1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Глава 1. Граничные задачи для уравнения теплопроводности.

§ 1. Построение математической модели процесса распространения тепла в пространстве. Вывод уравнения теплопроводности.

Процесс распространения тепла в пространстве можно описать температурой $u(M,t)$, зависящей от точек $M(x,y,z)$ и времени t (x, y, z – декартовы координаты точки в пространстве). Если температура зависит от точек M, то возникают потоки тепла, направленные от областей с высокой температурой к областям с меньшей температурой. Их можно охарактеризовать вектором плотности теплового потока $\vec{W}(M,t)$. Пусть $d\sigma$ – некоторая площадка, а $\vec{n}$ – единичная нормаль к $d\sigma$. Количество тепла, протекающее через $d\sigma$ за единицу времени, равно $W_n d\sigma = (\vec{W}\cdot\vec{n})d\sigma$. По закону Фурье $\vec{W} = -k\, grad_M\, u$, где скалярная величина k – коэффициент теплопроводности среды. В общем случае, если среда неоднородна, k является функцией точки M.

Выведем уравнение, описывающее процесс распространения тепла (уравнение теплопроводности). Рассмотрим некоторую область Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S. Уравнение баланса тепла для Ω за время $\Delta t = t_2 - t_1$ запишется в виде

$$\iiint_\Omega C\,\rho[u(M,t_2)-u(M,t_1)]d\tau_M = -\int_{t_1}^{t_2}dt\iint_S W_n(P,t)d\sigma_P + \int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_\Omega F(M,t)d\tau_M, \qquad (1.1)$$

где $M(x_M,y_M,z_M)$ – точка интегрирования по Ω, $d\tau_M = dx_M dy_M dz_M$ – элемент объёма, $P(x_P,y_P,z_P)$ – точка интегрирования по поверхности S, $d\sigma_P$ – элемент поверхности, C – удельная теплоемкость, ρ – плотность массы, $F(M,t)$ – плотность тепловых источников (тепло может подаваться в область, либо поглощаться вне зависимости от его температуры). Соотношение (1.1) представляет собой уравнение теплового баланса в области Ω за время Δt: изменение количества тепла в объёме Ω за время Δt (левая часть уравнения), обусловлено потоком тепла через граничную поверхность S (первое слагаемое в правой части уравнения) и теплом, выделившимся в объёме Ω за время Δt в результате действия источников (второе слагаемое в правой части уравнения).

Чтобы перейти от интегрального уравнения баланса к дифференциальному, предположим, что функция $u(M,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по (x,y,z) и один раз по t, а соответствующие производные непрерывны. Тогда можно воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского

$$\iint_S W_n d\sigma_P = \iiint_\Omega div\vec{W}\, d\tau_M = -\iiint_\Omega div(k\cdot grad\, u)d\tau_M .$$

$$\iiint\limits_{\Omega} C\,\rho[u(M,t_2)-u(M,t_1)]d\tau_M = \int\limits_{t_1}^{t_2}dt\iiint\limits_{\Omega} div(k\cdot grad\,u)d\tau_M +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\iiint\limits_{\Omega} F(M,t)d\tau_M .$$

Фиксируем произвольную точку $\widetilde{M}(x,y,z)$ внутри Ω и будем стягивать Ω в эту точку, а Δt устремим к нулю. Применим формулу конечных приращений:

$$u(M,t_2)-u(M,t_1)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_3}\Delta t, \quad t_3\in(t_1,t_2),$$

тогда получим

$$\iiint\limits_{\Omega} C\,\rho\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_3}\Delta t\, d\tau_M = \int\limits_{t_1}^{t_2}dt\iiint\limits_{\Omega} div(k\cdot grad\,u)d\tau_M +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\iiint\limits_{\Omega} F(M,t)d\tau_M .$$

К каждому из интегралов применим теорему о среднем:

$$\Delta t\cdot\Omega\cdot C\cdot\rho\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_3\\ M=M_1}} = \left.div(k\cdot grad\,u)\right|_{\substack{t=t_4\\ M=M_2}}\cdot\Delta t\cdot\Omega+$$

$$+\left.F(M,t)\right|_{\substack{t=t_5\\ M=M_3}}\cdot\Delta t\cdot\Omega,\; t_4,t_5\in(t_1,t_2), \quad M_1,M_2,M_3\in\Omega.$$

Сокращая на $\Omega\cdot\Delta t$ и осуществляя предельный переход, получим $\quad C\,\rho\dfrac{\partial u(\widetilde{M},t)}{\partial t}=div(k\cdot grad\,u)+F(\widetilde{M},t).$

Учитывая, что точка $\widetilde{M}$ выбрана произвольно, будем иметь дифференциальное уравнение

$$C\,\rho\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}=div(k\cdot grad\,u(M,t))+F(M,t),$$

$M=M(x,y,z)\in\Omega$, или

$$C\,\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F .$$

В частности, если среда однородна $(k=const)$, то $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\dfrac{F}{C\rho}$, где $a^2=\dfrac{k}{C\,\rho}$ – коэффициент температуропроводности. В более короткой форме записи

$$u_t=a^2\Delta u+f, \qquad (1.2)$$

$f=\dfrac{F}{C\,\rho}$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнение (1.2) называется уравнением теплопроводности в пространстве, оно относится к уравнениям параболического типа. Если $f=0$ (т.е. внутри тела отсутствуют тепловые источники), то уравнение будет однородным: $u_t=a^2\Delta u$. Если функция $u(M,t)$ зависит только от одной пространственной переменной (допустим, от x), т.е. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, то уравнение будет иметь вид $u_t=a^2u_{xx}+f$.

Если граница S области Ω поддерживается при заданной температуре, то

$$u(P,t)=\mu(P,t), \quad P\in S, \quad t\geq 0,$$

где $\mu(P,t)$ – заданная функция. Это условие называется граничным условием I рода или условием Дирихле.

Если на поверхности S задан тепловой поток, то

$$-k(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=W_n(P,t), \quad P\in S, \quad t\geq 0,$$

где $k(P)$, $W_n(P,t)$ – заданные функции, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к поверхности S в точке $P\in S$. Так как $k(P)\neq 0$, то это условие можно записать в следующем

виде:
$$\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=\nu(P,t),\quad \nu(P,t)=-\frac{W_n(P,t)}{k(P)},\quad P\in S,\quad t\ge 0.$$
Это условие называется граничным условием II рода или условием Неймана.

Если на границе S области Ω происходит теплообмен с внешней средой, то по закону Ньютона получим третье краевое условие:
$$\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}+h(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\ge 0,$$
где $h(P)$, $\chi(P,t)$ – заданные функции, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к S в точке $P\in S$.

Подводя итог, можно поставить общую задачу:
$$C(M)\cdot\rho(M)\cdot u_t=div(k(M)\cdot grad\, u)+F(M,t),$$
$$M\in\Omega,\quad t>0,$$
$$u(M,0)=\varphi(M),\quad M\in\overline{\Omega}=\Omega\cup S,$$
$$\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\ge 0,$$
где $C(M), \rho(M), k(M), F(M,t), \varphi(M), \alpha(P), \beta(P), \chi(P,t)$ – заданные функции.

Рассмотрим теперь одномерное уравнение теплопроводности, т.е. будем искать распределение температуры внутри стержня длины l, у которого все точки поперечного сечения имеют одинаковую температуру. Направим ось x вдоль стержня. Тогда начально-краевая задача будет представлена так:
$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(0,l),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in[0,l],$$
I краевая задача: $u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad t\ge 0,$

II краевая задача: $u_x(0,t)=\nu_1(t),\quad u_x(l,t)=\nu_2(t),\quad t\ge 0,$

III краевая задача:
$u_x(0,t)-h_1u(0,t)=\eta_1(t),\quad u_x(l,t)+h_2u(l,t)=\eta_2(t),\quad t\ge 0$;
$h_1=const>0$, $h_2=const>0$. Граница $S:\{x=0,\ x=l\}$.

Задача может быть смешанной; в этом случае, например, на левом конце будет I краевое условие, на правом – II краевое условие или наоборот.

Рассмотрим некоторые предельные (асимптотические) случаи.

Допустим, что длина стержня достаточно велика, а изучается распределение температуры стержня вдали от его концов и в тот период времени, за который краевые условия не успеют повлиять на температуру. Тогда получим задачу на всей числовой оси:
$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(-\infty,\infty),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(-\infty,\infty).$$
Эта задача называется задачей с начальными условиями для уравнения теплопроводности или задачей Коши для уравнения теплопроводности.

Может быть другая предельная задача: краевое условие на левом конце сказывается на температуре рассматриваемого участка стержня, а краевое условие на правом конце – нет. Тогда получаем задачу на полубесконечной оси:
$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(0,\infty),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,\infty),$$
I краевая задача: $u(0,t)=\mu(t),\quad t\ge 0,$

II краевая задача: $u_x(0,t)=\nu(t),\quad t\ge 0,$

III краевая задача: $u_x(0,t)-hu(0,t)=\eta(t),\quad t\ge 0;\quad h>0.$

Можно рассматривать задачи, предельные не только в пространстве, но и по времени, т.е. возможна постановка задачи без начальных условий.

2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

§ 3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы сравнения.

Следующая теорема является основной, из неё будут получены важнейшие следствия, описывающие свойства решений уравнения теплопроводности.

Теорема (принцип максимума).

Решение уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \cdot \Delta u$, $(M,t) \in Q_T$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, большие, чем значения при $t=0$ или на границе S области Ω.

Доказательство.

Введём обозначение $A = \max\left\{ \underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)}; \quad \underset{P\in S,\, t\in[0,T]}{u(P,t)} \right\}$. Надо доказать, что $u(M,t) \le A$ для всех точек $(M,t) \in \overline{Q}_T$.

Это утверждение будем доказывать от противного. Пусть в точке $(M_0,t_0) \in Q_T$ функция $u(M,t)$ достигает своего максимального значения, большего A, т.е. $u(M_0,t_0) = A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $v(M,t) = u(M,t) + \alpha(t_0 - t)$, $\alpha > 0$. Очевидно, $v(M_0,t_0) = u(M_0,t_0) = A + \varepsilon$. Теперь оценим максимальное значение $v(M,t)$ на границе области $\overline{\Omega}$ или в начальный момент времени:

$$\max\left\{ \underset{M\in\overline{\Omega}}{v(M,0)}; \quad \underset{P\in S;\, t\in[0,T]}{v(P,t)} \right\} \le A + \alpha T < A + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } \alpha < \frac{\varepsilon}{2T}.$$

Таким образом, максимальное значение функции $v(M,t)$ на границе цилиндра меньше, чем некоторое её значение внутри. Следовательно, существует точка (M_1,t_1) внутри цилиндра, в которой функция должна достигать своего максимума: $(M_1,t_1) \in Q_T$, $v(M_1,t_1) \ge v(M_0,t_0) = A + \varepsilon$. Так как (M_1,t_1) – точка максимума, то должны выполняться условия для первых производных: $grad_M v(M_1,t_1) = 0$, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\ M=M_1}} \ge 0$ ($\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\ M=M_1}} = 0$, если $t \ne T$, или $\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=T\\ M=M_1}} \ge 0$) и для вторых производных: $\Delta v(M_1,t_1) \le 0$. Посмотрим, что это даёт для функции $u(M,t)$:

$$u(M,t) = v(M,t) - \alpha(t_0 - t), \quad \alpha > 0;$$
$$grad_M u(M_1,t_1) = grad_M v(M_1,t_1) = 0;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1\\ t=t_1}} = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1\\ t=t_1}} + \alpha \ge \alpha > 0;$$
$$\Delta u(M_1,t_1) = \Delta v(M_1,t_1) \le 0.$$

Таким образом в точке (M_1,t_1), лежащей внутри области Q_T, $\Delta u \le 0$, $u_t > 0$, т.е. не выполняется уравнение теплопроводности. Пришли к противоречию, теорема доказана.

Для однородного уравнения теплопроводности справедлив и принцип минимума:

Теорема. Решение уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \cdot \Delta u$, $(M,t) \in Q_T$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, меньшие, чем значения при $t=0$ или на границе S области Ω.

Доказательство.

Функция $u_1(M,t) = -u(M,t)$ – тоже решение уравнения теплопроводности. Максимальное значение для функции $u(M,t)$ является минимальным для функции $u_1(M,t)$. Следовательно, справедливость этой теоремы следует из предыдущей.

Следствие. Из доказанных теорем следует принцип экстремума: значения функции $u(M,t)$ для всех точек $(M,t)\in \overline{Q}_T$ лежат между максимальным и минимальным значениями функции на границе, т.е.

$$\min\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;\, t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\} \le u(M,t) \le \max\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;\, t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\}.$$

Замечание. Функция $u(M,t) = const$ является решением уравнения $u_t = a^2\cdot\Delta u$ и не противоречит принципам максимума и минимума.

Теорема сравнения 1. Пусть функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2\cdot\Delta u$, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $u_1(M,0)\ge u_2(M,0)$, $M\in\overline{\Omega}$, и $u_1(P,t)\ge u_2(P,t)$, $P\in S$, $t\in[0,T]$. Тогда $u_1(M,t)\ge u_2(M,t)$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Доказательство.

Введём функцию $v(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$. Пусть функция $v(M,t)$ не равна тождественно нулю, в противном случае утверждение теоремы очевидно. Так как уравнение $u_t = a^2\cdot\Delta u$ линейно и однородно, то линейная комбинация решений тоже является решением этого уравнения. Следовательно, функция $v(M,t)$ является решением уравнения $v_t = a^2\cdot\Delta v$, $v(M,t)\in C(\overline{Q}_T)$. Т.е. функция $v(M,t)$ – классическое решение уравнения $v_t = a^2\cdot\Delta v$, и выполнены неравенства $v(M,0)\ge 0$, $M\in\overline{\Omega}$, и $v(P,t)\ge 0$, $P\in S$, $t\in[0,T]$. Для функции $v(M,t)$ выполняется принцип минимума. Следовательно, $v(M,t)\ge 0$, $(M,t)\in\overline{Q}_T$, и $u_1(M,t)\ge u_2(M,t)$, $(M,t)\in\overline{Q}_T$. Теорема доказана.

Теорема сравнения 2. Пусть функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2\cdot\Delta u$, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $|u_1(M,0)-u_2(M,0)|\le\varepsilon$, $M\in\overline{\Omega}$, и $|u_1(P,t)-u_2(P,t)|\le\varepsilon$, $P\in S$, $t\in[0,T]$. Тогда $|u_1(M,t)-u_2(M,t)|\le\varepsilon$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Доказательство.

Рассмотрим три функции: $v_1(M,t) = -\varepsilon$, $v_3(M,t)=\varepsilon$ и $v_2(M,t) = u_1(M,t)-u_2(M,t)$. Все функции $v_i(M,t)$, $i=1,2,3$, удовлетворяют уравнению $v_t = a^2\cdot\Delta v$, принадлежат классу непрерывных функций $C(\overline{Q}_T)$ и удовлетворяют условиям $v_1(M,0)\le v_2(M,0)\le v_3(M,0)$, $M\in\overline{\Omega}$, и $v_1(P,t)\le v_2(P,t)\le v_3(P,t)$, $P\in S$, $t\in[0,t]$. Из принципов максимума и минимума следует $v_1(M,t)\le v_2(M,t)\le v_3(M,t)$, $(M,t)\in\overline{Q}_T$. Теорема доказана.

Замечание. Принципы максимума и минимума имеют место и для более общего уравнения $C\rho u_t = div(k(M)\cdot grad\, u) - qu$, $q\ge 0$.

№3
§ 4. Единственность и устойчивость решения первой начально – краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводнос:

$$u_t = a^2\Delta u + f(M,t), \quad (M,t)\in Q_T \qquad (4.1)$$

$$u(M,0) = \varphi(M), \quad M\in\overline{\Omega} \qquad (4.2)$$

$$u(P,t) = \mu(P,t), \quad P\in S, \quad t\in[0,T] \qquad (4.3)$$

Для существования классического решения этой задачи функции $\varphi(M)$ и $\mu(P,t)$ должны быть согласованы, т.е. $\varphi(P) = \mu(P,0)$, $P\in S$ (4. 4).

Теорема единственности решения.

Задача (4.1) – (4.3) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство.

