{\sigma_1, \sigma_2}(x'), \quad (7.7)$$

где  $x' = (x_3, \dots, x_n)$  и  $f_{\sigma_1, \sigma_2}(x') = f_{\sigma_1, \sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2, x')$ , причем  $f_{01} = f_{10}$  в силу симметричности ФАЛ  $f$  по БП  $x_1, x_2$ . Искомая СФЭ  $\Sigma_f$  реализует ФАЛ  $f$  в соответствии с (7.7) и имеет вид  $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ , где  $\Sigma''$  — мультиплексорная СФЭ порядка 2 от адресных БП  $x_1, x_2$ , а СФЭ  $\Sigma'$  от БП  $x'$  реализует асимптотически наилучшим способом ФАЛ  $f_{00}, f_{01} = f_{10}$  и  $f_{11}$  от БП  $x'$ . Легко видеть, что сложность построенной схемы  $\Sigma_f$  асимптотически не больше, чем  $\frac{3}{4} \frac{2^n}{n}$ .

Крайним случаем специального класса ФАЛ является «индивидуальная» ФАЛ (система ФАЛ), а также последовательность таких ФАЛ (соответственно систем ФАЛ) от  $n, n = 1, 2, \dots$  переменных. В этом случае для получения

нижних оценок сложности вместо мощностных соображений приходится опираться на те или иные особенности «поведения» реализуемых функций. Простейшие оценки такого типа были получены в §2 (см. леммы 2.1, 2.2).

Установим, в заключение, ряд аналогичных оценок и с их помощью докажем минимальность или асимптотическую минимальность некоторых схем.

Докажем сначала, что  $(1, 2^n)$ -контактное дерево — минимальный контактный дешифратор порядка  $n$  в классе разделимых (по выходам) КС.

**Лемма 7.2.** *Если разделимая по выходам  $(1, m)$ -КС  $\Sigma$  реализует  $m$  различных ФАЛ, отличных от 0, то*

$$L(\Sigma) \geq 2m - 2.$$

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma$  — приведенная и, следовательно, связная КС от БП  $x_1, \dots, x_n$ . Из разделимости  $\Sigma$  следует, что при любом  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , сеть  $\Sigma|_\alpha$  состоит не менее чем из  $m$  связных компонент. Заметим, что удаление всякого ребра увеличивает число связных компонент графа не более чем на единицу, и поэтому число  $|E(\Sigma|_\alpha)|$  — число контактов, не проводящих на наборе  $\alpha$ , — удовлетворяет неравенству

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq m - 1. \quad (7.8)$$

Суммируя (7.8) по всем  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , и учитывая, что каждый контакт КС  $\Sigma$  не проводит ровно на половине всех наборов куба  $B^n$ , получим

$$2^{n-1}L(\Sigma) \geq 2^n(m - 1), \quad L(\Sigma) \geq 2m - 2.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.** *Контактное дерево порядка  $n$  является минимальной разделимой  $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему ФАЛ  $Q_n$ .*

§7. СИНТЕЗ СХЕМ ДЛЯ ФАЛ ИЗ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ 49

Действительно, в соответствии с леммой 7.2, сложность разделительной  $(1, 2^n)$ -КС не меньше чем  $2^{n+1} - 2$ , то есть не меньше сложности  $(1, 2^n)$ -контактного дерева порядка  $n$ .

**Лемма 7.3.** *Если система ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$  состоит из попарно различных ФАЛ от БП  $X(n)$ , отличных от 0 и 1, то*

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

*Доказательство.* Возьмем приведенную  $(1, m)$ -КС  $\Sigma$ , реализующую систему ФАЛ  $F$ , и заметим, что при любом  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , в сети  $\Sigma|_\alpha$  имеется связная компонента, которая содержит вход  $\Sigma$  и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе  $\alpha$ . Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq f_1(\alpha) + \dots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , придем (см. доказательство леммы 7.2) к неравенству

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geq \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**  $L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2$ .

