ЗАДАЧИ ПО ... "МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"

Часть 1.

1. Определить тип уравнения и привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется:

$$u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}+u_x-3u_y+u=0,$$

$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-u_x-u_y+2u=0,$$

$$u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}+2u_x+u_y-u=0,$$

$$xu_{xx}+(y+|y|)u_{yy}+u_y=0.$$

2. Вывести уравнение продольных колебаний стержня. Сформулировать граничные условия для левого конца $x=0$ и правого конца $x=l$ в случае:

а) закрепленных концов;

б) свободных концов;

в) упруго закрепленных концов;

г) концов, при движении которых возникает сила трения, пропорциональная их скорости.

3. Вывести уравнения электрических колебаний в проводах (телеграфные уравнения). Рассмотреть случай линии без потерь. Сформулировать граничные условия в случае:

а) заземленного конца;

б) разомкнутого конца;

в) конца, заземленного через сопротивление.

4. Сформулировать математическую постановку задачи о свободных колебаниях струны с закрепленными концами, возбуждаемых:

а) щипком (гитара);

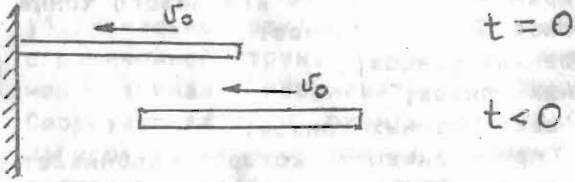
б) ударом молоточка (рояль).

В каких точках будет нарушаться гладкость этих решений?

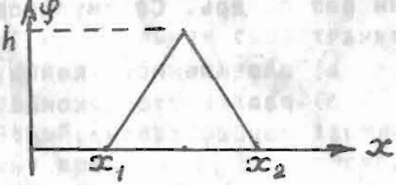
5. Стержень растянут под действием двух одинаковых по величине сил, приложенных к его концам и действующих в противоположных направлениях

В момент $t=0$ действия сил мгновенно прекращаются. Сформулировать математическую задачу о возникающих при этом колебаниях стержня.

6. Недеформированный стержень движется как целое с постоянной скоростью v_0 в отрицательном направлении оси x. В момент времени $t=0$ его конец упирается в стенку, перпендикулярную оси x, и жестко к ней прилипает. Сформулировать математическую задачу о возникающих при этом колебаниях стержня.



7. Рассмотреть задачу о свободных колебаниях неограниченной струны в случае нулевой начальной скорости $(\psi(x)=0)$ и локального начального отклонения $\varphi(x)$.



Построить профили струны в моменты времени $t=t_0>0$ при различных t_0. Нарисовать графики движения точек

$$\bar{x} = x_1 + 3/4\,(x_2 - x_1), \quad \tilde{x} = x_1 + 5/4\,(x_2 - x_1).$$

В краких точках фазовой плоскости нарушается гладкость решения? Дать определение решения для рассматриваемой задачи.

8. Рассмотреть задачу о свободных колебаниях неограниченной струны в случае нулевого начального отклонения $(\varphi(x)=0)$ и локальной начальной скорости

$$\psi(x)=\begin{cases} v_0, & \xi-\delta\le x\le \xi+\delta, \\ 0, & x\bar{\in}[\xi-\delta,\ \xi+\delta]. \end{cases}$$

Построить профили струны в разные моменты времени. Нарисовать графики движения точек $\bar{x}=\xi-\delta/2$, $\tilde{x}=\xi+\delta/2$. В каких точках фазовой плоскости нарушается гладкость решения? Дать определение решения для рассматриваемой задачи.

9. Написать решение задачи о колебаниях неограниченной струны при следующих начальных условиях:

$$u(x,0)=\varphi(x)=v_0\sin kx,$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=v_0 ak\cos kx)$$

10. С помощью нечетного продолжения начальных условий свести задачу для полуограниченной струны с закрепленным концом к задаче для неограниченной струны. Записать искомое решение задачи $u(x,t)$ через заданное начальное отклонение $\varphi(x)$ и начальную скорость $\psi(x)$.