Допустим, что существуют две функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$, являющиеся классическими решениями задачи (4.1) – (4.3). Функции $u_i(M,t)\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{(2,1)}(Q_T)$, $i=1,2$. Тогда функция $v(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$ является классическим решением задачи

$$v_t = a^2\Delta v, \quad (M,t)\in Q_T$$

$$v(M,0) = 0, \quad M\in\overline{\Omega}$$

$$v(P,t) = 0, \quad P\in S, \quad t\in[0,T], \quad v\in C(\overline{Q}_T).$$

Для функции $v(M,t)$ справедливы принципы максимума и минимума. (Для функций $u_i(M,t)$, $i=1,2$ принципы максимума и минимума не применимы, так как они удовлетворяют неоднородному уравнению). Следовательно, $v(M,t)$ удовлетворяет принципу экстремума: $0\le v(M,t)\le 0$, т.е. $v(M,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим понятие устойчивости краевой задачи.

Определение. Решение задачи (4.1) – (4.3) называется устойчивым, если малым изменениям начальных и граничных условий соответствует малое изменение решения.

Теорема об устойчивости решения.

Классическое решение задачи (4.1) – (4.3) устойчиво по начальным и граничным условиям.

Доказательство.

Пусть функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$, являются решениями задач

$$u_t = a^2\Delta u + f(M,t), \quad (M,t)\in Q_T$$

$$u(M,0) = \varphi_i(M), \quad M\in\overline{\Omega}$$

$$u(P,t) = \mu_i(P,t), \quad P\in S, \quad t\in[0,T], \quad i=1,2.$$

Предположим, что $|\varphi_1(M)-\varphi_2(M)|\le\varepsilon$, $M\in\overline{\Omega}$, и $|\mu_1(P,t)-\mu_2(P,t)|\le\varepsilon$, $P\in S$, $t\in[0,T]$. Надо доказать, что $|u_1(M,t)-u_2(M,t)|\le\varepsilon$ для всех $(M,t)\in\overline{Q}_T$. Рассмотрим функцию $v(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$, которая является решением задачи

$$v_t = a^2\Delta v, \quad (M,t)\in Q_T$$

$$v(M,0) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M), \quad M\in\overline{\Omega}$$

$$v(P,t) = \mu_1(P,t) - \mu_2(P,t), \quad P\in S, \quad t\in[0,T].$$

Так как функция $v(M,t)$ в граничных и начальных точках удовлетворяет условиям $|v(M,0)|\le\varepsilon$, $M\in\overline{\Omega}$, и $|v(P,t)|\le\varepsilon$, $P\in S$, $t\in[0,T]$, то из теоремы сравнения 2 следует, что $|v(M,t)|\le\varepsilon$, $(M,t)\in\overline{Q}_T$. Это и требовалось доказать.

4.СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ 1ОЙ КРАЕВОЙ

2.3 Существование решения первой краевой задачи. Метод разделения переменных

Остановимся более детально на первой краевой задаче:

$$[\mathbf{2.1}]\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) = \mu_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(l,t) = \mu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

– рассмотрим существование и единственность решения, устойчивость, применение функции Грина. Что же такое решение первой краевой задачи? Очевидно, в случае однородного уравнения теплопроводности ей удовлетворяет множество разрывных функций $\widetilde{u}(x,t)$ вроде

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(x,t) &= const, \quad (x,t) \in \mathbf{Q_T} = \{(\mathbf{x},\mathbf{t}) : (\mathbf{0};\ \mathbf{l}) \times (\mathbf{0};\ \mathbf{T}]\}; \\ \widetilde{u}(0,t) &= \mu_1(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ \widetilde{u}(l,t) &= \mu_2(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ \widetilde{u}(x,0) &= \phi(x); \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}$$

Поэтому потребуем от функции непрерывность — этим требованием, как мы увидим позже, отсекаются почти все неудобные для исследования функции.

Определение. Функция $u(x,t)$ называется **решением первой краевой задачи для уравнения теплопроводности** [2.1], если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $u \in C[Q_T]$;
2. $u_t,\ u_{xx} \in C[Q_T]$;
3. $u(x,t)$ удовлетворяет условиям [2.1].

Найдем решение для первой краевой задачи с нулевыми краевыми условиями с однородным уравнением теплопроводности:

$$[\mathbf{2.2}]\begin{cases} (1) \quad u_t = a^2u_{xx}, & 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T; \\ (2) \quad u(0,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ (3) \quad u(l,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ (4) \quad u(x,0) = \phi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Искать решение мы будем следующим образом: сначала с помощью преобразований исходного уравнения (важно отметить, что они не всегда будут строгими — это пока не требуется) построим некоторую функцию $u(x,t)$, а потом докажем, что при определенных ограничениях на начальные условия данная функция будет решением первой краевой задачи.

Определим новую функцию:

$$v(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставив нашу функцию в уравнение теплопроводности, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t).$$

Разделим обе части уравнения на $a^2X(x)T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Так как справа и слева стоят функции, зависящие от разных переменных, очевидно, что обе они равны некоторой константе, которую мы обозначим $-\lambda$:

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \qquad (2.3)$$

$$T'(t) + a^2\lambda\,T(t) = 0. \qquad (2.4)$$

Записав краевые условия для нашей функции $v(x,t)$:

$$\begin{cases} v(0,t) = 0; \\ v(l,t) = 0. \end{cases},\ t \in [0;\ T],$$

получим, что, ввиду ее представления в виде произведения,

$$\begin{cases} X(0) = 0; \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Соединив (2.3) с полученной системой, получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ X(0) = 0; \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Требуется найти все λ, при которых существуют ненулевые решения этой системы. Из курса "Дифференциальные уравнения" известно, что:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2,\ n \in N \text{ — собственные значения.} \\ X_n(x) = c_n^1 \sin(\dfrac{\pi n}{l}x),\ n \in N \text{ — соответствующие собственные функции } (c_n^1 \text{ — некоторые константы).} \end{cases}$$

Подставляя λ_n в (2.4), получим уравнения вида

$$T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0.$$

Решением, очевидно, будет $T_n = c_n^2 \exp\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}$. Объединив $X_n(x)$ и $T_n(t)$, получим:

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \sin(\frac{\pi n}{l}x)\exp\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}.$$

Заметим, что все такие функции являются решениями уравнения теплопроводности (1) и удовлетворяют краевым условиям (2),(3).

Определим функцию $u(x,t)$ как сумму ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t).$$

Заметим, что она удовлетворяет краевым условиям, а в случае равномерной сходимости ряда из производных — и уравнению теплопроводности. Подберем константы так, чтобы выполнялось начальное условие:

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{\pi n}{}$$

Домножим равенство на $\sin(\frac{\pi m}{l}x)$ (m — целое), сделаем замену переменной ($x \to s$) и проинтегрируем по s:

$$\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi m}{l}s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \sin(\frac{\pi m}{l}s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)\,ds.$$

$$\int_0^l \sin(\frac{\pi n}{l}x)\sin(\frac{\pi m}{l}x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{l}{2}, & n = m. \end{cases} \implies$$

$$\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi m}{l}s)\,ds = \frac{l}{2}c_m \implies$$

$$c_m = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi m}{l}s)\,ds.$$

Окончательно получаем формулу для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\left(\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)\,ds\right)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\exp\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}. \tag{2.5}$$

Теперь докажем, что эта формула корректна.

Теорема 2.1 (существования). *Пусть функция $\phi(x)$ такова, что $\phi(x) \in C^1[0;\,l]$ и $\phi(0) = \phi(l) = 0$. Тогда формула (2.5) определяет класс решений задачи [2.2].*

Доказательство. **(1)** Докажем сначала непрерывность полученной функции $u(x,t)$ в $\overline{Q}_T$. Легко видеть, что

$$|u(x,t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|v_n(x,t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|,$$

где $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)\,ds$. Понятно, что если мы докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|$, то получим (по признаку Вейерштрасса) равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n(x,t)|$. Так как все функции $v_n(x,t)$ непрерывны, то и функция $u(x,t)$ будет непрерывна, так как она определяется равномерно сходящимся рядом из непрерывных функций.

Итак, преобразуем ϕ_n:

$$\begin{aligned}\phi_n &= \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)\,ds = \{\text{интегрирование по частям}\} = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{l}{\pi n}\phi(s)\cos(\frac{\pi n}{l}s)\Big|_0^l + \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \phi'(s)\frac{l}{\pi n}\cos(\frac{\pi n}{l}s)\,ds = \\ &= \frac{1}{n}\int_0^l \frac{l}{\pi}\phi'(s)\sqrt{\frac{2}{l}}\cos(\frac{\pi n}{l}s)\,ds.\end{aligned}$$

Пусть $\widetilde{\phi}_n = \int_0^l \phi'(s)\sqrt{\frac{2}{l}}\cos(\frac{\pi n}{l}s)\,ds$. Воспользуемся неравенством Бесселя для ортонормированной системы функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\cos(\frac{\pi n}{l}s)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\phi}_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \phi'(s)\sqrt{\frac{2}{l}}\cos(\frac{\pi n}{l}s)\,ds\right)^2 \leqslant \int_0^l (\phi'(s))^2\,ds.$$

Теперь мы можем преобразовать нужный нам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n| = \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\widetilde{\phi}_n| \leqslant \{ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}\} \leqslant \frac{l}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\phi}_n^2\right)$$

Первый ряд, как известно, сходится, сходимость второго мы только что показали. Отсюда получаем сходимость ряда из коэффициентов Фурье $\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|$ и, как было показано ранее, непрерывность функции $u(x,t)$.

(2) Теперь покажем существование и непрерывность производных u_t, u_{xx} в Q_T. Покажем, к примеру, существование u_{xx} для всех $0 < x < l$, $t_0 < t < T$, где t_0 — произвольное положительное число. Из этого, очевидно, следует существование u_{xx} в Q_T. Продифференцировав формально ряд (2.5), получим:

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sqrt{\frac{2}{l}}\left(-(\frac{\pi n}{l})^2\right)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\exp\{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t\}.$$

Легко заметить, что множитель $\exp\{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t\}$ дает нам равномерную сходимость мажорантного ряда на $t_0 < t < T$. Из этого следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_{xx}(x,t)$ и существование $u_{xx}(x,t)$ в Q_T. Непрерывность $u_{xx}(x,t)$ следует из непрерывности слагаемых ряда. Существование и непрерывность u_t доказывается аналогично.

(3) То, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет всем условиям [2.2], было показано во время ее построения. Теорема доказана. □

№5

§ 10. Интегральные тождества. Доказательства теорем единственности для начально – краевых задач.

Теорема единственности решения краевой задачи I типа была доказана на основе принципа максимума. Теоремы единственности решений краевых задач II и III типов докажем с использованием интегральных тождеств.

Рассмотрим уравнение $u_t = a^2 u_{xx}$, $(x,t) \in [0,l] \times [0,\infty)$. Пусть функция $u(x,t)$ является решением этого уравнения в замкнутой области.

Введём квадратичный функционал $J(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\,dx$.

Вычислим производную от этого функционала по переменной t:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}dx = a^2\int_0^l u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = \left(a^2 u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} - a^2\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

В результате получим интегральное тождество:

$$\int_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}dx = \left(a^2 u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} - a^2\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (10.1)$$

Перейдём теперь к трёхмерному случаю: ограниченная область $\Omega \in R^3$. По аналогии введём однопараметрический функционал $J(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega} u^2 d\tau$; где $d\tau$ – элемент объёма. Вычислим производную $\frac{dJ}{dt}$, используя при этом, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2\Delta u$ в замкнутой области: при $(M,t)\in\overline{\Omega}\times[0,\infty)$ получим

$$\frac{dJ}{dt}=\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau = a^2\iiint\limits_{\Omega} u\Delta u\, d\tau = a^2\iiint\limits_{\Omega} u\, div\, grad\, u\, d\tau.$$

Далее воспользуемся тождеством $div(u\, grad\, u) = u\, div(grad\, u) + (grad\, u)^2$:

$$\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau = a^2\iiint\limits_{\Omega} div(u\, grad\, u)d\tau - a^2\iiint\limits_{\Omega}(grad\, u)^2 d\tau.$$

Теперь воспользуемся формулой Гаусса – Остроградского $\iiint\limits_{\Omega} div(u\, grad\, u)d\tau = \iint\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$, где поверхность S ограничивает область Ω, а $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к S. В результате получим интегральное тождество:

$$\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau = a^2\iint\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma - a^2\iiint\limits_{\Omega}(grad\, u)^2 d\tau, \qquad (10.2)$$

где функция $u(x,t)\in C^1$.

Теперь перейдём к начально – краевым задачам. Рассмотрим одномерный случай:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t)\in q_l,$$

$$\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u\right)\Bigg|_{x=0} = \chi_1(t), \left(\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2 u\right)\Bigg|_{x=l} = \chi_2(t), \quad t>0,$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \quad x\in(0,l).$$

Докажем единственность решения этой задачи. Допустим, что существуют два решения этой задачи: $u_i(x,t)$, $i=1,2$. Тогда рассмотрим функцию $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. Функция $v(x,t)$ будет удовлетворять задаче

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t)\in q_l,$$

$$\left(\alpha_1\frac{\partial v}{\partial x}+\beta_1 v\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \quad \left(\alpha_2\frac{\partial v}{\partial x}+\beta_2 v\right)\Bigg|_{x=l} = 0, \quad t>0,$$

$$v|_{t=0}=0, \quad x\in(0,l).$$

Пусть $v(x,t)$ – классическое решение этой задачи. Введём функционал $J(t)=\frac{1}{2}\int_0^l v^2(x,t)dx$. Воспользуемся интегральным тождеством (10.1). Если рассматривать краевую задачу I или II типа, то $\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}=0$. Тогда из интегрального тождества (10.1) получаем $\frac{dJ}{dt}=-a^2\int_0^l\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx$. Следовательно, $\frac{dJ}{dt}\le 0$ для любого $t>0$. Если $t=0$, то $v(x,0)=0$, т.е. $J(0)=0$. Так как функционал $J(t)$ положителен, убывает по t и $J(0)=0$, то $J(t)\equiv 0$. Следовательно, краевые задачи I и II типа имеют единственное решение.

При рассмотрении третьей краевой задачи мы можем записать граничные условия в виде $\frac{\partial u}{\partial x}+hu=\eta(t)$, где h - заданная постоянная. Таким образом, третья краевая задача ставится следующим образом:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad (x,t)\in q_l,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-h_1 u\right)\bigg|_{x=0}=\eta_1(t),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}+h_2 u\right)\bigg|_{x=l}=\eta_2(t),\quad t>0,$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in(0,l).$$

Теорема.

Если $h_1\geq 0$, $h_2\geq 0$, то третья краевая задача имеет единственное решение.

Доказательство.

Пусть существуют два решения $u_i(x,t)$, $i=1,2$. Тогда функция $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$v_t=a^2v_{xx},\quad (x,t)\in q_l,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}-h_1 v\right)\bigg|_{x=0}=0,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}+h_2 v\right)\bigg|_{x=l}=0,\quad t>0,$$

$$v\big|_{t=0}=0,\quad x\in(0,l).$$

Следовательно, $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=h_1 v\big|_{x=0}$, $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l}=-h_2 v\big|_{x=l}$.

Введём функционал $J(t)=\frac{1}{2}\int_0^l v^2(x,t)dx$ и воспользуемся интегральным тождеством (10.1):

$\frac{dJ}{dt}=-a^2h_2v^2\big|_{x=l}-a^2h_1v^2\big|_{x=0}-a^2\int_0^l\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2dx\leq 0$. Так как $v(x,0)=0$, то $J(0)=0$. Т.е. функционал $J(t)$ положителен, убывает и $J(0)=0$. Следовательно, $J(t)\equiv 0$ и $v(x,t)=0$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим трехмерный случай:

$$u_t=a^2\Delta u+f(M,t),\quad M\in\Omega,\quad t>0,$$

$$u(M,t)\big|_{t=0}=\varphi(M),\quad M\in\Omega,$$

$$\left(\frac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)\right)\bigg|_{P\in S}=\eta(P).$$

Здесь уравнение рассматривается в ограниченной области Ω с гладкой границей S.

Теорема.

Если коэффициент $h(P)\geq 0$, $P\in S$, то третья начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в пространственной области Ω имеет единственное классическое решение.