**Лемма 7.4** (ср. [14]). *Для  $n = 1, 2, 3, \dots$  выполняются неравенства*

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right), \quad (7.9)$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right). \quad (7.10)$$

*Доказательство.* Выберем параметры  $m$ ,  $q$  и  $\lambda$  так, что

$$\lambda = 2^m, \quad q = m + \lambda \quad \text{и} \quad q \leq n,$$

а затем рассмотрим  $m$ -регулярное множество наборов  $\delta_1$  куба  $B^q$  от БП  $x' = (x_1, \dots, x_q)$ , связанное с системой ФАЛ  $\vec{Q}_m(x_1, \dots, x_m)$ , которая состоит из всех ЭК вида  $x_1^{\sigma_1} \cdots x_m^{\sigma_m}$ , где  $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = j - 1$ ,  $j \in [1, \lambda]$ .

Построим для этой системы по лемме 5.1 разбиение  $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^q-m})$  куба  $B^q$  и заметим, что любая ЭК  $K(x') = x_1^{\sigma_1} \cdots x_q^{\sigma_q}$ , где  $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \delta_i$ , совпадает на множестве  $\delta_i$  с одной из ЭК системы  $\vec{Q}_m$ , то есть совпадет на нем с буквой  $x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}}$ , где  $m + 1 \leq j_{\sigma'} \leq q$ ,  $\alpha_{\sigma'} \in B$ . Заметим, что в силу указанных выше свойств разбиения  $\Delta$  любая ЭК  $K = x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ , где  $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \delta_i$ ,  $1 \leq i \leq 2^\lambda$ , может быть представлена в виде

$$K = \chi_i(x') \cdot x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}} \cdot K_{\sigma''}(x''), \quad (7.11)$$

где  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ ,  $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)$ .

Пусть, далее,  $(1, 2^\lambda)$ -КС  $\Sigma'$  реализует строку из ФАЛ  $\vec{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_{2^\lambda})$ , где  $\chi_i(x')$  — характеристическая ФАЛ множества  $\delta_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , и получается в результате отождествления входов у схем  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2^\lambda}$ , где  $\pi$ -схема  $\Sigma_i$ ,  $i \in [1, 2^\lambda]$ , построена по лемме 1.2 для ФАЛ  $\chi_i$ , причем выходом  $\Sigma_i$  считается корень соответствующего КД (см. рис. 7.1).

Искомая  $(1, 2^n)$ -КС  $\Sigma_n^{(\&)}$  реализует каждую ЭК из  $\vec{Q}_m$  в соответствии с (7.11), имеет вид, показанный на рис. 7.1, и является ККС.

Полагая

$$m = \lceil \log n \rceil - 2,$$

получим, что

$$\lambda = 2^m \leq \frac{n}{2}, \quad q = m + \lambda \leq n.$$

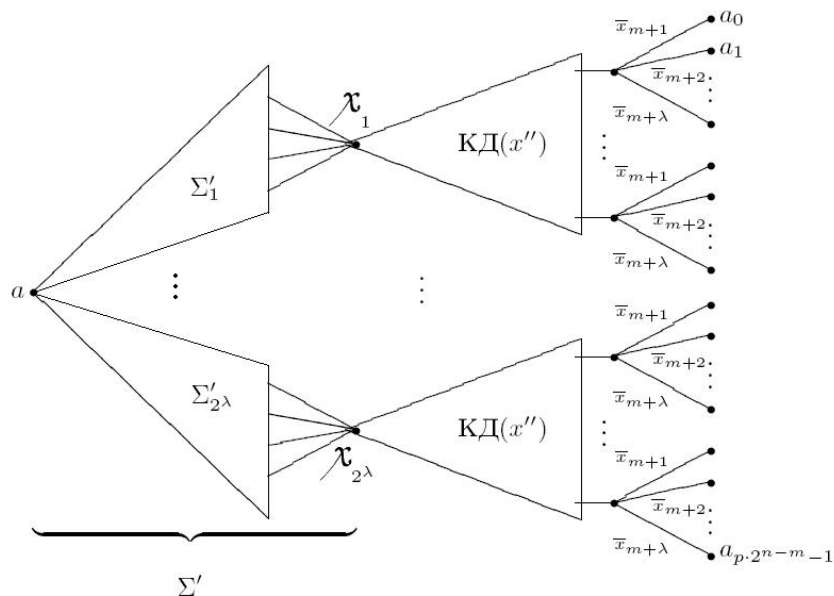


Рис. 7.1: к доказательству леммы 7.4

При этом сложность построенной  $(1, 2^n)$ -КК  $\Sigma_n^{(\&)}$ , являющейся контактным дешифратором порядка  $n$ , удовлетворяет неравенствам:

$$L\left(\Sigma_n^{(\&)}\right) \leq \lambda 2^{n-m} + 2^{n-m+1} + q 2^q \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

из которых вытекает неравенство (7.9).