11. Рассмотреть решение задачи для полуограниченной струны с закрепленным концом в случае, когда начальное отклонение имеет вид треугольника высоты h на сегменте $[x_1,x_2]$ и равно нулю вне сегмента, а начальная скорость $\psi(x)$ всюду равна нулю. Где будет нарушаться гладкость решения? Дать определение обобщенного решения для данного случая.

12. С помощью четного продолжения начальных условий свести задачу для полуограниченной струны со свободным концом к задаче для неограниченной струны. Записать искомое решение задачи $u(x,t)$ через заданные начальное отклонение $\varphi(x)$ и начальную скорость $\psi(x)$.

13. Рассмотреть решение задачи для полуограниченной струны со свободным концом в случае, когда начальное отклонение $\varphi(x)$ всюду равно нулю, а начальная скорость имеет вид:

$$\psi(x) = \begin{cases} v_0, & x \in [\xi - \delta/2, \xi + \delta/2], \\ 0, & x \notin [\xi - \delta/2, \xi + \delta/2]. \end{cases}$$

Дать определение обобщенного решения для данного случая.

14. Начальное отклонение и начальная скорость полуограниченной струны нулевые. В момент $t=0$ ее конец начинают перемещать по закону $u(0,t)=u_0 \sin\omega t$. Сформулировать и решить математическую задачу. Нарисовать профиль струны в момент времени $t_0 > 0$, построить график движения некоторой точки струны $x_0 > 0$. Дать определение обобщенного решения для данного случая.

1

15. Начальное отклонение и начальная скорость полуограниченной струны $x \geq 0$ нулевые. В момент $t=0$ на ее конец начинает действовать сила $f(t) = f_0 \sin\omega t$. Описать процесс колебаний. Нарисовать профиль струны в некоторый момент времени t_0, построить график движения некоторой точки струны x_0.

$f_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)$

$\frac{3\pi}{\omega}$ $x = \frac{2\pi a}{\omega}$

X>0

16. По полуограниченной струне распространяется волна $f(x+at)$, где

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ u_0\sin ky, & y>0.\end{cases}$$

В момент $t=0$ ее передний фронт доходит до граничной точки $x=0$. Найти отраженную волну в случае, когда при $x=0$ выполняется граничное условие:

а) закрепленного конца;

б) свободного конца;

в) упруго закрепленного конца;

г) конца, при движении которого возникает сила трения, пропорциональная скорости.

17. Решить задачу 4 а). Исследовать, будет ли полученное решение классическим или обобщенным?

Стр 98

18. Решить задачу 4 б). Исследовать, будет ли полученное решение классическим или обобщенным? Выполнить предельный переход при $\delta\to 0$ (δ – длина участка струны, соприкасающаяся с молоточком) и фиксированной величине полного начального импульса $I=2\delta\rho v_0$ (построить функцию влияния сосредоточенного импульса).

19. Рассмотреть задачу о свободных колебаниях струны с закрепленными концами при следующих начальных условиях:

$$a)\quad \varphi(x)=A[x(l-x)]^{\alpha},\ \psi(x)=0;$$

$$б)\quad \varphi(x)=0,\ \psi(x)=B[x(l-x)]^{\beta},$$

При каких значениях α, β можно гарантировать существование классического решения задачи в первом и втором случае?

$\sum n^k|\varphi_n| - c$

а) Треб. $\varphi(x)$ до 2ого порядка включ. непрерыв., требов. к-и: $\varphi(0)=\varphi(l)=0$

$\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$

б) ψ – непрерывн. дифф. к-и – 2.
$\psi(0)=\psi(l)=0$

20. Решить вспомогательную задачу для струны (стержня) со свободными концами. Установить смысл решения $u(x,t)=A_0+B_0t$, соответствующего собственному значению $\lambda=0$.

21. Решить задачу 5.

22. Решить вспомогательную задачу для струны (стержня) в случае, когда один конец закреплен, а другой свободен.