Доказательство.

Пусть существуют два решения $u_i(M,t)$, $i=1,2$, $M\in\overline{\Omega}$, $t>0$. Введём функцию $v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$, которая будет удовлетворять задаче

$$v_t=a^2\Delta v,\quad M\in\Omega,\quad t>0,$$

$$v(M,t)\big|_{t=0}=0,\quad M\in\Omega,$$

$$\left(\frac{\partial v(P)}{\partial n}+h(P)v(P)\right)\bigg|_{P\in S}=0.$$

Введём квадратичный функционал $J(t)=\frac{1}{2}\iiint_\Omega v^2d\tau\geq 0$,

$J(0)=0$. $\qquad \frac{dJ}{dt}=a^2\iint_S v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-a^2\iiint_\Omega(grad\, v)^2d\tau$.

Так как $\left.\frac{\partial v(P,t)}{\partial n}\right|_{P\in S}=-h(P)v(P,t)$, то

$$\frac{dJ}{dt}=-a^2\iint_S h(P)v^2d\sigma-a^2\iiint_\Omega(grad\, v)^2d\tau\leq 0,$$

следовательно $J(t)\equiv 0$ и $v(M,t)=0$. Теорема доказана.

№6

§ 6. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

Постановка задачи:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in q, \tag{6.1}$$

где $q = \{(x,t): \ x \in R^1, t > 0\}$, $\bar{q} = \{(x,t): \ x \in R^1, t \ge 0\}$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R^1, \tag{6.2}$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$ – заданные функции, $u(x,t)$ – искомое решение задачи.

Определение. Классическим решением задачи (6.1) – (6.2) называется функция $u(x,t)$, определённая и непрерывная вместе со своими производными u_t и u_{xx} в q, удовлетворяющая уравнению (6.1) в q, непрерывная по t в $\bar{q}$ и удовлетворяющая условию (6.2).

Замечание 1. Для этой задачи пользоваться принципом максимума нельзя, так как область неограниченная.

Замечание 2. При решении задачи на бесконечной прямой существенным является требование ограниченности искомой функции во всей области, т.е. существование такого M, что $|u(x,t)| < M$ для всех точек $(x,t) \in \bar{q}$.

Теорема единственности.

Задача (6.1) – (6.2) может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\bar{q}$.

Доказательство.

Предположим, что существуют два ограниченных решения $u_i(x,t)$, $i = 1, 2$, которые удовлетворяют задаче (6.1) – (6.2). Введём функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, не равную тождественно нулю. В силу линейности задачи (6.1) – (6.2) функция $v(x,t)$ будет удовлетворять однородной задаче Коши:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t) \in q, \tag{6.3}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in R^1. \tag{6.4}$$

Условие ограниченности для функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ даёт условие ограниченности для функции $v(x,t)$:

$|v(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \le 2M$, где

$|u_1(x,t)| \le M$, $|u_2(x,t)| \le M$. Таким образом, функция $v(x,t)$ является решением задачи (6.3) – (6.4) и ограничена в области $\bar{q}$. Покажем, что $v(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in q$. Выберем в полуплоскости q линии $|x| = L$ и $t = T$ и будем рассматривать ограниченную область q_L: $q_L = [-L, L] \times (0, T]$, $\bar{q}_L = [-L, L] \times [0, T]$. Введём вспомогательную функцию $w(x,t) = \dfrac{4M}{L^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + a^2 t\right)$.

Функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению $w_t = a^2 w_{xx}$. Положим $t = 0$, тогда $w(x,0) = \dfrac{2Mx^2}{L^2} \ge |v(x,0)| = 0$. Пусть $|x| = L$, тогда $w(\pm L,t) = 2M + \dfrac{4Ma^2 t}{L^2} \ge 2M \ge |v(\pm L,t)|$. Так как область q_L ограничена, внутри этой области функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности, а на границе выполняются условия $|v(x,0)| \le w(x,0)$ и $|v(\pm L,t)| \le w(\pm L,t)$, то к функциям $v(x,t)$ и $w(x,t)$ можно применить следствие из принципа максимума: $|v(x,t)| \le w(x,t)$, $(x,t) \in \bar{q}_L$, или

$-\dfrac{4M}{L^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + a^2 t\right) \le v(x,t) \le \dfrac{4M}{L^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + a^2 t\right)$. Зафиксируем точку $(x,t) \in \bar{q}_L$ и перейдём к пределу при $L \to \infty$, получим $\lim\limits_{L\to\infty} v(x,t) = 0$. В силу независимости $v(x,t)$ от

L и произвольности выбора точки (x,t) получим, что всюду в области $\overline{q}$ $v(x,t)\equiv 0$. Следовательно, $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ в $\overline{q}$ и решение задачи единственно. Теорема доказана.

Замечание. Если отказаться от условия ограниченности, то можно доказать теорему единственности в классе функций $|\varphi(x)|<N\cdot e^{bx}$, $b>0$, – с ограниченным степенным ростом.

№7

§ 7. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

Перейдём к построению решения задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t=a^2u_{xx}\,,\quad (x,t)\in q\,, \tag{7.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in R^1\,. \tag{7.2}$$

Будем считать, что решение ограничено и воспользуемся методом разделения переменных. Решение будем искать в виде $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$, в результате получим уравнение $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}$. Поскольку x и t – независимые переменные, имеем

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda\,,\quad \lambda=const\,. \tag{7.3}$$

В результате получим уравнения для $X(x)$ и $T(t)$:

$$\begin{cases}X'(x)+\lambda X(x)=0\\ |X(x)|<M\,,\quad M=const\end{cases} \tag{7.4}$$

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0 \tag{7.5}$$

Будем искать ненулевые решения уравнений (7.4) и (7.5). Решение уравнения (7.5) имеет вид $T(t)=A\cdot e^{-a^2\lambda t}$. Здесь A – постоянная, которая, вообще говоря, зависит от λ. Для ограниченности решения потребуем $\operatorname{Re}\lambda\geq 0$. Решение уравнения (7.4) имеет вид $X(x)=B_1\cdot e^{i\sqrt{\lambda}x}+B_2\cdot e^{-i\sqrt{\lambda}x}$. Здесь B_1 и B_2 – постоянные, которые зависят от λ. Для ограниченности решения нужно, чтобы $\operatorname{Im}\lambda=0$, т.е. $0\leq\lambda=k^2$, $k\in R^1$. Следовательно, имеем решения

$$\begin{cases}X(x)=B(k)\cdot e^{ikx}\,,\quad k\in R^1\,,\quad x\in R^1\\ T(t)=A(k)\cdot e^{-a^2k^2t}\,,\quad t>0\end{cases}$$

$$u_k(x,t)=C(k)\cdot e^{ikx-a^2k^2t}\,,\quad C(k)=A(k)\cdot B(k),\quad k\in R^1.$$

Функция
$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\cdot e^{-a^2k^2t+ikx}dk \tag{7.6}$$

будет общим решением уравнения (7.1), если этот несобственный интеграл, зависящий от x и t, сходится в области q к непрерывной функции $u(x,t)$, и существуют частные производные u_t и u_{xx}, которые можно вычислять под знаком интеграла. Константа $C(k)$ находится из условия (7.2):

$$u(x,0)=\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\cdot e^{ikx}dk\,. \tag{7.7}$$

Соотношение (7.7) является разложением заданной функции $\varphi(x)$ в интеграл Фурье. Обратное преобразование Фурье даёт

$$C(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-ik\xi}d\xi\,. \tag{7.8}$$

Подставим формулу (7.8) в (7.6) и поменяем порядок интегрирования, тогда получим

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2t+ik(x-\xi)}dk\right\}\varphi(\xi)d\xi \tag{7.9}.$$

$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ называется интегралом Пуассона.

Рассмотрим свойства функции Грина:

1. Функция $G(x,\xi,t)$ определена при $t>0$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности.
2. Функция $G(x,\xi,t)$ положительна при любых $x,\xi\in(-\infty,\infty)$ и любом $t>0$.
3. При $t=0$ функция $G(x,\xi,t=0)$ имеет неопределенность в точке $x=\xi$: $\lim\limits_{t\to 0+}G(\xi,\xi,t)=+\infty$.
4. Функция $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет принципу взаимности $G(x,\xi,t)=G(\xi,x,t)$.

№8

§ 8. Существование решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

Теорема существования решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности.

Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная и ограниченная функция на числовой прямой: $\varphi(x)\in C$, $|\varphi(x)|<M$, $x\in R^1$. Тогда формула

$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ определяет при $(x,t)\in\overline{q}$

классическое решение задачи (7.1) – (7.2).

Доказательство.

Докажем существование и ограниченность функции $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$. Сделаем замену

переменных $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, $\xi=2a\sqrt{t}z+x$. В результате получим:

$$|u(x,t)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi\left(x+2za\sqrt{t}\right)\right|e^{-z^2}dz\le\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=M.$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ существует и ограничена.

Чтобы доказать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, используем так называемый обобщенный принцип суперпозиции:

если функция $v(x,t,\alpha)$ по переменным x,t удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению $L[v]=0$ при любом α,

то и функция $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}v(x,t,\alpha)\cdot d\alpha$ удовлетворяет

этому уравнению: $L[u]=0$.

Из обобщенного принципа суперпозиции непосредственно следует, что функция

$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ удовлетворяет однородному

уравнению теплопроводности.

Для применимости обобщенного принципа суперпозиции достаточно доказать, что интеграл, полученный формальным дифференцированием функции

$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ по x и t, сходится

равномерно. Докажем равномерную сходимость

интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_t(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$. (8.1)

Так как $\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2t}G(x,\xi,t) + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}G(x,\xi,t)$, то нужно доказать равномерную сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\left\{-\frac{1}{2} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\frac{\varphi(\xi)}{t}d\xi \qquad (8.2)$$

в области $\overline{q}_\varepsilon = R^1 \times [\varepsilon, T]$. Сделаем замену переменных $z = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, тогда получим интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, x+2a\sqrt{t}z, t)\left\{-\frac{1}{2} + z^2\right\}\frac{2a\sqrt{t}\varphi(z)}{t}dz = .$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2} + z^2\right)\frac{\varphi(z)}{t}e^{-z^2}dz.$$

Проведём мажорантную оценку для этого интеграла в области $\overline{q}_\varepsilon$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+z^2\right)\frac{\varphi(z)}{t}e^{-z^2}dz\right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|z^2 - \frac{1}{2}\right|\frac{|\varphi(z)|}{t}e^{-z^2}dz <$$

$$< \frac{M}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)e^{-z^2}dz.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)e^{-z^2}dz$ абсолютно сходится, следовательно, интеграл (8.2) равномерно сходится в области $\overline{q}_\varepsilon$. Аналогично доказывается равномерная сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$.

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в области $\overline{q}_\varepsilon$, а в силу произвольности выбора ε однородное уравнение теплопроводности будет выполняться в области q.

Осталось доказать, что функция $u(x,t)$ непрерывно примыкает к граничной функции $\varphi(x)$. Сделаем замену $z = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, получим

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\varphi(x + 2az\sqrt{t})dz$. Так как подынтегральная функция мажорируется функцией $\frac{M}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$, интеграл от которой сходится, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\varphi(x+2az\sqrt{t})dz$ сходится равномерно. В силу непрерывности подынтегральной функции можно осуществить предельный переход под знаком интеграла, т.е. $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \varphi(x)$. Следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна в области $\overline{q}$ и непрерывно примыкает к функции $\varphi(x)$. Теорема доказана.

№9 УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА ГАРМОНИЧЕСКИЕ Ф-ИИ

Пусть температура в области Ω $u(M)$ зависит от точки M и не зависит от времени t, т.е. тепловое поле в Ω стационарно. В предыдущей главе было показано, что температура $u(M,t)$ нестационарного теплового поля удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t = a^2\Delta u + f(M,t)$, причем, если тепловые источники отсутствуют, то $f(M,t) = 0$. Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(M)$, не меняющееся с течением времени, $\frac{\partial}{\partial t}\equiv 0$ и, следовательно, удовлетворяющее уравнению $\Delta u=0$, которое называется уравнением Лапласа. При наличии источников тепла получаем уравнение $\Delta u=-f(M)$, которое называется уравнением Пуассона. Уравнения Лапласа и Пуассона относятся к уравнениям эллиптического типа.

Рассмотрим некоторую область пространства Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S. Задача о стационарном распределении температуры $u(M)$ внутри области Ω формулируется следующим образом: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u=-f(M)$ в Ω и граничному условию одного из следующих типов:

I. $u(P)=\mu(P)$, $P\in S$, (первая краевая задача)

II. $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S}=\nu(P)$, (вторая краевая задача)

III. $\alpha\frac{\partial u(P)}{\partial n}+\beta u(P)=\chi(P)$, $P\in S$, (третья краевая задача), где $\alpha+\beta\neq 0$, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, μ, ν, α, β, χ – заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная функции $u(M)$ по внешней нормали к поверхности S.

В декартовой системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta_{(x,y,z)}u(x,y,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

в сферической ($x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$)

$$\Delta_{(r,\theta,\varphi)}u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

в цилиндрической $(x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z)$ –

$$\Delta_{(r,\varphi,z)}u(r,\varphi,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Аналогично ставятся задачи в плоской области D, границей которой является кривая γ. Такие задачи описывают стационарное распределение температуры $u(M)$ в пластине D. В плоском случае уравнение Лапласа имеет вид $\Delta_{(x,y)}u(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в декартовой системе координат, или $\Delta_{(r,\varphi)}u(r,\varphi)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$ – в полярной $(x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi)$.

§ 2. Гармонические функции. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

Определение. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(M)$, которая в области Ω удовлетворяет уравнению Лапласа, называется гармонической в Ω функцией.

Рассмотрим область Ω, ограниченную поверхностью S в R^3. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая фиксированная точка в Ω. Найдём решение уравнения Лапласа, зависящее только от $R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Введём сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в точке $M_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Такое решение будет обладать сферической симметрией, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$.

Следовательно, будет выполняться уравнение $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{du}{dr}\right) = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $u(r) = \dfrac{C_1}{r} + C_2$, где $r = R_{MM_0}$. Решение $u(M, M_0) = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Это гармоническая функция переменной M, определённая всюду в R^3, кроме точки $M = M_0$.

В двумерном случае введём полярную систему координат (r, φ) с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Найдём решение уравнения Лапласа, зависящее только от $R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. В этом случае $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, и будет выполняться уравнение $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r \dfrac{du}{dr}\right) = 0$. Его общее решение имеет вид $u(r) = C_1 \ln\dfrac{1}{r} + C_2$, где $r = R_{MM_0}$.

Функция $u(M, M_0) = \ln\dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости.

Замечание. Можно привести сколько угодно примеров гармонических функций. Например, любая линейная функция $u(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ гармонична в R^3. **Фундаментальным** решением уравнения Лапласа называют такую гармоническую функцию, которая имеет определённого вида особенность в единственной точке M_0.

§ 3. Постановка краевых задач.

Внутренняя задача Дирихле.

Пусть S – замкнутая, достаточно гладкая поверхность, ограничивающая область Ω. Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и принимает на границе S заданные значения: $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$. Таким образом, мы ищем функцию $u(M)$, гармоничную внутри Ω. Требование гармоничности функции $u(M)$ на границе излишне. Условие непрерывности функции $u(M)$ в замкнутой области необходимо для единственности решения задачи. Поэтому требуем $\mu \in C(S)$. В этом случае функция $u(M)$ называется классическим решением задачи. $u(M) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\mu \in C(S)$.

Внутренняя задача Неймана.

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, её нормальная производная принимает на границе заданные значения $\left.\dfrac{\partial u(P)}{\partial n}\right|_{P \in S} = \nu(P)$, $P \in S$. $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\nu \in C(S)$.

Внутренняя третья краевая задача.

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, на границе удовлетворяет условию

$$\alpha \frac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta u(P) = \chi(P), P \in S, \alpha + \beta \neq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

$$u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad \chi \in C(S).$$

Внешние краевые задачи для трех и двух независимых переменных ставятся по-разному.

Рассмотрим сначала случай трех переменных. Пусть Ω' – область, внешняя к некоторой замкнутой поверхности S.

Внешняя задача Дирихле.

Требуется найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области Ω', непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup S$, принимающую на границе заданные значения $u(M) = \mu(M)$, $M \in S$ и равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности. Стремление к нулю функции $u(M)$ на бесконечности необходимо для единственности решения задачи.

Если рассматривать случай двух переменных, то стремление к нулю функции на бесконечности нужно заменить на условие ограниченности функции на бесконечности.

Внешние краевые задачи II и III типа ставятся аналогично.

Замечание. В настоящем курсе мы рассматриваем только **классические** решения, хотя многие практические задачи приводят к необходимости обобщения этого понятия на случай, когда функция $u(M)$ и краевые условия не удовлетворяют сформулированным выше требованиям.

№10

§ 4. Первая и вторая формулы Грина. Интегральное представление функции в ограниченной области (третья формула Грина).

Пусть в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью S, заданы две функции $u(M)$ и $v(M)$: $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Функции u, v – произвольные, не обязательно гармонические. Тогда в области Ω справедлива первая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} v \Delta u \, d\tau = \iint\limits_{S} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_{\Omega} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Вспомним теорему Остроградского – Гаусса: Если $\vec{A}$ – векторное поле, то $\iiint\limits_{\Omega} div\, \vec{A}\, d\tau = \iint\limits_{S} A_n d\sigma$, где A_n – проекция вектора $\vec{A}$ на нормаль $\vec{n}$ к границе S. В качестве векторного поля $\vec{A}$ можно взять $\vec{A} = v(M) \cdot grad\, u(M)$.

$div(v \cdot grad\, u) = v \cdot div(grad\, u) + (grad\, v \cdot grad\, u) =$
$= v \cdot \Delta u + (grad\, v \cdot grad\, u)$, $\Delta u = div(grad\, u)$. Отсюда $v \cdot \Delta u = div(v \cdot grad\, u) - (grad\, v \cdot grad\, u)$. Теперь, проинтегрировав по объёму Ω, получим формулу (4. 1).

Если поменять местами функции $u(M)$ и $v(M)$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} u \Delta v \, d\tau = \iint\limits_{S} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint\limits_{\Omega} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau. \qquad (4.2)$$

Вычтем из формулы (4.1) формулу (4.2), тогда получим вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega}(v\Delta u-u\Delta v)d\tau=\iint\limits_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (4.3)$$

Вторая формула Грина симметрична относительно функций $u(M)$ и $v(M)$.

Теперь, используя вторую формулу Грина и фундаментальное решение уравнения Лапласа, получим третью формулу Грина – интегральное представление дважды непрерывно дифференцируемой функции в ограниченной области. Пусть $u(M)$ – произвольная, непрерывная и дважды непрерывно дифференцируемая функция в области Ω, а $v(M,M_0)=\dfrac{1}{R_{MM_0}}$, где $M_0\in\Omega$. $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, а $v(M,M_0)$ имеет особенность, когда точка M совпадает с точкой M_0. Поэтому к функциям $u(M)$ и $v(M,M_0)$ в области Ω применить вторую формулу Грина нельзя. Окружим точку M_0 шаром $K_\varepsilon^{M_0}$ радиуса ε, ограниченного сферой $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Применим к функциям $u(M)$ и $v(M,M_0)$ вторую формулу Грина в области $\Omega\setminus K_\varepsilon^{M_0}$:

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus K_\varepsilon^{M_0}}(u\Delta v-v\Delta u)d\tau=\iint\limits_{S}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (4.4)$$

В интеграле $\iint\limits_{S}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$ n – внешняя нормаль к поверхности S, а в интеграле $\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$ n – внутренняя нормаль к поверхности сферы $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Учитывая, что $v(P)\big|_{P\in\Sigma_\varepsilon^{M_0}}=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\dfrac{\partial v(P)}{\partial n}\Big|_{P\in\Sigma_\varepsilon^{M_0}}=-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon}=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$, вычислим интеграл по сфере:

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}}\left(u(P)\frac{\partial v(P,M_0)}{\partial n_P}-v(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}}\left(u(P)\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right)d\sigma_P=*.$$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$*=\left(\frac{1}{\varepsilon^2}u(P^*)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n}\right)4\pi\varepsilon^2=$$

$$=4\pi u(P^*)-4\pi\varepsilon\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n}=**,$$

где точки P^* и P^{**} принадлежат сфере $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$, тогда сфера $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$ и шар $K_\varepsilon^{M_0}$ будут стремиться к точке M_0, значения $u(P^*)$ и $\dfrac{\partial u(P^{**})}{\partial n}$ будут стремиться к $u(M_0)$ и $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial n}$; в силу ограниченности $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ и непрерывности функции u получаем $**=4\pi u(M_0)$. Таким образом, формула (4.4) примет вид

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{R_{MM_0}}\Delta u\,d\tau_M=4\pi u(M_0)+$$

$$+\iint\limits_{S}\left(u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)-\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P$$

или

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}d\tau_M, \qquad (4.5)$$

где $M_0 \in \Omega$. Формула (4.5) называется третьей формулой Грина или интегральным представлением функции $u(M)$.

Замечание.

Если точка $M_0 \in R^3 \setminus \overline{\Omega}$, то точки M и M_0 не могут совпасть. Тогда правая часть формулы (4.5) равна нулю. Если точка M_0 принадлежит гладкой границе области $\overline{\Omega}$, то вырезать эту точку можно сферическим куполом, в пределе это будет полусфера, а её поверхность будет равна $2\pi\varepsilon^2$. Тогда формулу (4.5) можно переписать так:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}d\tau_M=\begin{cases}u(M_0), & M_0\in\Omega,\\ 0, & M_0\in R^3\setminus\overline{\Omega},\\ \dfrac{u(M_0)}{2}, & M_0\in S.\end{cases}$$

№11

§ 5. Свойства гармонических функций. Формула среднего значения. Принцип максимума гармонической функции.

1. Если функция $u(M)$ гармонична в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью S, то $\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0$.

Доказательство. Положим в первой формуле Грина $v(M)\equiv 1$, тогда получим

$\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\iiint_\Omega v\Delta u\,d\tau-\iiint_\Omega(grad\,v\cdot grad\,u)d\tau=0$, так как $\Delta u=0$ и $grad\,v=0$.

Из доказанного свойства вытекает необходимое условие существования решения задачи Неймана для уравнения Лапласа:

решение задачи $\Delta u=0$, $M\in\Omega$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S}=v(P)$

может существовать только если $\iint_S v(P)d\sigma=0$. Условие разрешимости аналогичной задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u=-f(M),\quad M\in\Omega,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S}=v(P)$$

выглядит так: $\iiint_\Omega f(M)d\tau+\iint_S v(P)d\sigma=0$. Это условие так же вытекает из первой формулы Грина, если положить $v(M)\equiv 1$.

2. Формула среднего значения.

Если $u(M)$ – гармоническая функция в области Ω, то для любой точки $M\in\Omega$ имеет место представление $u(M)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_a^M}u(P)d\sigma_P$, где Σ_a^M – сфера радиуса a с центром в точке M, целиком лежащая в Ω, т.е. $\Sigma_a^M\subset\Omega$.

Доказательство.

Применим третью формулу Грина к шару K_a^M с поверхностью Σ_a^M:

$u(M)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma_a^M}\left(u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)-\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right)d\sigma_P$. Так как $\left.\frac{1}{R_{MP}}\right|_{P\in\Sigma_a^M}=\frac{1}{a}$, $\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right|_{P\in\Sigma_a^M}=-\frac{1}{a^2}$, то, учитывая

$\iint\limits_{\Sigma_a^M} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$, получим $u(M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^M} u(P)\sigma_P$.

3. Существование всех производных у гармонической функции.

Доказательство этого свойства следует из третьей формулы Грина. При $M \in \Omega$ поверхностные интегралы являются собственными и их можно дифференцировать по координатам точки M любое число раз.

Замечание.

Гармоническая функция во всех внутренних точках Ω аналитична, т.е. в окрестности любой точки $M \in \Omega$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд. При этом радиус сходимости ряда не меньше, чем расстояние до границы S.

№12???

4. Принцип максимума гармонической функции.

Рассмотрим область Ω, ограниченную поверхностью S, $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$.

Теорема.

Пусть функция $u(M)$ гармонична в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Тогда она достигает своего максимального и минимального значения на границе области $\overline{\Omega}$, т.е. $\max\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M) = \max\limits_{M \in S} u(M)$, $\min\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M) = \min\limits_{M \in S} u(M)$.

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса функция $u(M)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\overline{\Omega}$, достигает своего максимального значения. Обозначим $A = \max\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M)$. Предположим, что это значение достигается в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, т.е. внутри области Ω. Рассмотрим сферу $\Sigma_a^{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащую в области Ω. Для этой сферы напишем формулу среднего значения:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} u(P)\, d\sigma_P \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} u(M_0)\, d\sigma_P = u(M_0). \qquad (7.1)$$

Таким образом, возможно только равенство. Это значит, что в каждой точке сферы $\Sigma_a^{M_0}$ значение функции $u(M)$ равно A, т.е. $u(M)\big|_{M \in \Sigma_a^{M_0}} = A$; в противном случае равенство в формуле (7.1) не будет выполняться.

Теперь рассмотрим сферу $\Sigma_{a_1}^{M_1}$ с центром в точке $M_1 \in \Sigma_a^{M_0}$ радиуса a_1, целиком лежащую в области Ω. Аналогично предыдущему покажем, что $u(M)\big|_{M \in \Sigma_a^{M_1}} = u(M_1) = u(M_0) = A$. Можно построить такую последовательность сфер $\Sigma_{a_n}^{M_n}$ с центрами в точках $M_n \in \Omega$ радиусов a_n, целиком лежащих в Ω, что последовательность точек $\{M_n\}$ будет сходиться к точке $\overline{M} \in S$. В силу нашего построения $u(M_n) = u(M_0) = A$ для любого n. Так как функция $u(M)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, то последовательность $\{u(M_n)\}$ будет сходиться к $u(\overline{M})$, откуда следует, что $u(\overline{M}) = A$. Теорема доказана.

Замечание 1.

Аналогично доказывается теорема о минимальном значении гармонической функции: вместо функции $u(M)$ надо рассмотреть функцию $v(M) = -u(M)$.

Замечание 2.

Метод, которым была доказана теорема называется методом выметания.

Замечание 3.

Фактически доказано более сильное утверждение: функция $u(M)$, гармоническая в Ω и непрерывная в $\overline{\Omega}$, принимающая максимальное значение в Ω, является константой в $\overline{\Omega}$. Т.е. из всех гармонических функций только постоянная функция может достигать экстремального значения внутри области Ω.

Замечание 4.

Для функций двух переменных все указанные свойства сохраняются, только теорема о среднем значении запишется так: $u(M_0)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{L_a^{M_0}} u(P)dl_P$, где $L_a^{M_0}$ – окружность радиуса a с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Следствие.

Если две гармонические функции $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $u(M)\big|_{M\in S}\le v(M)\big|_{M\in S}$, то всюду в Ω $u(M)\le v(M)$.

Доказательство.

Надо рассмотреть гармоническую функцию $w(M)=v(M)-u(M)$, которая будет непрерывной в $\overline{\Omega}$, $w(M)\big|_{M\in S}\ge 0$. В силу принципа максимального значения $w(M)\ge 0$ всюду в Ω.

№13

§ 6. Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле.

Функция $u(M)$ называется решением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, если $u(M)$ определена и непрерывна в $\overline{\Omega}$, гармонична в Ω, а на

границе S принимает заданные значения: $u(P)\big|_{P\in S}=\mu(P)$, $\mu\in C(S)$.

Замечание 1. Не требуем гармоничности функции на границе.

Замечание 2. Если отбросить условие непрерывности функции $u(M)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$, то нарушится единственность решения задачи, так как любая функция вида $u(M)=\begin{cases} const, & M\in\Omega, \\ \mu(M), & M\in S\end{cases}$ будет решением задачи.

Теорема единственности решения задачи Дирихле. Задача Дирихле не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. Допустим, что существуют два решения задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. $v(M)$ будет удовлетворять условиям

$$v\in C(\overline{\Omega});\quad \Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega;\quad v(P)\big|_{P\in S}=0.$$

Функция $v(M)$ является решением задачи Дирихле с однородными граничными условиями. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция в замкнутой ограниченной области достигает своего максимального и минимального значений. Если $v(M)>0$ хотя бы в одной точке области Ω, то она достигает своего максимального значения внутри области Ω, но это невозможно в силу принципа максимума, так как $v(M)\big|_{M\in S}=0$. Аналогично доказывается, что $v(M)$ не может быть меньше нуля внутри Ω. Следовательно, $v(M)\equiv 0$. Теорема доказана.

Перейдем к определению устойчивости решения задачи Дирихле.

Определение. Задача называется устойчивой, если малым изменениям входной информации соответствует малое изменение решения.

Рассмотрим две задачи Дирихле:

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in \Omega,$$

$$u_i(P)\big|_{P \in S} = \mu_i(P), \quad i = 1, 2.$$

Введём понятие расстояния между функциями:

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \|\mu_1 - \mu_2\|_{C(S)} = \max_{P \in S} |\mu_1(P) - \mu_2(P)|,$$

$$\rho(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{M \in \overline{\Omega}} |u_1(M) - u_2(M)|.$$

Используя $\rho(\mu_1, \mu_2)$ и $\rho(u_1, u_2)$, определим понятие устойчивости для задачи Дирихле.

Определение. Решение задачи Дирихле называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho(\mu_1, \mu_2) < \delta(\varepsilon)$ следует $\rho(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Теорема. Для задачи Дирихле, если $\rho(\mu_1, \mu_2) \le \varepsilon$, то $\rho(u_1, u_2) \le \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что функция $u(M) \equiv \varepsilon$ гармонична и всюду положительна. Рассмотрим функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Из принципа максимума следует, что если на границе области $\|v\|_{P \in S} \le \varepsilon$, то $|v(M)| \le \varepsilon$ всюду в $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

Замечание. Если функция $\mu(P)$, $P \in S$, имеет разрывы I рода, то надо отказаться от первого условия в постановке задачи Дирихле. Т.е. если μ – кусочно-непрерывная функция, то задача Дирихле будет ставиться так:

найти функцию $u(M)$, гармоничную внутри Ω, $u(P)\big|_{P \in S} = \mu(P)$, где P - точки непрерывности функции μ, и $|u| \le A$.

Для такой обобщенной постановки задачи остаётся справедливой теорема единственности.

№14

§ 7. Внутренняя задача Неймана в пространстве.

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана:

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P), \quad P \in S. \tag{7.2}$$

Определение. Классическим решением задачи Неймана называется функция $u(M)$, которая непрерывна вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные производные второго порядка в открытой области Ω, гармонична в Ω, а её нормальная производная на границе удовлетворяет условию $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P)$, $P \in S$.

Замечание 1. Если нормаль $\vec{n}$ к поверхности S составляет угол α с осью OX, угол β с осью OY и угол γ с осью OZ, то

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Замечание 2. Решение задачи Неймана отличается от решения задачи Дирихле тем, что оно определяется с точностью до константы. Если $u(M)$ – решение задачи Неймана, то $v(M) = u(M) + C$, где $C = const$, – тоже решение той же задачи Неймана. Это легко проверить, если подставить функцию $v(M)$ в задачу (7.1) – (7.2).

Теорема.

Решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной, т.е. если $u_1(M)$ и $u_2(M)$ – решения одной и той же задачи Неймана, то $u_1(M) - u_2(M) = const$.

Доказательство.

Здесь нельзя воспользоваться принципом максимума, так как неизвестно чему равны значения функции $u(M)$ на границе. Поэтому используем формулы Грина. Допустим, что существуют две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, являющиеся решениями задачи Неймана (7.1), (7.2). Рассмотрим функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$, которая не равна тождественно нулю. $v(M)\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. Функция $v(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega,$$
$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}=0,\quad P\in S.$$

Очевидно, решением этой задачи является $v(M)=const$. Докажем, что других решений нет. Применим первую формулу Грина к функции $v(M)$:

$$\iiint_{\Omega} v\Delta v d\tau=\iint_{S} v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\iiint_{\Omega}(grad\, v\cdot grad\, v)d\tau.$$

Учитывая, что $\Delta v(M)=0,\ M\in S$, и $\left.\frac{\partial v(P)}{\partial n}\right|_{P\in S}=0$, получим $\iiint_{\Omega}(grad\, v\cdot grad\, v)d\tau=0$, т.е. $(grad\, v\cdot grad\, v)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2=0$. Так как сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, то $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$ всюду в области Ω. Отсюда получаем $v(M)=const$. Теорема доказана.

Необходимым условием разрешимости задачи Неймана является $\iint_{S} v(P)d\sigma=0$. Это следует из свойства гармонической функции: $\iint_{S}\frac{\partial u(P)}{\partial n}d\sigma=0$.

№15

Теперь рассмотрим третью краевую задачу: найти функцию $u(M)$, гармоническую в области Ω и удовлетворяющую граничному условию

$$\alpha(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n}+\beta(P)u(P)=\chi(P),\ P\in S,\ \alpha(P)\ge 0,\ \beta(P)\ge 0,$$
$$\alpha(P)+\beta(P)>0.$$

Пусть коэффициент $\alpha(P)$ не равен нулю всюду на S. Тогда разделим граничное условие на $\alpha(P)$ и получим задачу

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in\Omega, \tag{7.3}$$
$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)=\eta(P),\quad P\in S, \tag{7.4}$$

где функция $h(P)=\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}$ не равна тождественно нулю на S (иначе получим вторую краевую задачу, а не третью), а $\eta(P)=\frac{\chi(P)}{\alpha(P)}$.

Определение. Классическим решением третьей краевой задачи называется функция $u(M)\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая условиям (7.3), (7.4).

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. Если функция $h(P)$ неотрицательна всюду на S, не равна тождественно нулю и непрерывна на S, то третья краевая задача не может иметь более одного решения.

Доказательство. Допустим, что существуют две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, являющиеся решениями задачи (7.3), (7.4). Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. $v(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega,$$
$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}+h(P)v(P)=0,\quad P\in S.$$

Применим первую формулу Грина к функции $v(M)$:

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta v d\tau = \iint\limits_{S} v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - \iiint\limits_{\Omega}(grad\, v\cdot grad\, v)d\tau .$$

Учитывая, что $\Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega$, и $\frac{\partial v(P)}{\partial n}+h(P)v(P)=0,\quad P\in S$, получим $\iint\limits_{S} h(P)v^2(P)d\sigma + \iiint\limits_{\Omega}(grad\, v\cdot grad\, v)d\sigma = 0$. По условию теоремы $h(P)\geq 0$, поэтому из не отрицательности обоих слагаемых получаем $\iint\limits_{S} h(P)v^2(P)d\sigma = 0$, $\iiint\limits_{\Omega}(grad\, v\cdot grad\, v)d\sigma = 0$. Отсюда $(grad\, v\cdot grad\, v)=0$, поэтому $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\equiv 0$ в Ω, и $v\equiv const$ в Ω. Из непрерывности функции $v(M)$ в $\overline{\Omega}$ получаем $v\equiv const$ на S. Но тогда из равенства $\iint\limits_{S} h(P)v^2(P)d\sigma = 0$ и условий $h\geq 0$ и h не равно тождественно нулю следует $v\equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

Замечание 1. Совершенно аналогично могут быть рассмотрены вторая и третья краевые задачи на плоскости.

Замечание 2. Условие $h(P)\geq 0,\quad P\in S$, существенно. Если $h(P)<0,\quad P\in S$, то можно построить задачу, которая имеет более одного решения. Рассмотрим круг радиуса a (область D с границей γ). Надо найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in D,$$
$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)=0,\quad P\in\gamma .$$

Возьмём две функции $u_1\equiv 0$ и $u_2=x$ и подберём $h(P)$ таким образом, чтобы обе они были решениями этой задачи. Запишем задачу в полярной системе координат. Тогда получим $x=r\cdot\cos\varphi$, $u_2=r\cdot\cos\varphi$ и $\frac{\partial u_2}{\partial n}=\frac{\partial u_2}{\partial r}=\cos\varphi$ (нормаль n к границе γ совпадает с направлением радиуса). Если $h=-\frac{1}{a}$, то условие $\frac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)=0,\quad P\in\gamma$, превратится в тождество как для функции u_1, так и для функции u_2. Следовательно, из-за выбора $h<0$ мы построили два решения третьей краевой задачи.

№16 Внутренние краевые для Лапласа на плоскости

§ 5. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ И ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим метод разделения переменных решения краевых задач для уравнения Лапласа. Метод применим в том случае, когда граница области такова, что возможно разделение переменных. На плоскости это осуществимо, в частности, для круга и прямоугольника. Эти случаи и будут рассмотрены в настоящем параграфе.

1. Краевые задачи для уравнения Лапласа в круге, вне круга и в кольце

Методом разделения переменных построим общее решение уравнения Лапласа в круге. Введем полярную систему координат (r, φ) с началом в центре круга. Запишем уравнение Лапласа в полярной системе **координат:**

$$\Delta_2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \tag{5.1}$$

Найдем решения уравнения (5.1), представимые в виде

$$u(r,\ \varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в (5.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R(r)} \equiv -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda. \qquad (5.3)$$

Поскольку уравнение (5.1) должно выполняться всюду в круге $0 \leqslant r < a$, то функция $u(r, \varphi)$ периодична по φ с периодом 2π и ограничена в этом круге.

Из (5.3) получаем уравнение для $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$. Рассмотрим сначала уравнение для $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \qquad (5.4)$$

Решение этого уравнения должно быть периодично с периодом 2π:

$$\Phi(\varphi) \equiv \Phi(\varphi + 2\pi). \qquad (5.5)$$

Следовательно, для определения $\Phi(\varphi)$ получена задача Штурма—Лиувилля с условиями периодичности. Решение этой задачи имеет вид (см. § 8 гл. III)

$$\Phi(\varphi) = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Из (5.3) с учетом найденных значений λ_n получаем уравнение для $R(r)$:

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0. \qquad (5.6)$$

Это уравнение Эйлера, и общее решение его может быть записано в виде

$$\begin{aligned} R(r) = R_n(r) = C_1r^n + C_2r^{-n}, \quad n \neq 0, \\ R_0(r) = C_1 + C_2\ln r, \quad n = 0. \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Ограниченными при $0 \leqslant r < a$ решениями являются

$$R_n(r) = C_1r^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, получаем следующую систему решений уравнения Лапласа, ограниченных в круге $0 \leqslant r < a$:

$$u_n(r, \varphi) = r^n \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (5.8)$$

Общее решение уравнения Лапласа в круге записывается в виде разложения по этим частным решениям:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}. \qquad (5.9)$$

Для построения общего решения уравнения Лапласа вне круга ($r > a$) следует выбрать частные решения (5.2), ограниченные вне круга. Они имеют вид

$$u_n(r, \varphi) = \frac{1}{r^n} \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.10)$$

Следовательно, общее решение уравнения Лапласа вне круга, ограниченное на бесконечности, можно записать в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}. \qquad (5.11)$$

Перейдем теперь к решению краевых задач. Рассмотрим внутреннюю краевую задачу для круга:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \qquad (5.12)$$

$$P(u) \equiv \alpha\frac{\partial u}{\partial r} + \beta u|_{r=a} = f(\varphi), \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0. \qquad (5.13)$$

Решение задачи (5.12)—(5.13) можно записать в виде разложения (5.9), коэффициенты которого определяются из граничного условия. Но вычисления оказываются проще, если решение записать в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{P(r^n)|_{r=a}} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} \text{ при } \beta \neq 0. \qquad (5.14)$$

Подставляя (5.14) в граничное условие (5.13), находим выражения для коэффициентов:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi, \qquad (5.15)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Выпишем отдельно решения первой, второй и третьей краевых задач для уравнения Лапласа в круге.

1. *Задача Дирихле*: $u|_{r=a} = f(\varphi)$,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}. \qquad (5.16)$$

2. *Задача Неймана*: $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi)$,

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} + C, \qquad (5.17)$$

где C — произвольная постоянная. Напомним, что решение внутренней задачи Неймана существует только при условии

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0$$

и определяется с точностью до произвольной постоянной.

3. *Третья краевая задача*: $\frac{\partial u}{\partial r} + hu|_{r=a} = f(\varphi)$,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+ah)\,a^{n-1}} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\}. \qquad (5.18)$$

Коэффициенты в (5.16)—(5.18) определяются формулами (5.15).

Решение внешних краевых задач проводится аналогично. Для построения их решений следует использовать частные решения (5.10).

Подробнее рассмотрим краевую задачу внутри кольца $a \leqslant r \leqslant b$. Для определенности выберем задачу Дирихле

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \quad a < r < b, \\ u|_{r=a} = f_1(\varphi), \ u|_{r=b} = f_2(\varphi), \end{gathered} \qquad (5.19)$$

При построении решения внутри кольца нужно использовать весь набор радиальных функций (5.7). Но удобно при каждом n построить специальную систему фундаментальных решений $R_n^{(a)}(\ )$, $R_n^{(b)}(r)\}$ уравнения (5.6), удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$R_n^{(a)}(a) = 0, \ R_n^{(b)}(b) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (5.20)$$

В качестве таких решений можно взять функции

$$R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0,$$

$$R_0^{(a)}(r) = \ln\frac{r}{a}, \quad R_0^{(b)}(r) = \ln\frac{b}{r}.$$

Тогда решение задачи (5.19) запишем в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2}\,\frac{R_0^{(a)}(r)}{R_0^{(a)}(b)} + \frac{C_0}{2}\,\frac{R_0^{(b)}(r)}{R_0^{(b)}(a)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} \{C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\}. \qquad (5.21)$$

Подставляя (5.21) в граничное условие при $r=a$ и учитывая (5.20), находим коэффициенты C_n и D_n:

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \quad D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Аналогичным образом коэффициенты A_n и B_n определяются из граничного условия при $r=b$:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

При решении других краевых задач внутри кольца следует построить нужные радиальные функции, удовлетворяющие соответствующим однородным граничным условиям при $r=a$ и $r=b$.

2. Краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике

Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике также могут быть решены методом разделения переменных. Для определенности рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \qquad (5.22)$$

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \ u|_{x=a} = \varphi_2(y), \qquad (5.23)$$

$$u|_{y=0} = \psi_1(x), \ u|_{y=b} = \psi_2(x). \qquad (5.24)$$

Задачу (5.22)—(5.24) разобьем на две задачи, каждая из которых имеет однородные граничные условия по одной из переменных. Пусть

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где u_1 и u_2 есть решения следующих задач в прямоугольнике:

$$\begin{array}{ll} \Delta u_1 = 0, & \Delta u_2 = 0, \\ u_1|_{x=0} = u_1|_{x=a} = 0, & u_2|_{y=0} = u_2|_{y=b} = 0, \\ u_1|_{y=0} = \psi_1(x), & u_2|_{x=0} = \varphi_1(y), \\ u_1|_{y=b} = \psi_2(x), & u_2|_{x=a} = \varphi_2(y). \end{array}$$

Каждую из этих задач будем называть стандартной. Рассмотрим стандартную задачу для функции $u_1(x, y)$. Построим сначала решения уравнения Лапласа, представимые в виде

$$u(x, y) = X(x)\,Y(y) \not\equiv 0 \qquad (5.25)$$

и удовлетворяющие однородным граничным условиям по x:

$$u|_{x=0} = u|_{x-a} = 0. \tag{5.26}$$

Подставляя (5.25) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим уравнения для функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < a, \tag{5.27}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad 0 < y < b. \tag{5.28}$$

Учитывая (5.26), получаем для $X(x)$ задачу Штурма—Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < a,$$

$$X(0) = X(a) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0,$$

решение которой имеет вид (см. гл. III, § 8)

$$X = X_n = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

При $\lambda = \lambda_n$ общее решение уравнения (5.28) запишем в виде

$$Y(y) = Y_n(y) = A \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\, y + B \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(b - y).$$

Заметим, что такой выбор фундаментальных решений уравнения (5.28) аналогичен построению функций $R_n^{(a)}$ и $R_n^{(b)}$ в предыдущем пункте.

Таким образом, построены частные решения уравнения Лапласа

$$u_n(x, y) = \{A_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\, y + B_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(b - y)\} \sin\sqrt{\lambda_n}\, x. \tag{5.29}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Решение стандартной задачи для функции u_1 запишем в виде разложения по системе (5.29):

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\, y}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\, b} + B_n \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(b - y)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\, b} \right\} \sin\sqrt{\lambda_n}\, x, \tag{5.30}$$

коэффициенты которого определяются из граничных условий

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin\sqrt{\lambda_n}\, x\, dx, \quad A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_2(x) \sin\sqrt{\lambda_n}\, x\, dx. \tag{5.31}$$

Таким образом, решение стандартной задачи для $u_1(x, y)$ дается формулами (5.30), (5.31).

Аналогичным образом решается стандартная задача для функции $u_2(x, y)$. Решение ее имеет вид

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\, x}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\, a} + D_n \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(a - x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\, a} \right\} \sin\sqrt{\lambda_n}\, y, \tag{5.32}$$

где $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$,

$$D_n = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin\sqrt{\lambda_n}\, y\, dy, \quad C_n = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_2(y) \sin\sqrt{\lambda_n}\, y\, dy.$$

Итак, решение задачи (5.22)—(5.24) имеет вид

$$u = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где функции u_1 и u_2 определяются формулами (5.30) и (5.32) соответственно.

Таким же образом может быть решена краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике с другими граничными условиями. Осторожность нужно проявлять при решении задачи Неймана, поскольку при редукции ее к стандартным задачам может появиться задача, которая не имеет решения. В этом случае исходную задачу заменой неизвестной функции можно свести к задаче для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями. Схема решения такой задачи изложена в гл. III, § 7.

Замечание. Решения краевых задач для уравнения Лапласа в случае круга, кольца и прямоугольника выписаны в виде рядов. Мы не будем исследовать сходимость этих рядов. Отметим только, что при достаточной гладкости граничных функций эти ряды сходятся и дают классическое решение соответствующих краевых задач.

№17

п. 2. Регулярность гармонических функций на бесконечности. Формулы Грина в неограниченной области.

Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Определение. Функция $u(M)$, $M \in R^3$, называется регулярной на бесконечности, если при всех достаточно больших r выполнены неравенства

$$|u| \le \frac{A}{r}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad A = const.$$

Для регулярных на бесконечности функций справедливы формулы Грина. Рассмотрим некоторую область $\Omega \subset R^3$, ограниченную поверхностью S. Обозначим через Ω' область, являющуюся внешней к S. $R^3 = \Omega \cup S \cup \Omega'$.

Теорема. Пусть функции $u(M)$ и $v(M)$ регулярны на бесконечности и $u,v \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega}')$. Тогда для $u(M)$ и $v(M)$ имеет место первая формула Грина.

Доказательство. Вокруг области Ω опишем сферу S_{R_0} радиуса R_0 так, чтобы Ω целиком лежала внутри шара Ω_{R_0}. Обозначим через Ω'_{R_0} шаровой слой, лежащий между поверхностями S_{R_0} и S. Область Ω'_{R_0} ограничена, поэтому в ней можно применить первую формулу Грина для функций $u(M)$ и $v(M)$:

$$\iiint\limits_{\Omega'_{R_0}} u\Delta v d\tau = \iint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma + \iint\limits_{S_{R_0}} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - \\ - \iiint\limits_{\Omega'_{R_0}} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau . \qquad (8.1)$$

Здесь $\bar{n}$ является внешней нормалью к границе области Ω'_{R_0}. Оценим интеграл по поверхности S_{R_0}:

$$\left|\iint\limits_{S_{R_0}} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma\right| = \left|\iint\limits_{S_{R_0}} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)d\sigma_P\right| \le$$

$$\le \iint\limits_{S_{R_0}} |u|\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\cdot|\cos\alpha| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\cdot|\cos\beta| + \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\cdot|\cos\gamma|\right)d\sigma_P \le$$

$$\le \iint\limits_{S_{R_0}} \frac{A}{R_0}\left(\frac{A}{R_0^2} + \frac{A}{R_0^2} + \frac{A}{R_0^2}\right)d\sigma_P = \iint\limits_{S_{R_0}} \frac{3A^2}{R_0^3}d\sigma_P =$$

$$= \frac{3A^2}{R_0^3}4\pi R_0^2 = \frac{12A^2\pi}{R_0} .$$

Так как $\lim\limits_{R_0\to\infty} \frac{12A^2\pi}{R_0} = 0$, то $\lim\limits_{R_0\to\infty} \iint\limits_{S_{R_0}} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = 0$.

Теперь рассмотрим интеграл $\iiint\limits_{\Omega'_{R_0}} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau$ и оценим его подынтегральное выражение:

$$|(grad\, u \cdot grad\, v)| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right| \le \frac{3A^2}{R_0^4} .$$

Так как подынтегральное выражение при $R_0 \to \infty$ является величиной $O\left(\frac{1}{R_0^p}\right)$, $p > 3$, то существует

$$\lim_{R_0\to\infty} \iiint\limits_{\Omega'_{R_0}} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau = \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau -$$

несобственный интеграл первого рода. Поэтому при $R_0 \to \infty$ правая часть формулы (8.1) имеет предел, равный $\iint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau$.

Следовательно, существует и предел левой части (8.1). Получили формулу

$$\iiint\limits_{\Omega'} u\Delta v d\tau = \iint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau . \qquad (8.2)$$

Она называется первой формулой Грина.

Поменяв местами функции u и v в соотношении (8.2) и вычтя из одного соотношения другое, получим вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega'} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint\limits_{S} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma . \qquad (8.3)$$

Учитывая, что фундаментальное решение $\frac{1}{R_{MM_0}}$ уравнения Лапласа регулярно на бесконечности, получим третью формулу Грина для функции $u(M)$ в области Ω'. При этом нормаль к поверхности S должна быть внешней по отношению к Ω', т.е. направлена внутрь Ω.

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right)d\sigma_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'}\frac{\Delta u(M)}{R_{M_0M}}d\tau_M .$$

Замечание. Гармоническая в области Ω' функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является регулярной на бесконечности.

п. 1. Внешняя задача Дирихле. №18

Рассмотрим область Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S в пространстве R^3. Тогда область $\Omega' = R^3 \setminus \overline{\Omega}$ будет внешней к области Ω в R^3, $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup S$. Поставим внешнюю задачу Дирихле:

найти функцию $u(M)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}'$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в открытой области Ω', принимающую на границе области $\overline{\Omega}'$ заданные значения $u(P)\big|_{P\in S} = \mu(P)$, а на бесконечности равномерно стремящуюся к нулю. $u(M)\in C^2(\Omega')\cap C(\overline{\Omega}')$.

Замечание. Условие равномерного стремления к нулю функции $u(M)$ на бесконечности важно для единственности решения задачи.

Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле в пространстве. Внешняя задача Дирихле в пространстве R^3 может иметь только одно решение.

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ задачи

$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega',$

$u(P) = \mu(P), \quad P \in S,$

$u(M)$ равномерно стремится к нулю при $M \to \infty$.

Введём функцию $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Для $w(M)$ получим задачу

$\Delta w(M) = 0, \quad M \in \Omega',$

$w(P) = 0, \quad P \in S,$

$w(M)$ равномерно стремится к нулю при $M \to \infty$.

Предположим, что в области Ω' существует точка M_1, в которой $w(M_1) \neq 0$ $(u_1(M_1) \neq u_2(M_1))$. Тогда выберем шар большого радиуса R с границей S_R так, чтобы точка M_1 лежала между поверхностями S и S_R, и чтобы на поверхности S_R выполнялось неравенство $|w(M)| < \varepsilon$ для произвольного малого $\varepsilon > 0$. В замкнутой области, ограниченной поверхностями S и S_R, получили гармоническую функцию $w(M)$; $w(M_1) \neq 0$ и $w(M)\big|_{M\in S} = 0$, $|w(M)|\big|_{M\in S_R} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу принципа максимума $|w(M_1)| < \varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ $w(M_1) = 0$. Поэтому $u_1(M) = u_2(M)$ в области Ω'. Теорема доказана.

Замечание. Внешняя задача Дирихле **на плоскости** ставится по-другому. Условие равномерного стремления функции к нулю на бесконечности надо заменить на условие её ограниченности на бесконечности: существует $N > 0$, что $|u(M)| < N$. Требование обращения в нуль функции на бесконечности достаточно для единственности решения, но оно является слишком сильным, так как задача может оказаться вовсе неразрешимой.

№19, 20

п. 3. Единственность решений внешней задачи Неймана и третьей краевой задачи.

Пусть снова Ω' – неограниченная область, внешняя к замкнутой поверхности S. В третьей краевой задаче надо найти регулярную гармоническую функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega',$

$u \in C^1(\overline{\Omega}')\cap C^2(\Omega'),$

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P),$

$P \in S, \quad h(P) \geq 0, \quad h(P) \in C(S).$

Предположим, что функция $h(P)$ не равна тождественно нулю, и будем искать регулярную функцию $u(M)$, т.е. $u(M)$ равномерно стремится к нулю при $M \to \infty$.

Теорема.

Внешняя третья краевая задача имеет единственное классическое решение, если $h(P) \geq 0$ и не равна тождественно нулю на границе области.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения третьей краевой задачи $u_1(M)$ и $u_2(M)$ в области Ω'. Тогда функция $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega',$$
$$v \in C^1(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega'),$$
$$\frac{\partial v(P)}{\partial n} + h(P)v(P) = 0,$$
$$P \in S, \quad h(P) \geq 0, \quad h(P) \in C(S),$$

причём функция $v(M)$ равномерно стремится к нулю на бесконечности.

К функции $v(M)$ применим первую формулу Грина в области Ω':

$$\iiint\limits_{\Omega'} v(M) \Delta v(M) d\tau_M = \iint\limits_S v(P) \frac{\partial v(P)}{\partial n_P} d\sigma_P -$$
$$- \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M .$$

Пользуясь тем, что $\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega'$, и $\frac{\partial u(P)}{\partial n} = -h(P)v(P), \quad P \in S$, получим $0 = -\iint\limits_S h(P)v^2(P)d\sigma_P - \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M$. Так как каждый из интегралов неотрицателен, а и их сумма равна нулю, то

$$\iint\limits_S h(P)v^2(P)d\sigma_P = 0, \tag{8.1}$$

$$\iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M = 0 . \tag{8.2}$$

Из условия (8.2) следует, что $(grad\, v \cdot grad\, v) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = 0$, т.е. $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$, следовательно, $v(M) \equiv const$ в $\overline{\Omega}'$. Из условия (11.1), непрерывности функции v вплоть до границы S и условий $h \geq 0$ и h не равно тождественно нулю следует, что $v(P) \equiv 0$ на S. Поэтому $v(M) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}'$. Следовательно, $u_1(M) \equiv u_2(M)$ в $\overline{\Omega}'$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы мы не использовали условие регулярности функции $v(M)$ на бесконечности, но первая формула Грина в области Ω' верна лишь если функция $v(M)$ регулярна на бесконечности.

Во внешней задаче Неймана надо найти регулярную гармоническую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega',$$
$$u \in C^1(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega'),$$
$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = v(P), \quad P \in S.$$

Будем искать равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности функцию $u(M)$.

Теорема. Внешняя задача Неймана в R^3 имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения задачи Неймана $u_1(M)$ и $u_2(M)$ в области

Ω'. Рассмотрим функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$ Выписывая краевую задачу для функции $v(M)$ как в предыдущей теореме, и применяя к ней первую формулу Грина в области Ω', получим $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$, $M\in\Omega'$, т.е. $v(M)\equiv const$ в Ω'. Так как функция $v(M)$ равномерно стремится к нулю на бесконечности, то $v(M)\equiv const=0$, в Ω'. Теорема доказана.

§ 9. Внешние краевые задачи на плоскости.

№21,22 Для уравнения Лапласа **на плоскости** требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности является жестким, такого решения может не существовать.

Определение. Функция двух переменных $u(x,y)$ называется регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле. Пусть в R^2 имеется ограниченная область D с границей γ и внешней к ней областью D'. $R^2=D\cup\gamma\cup D'$. Тогда внешняя задача Дирихле заключается в нахождении функции $u(x,y)$, непрерывной в области $\overline{D}'=D'\cup\gamma$, гармоничной в области D', удовлетворяющей условию $u(P)=\mu(P)$, $P\in\gamma$, и ограниченной на бесконечности.

Теорема. Внешняя задача Дирихле на плоскости может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$ такие, что

$$\Delta u_i(M)=0,\quad M\in D',\quad u_i\in C(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$
$$u_i(P)=\mu(P),\quad P\in\gamma,\quad \mu(P)\in C(\gamma),$$
$$|u_i(M)|<N,\quad i=1,2,\quad N=const.$$

Предположим, что $u_1(M)\neq u_2(M)$. Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. $v(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in D',\quad v\in C(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$
$$v(P)=0,\quad P\in\gamma,$$
$$|v(M)|<N,\quad N=const.$$

Возьмём внутри области D точку M_0 и построим окружность $C^a_{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащую внутри D. Пусть R_{MM_0} – расстояние между точками M и M_0, тогда функция $u_a(M)=\ln\frac{R_{MM_0}}{a}$ гармонична в D' и положительна в D', так как $R_{MM_0}>a$. Построим окружность $C^b_{M_0}$ с центром в точке M_0, содержащую границу γ внутри себя.

Введём функцию $u_b(M)=N\frac{\ln\frac{R_{MM_0}}{a}}{\ln\frac{b}{a}}$, $N>0$, которую будем называть "барьером". Функция $u_b(M)$ удовлетворяет следующим условиям: $\Delta u_b(M)=0$, $M\in D''$, где D'' – область, заключенная между границами γ и $C^b_{M_0}$, $u_b(M)>0$, $M\in\gamma$, и $u_b(M)\big|_{M\in C^b_{M_0}}=N$. Функция $v(M)$ удовлетворяет условиям $\Delta v(M)=0$, $M\in D''$, $v(M)\big|_{M\in\gamma}=0$ и $|v(M)|<N, M\in C^b_{M_0}$. $|v(M)|\le u_b(M)$ на границе области D'' и, следовательно, в силу принципа максимума $|v(M)|\le u_b(M)$ всюду в области D''. Фиксируем точку M и устремим b в бесконечность. $\lim\limits_{b\to\infty}u_b(M)=0$, следовательно, $v(M)=0$. В силу произвольности выбора точки M получаем, что $v(M)\equiv 0$ в D'. Теорема доказана.

Сформулируем внешние вторую и третью краевые задачи на плоскости.

Внешняя задача Неймана:

$\Delta u(M)=0, \quad M \in D', \quad u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D')$,

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P), \quad P \in \gamma, \quad n$ – нормаль к границе γ в точке P,

функция $u(M)$ регулярна на бесконечности.

Внешняя третья краевая задача:

$\Delta u(M)=0, \quad M \in D', \quad u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D')$,

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P), \quad P \in \gamma, \quad \eta, h \in C(\gamma), n$ – нормаль к границе γ в точке P,

функция $h(P)$ не равна тождественно нулю,

функция $u(M)$ регулярна на бесконечности.

Докажем, что для гармоничных в D' функций, регулярных на бесконечности, справедливы формулы Грина.

Лемма. Для гармоничных в D' функций, регулярных на бесконечности, справедливы следующие оценки первых производных:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2} \quad \text{при} \quad r > r_0. \qquad (3.3)$$

Доказательство. Построим окружность $C^a_{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, содержащую контур γ внутри себя. Введём полярную систему координат (r,φ) с центром в точке M_0. Методом разделения переменных можно доказать, что **регулярное на бесконечности** решение уравнения Лапласа может быть представлено в виде ряда Фурье

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

(9.1)

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi,$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi)d\varphi.$$

При $r > a$ ряд сходится абсолютно и равномерно, и его можно дифференцировать почленно. Тогда $\left|\dfrac{\partial u}{\partial r}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right| \le \dfrac{A}{r}$. Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \dfrac{\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \dfrac{\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$, то $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right| \le \dfrac{A}{r^2}$.

Лемма доказана.

Теорема. Для функций, гармоничных в области D' на плоскости и регулярных на бесконечности, справедливы формулы Грина:

$$\iint_{D'} v\Delta u\, ds = \int_\gamma v\frac{\partial u}{\partial n}dl - \iint_{D'}(grad\, u \cdot grad\, v)ds$$ – первая формула Грина,

$$\iint_{D'}(v\Delta u - u\Delta v)ds = \int_\gamma\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dl$$ – вторая формула Грина.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично пространственному случаю. Доказать самостоятельно.

Полученная оценка (3.3) позволяет получить первую и вторую формулы Грина во внешней области. Действительно, пусть функции u и v непрерывны в $\bar{D}_e$ вместе с первыми производными, имеют непрерывные вторые производные в D_e, гармонические в D_e и регулярны на бесконечности. Построим окружность C_R достаточно большого радиуса R, содержащую контур Γ внутри себя. Область между Γ и C_R обозначим D_R. Применим к функциям u и v в области D_R первую формулу Грина

$$\int_{D_R} v\,\Delta u\, d\sigma = \oint_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}dl + \int_{C_R} v\frac{\partial u}{\partial n}dl - \int_{D_R}\nabla u\,\nabla v\, d\sigma. \qquad (3.5)$$

Согласно оценке (3.3) при $R\to\infty$

$$\int\limits_{C_R} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dl\to 0.$$

Интеграл $\int\limits_{D_R}\nabla u\,\nabla v\,d\sigma$ при $R\to\infty$ сходится к несобственному интегралу $\int\limits_{D_e}\nabla u\,\nabla v\,d\sigma$. Следовательно, существует предел при $R\to\infty$ интеграла, стоящего в левой части (3.5), и, переходя к пределу в (3.5), получаем первую формулу Грина во внешней области D_e:

$$\int\limits_{D_e} v\,\Delta u\,d\sigma=\oint\limits_{\Gamma} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dl-\int\limits_{D_e}\nabla u\,\nabla v\,d\sigma.$$

Справедливость второй формулы Грина во внешней области D_e

$$\int\limits_{D_e}\{v\,\Delta u-u\,\Delta v\}\,d\sigma=\oint\limits_{\Gamma}\left\{v\,\frac{\partial u}{\partial n}-u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right\}dl$$

очевидна.

№23 Решение внешней задачи Неймана на плоскости

$$\Delta u=0 \text{ в } D_e,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f(P)|_{\Gamma},$$

Теорема. Классическое решение внешней задачи Неймана на плоскости, ограниченное и регулярное на бесконечности, определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. Пусть функция $u(M)$ – классическое решение задачи Неймана:

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in D',\ u\in C^1(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}=\nu(P),\quad P\in\gamma,$$

$u(M)$ регулярна на бесконечности.

Пусть функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$ – два различных решения поставленной задачи. Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$, которая удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in D',\ v\in C^1(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}=0,\quad P\in\gamma,$$

$v(M)$ регулярна на бесконечности.

Применим к $v(M)$ первую формулу Грина:

$$\iint\limits_{D'} v(M)\Delta v(M)ds=\int\limits_{\gamma} v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n}dl-\iint\limits_{D'}\|grad\,v(M)\|^2 ds.$$

Так как функция $v(M)$ удовлетворяет поставленной выше задаче, то $\iint\limits_{D'}\|grad\,v(M)\|^2 ds=0$. Следовательно, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$, т.е. $v(M)\equiv const$ в D'. Функция $v(M)$ имеет на бесконечности конечный предел, вообще говоря, не равный нулю. Отсюда и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

№24 **Теорема единственности решения внешней третьей краевой задачи.** Если $h(P)\ge 0$ и $h(P)$не равна тождественно нулю, то внешняя третья краевая задача на плоскости

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in D',\ u\in C^1(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)=\eta(P),\quad P\in\gamma,$$

может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично пространственному случаю. Доказать самостоятельно.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения третьей краевой задачи $u_1(M)$ и $u_2(M)$ в области Ω'. Тогда функция $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega',$$

$$v\in C^1(\overline{\Omega}')\cap C^2(\Omega'),$$

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}+h(P)v(P)=0,$$

(д-во для 3-х мерного случая)

$P \in S, \quad h(P) \geq 0, \quad h(P) \in C(S),$

причём функция $v(M)$ равномерно стремится к нулю на бесконечности.