Искомая  $(1, 2^n)$ -КК  $\Sigma_n^{(\vee)}$ , являющаяся дизъюнктивным контактным дешифратором порядка  $n$ , сложность которого удовлетворяет оценке (7.10), получается в результате перехода от КК  $\Sigma_n^{(\&)}$  к инверсной КК в соответствии с леммой 10.1 главы 2.

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.** Оценки леммы 7.4, следствия из леммы 2.2 и следствия из леммы 7.3 дают асимптотические равенства

$$L^K(\vec{Q}_n) \sim 2^n, \quad L^K(\vec{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

**Лемма 7.5.** Для  $n = 1, 2, \dots$  выполняются неравенства

$$L^\pi(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right), \quad L^C(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$D(\mu_n) \leq n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ  $\mu_n$  и бесповторная по информационным БП формула  $\mathcal{F}_n$  с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит  $7 \cdot 2^n$ .

*Доказательство.* Искомая  $\pi$ -схема  $\Sigma_n$  получается в результате присоединения к каждому из выходов  $(1, 2^n)$ -КС  $\Sigma_n^{(\&)}$ , построенной при доказательстве леммы 7.4, контакта соответствующей ему информационной БП и отождествления концевых вершин всех таких контактов в выходную вершину  $\Sigma_n$ . Искомая СФЭ  $S_n$  получается из формулы с поднятыми отрицаниями, которая моделирует  $\pi$ -схему  $\Sigma_n$  (см. §6 гл. 2), в результате применения операций приведения (см. §1) для вершин, соответствующих ФЭ  $\neg$ .

Для завершения доказательства леммы на основе разбиения  $\Delta$ , введенного в лемме 7.4, и представления (7.11) построим для ФАЛ  $\mu_n$  формулу  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \\ = \bigvee_{i=1}^{\lambda} \mathfrak{A}_i(x') \& \bigwedge_{\sigma'' \in B^{n-q}} \left( J_{\bar{\sigma}''}(x'') \vee \bigvee_{\sigma' \in \delta_i} x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}} y_{\nu(\sigma', \sigma'')} \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

§7. СИНТЕЗ СХЕМ ДЛЯ ФАЛ ИЗ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ 53

где  $\mathfrak{A}_i$  — совершенная ДНФ ФАЛ  $\chi_i$ ,  $i = 1, \dots, \lambda$ , и  $J_{\sigma''}(x'') = \overline{K}_{\sigma''}(x'')$ . Легко видеть, что  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  реализует мультиплексорную ФАЛ  $\mu_n$ , неповторна по БП  $y_0, \dots, y_{2^n-1}$  и что  $\text{Alt}(\tilde{\mathcal{F}}_n) \leq 3$ .

Пусть, далее, формула  $\mathcal{F}_n$  получается в результате оптимизации формулы  $\tilde{\mathcal{F}}_n$  по глубине. Тогда при

$$n \geq 3 \text{ и } m = \left\lceil \log \left( \frac{n}{3} \right) \right\rceil$$

сложность и глубина  $\mathcal{F}_n$  будут удовлетворять условиям леммы. Действительно, если<sup>1</sup>  $n \geq 6$ , то  $q \leq n - m$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} R(\tilde{\mathcal{F}}_n) &= 2^{q-m} (q \cdot 2^m + 2^{n-q} ((n-q) + 2^{m+1})) \leq \\ &\leq 2^{n+1} + n \cdot 2^{n-m} \leq 2^{n+1} + 3 \cdot 2^n = 5 \cdot 2^n. \end{aligned}$$

При этом, очевидно,

$$L_-(\tilde{\mathcal{F}}_n) \leq \frac{1}{2} (R(\tilde{\mathcal{F}}_n) - 2^n) \leq 2^{n+1}$$