23. Решить задачу 6.

24. Решить задачу о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами, возбуждаемых периодической внешней силой

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f_0\sin\omega t \quad (f_0=const),$$
$$u(0,t)=u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=u_t(x,0)=0.$$

Разобрать случаи резонанса $\omega=\omega_n=n\pi a/l$, отдельно для нечетного и четного n.

25. Дан стержень со свободными концами. Начальные условия нулевые. В момент $t=0$ начинает действовать стационарная сила $f(x)=f_0x/l$. Описать движение стержня.

26. Стержень неподвижен и недеформирован. Один конец стержня $x=0$ закреплен. В момент $t=0$ на второй конец $x=l$ начинает действовать постоянная сила f_0. Описать процесс колебаний стержня.

27. Дана струна. Начальные условия нулевые. Конец $x=l$ закреплен. В момент $t=0$ конец $x=0$ начинает перемещаться по гармоническому закону $u(0,t)=u_0\sin\omega t$.

Описать колебания струны. Рассмотреть случай резонанса, когда $\omega=\omega_n=n\pi a/l$, $n=1,2,\ldots$

2

28. Решить задачу об изменении температуры в неограниченном стержне в случае, когда начальное распределение температуры имеет вид

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}u_1, & x<0,\\ u_2, & x>0.\end{cases}$$

~~В каком смысле построенное решение удовлетворяет начальному условию при $t\to 0$?~~ Нарисовать профили распределения температуры в стержне в моменты времени t_1 и t_2 $(0<t_1<t_2)$. Найти предельное распределение температуры в стержне при $t\to\infty$. Нарисовать график изменения температуры в стержне в двух точках $x_{1,2}=\pm l$. Подсчитать поток тепла $q(t)$ который проходит через сечение $x=0$. Найти полное количество тепла, которое проходит через сечение $x=0$ от начала процесса до момента t:

$$Q(t)=\int_0^t q(\tau)\,d\tau.$$

29. Начальное распределение температуры в неограниченном стержне имеет вид $u(x,0)=u_0\sin kx$. Решить задачу о температуре в стержне $u(x,t)$. Определить предельное распределение температуры при $t\to\infty$.

30. Рассмотреть задачи для уравнения теплопроводности в случае полуограниченного стержня с однородными граничным условием первого и второго рода. Свести их к задаче для неограниченного стержня с помощью нечетного и четного продолжения начального условия.

$u_{tt}=u_{xx}+3u+\sin t\cdot\cos 2x$

$0<x<\pi,\ t>0$

$u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0$

$u(x,0)=u_t(x,0)=0$

31. Дан полуограниченный стержень с теплоизолированным концом $x=0$. Начальное распределение температуры имеет вид:

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} u_0, & 0\le x\le l,\\ 0, & x>l.\end{cases}$$

Выписать решение задачи. В каких точках решение удовлетворяет начальному условию при $t\to 0$? Сформулировать определение решения для данного случая. Найти предельное распределение температуры при $t\to\infty$. Построить график изменения температуры со временем в точках $x=0$, $x=l$, $x=2l$.

32. Конец полуограниченного стержня $x=0$ теплоизолирован. Начальное распределение температуры имеет вид

$$u(x,0)=u_0\exp(-\lambda x^2).$$

Решить задачу о температуре в стержне $u(x,t)$.

33. Полуограниченный стержень имеет нулевую начальную температуру. Конец стержня при $t>0$ поддерживается при температуре u_0. Решить задачу о температуре в стержне $u(x,t)$. Найти предельное распределение температуры при $t\to\infty$. Подсчитать поток тепла через границу стержня $x=0$.

34. Концы стержня $0\le x\le l$ поддерживаются при нулевой температуре. Начальное распределение температуры имеет вид

$$u(x,0)=\varphi(x)=u_0\frac{x}{l}.$$

Решить задачу. Найти предельное распределение температуры при $t\to\infty$.

35. Решить задачу 34 в случае, когда концы стержня теплоизолированы.

