

# 1. Решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu_x + cu + f(x, t), x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \langle \text{граничные условия} \rangle \end{cases}$$

$\langle \text{граничные условия} \rangle$  имеют вид:

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \text{ (тип 1) или } \begin{cases} u_x(0, t) = \mu_1(t) \\ u_x(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \text{ (тип 2) или } \begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u_x(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \text{ (тип 3) или} \\ \begin{cases} u_x(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \text{ (тип 4)}$$

Решение:

1. Замена – для типов 1,3,4  $v = u + \alpha(t)x + \beta(t)$ ; для типа 2  $v = u + \alpha(t)x^2 + \beta(t)x$
2. Если в правой части ещё осталась  $u_x$ , делаем замену  $\omega = ve^{\alpha x}$

3. Имеем уравнение 
$$\begin{cases} \omega = a^2 \omega_{xx} + c\omega + f(x, t) \\ \omega(x, 0) = 0 \\ \langle \text{граничные условия} \rangle \end{cases}$$

$\omega(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x)$ , причём для типов 1-4  $X_n(x)$  находится по формулам:

1. 
$$\begin{cases} X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \\ \lambda_n = \left( \frac{\pi}{l} n \right)^2, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$
2. 
$$\begin{cases} X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} x \\ \lambda_n = \left( \frac{\pi}{l} n \right)^2, n = 0, 1, \dots \end{cases}$$
3. 
$$\begin{cases} X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \\ \lambda_n = \left( \frac{\pi}{l} \left( n - \frac{1}{2} \right) \right)^2, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$
4. 
$$\begin{cases} X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} x \\ \lambda_n = \left( \frac{\pi}{l} \left( n - \frac{1}{2} \right) \right)^2, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$T_n(t)$  находится из системы

$$\begin{cases} T'_n + (\lambda_n a^2 - c) T_n = f_n(t), \text{ где} \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx$$

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx$$

## 2. Уравнение теплопроводности на прямой

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), x \in (-\infty; +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x), |u| < c \end{cases}$$

Решение:

$$x_k(x) = e^{ikx}, k \in R, \lambda = k^2$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, t) \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t G(x, y, t - \tau) f(y, \tau) d\tau dy, \text{ где}$$

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} - \text{функция Грина, } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx, \Phi(+\infty) = 1$$

### 2'. Задача на полупрямой

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = \mu(t) \text{ (№1) или } u_x(0, t) = \mu(t) \text{ (№2)} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\hat{f}(\hat{\varphi}) = \begin{cases} \text{нечётное продолжение для 1 на } (-\infty, 0) \\ \text{чётное продолжение для 2} \end{cases}$$

## 3. Уравнения Лапласа и Пуассона в круге/кольце

$$1) \begin{cases} \Delta u = 0, r < a \\ u(a, \varphi) = g(\varphi) \\ u'_r(a, \varphi) = g(\varphi) \end{cases}$$

Ищем решение в виде

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n A_n \cos n\varphi + r^n B_n \sin n\varphi)$$

Соответственно, если в граничном условии производная  $u$ , то эту формулу надо почленно продифференцировать.

Далее остаётся подставить в неё значение  $r=a$  и найти коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ . Скорее всего,  $g(\varphi)$  имеет вид  $g(\varphi) = k + \sin m\varphi + \cos n\varphi$ , поэтому эти коэффициенты находятся очевидным образом.

$$2) \begin{cases} \Delta u = 0, a < r < b \\ u(a, \varphi) = f(\varphi) \text{ (граничные условия тоже могут быть в виде производных)} \\ u(b, \varphi) = g(\varphi) \end{cases}$$

Ищем решение в виде

$$u(r, \varphi) = A_0 + C_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \frac{1}{r^n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \right]$$

Подставляем  $r=a$ , затем  $r=b$  и находим коэффициенты из полученной системы уравнений.

## 4. Уравнения Лапласа и Пуассона

1) Кольцевой сектор

$$\begin{cases} \Delta u = 0, a < r < b, 0 < \varphi < \alpha \\ u(r, 0) = \mu_1(r) \\ u(r, \alpha) = \mu_2(r) \\ u(a, \varphi) = f_1(\varphi) \\ u(b, \varphi) = f_2(\varphi) \end{cases}$$

Решение:

$$f_{in} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f_i(\varphi) \sin \frac{\pi}{\alpha} n \varphi d\varphi$$

$$\begin{cases} A_n a^{\frac{\pi}{\alpha} n} + B_n a^{-\frac{\pi}{\alpha} n} = f_{1n} \\ A_n b^{\frac{\pi}{\alpha} n} + B_n b^{-\frac{\pi}{\alpha} n} = f_{2n} \end{cases}$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^{\frac{\pi}{\alpha} n} + B_n r^{-\frac{\pi}{\alpha} n} \right) \sin \frac{\pi}{\alpha} n \varphi$$

2) Круговой сектор

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < r < a, 0 < \varphi < \alpha \\ u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0 \\ u(a, \varphi) = f(\varphi) \end{cases}$$

Решение:

$$A_n = a^{-\frac{\pi}{\alpha} n} \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \sin \frac{\pi}{\alpha} n \varphi d\varphi$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{\pi}{\alpha} n} \sin \frac{\pi}{\alpha} n \varphi$$

3) Прямоугольник

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ u(x, b) = \varphi_2(x) \\ u(0, y) = \psi_1(y) \\ u(a, y) = \psi_2(y) \end{cases}$$

Решение:

Раскладываем  $u$  как  $u = \bar{u} + \hat{u}$ , так что

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} = 0 \\ \bar{u}(x, 0) = 0 \\ \bar{u}(x, b) = 0 \\ \bar{u}(0, y) = \psi_1(y) \\ \bar{u}(a, y) = \psi_2(y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(x, 0) = \varphi_1(x) \\ \hat{u}(x, b) = \varphi_2(x) \\ \hat{u}(0, y) = 0 \\ \hat{u}(a, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n + B_n = \psi_{1n} \\ A_n e^{\frac{\pi}{b} n a} + B_n e^{-\frac{\pi}{b} n a} = \psi_{2n} \end{cases}$$

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n e^{\frac{\pi}{b} n x} + B_n e^{-\frac{\pi}{b} n x} \right) \sin \frac{\pi}{b} n y$$

4) Полуполоса

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < +\infty, 0 < y < b \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0 \\ u(0, y) = \psi_1(y) \end{cases}$$

Решение:

$$B_n = \frac{2}{b} \int_0^b \psi_1(y) \sin \frac{\pi}{b} ny dy$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{\pi}{b} nx} \sin \frac{\pi}{b} ny$$

---

Note: если граничные условия вида  $u(r, 0)$ ;  $u(r, \alpha)$  заданы в форме производных, то нужно определить тип уравнения так же, как и в уравнении теплопроводности. В результате в соответствующих интегралах и суммах  $\sin \varphi$  может поменяться на  $\cos \varphi$ , а  $n$  – на  $n - \frac{1}{2}$ .