и, таким образом,

$$L(\tilde{\mathcal{F}}_n) \leq R(\tilde{\mathcal{F}}_n) + L_-(\tilde{\mathcal{F}}_n) - 1 \leq 7 \cdot 2^n - 1,$$

откуда в силу следствия §2 из теоремы 2.1 следует, что  $D(\mathcal{F}_n) \leq n + 6$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$D(\mu_n) \leq n + 6.$$

**Лемма 7.6.** Если для ФАЛ  $f$ ,  $f \in P_2(n)$ , и для любого  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , ФАЛ  $f_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$ , то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f_0), L_{\&, \vee}^C(f_1)\} + 2. \quad (7.13)$$

<sup>1</sup>Случай  $n \leq 5$  рассматриваются отдельно.

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma$  — минимальная по числу ФЭ  $\&$  и  $\vee$  СФЭ из класса  $\mathcal{U}^C$ , которая реализует ФАЛ  $f$  и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ  $\neg$ . Пусть константа  $\sigma$ ,  $\sigma \in B$ , равна 0 тогда и только тогда, когда БП  $x_n$  подается в  $\Sigma$  либо на вход ФЭ  $\&$ , либо на вход ФЭ  $\neg$ , выход которого поступает на вход ФЭ  $\vee$ .

Рассмотрим СФЭ  $\hat{\Sigma}$ , которая реализует ФАЛ  $f_\sigma$ ,  $f_\sigma \neq 0, 1$ , и получена из СФЭ  $\Sigma$  в результате подстановки  $x_n = \sigma$ , а также последующего ЭП на основе тождеств  $\underline{\tau}^{\text{ПК}}$  (см. §5 гл. 2) вплоть до устранения всех вхождений констант. Убедимся в том, что при указанном ЭП будут удалены по крайней мере два ФЭ типа  $\&$  или  $\vee$ .

Действительно, в случае  $\sigma = 0$  из СФЭ  $\Sigma$  будет удален ФЭ  $\mathcal{E}'$ , являющийся либо ФЭ типа  $\&$ , на вход которого подается БП  $x_n$ , либо ФЭ типа  $\vee$ , на вход которого подается выход ФЭ  $\neg$ , присоединенного к входу  $x_n$ . Заметим, что выход ФЭ  $\mathcal{E}'$  не может быть выходом схемы и не может быть входом ФЭ  $\neg$ , выход которого является выходом схемы, так как при этом ФАЛ  $f_\sigma$  была бы равна константе. Следовательно, в СФЭ  $\Sigma$  имеется ФЭ  $\mathcal{E}''$  типа  $\&$  или  $\vee$ , на вход которого поступает либо выход  $\mathcal{E}'$ , либо выход ФЭ  $\neg$ , присоединенного к выходу  $\mathcal{E}'$ . Легко видеть, что ФЭ  $\mathcal{E}''$  тоже будет удален при переходе от  $\Sigma$  к  $\hat{\Sigma}$  и, следовательно, справедливы неравенства

$$L_{\&, \vee}(f) = L_{\&, \vee}(\Sigma) \geq L_{\&, \vee}(\hat{\Sigma}) + 2 \geq L_{\&, \vee}(f_\sigma) + 2,$$

из которых вытекает (7.13).

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.**

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 2. \quad (7.14)$$

Действительно, (7.14) получается в результате применения леммы 7.6 последовательно ко всем информационным

§7. СИНТЕЗ СХЕМ ДЛЯ ФАЛ ИЗ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ55

БП  $y_{2^n-1}, \dots, y_1$  и учитывая, что получившаяся в результате соответствующих подстановок констант ФАЛ существенно зависит от БП  $x_1, \dots, x_n, y_0$ .

**Следствие 2.** Из следствия 1 и леммы 7.5 вытекает асимптотическое равенство

$$L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}.$$

**Следствие 3.** Из (7.14) в силу леммы 4.1 главы 2 вытекает неравенство

$$D(\mu_n) \geq n + 1,$$

которое с учетом следствия из леммы 7.5 приводит к соотношению

$$n + 1 \leq D(\mu_n) \leq n + 6.$$

## Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.

- [18] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [19] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [20] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [21] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [22] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [23] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [24] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [26] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.
- [27] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [28] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

- 
- [29] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [30] Яблонский С. В. Эквивалентные преобразования управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [31] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [32] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [33] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.