126 - 73 - 26

36. Начальная температура стержня $0\le x\le l$ нулевая. При $t>0$ левый конец стержня поддерживается при нулевой температуре, правый - при температуре u_0. Решить задачу о температуре стержня $u(x,t)$. Найти предельное распределение температуры при $t\to\infty$.

3

37. Начальная температура стержня $0\le x\le l$ нулевая. При $t>0$ левый конец стержня поддерживается при температуре u_0, правый - теплоизолирован. Решить задачу о температуре стержня $u(x,t)$. Найти предельное распределение температуры при $t\to\infty$.

38. Начальная температура стержня $0\le x\le l$ нулевая. При $t>0$ на концы стержня подается одинаковый тепловой поток q, причем на левом конце он направлен внутрь стержня, на правом - из стержня. Решить задачу о температуре стержня $u(x,t)$. Найти предельное распределение температуры при $t\to\infty$.

39. Решить неоднородное уравнение теплопроводности

$u_t=a^2u_{xx}+f_0$, $f_0=const$, для стержня $0\le x\le l$ при нулевом начальном условии и нулевых граничных условиях первого рода. Найти предельное распределение температуры при $t\to\infty$.

40. Решить неоднородное уравнение теплопроводности $u_t=a^2u_{xx}+f_0$, $f_0=const$, для стержня $0\le x\le l$ при нулевой начальной температуре. Левый конец стержня поддерживается при нулевой температуре, правый - теплоизолирован. Найти предельное распределение температуры при $t\to\infty$.

Часть 2

41. Построить частные решения двумерного уравнения Лапласа методом разделения переменных в полярных координатах. Записать решение внутренней и внешней задачи Дирихле для круга: $u(a,\varphi)=f(\varphi)$.
Записать решение внутренней и внешней задачи Неймана для круга: $\partial u(a,\varphi)/\partial r = f(\varphi)$.

42. Решить внутреннюю задачу Дирехле для круга при граничном условии
$$u(a,\varphi)=\begin{cases} u_0, & 0\le\varphi<\pi, \\ 0, & \pi\le\varphi<2\pi. \end{cases}$$

43. Решить внутреннюю задачу Неймана для круга при граничном условии
$$\frac{\partial u(a,\varphi)}{\partial r}=\begin{cases} 1, & 0\le\varphi<\pi, \\ -1, & \pi\le\varphi<2\pi. \end{cases}$$

44. В однородное электрическое поле $\vec{E}=E_0\vec{i}$ внесен проводящий цилиндр, ось которого параллельна оси Z. Найти поле в присутствии цилиндра. Построить его силовые линии. Подсчитать плотность поверхностных зарядов, индуцированных на поверхности цилиндра.

45. Решить задачу о потенциальном обтекании цилиндра потоком несжимаемой жидкости. Ось цилиндра параллельна оси Z, поток вдали от цилиндра является однородным и направлен вдоль оси X: $\vec{v}_\pi=v_0\vec{i}$ .. Найти поле скоростей, построить линии тока, определить точки, в которых величина скорости оказывается минимальной и максимальной.

46. Дана полуполоса $0\le x\le \ell,\ 0\le y<\infty$. Основание ее $y=0,\ 0\le x\le \ell$ имеет потенциал u_0, а боковые стороны $x=0,\ x=\ell$ находятся под нулевым потенциалом. Найти распределение потенциала внутри области.

47. Методом электростатических изображений построить функцию Грина для круга. Записать с ее помощью решение внутренней задачи Дирихле для круга в виде интеграла Пуассона.

48. С помощью интеграла Пуассона получить решение задачи Дирихле для круга с граничным условием $u(a,\varphi)=\cos\varphi$.

49. С помощью интеграла Пуассона для полуплоскости получить решение задачи Дирихле с граничным условием
$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1, & x\ge 0. \end{cases}$$

50. С помощью решения задачи Дирихле для полупространства $z>0$, предполагая, что граничная функция не зависит от y: $u(x,y,z)|_{z=0}=f(x)$ получить решение задачи Дирихле для полуплоскости.