К функции $v(M)$ применим первую формулу Грина в области Ω':

$$\iiint\limits_{\Omega'} v(M)\Delta v(M) d\tau_M = \iint\limits_S v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P} d\sigma_P -$$
$$- \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M .$$

Пользуясь тем, что $\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega'$, и $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} = -h(P)v(P), \quad P \in S$, получим $0 = -\iint\limits_S h(P)v^2(P) d\sigma_P - \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M$. Так как каждый из интегралов неотрицателен, а и их сумма равна нулю, то

$$\iint\limits_S h(P)v^2(P) d\sigma_P = 0, \qquad (8.1)$$

$$\iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M = 0 . \qquad (8.2)$$

Из условия (8.2) следует, что $(grad\, v \cdot grad\, v) = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = 0,$ т.е. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$, следовательно, $v(M) \equiv const$ в $\overline{\Omega}'$. Из условия (11.1), непрерывности функции v вплоть до границы S и условий $h \geq 0$ и h не равно тождественно нулю следует, что $v(P) \equiv 0$ на S. Поэтому $v(M) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}'$. Следовательно, $u_1(M) \equiv u_2(M)$ в $\overline{\Omega}'$. Теорема доказана.

№25,26

§ 10. Функция Грина задачи Дирихле. Свойства функции Грина.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u(M) = -f(M), \quad M \in \Omega, \quad u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),$$
$$u(P) = \mu(P), \quad P \in S .$$

Запишем интегральное представление решения этой задачи:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \frac{1}{R_{M_0P}} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) \right\} d\sigma_P -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_\Omega \frac{\Delta u(M)}{R_{M_0M}} d\tau_M . \qquad (10.1)$$

Пусть функция $v(M)$ гармонична в области Ω и непрерывна вместе с первыми производными в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Применим к функциям $u(M)$ и $v(M)$ вторую формулу Грина:

$$0 = \iint\limits_S \left\{ v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P} \right\} d\sigma_P -$$
$$- \iiint\limits_\Omega v(M)\Delta u(M) d\tau_M . \qquad (10.2)$$

Сложим формулы (10.1) и (10.2), получим

$$u(M_0) = \iint\limits_S \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} G(M_0, P) - u(P)\frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n_P} \right\} d\sigma_P -$$
$$- \iiint\limits_\Omega G(M_0, M)\Delta u(M) d\tau_M ,$$

где $\quad G(M_0, M) = \dfrac{1}{4\pi R_{M_0M}} + v(M).$

Если потребовать, чтобы выполнялось условие $G(M_0, P) = 0, \quad P \in S$, то

$$u(M_0) = -\iint\limits_S u(P)\frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n_P} d\sigma_P -$$

$$- \iiint_{\Omega} \Delta u(M) G(M_0, M) d\tau_M \,. \qquad (10.3)$$

Определение. Функция $G(M_0, M)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, если

1. $G(M_0, M) = \dfrac{1}{4\pi R_{M_0 M}} + v(M)$, где функция $v(M)$ гармонична всюду в области Ω;
2. $G(M_0, P) = 0, \quad P \in S$.

Из определения следует, что функция Грина $G(M_0, M)$ с точностью до гармонической функции v является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Второе условие в определении продиктовано типом граничных условий. Если функция Грина $G(M_0, M)$ существует, то решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона находится в явном виде по формуле

$$u(M_0) = - \iint_S \mu(P) \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n_P} d\sigma_P + $$
$$+ \iiint_{\Omega} f(M) G(M_0, M) d\tau_M \,. \qquad (10.4)$$

Замечание. Формула (10.4) содержит производную $\dfrac{\partial G(M_0, M)}{\partial n_M}$, существование которой не следует из определения.

Формула (10.4) даёт классическое решение задачи Дирихле при выполнении условий $\mu \in C(S)$ и $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Для построения функции Грина $G(M_0, M)$ необходимо найти функцию $v(M)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega, \qquad (10.5)$$

$$v(P) = -\frac{1}{4\pi R_{M_0 P}}, \quad P \in S. \qquad (10.6)$$

Для достаточно широкого класса поверхностей (так называемых поверхностей Ляпунова) задача (10.5) (10.6) разрешима, поэтому функция Грина существует.

Свойства функции Грина.

1. $G(M_0, M) > 0$, если $M, M_0 \in \Omega$.

Доказательство. Возьмем точку M_0, в которой функция Грина имеет особенность и вырежем её шаром K_ε ограниченным поверхностью Σ_ε. Из представления функции Грина следует, что на поверхности Σ_ε и внутри неё $G(M_0, M) > 0$ и $G(M_0, P) = 0, \quad P \in S$. Так как функция Грина $G(M_0, M)$ в области, заключенной между поверхностями Σ_ε и S, удовлетворяет уравнению Лапласа, то в силу принципа максимума $G(M_0, M) > 0$ всюду в области, заключенной между поверхностями Σ_ε и S. В силу произвольности выбора ε получаем $G(M_0, M) > 0$ всюду в области Ω.

Замечание. Так как функция $v(M)$ удовлетворяет задаче (10.5), (10.6), то из принципа максимума следует, что $v(M) < 0$ всюду в области Ω. Следовательно, $G(M_0, M) = \dfrac{1}{4\pi R_{M_0 M}} + v(M) < \dfrac{1}{4\pi R_{M_0 M}}$. Отсюда получаем границы изменения значений функции $G(M_0, M)$:

$$0 \le G(M_0, M) < \frac{1}{4\pi R_{M_0 M}}, \quad M_0 \ne M,$$

причём равенство нулю учитывает, что $G(M_0, P) = 0, \quad P \in S$.

2. Функция Грина симметрична относительно точек M_0 и M: $G(M_0, M) = G(M, M_0)$.

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 – некоторые фиксированные точки области Ω. Построим сферы $\Sigma_\varepsilon^{M_1}$ и

$\Sigma_\varepsilon^{M_2}$ радиусов ε с центрами в точках M_1 и M_2. Введём функции $w_1(M)=G(M,M_1)$ и $w_2(M)=G(M,M_2)$ и применим к ним вторую формулу Грина в области $\Omega\setminus\left(K_\varepsilon^{M_1}\cup K_\varepsilon^{M_2}\right)$, где $K_\varepsilon^{M_1}$ и $K_\varepsilon^{M_2}$ – шары радиусов ε с центрами в точках M_1 и M_2.

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus\left(K_\varepsilon^{M_1}\cup K_\varepsilon^{M_2}\right)}\left(w_1(M)\Delta w_2(M)-w_2(M)\Delta w_1(M)\right)d\tau_M=$$

$$=\iint\limits_S\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P.$$

Учитывая, что функции $w_1(M)$ и $w_2(M)$ удовлетворяют уравнению Лапласа в $\Omega\setminus M_1$ и в $\Omega\setminus M_2$ соответственно, а на границе S области Ω принимают нулевые значения, получим

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=0,$$

где нормали n_P к поверхностям $\Sigma_\varepsilon^{M_1}$ и $\Sigma_\varepsilon^{M_2}$ направлены внутрь шаров $K_\varepsilon^{M_1}$ и $K_\varepsilon^{M_2}$

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=0.$$

Функции $w_1(M)$ и $w_2(M)$ внутри шаров $K_\varepsilon^{M_2}$ и $K_\varepsilon^{M_1}$ соответственно удовлетворяют уравнению Лапласа. Напишем интегральное представление функции $w_1(M)$

Напишем интегральное представление функции $w_1(M)$ в точке M_2 и функции $w_2(M)$ в точке M_1:

$$w_1(M_2)=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P.$$

$$w_2(M_1)=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_2(P)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}-G(P,M_1)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}-G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P.$$

Подставляя, полученные формулы для функций $w_1(M)$ и $w_2(M)$ в выше стоящую формулу, получим $w_1(M_2)-w_2(M_1)=0$ или $G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$. Это свойство называется принципом взаимности.

§ 2. Задачи Коши для уравнения колебаний на прямой.

№27

п.1. Метод Даламбера.

Сформулируем задачу Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0, \qquad (2.1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in R^1. \qquad (2.2)$$

Определение. Классическим решением задачи (2.1), (2.2) называется функция $u(x,t)$, определенная при $x\in R^1, t\ge 0$ и непрерывная вместе со своей первой производной по t в области $x\in R^1, t\ge 0$, имеющая непрерывные вторые производные в области $x\in R^1, t>0$ и удовлетворяющая уравнению (2.1) и начальным условиям (2.2).

Из линейности задачи (2.1), (2.2) следует, что можно провести её редукцию и представить $u(x,t)$ в виде суммы двух функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, где $u_1(x,t)$ – решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний и неоднородных начальных условий, $u_2(x,t)$ – решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний и однородных начальных условий.

Рассмотрим сначала задачу для **однородного** уравнения колебаний и неоднородных начальных условий:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0, \qquad (2.3)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in R^1. \qquad (2.4)$$

Предположим, что существует классическое решение $u(x,t)$ этой задачи. Преобразуем уравнение колебаний к виду, содержащему смешанную производную. Запишем дифференциальное уравнение характеристик: $(dx)^2-a^2(dt)^2=0$. $dx-adt=0$, $dx+adt=0$. Найдём характеристики уравнения колебаний (так называются интегралы дифференциального уравнения характеристик):

$$x-at=C_1,\ x+at=C_2.$$

Введём новые переменные $\xi=x-at$, $\eta=x+at$. В результате уравнение колебаний преобразуется к виду $U_{\xi\eta}(\xi,\eta)=0$, $\qquad (2.5)$

где $U(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$. Общий интеграл уравнения (2.5) имеет вид $U_\eta(\xi,\eta)=\bar{f}(\xi,\eta)$

$$U(\xi,\eta)=\int\bar{f}(\eta)d\eta+f_1(\xi)=f_2(\eta)+f_1(\xi). \qquad (2.6)$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ может быть записана в виде

$$u(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at). \qquad (2.7)$$

Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы выполнялись начальные условия (2.4):

$$u(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),$$

$$u_t(x,0)=-af_1'(x)+af_2'(x)=\psi(x),\quad x\in R^1,$$

где штрих означает производную по полному аргументу.

$$\begin{cases}f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)\\ -f_1(x)+f_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C,\quad C=const.\end{cases}$$

Отсюда

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz-\frac{C}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+\frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) называется формулой Даламбера, а метод построения решения задачи (2.3), (2.4) называется методом Даламбера.

п. 2. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^1. Тогда классическое решение задачи Коши (2.3), (2.4) существует, единственно и определяется формулой Даламбера.

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда непосредственной проверкой устанавливаем, что функция $u(x,t)$, представимая формулой Даламбера, является классическим решением задачи. Существование решения доказано.

Докажем теперь, что решение задачи единственно. Если решение существует, то оно представимо формулой Даламбера. Если есть второе решение, то оно так же представимо формулой Даламбера. Разность двух решений $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению и нулевым начальным условиям и так же представима формулой Даламбера. Подставляя в формулу Даламбера нулевые начальные условия, получаем $v(x,t)\equiv 0$ и $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$. Теорема доказана.

Формула Даламбера даёт возможность доказать устойчивость решения задачи Коши по начальным данным.

№28

Теорема устойчивости решения задачи Коши. Пусть функции $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$– начальные данные двух задач Коши

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in R^1,$$

$$\tilde{u}_{tt}(x,t)=a^2\tilde{u}_{xx}(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,$$
$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{\varphi}(x),\quad \tilde{u}_t(x,0)=\tilde{\psi}(x),\quad x\in R^1.$$

Пусть они удовлетворяют условиям $|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|\le\varepsilon$, $x\in R^1$, $\int\limits_\alpha^\beta|\psi(x)-\tilde{\psi}(x)|^2dx\le\varepsilon^2(\beta-\alpha)$ для любых действительных постоянных α и β и любого $\varepsilon>0$. Тогда для решений этих задач $u(x,t)$ и $\tilde{u}(x,t)$ при $t\in[0,T]$ выполнено неравенство $|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)|\le\varepsilon(1+T)$, $x\in R^1$, $t\in[0,T]$.

Доказательство.

$$|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)|\le\frac{1}{2}|\varphi(x-at)-\tilde{\varphi}(x-at)|+$$
$$+\frac{1}{2}|\varphi(x+at)-\tilde{\varphi}(x+at)|+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}|\psi(z)-\tilde{\psi}(z)|dz.$$

Запишем неравенство Коши-Буняковского:

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}|\psi(z)-\tilde{\psi}(z)|dz\le\left(\int\limits_{x-at}^{x+at}|\psi(z)-\tilde{\psi}(z)|^2dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\right)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le(\varepsilon^2 2at)^{\frac{1}{2}}(2at)^{\frac{1}{2}}=2a\varepsilon t.$$

Тогда $|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2a}2a\varepsilon t\le\varepsilon(1+T)$.

Теорема доказана.

п. 3. Существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний на прямой.

№30

Рассмотрим задачу Коши для **неоднородного** уравнения колебаний:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0, \qquad (2.9)$$

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad x\in R^1. \qquad (2.10)$$

Пусть функция $w(x,t,\tau)$ является решением вспомогательной задачи Коши с параметром τ

$$w_{tt}(x,t,\tau)=a^2w_{xx}(x,t,\tau), \quad x\in R^1, \quad t>0, \qquad (2.11)$$

$$w(x,t,\tau)\big|_{t=\tau}=0, \quad \left.\frac{\partial w(x,t,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=f(x,\tau), \quad x\in R^1. \qquad (2.12)$$

Формула Даламбера даёт решение задачи (2.11), (2.12):

$$w(x,t,\tau)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi.$$

Легко понять, что для построения решения задачи (2.9), (2.10) осталось проинтегрировать функцию $w(x,t,\tau)$ по переменной τ в пределах от 0 до t.

Теорема. Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ в области $x\in R^1$, $t>0$. Тогда задача (2.9), (2.10) имеет решение, оно единственно и определяется формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Доказательство. Найдём $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$, дифференцируя зависящий от параметра x интеграл по формуле Лейбница:

$$u_x(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left(f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x+a(t-\tau)}-f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left(\left.\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x+a(t-\tau)}-\left.\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Найдём $u_t(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$, дифференцируя зависящий от параметра t интеграл по формуле Лейбница:

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x+a(t-\tau)}+f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$u_{tt}(x,t)=f(x,t)+\frac{a}{2}\int\limits_0^t\left(\left.\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x+a(t-\tau)}-\left.\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Подставляя полученные выражения производных $u_{tt}(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в уравнение (2.9), а $u(x,t)$ и $u_t(x,t)$ – в начальные условия (2.10), убеждаемся в том, что $u(x,t)$ является решением задачи Коши.

Если бы существовали два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (2.9), (2.10), то функция $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяла бы задаче

$$w_{tt}(x,t)=a^2w_{xx}(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0,$$

$$w(x,0)=0, \quad w_t(x,0)=0, \quad x\in R^1.$$

Но по теореме единственности решения последней задачи нет решений, отличных от $w(x,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Решение задачи

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in R^1$$

можно записать в виде

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

§ 3. Построение решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на полупрямой методом продолжений.

№31

Рассмотрим задачи о распространении волн на полупрямой $x \in [0, \infty)$. Эти задачи ставятся следующим образом:

Найти решение уравнения

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t) = \mu(t) \text{ или } u_x(0,t) = \nu(t), \quad t \geq 0, \tag{3.2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \geq 0. \tag{3.3}$$

Решение каждой из этих двух задач можно представить как сумму решений двух задач: с однородными начальными условиями, но с неоднородным граничным условием, и с неоднородными начальными условиями, но с однородным граничным.

Рассмотрим сначала начально-краевую задачу с однородным условием Дирихле:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \geq 0, \tag{3.5}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.6}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом на всю прямую:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда на всей прямой получим задачу для функции $U(x,t)$:

$$U_{tt}(x,t) = a^2 U_{xx}(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0,$$

$$U(x,0) = \varphi_1(x), \quad U_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in R^1.$$

Решение этой задачи даётся формулой Даламбера

$$U(x,t) = \frac{\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(z)\,dz.$$

В области $x \geq 0$ функция $U(x,t)$ совпадает с решением задачи (3.4) – (3.6), так как в этой области уравнение и начальные данные в обеих задачах одинаковые, а $U(0,t) = 0$ в силу свойств нечетных функций. Выпишем теперь формулу Даламбера для задачи (3.4) – (3.6), учитывая при этом, что $x - at$ может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Если $x + at > x - at > 0$, то $\varphi_1(x \pm at) = \varphi(x \pm at)$, $\psi_1(x \pm at) = \psi(x \pm at)$. Если $x - at < 0$, то $\varphi_1(x - at) = -\varphi(at - x)$, $\psi_1(x - at) = -\psi(at - x)$.

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz, \\ x > 0, \quad 0 < t \leq \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(z)\,dz, \\ x > 0, \quad t \geq \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Для существования классического решения необходимо, чтобы функция $\varphi(x)$ была дважды непрерывно дифференцируема в области $x \geq 0$, а функция $\psi(x)$ –

один раз непрерывно дифференцируема в области $x \ge 0$, и чтобы $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$.

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу с однородным условием Неймана:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad x>0, \quad t>0, \tag{3.7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\ge 0, \tag{3.8}$$

$$u_x(0,t)=0, \quad t\ge 0. \tag{3.9}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четным образом на всю прямую:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\ge 0,\\ \varphi(-x), & x\le 0,\end{cases}$$

$$\psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\ge 0,\\ \psi(-x), & x\le 0.\end{cases}$$

На всей прямой получаем задачу для функции $U(x,t)$:

$$U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0,$$

$$U(x,0)=\varphi_1(x), \quad U_t(x,0)=\psi_1(x), \quad x\in R^1.$$

В области $x\ge 0$ функция $U(x,t)$ совпадает с решением задачи (3.7) – (3.9), так как уравнение и начальные данные у обеих задач одинаковые, а $U_x(0,t)=0$ в силу свойств чётных функций. Учитывая, что если $x+at>x-at>0$, то $\varphi_1(x\pm at)=\varphi(x\pm at)$, $\psi_1(x\pm at)=\psi(x\pm at)$, а если $x-at<0$, то $\varphi_1(x-at)=\varphi(at-x)$, $\psi_1(x-at)=\psi(at-x)$, получим решение задачи (3.7) – (3.9):

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,\\ x>0, \quad 0<t\le\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(z)dz+\int_0^{at-x}\psi(z)dz\right\},\\ x>0, \quad t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Для существования классического решения необходимо выполнение тех же условий гладкости функций φ и ψ, что в задаче (3.4) – (3.6). Кроме того, надо потребовать $\varphi_x(0)=0$, $\psi_x(0)=0$.

№32

§ 4. Существование решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой с неоднородным краевым условием.

Рассмотрим начально-краевую задачу в области $x\ge 0$ для однородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями и неоднородным краевым условием Дирихле:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad x>0, \quad t>0,$$

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad x\ge 0,$$

$$u(0,t)=\mu(t), \quad t\ge 0.$$

Причиной возникновения возмущений здесь может быть только краевой режим. Будем искать решение в виде бегущей вправо волны: $u(x,t)=f(x-at)$, где $f(z)$ – достаточно гладкая функция. Из первого начального условия получим $u(x,0)=f(x)=0$, $x>0$. Второе начальное условие даёт $u_t(x,0)=-af'(x)=0, \quad x>0$. С другой стороны, $u(0,t)=f(-at)=\mu(t)$, где $\mu(t)$ – заданная при $t>0$ функция. Следовательно,

$$f(z)=\begin{cases} 0, & 0<t<\dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Замечание. При $t<\dfrac{x}{a}$ влияние граничного режима не сказывается на точке с координатой x. При $t>\dfrac{x}{a}$ возмущение в точке x формируется граничным режимом.

Аналогичными рассуждениями решается и задача с неоднородным краевым условием Неймана.

№29

§ 5. Начально-краевые задачи для уравнения колебаний в пространстве и на отрезке.

п.1. Единственность решений начально – краевых задач для уравнения колебаний в пространстве.

Теорема единственности решения задачи в пространстве. Задача (1.1) – (1.3) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство. Допустим, что существуют два различных решения $u_1(M,t)$ и $u_2(M,t)$ задачи (1.1) – (1.3). Введём функцию $w(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$, которая удовлетворяет задаче

$$w_{tt}(M,t)-a^2\Delta w(M,t)=0\ , \qquad (M,t)\in Q,$$

$$w(M,0)=0, \quad w_t(M,0)=0, \quad M\in\overline{\Omega},$$

$$\alpha(P)\frac{\partial w(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)w(P,t)=0, \quad P\in S,\, t\in[0,\infty) \ .$$

Построим функционал E, зависящий от t как от параметра:

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(w_t^2(M,t)+a^2|grad\, w(M,t)|^2\right)d\tau_M .$$

$E(t)$ является полной энергией колебательной системы в момент времени t. Из определения функционала и из начальных условий следует, что $E(t)\ge 0$ и $E(0)=0$.

Покажем, что $\dfrac{dE}{dt}\equiv 0$. Вычислим производную, дифференцируя подынтегральное выражение:

$$\frac{dE}{dt}=\iiint\limits_{\Omega}\left(w_t\cdot w_{tt}+a^2\left(grad\, w(M,t)\cdot grad\, w_t(M,t)\right)\right)d\tau_M \ .$$

Вспомним первую формулу Грина (здесь t – параметр, градиенты вычисляем только по пространственным переменным):

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u d\tau_M=\iint\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n_M}d\sigma_M-\iiint\limits_{\Omega}(grad\, u\cdot grad\, v)d\tau_M \ .$$

Пусть в этой формуле $u(M,t)=w(M,t)$, $v(M,t)=w_t(M,t)$, тогда

$$-a^2\iiint\limits_{\Omega}\Delta w(M,t)\cdot w_t(M,t)d\tau_M +$$

Подставляя (5.1) в выражение для $\dfrac{dE}{dt}$ и используя волновое уравнение получим

$$\frac{dE}{dt}=a^2\iint\limits_{S} w_t(M,t)\frac{\partial w(M,t)}{\partial n_M}d\sigma_M \ .$$

В случае первой краевой задачи $w(M,t)=0$, $M\in S$, во все моменты времени $t\in[0,\infty)$. Поэтому $w_t(M,t)=0, \quad M\in S$. Отсюда $\dfrac{dE}{dt}=0$. Но $E(0)=0$, поэтому $E(t)\equiv 0$.

В случае второй краевой задачи $\frac{\partial w(M,t)}{\partial n_M}=0$, $M\in S$. Отсюда $\frac{dE}{dt}=0$ и снова $E(t)\equiv 0$.

Для третьей краевой задачи положим всюду на S $\alpha(M)\equiv 1$, $\beta(M)=h\ge 0$. Тогда краевое условие имеет вид $\frac{\partial w(M,t)}{\partial n_M}+h(M)\cdot w(M,t)=0$, $M\in S$, $t\in[0,\infty)$.

Поэтому

$$\frac{dE}{dt}=-a^2\iint_S hw_t w d\sigma_M=-\frac{a^2}{2}\frac{d}{dt}\iint_S hw^2 d\sigma_M,$$

$$\frac{d}{dt}\left(E(t)+\frac{a^2}{2}\iint_S hw^2(M,t)d\sigma_M\right)=0,$$

$$E(t)+\frac{a^2}{2}\iint_S hw^2(M,t)d\sigma_M=const.$$

Так как $E(0)=0$ и $w(M,0)=0$, то $E(t)+\frac{a^2}{2}\iint_\Sigma hw^2(M,t)d\sigma_M=0$ при всех $t\in[0,\infty)$. Так как $E(t)\ge 0$, $a^2>0$, $h(M)\ge 0$, то $E(t)\equiv 0$.

Следовательно, $E(t)\equiv 0$ для всех трех краевых задач. Отсюда получаем $w_t(M,t)\equiv 0$ и $grad\, w(M,t)\equiv 0$, $(M,t)\in Q$. Поэтому $w(M,t)=const$. Так как $w(M,0)=0$, то $w(M,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Используя первую формулу Грина на плоскости, можно совершенно аналогично доказать теорему единственности решения в ограниченной области $D\subset R^2$.

п.2. Единственность решений начально – краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

Сформулируем начально – краевую задачу на отрезке:

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{5.2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,t)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{5.3}$$

$$\left[\alpha_1(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_1(x)u(x,t)\right]\Big|_{x=0}=\chi_1(t), \tag{5.4}$$

$$\left[\alpha_2(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_2(x)u(x,t)\right]\Big|_{x=l}=\chi_2(t),\qquad t\ge 0.$$

Теорема единственности решения задачи на отрезке. Задача (5.2) – (5.4) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. Предположим, что существуют два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (5.2) – (5.4). Функция $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$w_{tt}(x,t)-a^2w_{xx}(x,t)=0,\quad 0<x<l,\quad t>0,$$

$$w(x,0)=0,\quad w_t(x,t)=0,\quad 0\le x\le l,$$

$$\left[\alpha_1(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}+\beta_1(x)w(x,t)\right]\Big|_{x=0}=0,$$

$$\left[\alpha_2(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}+\beta_2(x)w(x,t)\right]\Big|_{x=l}=0,\ t\ge 0.$$

Введём функционал

$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(w_t^2(x,t)+a^2w_x^2(x,t)\right)dx$. Из определения $E(t)$ и из начальных условий следует, что $E(t)\ge 0$, $E(0)=0$.

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^l\left(w_t(x,t)w_{tt}(x,t)+a^2w_x(x,t)w_{xt}(x,t)\right)dx.$$

Интеграл $a^2\int_0^l w_x(x,t)w_{xt}(x,t)dx$ вычислим по частям:

$$a^2\int_0^l w_x(x,t)w_{xt}(x,t)dx =$$

$$= a^2\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l} - a^2\int_0^l w_{xx}(x,t)w_t(x,t)dx$$

Тогда получим

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \left(w_t\left(w_{tt} - a^2 w_{xx}\right)\right)dx + a^2\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Так как функция $w(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению колебаний, то

$$\frac{dE}{dt} = a^2\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

В случае первой краевой задачи $w(0,t) = w(l,t) = 0$ во все моменты времени $t \ge 0$. Поэтому $w_t(0,t) = w_t(l,t) = 0$. Отсюда $\frac{dE}{dt} = 0$, $E(t) = const$. Но $E(0) = 0$, поэтому $E(t) \equiv 0$.

В случае второй краевой задачи $w_x(0,t) = w_x(l,t) = 0$. Отсюда $\frac{dE}{dt} = 0$ и снова $E(t) \equiv 0$.

В третьей краевой задаче краевые условия имеют вид $w_x(0,t) - h_1 w(0,t) = 0$, $w_x(l,t) + h_2 w(l,t) = 0$, $h_1 = const \ge 0$, $h_2 = const \ge 0$. Поэтому

$$\frac{dE}{dt} = -a^2 \cdot h_2 \cdot w(l,t) \cdot w_t(l,t) - a^2 \cdot h_1 \cdot w(0,t) \cdot w_t(0,t),$$

$$\frac{d}{dt}\left(E(t) + \frac{a^2 h_2}{2} w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2} w^2(0,t)\right) = 0,$$

$$E(t) + \frac{a^2 h_2}{2} w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2} w^2(0,t) = const.$$

Так как $E(0) = 0$ и $w(x,0) = 0$, то

$$E(t) + \frac{a^2 h_2}{2} w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2} w^2(0,t) = 0$$

при всех $t \ge 0$. Так как $E(t) \ge 0$, $a^2 > 0$, $h_1 \ge 0$, $h_2 \ge 0$, то $E(t) \equiv 0$.

Следовательно, $E(t) \equiv 0$ для всех трёх краевых задач. Отсюда получаем $w_t(x,t) = 0$ и $w_x(x,t) = 0$, $0 < x < l$, $t > 0$. Поэтому $w(x,t) = const$. Так как $w(x,0) = 0$, то $w(x,t) \equiv 0$. Теорема доказана.

№33

п. 3. Теоремы существования решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке с граничными условиями I типа:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{5.5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Метод разделения переменных (этот метод подробно изучается на семинарских занятиях) даёт

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cos\omega_n t + \frac{B_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{5.8}$$

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l}, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi,$$

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi.$$

Теорема. Пусть начальные данные удовлетворяют следующим условиям: функция $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную третью производную, функция $\psi(x)\in C^1[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную вторую производную, причём $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$. Тогда существует классическое решение задачи (5.5) – (5.7), представимое формулой (5.8).

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно доказать непрерывность функции $u(x,t)$ и её производной $u_t(x,t)$ в области $0\le x\le l$, $t\ge 0$ и непрерывное примыкание функции $u(x,t)$ к заданным начальным и граничным условиям. Кроме того, нужно доказать существование вторых производных функции $u(x,t)$ и выполнение уравнения (5.5) в области $0<x<l$, $t>0$. Для доказательства непрерывности функции $u(x,t)$ и её производной $u_t(x,t)$ в области $0\le x\le l$, $t\ge 0$ достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cos\omega_n t+\frac{B_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (5.9)$$

и ряда, полученного формальным дифференцированием ряда (5.9) по t:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\left\{-A_n\sin\omega_n t+\frac{B_n}{\omega_n}\cos\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (5.10)$$

Мажорантным рядом для ряда (5.9) является числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{|A_n|+\frac{1}{\omega_n}|B_n|\right\}$, а для ряда (5.10) – числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\{\omega_n|A_n|+|B_n|\}$. Из теории рядов Фурье известно, что эти числовые ряды сходятся при условиях, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следовательно, ряды (5.9) и (5.10) сходятся равномерно и определяют непрерывные функции в области $0<x<l$, $t>0$. Из тех же условий, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, следует, что ряды Фурье этих функций по системе $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся равномерно на $[0,l]$ к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому при $t=0$ выполняются начальные условия. А так как все собственные функции $\sin\frac{\pi n}{l}x$ удовлетворяют однородным граничным условиям, то выполняются и граничные условия. Для доказательства существования вторых производных функции $u(x,t)$ в области $0<x<l$, $t>0$ продифференцируем (5.8) два раза по t и два раза по x. Тогда получим ряды, которые мажорируются числовым рядом $\max\left\{1,\frac{1}{a^2}\right\}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\left\{|A_n|+\frac{1}{\omega_n}|B_n|\right\}$, который сходится в силу свойств функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Теорема доказана.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке для **неоднородного** уравнения с однородными начальными и граничными условиями:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0, \qquad (5.11)$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l, \qquad (5.12)$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0. \qquad (5.13)$$

Предположим, что существует классическое решение этой задачи. Разложим функцию $u(x,t)$ при фиксированном $t\ge 0$ в ряд Фурье по собственным функциям $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (5.14)$$

Коэффициенты разложения $u_n(t)$ рассчитываются по формуле $u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi$. Поскольку функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи, то для интеграла, представляющего $u_n(t)$, выполнены условия дифференцируемости по параметру под знаком интеграла. Поэтому

$$u_n^{(k)}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi,\quad k=1,2.$$

Умножим уравнение (5.11) на $\frac{2}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x$ и проинтегрируем по x от 0 до l. В результате получим

$$\frac{2}{l}\int_0^l\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=a^2\frac{2}{l}\int_0^l u_{xx}(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx+$$
$$+\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Вычисляя интеграл $\int_0^l u_{xx}(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$ два раза по частям и учитывая граничные условия, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по t

$$u_n''(t)+\omega_n^2u_n(t)=f_n(t),$$

где $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi$.

Из начальных условий (5.12) следует $u_n(0)=0$, $u_n'(0)=0$. Получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на полупрямой $t>0$ с начальными условиями при $t=0$. Решение этой задачи можно построить методом вариации постоянных. Оно имеет вид

$$u_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau.$$

Решение задачи (5.11) – (5.13) построено в виде ряда (5.14), коэффициенты которого теперь известны:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\omega_n}\int_0^t\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau, \qquad (5.15)$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\omega_n(t-\tau). \qquad (5.16)$$

Можно доказать, что для непрерывной в области $0\le x\le l$, $t\ge 0$ функции $f(x,t)$, удовлетворяющей нулевым начальным и граничным условиям, представление (5.15), (5.16) определяет классическое решение задачи (5.11) – (5.13).

Определение. Функция $G(x,\xi,t-\tau)$, определяемая формулой (5.16), называется функцией Грина или функцией влияния мгновенного точечного импульса на отрезке.