51. Методом электростатических изображений построить функцию Грина для шара. Записать с ее помощью решения внутренней задачи Дирихле для шара.

52. С помощью метода конформных преобразований свести задачу Дирихле для полосы $0<y<h$ с граничными условиями $u(x,0)=f_1(x),\ u(x,h)=f_2(x)$ к задачи Дирихле для полуплоскости.

53. Используя редукцию задачи для полосы к задаче для полуплоскости, построить решение следующих граничных условиях
$$f_1(x)=0, \quad f_2(x)=u_0.$$

54. С помощью метода конформных преобразований построить функцию Грина для полуплоскости.

55. С помощью метода конформных преобразований построить функцию Грина для полосы $0<y<h$. Записать с ее помощью решение задачи Дирихле с граничными условиями $u(x,0)=f_1(x),\ u(x,h)=f_2(x)$. Найти решение задачи с граничными условиями, сформулированными в задаче 53.

1) 16 б)

56. Написать выражение для потенциала двойного слоя, создаваемого в двумерном случае диполями, распределенными вдоль оси X с плотностью $\nu(\xi)$. Вычислить потенциал при $\nu(\xi)=\begin{cases}\nu_0, & |\xi|\le \ell,\\ 0, & |\xi|>\ell.\end{cases}$

Дать интерпретацию ответа через угол видимости. Исследовать предельное поведение $W(x,y)$ при разных значениях x, когда $\boxed{y\to\pm 0}$. Рассмотреть особо случай $x\to\ell, y\to\pm0$. Найти предельную форму решения при $\ell\to\infty$.

57. Написать выражение для потенциала двойного слоя, создаваемого в двумерном случае диполями, распределенными вдоль эллипса с полуосями a и b. При постоянной плотности дипольных моментов $\nu(P)=\nu_0=const$, вычислить потенциал в точках $M_1=(0,0)$, $M_2=(a,0)$. Полученный ответ сравнить с общими результатами значений потенциала при постоянной плотности дипольных моментов.

58. Написать выражение для потенциала двойного слоя, создаваемого диполями, распределенными по поверхности сферы радиуса a. При постоянной плотности дипольных моментов $\nu(P)=\nu_0=const$ вычислить потенциал в точках $M_1=(0,0,0)$, $M_2(0,0,a)$. Полученный ответ сравнить с общим результатом о значении потенциала при постоянной плотности дипольных моментов.

59. Написать выражение для потенциала простого слоя, создаваемого в двумерном случае зарядами с плотностью μ, распределенными вдоль оси X. Вычислить потенциал $V(x,y)$ при плотности

$$\mu(\xi)=\begin{cases}\mu_0, & |\xi|\le\ell,\\ 0, & |\xi|>\ell.\end{cases}$$

Найти $\partial V(x,y)/\partial y$. Исследовать предельное поведение $V(x,y)$ и $\partial V(x,y)/\partial y$ при разных значениях x, когда $y\to\pm0$. Рассмотреть особо случай $x\to\ell, y\to\pm0$. Нарисовать графики функций $V(0,y)$, $\partial V(0,y)/\partial y$.

60. Написать выражение для потенциала простого слоя, создаваемого в двумерном случае зарядами с плотностью μ, распределенный вдоль эллипса с полуосями a и b. Полагая b=a, получить потенциал в случае окружности.

61. Используя потенциал двойного слоя, построить решение двумерной задачи Дирихле для полуплоскости.

62. Используя выражение потенциала двойного слоя для эллипса, получить интегральное уравнение для задачи Дирихле для эллипса.

63. Используя выражение потенциала двойного слоя для сферы, получить интегральное уравнение для задачи Дирихле для шара.

64. Используя выражение потенциала простого слоя для эллипса, получить интегральное уравнение для задачи Неймана для эллипса.

65. Найти объемный потенциал, создаваемый шаром радиуса a, заряженным с постоянной объемной плотностью . Построить графики потенциала и радиальной составляющей поля .

66. Построить решение задачи 65 другим способом, используя уравнение Пуассона:

$$\Delta u=\begin{cases}-4\pi\rho_0, & 0\le r<a,\\ 0, & r>a\end{cases}$$

и принимая во внимание сферическую симметрию задачи.

67. Найти объемный потенциал, создаваемый сферическим слоем $a \le r \le b$, заряженным с постоянной объемной плотностью ρ_0. Выполнить предельный переход $b \to a$, $\rho_0(b-a) \to \mu_0$, который означает переход от объемного потенциала к потенциалу простого слоя сферы радиуса a, с поверхностной плотностью зарядов μ_0.

68. Решить задачу на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа для прямоугольника и прямоугольного параллелепипеда.

69. Найти собственные функции оператора Лапласа для шара, обладающие сферической симметрией. Записать для них условие ортогональности. Указать соответствующие собственные значения.

70. Решить задачу:

$$\Delta V + cV = 0, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2,$$
$$V(0,y) = V(l_1,y) = 0,$$
$$V(x,0) = 0, \quad V(x,l_2) = V_0 x(l_1 - x)/l_1^2.$$

Рассмотреть случаи, когда

$$c = \pi^2(1/l_1^2 + 1/l_2^2), \quad c = \pi^2(4/l_1^2 + 1/l_2^2).$$

71. Решить задачу: $\Delta V + cV = -1, \quad 0 < x < l_1, 0 < y < l_2,$

$$V(0,y) = V(l_1,y) = 0,$$
$$V(x,0) = V(x,l_2) = 0.$$

Рассмотреть случаи, когда

$$c = \pi^2(1/l_1^2 + 1/l_2^2), \quad c = 4\pi^2(1/l_1^2 + 1/l_2^2).$$

72. Решить задачу для шара:

$$\Delta V + cV = 0, \quad 0 \le r < a,$$
$$V(a) = V_0.$$

Рассмотреть случай

$$c = 9\pi^2/a^2.$$

73. Решить двумя методами задачу для шара:

$$\Delta V + cV = -1, \quad 0 \le r < a,$$
$$V(a) = 0$$

а) методом интегрирования уравнения с учетом сферической симметрии задачи;

б) методом разложения искомого решения в ряд по сферически симметрическим собственным функциям оператора Лапласа для шара.

Указать все значения c, для которых задача не имеет решения.

74. Решить внешнюю задачу для шара:

$$\Delta V - \varkappa^2 V = 0, \quad r > a,$$
$$V(a) = V_0,$$
$$V \xrightarrow[r \to \infty]{} 0.$$

75. Решить внешнюю задачу для шара:

$$\Delta V + k^2 V = 0, \quad r > a,$$
$$V(a) = V_0,$$
$$V = O(1/r),$$
$$\frac{dV}{dr} + ikV = o(1/r).$$

76. Интегрированием дифференциального уравнения с учетом сферической симметрии решить задачу:

$$\Delta V + k^2 V = \begin{cases} -1, & 0 \le r \le a, \\ 0, & a < r < \infty, \end{cases}$$

$$V(= O(1/r), \quad dV/dr + ikV = o(1/r).$$

77. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны с закрепленной границей при следующих начальных условиях:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = V_0 .$$

78. Решить задачу об остывании тела кубической формы, равномерно нагретого до температуры u_c, если, начиная с момента t=0, на его границе поддерживается нулевая температура.

79. Решить задачу об остывании шара, равномерно нагретого до температуры u_0, если, начиная с момента t=0, на его границе поддерживается нулевая температура.

Методы математической физики.
- Методическая разработка. -
М., 1990 г., 28 с.

Составители: профессор Костомаров Д.П.
доцент Сушко В.Г.

Подписано в печать 29.12.89 г. Формат 60x24/16. Тир. 500
Бумага № 1. Объём 1,75 п.л. Заказ № 11. Бесплатно.

Ротапринт НИВЦ МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы.