

Московский Государственный Университет  
имени М. В. Ломоносова  
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.  
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

(V семестр)

составитель — Д. В. Ховратóвич

v. 1.15 — 19.03.2005

# 1 Классификация уравнений с частными производными второго порядка

**Определение.** Пусть в пространстве  $E^2$  задана некоторая функция  $u(x, y)$ , имеющая частные производные второго порядка (причем  $u_{xy} = u_{yx}$ ). Тогда **общим уравнением в частных производных** называется уравнение:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{yy}, u_{xx}, u_{xy}) = 0,$$

где  $F$  — некоторая функция. Его частным случаем является так называемое **квазилинейное уравнение**:

$$a_{11}(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + a_{22}(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Нас будут интересовать уравнения, **линейные относительно старших производных**, то есть, когда функции  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  зависят только от переменных  $x, y$ :

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Уравнение называется **линейным**, если оно линейно как относительно старших производных (в данном случае  $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ ), так и относительно функции  $u$  и ее первых производных:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \quad (1.1)$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$  — функции только от  $x$  и  $y$ .

**Определение.** Если  $f \equiv 0$ , то уравнение (1.1) называется **однородным**, в противном случае — **неоднородным**.

**Определение.** Уравнение (1.1) имеет в точке  $(x_0, y_0)$

1. **гиперболический тип**, если  $a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) > 0$ ;
2. **эллиптический тип**, если  $a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) < 0$ ;
3. **параболический тип**, если  $a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) = 0$ .

Аналогично определяется тип уравнения для некоторой области: уравнение (1.1) имеет в области **гиперболический(эллиптический) [параболический]** тип, если  $a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y)a_{22}(x, y) > 0 (< 0) [= 0]$  во всех точках этой области.

Если уравнение имеет разный тип в различных точках области, то оно называется **уравнением смешанного типа** в этой области.

## 2 Уравнения параболического типа

### 2.1 Вывод уравнения теплопроводности в пространстве

Рассмотрим в трехмерном пространстве некоторое тело, проводящее тепло, и пусть температура в его произвольной точке  $M$  с координатами  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  задается функцией  $u(x, y, z, t)$ . Известно, что для вектора теплового потока  $\vec{W}$  справедлива следующая формула, называемая **законом Фурье**:

$$\vec{W} = -k \operatorname{gr} u,$$

где  $k(x, y, z)$  — коэффициент теплопроводности.

Если тело задается в пространстве  $\mathbf{E}^3$  областью  $\Omega$  с границей  $\Sigma$ , тогда количество тепла в  $\Omega$  в момент времени  $t$  считается по формуле:

$$Q(t) = \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M, t) d\tau_M,$$

где  $c$  — удельная теплоемкость, а  $\rho$  — плотность вещества.

Рассмотрим промежуток времени  $[t_1; t_2]$  ( $Q(t_1) = Q_1$ ,  $Q(t_2) = Q_2$ ). Тогда

$$Q_2 - Q_1 = \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M, t_2) d\tau_M - \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M, t_1) d\tau_M.$$

Изменение количества тепла происходит вследствие притока (оттока) тепла извне и действия некоторых внутренних источников (стоков):

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ - \iint_{\Sigma} (\vec{W}, \vec{n}) d\sigma \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\Omega} F(M, t) d\tau_M \right] dt.$$

Применим формулу Остроградского-Гаусса (5.3) для первого интеграла и формулу среднего значения (5.1) для второго интеграла:

$$Q_2 - Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{W}) d\tau \right] dt + (t_2 - t_1) \iiint_{\Omega} F(M, t_4) d\tau_M,$$

где  $t_4 \in [t_1; t_2]$ .

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$u(M, t_2) - u(M, t_1) = u_t(M, t_3)(t_2 - t_1), \quad t_3 \in [t_1; t_2]$$

для гладкой (предположим это) функции  $u$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M, t_2) d\tau_M - \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M, t_1) d\tau_M = \\ &= (t_2 - t_1) \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u_t(M, t_3) d\tau_M. \end{aligned}$$

Итак,

$$(t_2 - t_1) \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u_t(M, t_3) d\tau_M = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{W}) d\tau_M \right] dt + (t_2 - t_1) \iiint_{\Omega} F(M, t_4) d\tau_M.$$

Теперь применим для всех интегралов обобщенную формулу среднего значения (5.2):

$$c(M_1)\rho(M_1)u_t(M_1, t_3)V_\Omega(t_2 - t_1) = - \operatorname{div} \vec{W} \Big|_{M=M_2}^{t=t_5} \cdot V_\Omega(t_2 - t_1) + F(M_3, t_4)V_\Omega(t_2 - t_1),$$

где  $t_5 \in [t_1; t_2]$ ;  $M_1, M_2, M_3 \in \Omega$ ,  $V_\Omega$  — объем  $\Omega$ .

Сократив на  $V_\Omega(t_2 - t_1)$ , получим

$$c(M_1)\rho(M_1)u_t(M_1, t_3) = - \operatorname{div} \vec{W} \Big|_{M=M_2}^{t=t_5} + F(M_3, t_4)$$

для некоторых точек  $M_1, M_2, M_3$  из  $\Omega$ . Теперь сожмем  $\Omega$  в некоторую точку  $M_0$ , а отрезок  $[t_1; t_2]$  — в точку  $t_0$ . Очевидно, точки  $M_1, M_2, M_3$  перейдут в  $M_0$ , а  $t_3, t_4, t_5$  — в  $t_0$ . В пределе получим:

$$c(M_0)\rho(M_0)u_t(M_0, t_0) = - \operatorname{div} \vec{W} \Big|_{M=M_0}^{t=t_0} + F(M_0, t_0).$$

Записав для  $\vec{W}$  закон Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{W} &= \operatorname{div}(-k \operatorname{gr} u) = -\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} \implies \\ \implies c(M_0)\rho(M_0)u_t(M_0, t_0) &= \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} + F(M_0, t_0). \end{aligned}$$

Так как точки  $M_0$  и  $t_0$  мы выбирали произвольно, то можно распространить полученную формулу на весь  $[t_1; t_2]$  и всю область  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} c(x, y, z)\rho(x, y, z)u_t(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial x}(k(x, y, z)u_x(x, y, z, t)) + \frac{\partial}{\partial y}(k(x, y, z)u_y(x, y, z, t)) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(k(x, y, z)u_z(x, y, z, t)) + F(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Полученное выражение называется **уравнением распространения тепла в пространстве**.

Взяв  $c, \rho, k$  константами, получим следующее уравнение:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}. \quad (2.1)$$

Если  $u, f$  зависят только от переменных  $x$  и  $t$ , то это уравнение записывается так:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (2.2)$$

В физической интерпретации это уравнение распространения тепла в однородном тонком стержне. Уравнение (2.2) мы и будем в дальнейшем называть **уравнением теплопроводности**.

Аналогичные рассуждения можно провести и для некоторых других физических процессов, например для диффузии. Если  $u(x, y, z, t)$  — концентрация газа в пространстве, то **уравнение диффузии** будет выглядеть так:

$$c u_t = \operatorname{div}(D \operatorname{gr} u) + F(x, y, z, t),$$

где  $D$  — коэффициент диффузии, а  $F$  — некоторая функция.

## 2.2 Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной. Постановка основных задач

Будем рассматривать следующее уравнение:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T.$$

Если нам известна температура в стержне в начальный момент времени, то мы получаем **начальное условие**:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

а если всегда знаем ход температуры на краях, то некоторые из **краевых условий**:

$$\begin{aligned} \text{при } x = l, \quad 0 \leq t \leq T & \quad \begin{cases} (1) & u(l, t) = \mu_2(t) \text{ — первое краевое условие;} \\ (2) & u_x(l, t) = \nu_2(t) \text{ — второе краевое условие;} \\ (3) & u_x(l, t) = -\lambda_2[u(l, t) - \theta_2(t)] \text{ — третье краевое условие } (\lambda_2 > 0). \end{cases} \\ \text{и при } x = 0, \quad 0 \leq t \leq T & \quad \begin{cases} (4) & u(0, t) = \mu_1(t) \text{ — первое краевое условие;} \\ (5) & u_x(0, t) = \nu_1(t) \text{ — второе краевое условие;} \\ (6) & u_x(0, t) = \lambda_1[u(0, t) - \theta_1(t)] \text{ — третье краевое условие } (\lambda_1 > 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Выбирая несколько из этих условий, можно получить различные типы задач:

#### Первая краевая задача.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u(0, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(l, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

#### Вторая краевая задача.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u_x(0, t) = \nu_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u_x(l, t) = \nu_2(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

#### Задача на полупрямой.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x > 0, \quad 0 < t \leq T; \\ u(0, t) = \mu(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

#### Задача Коши.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

### 2.3 Существование решения первой краевой задачи. Метод разделения переменных

Остановимся более детально на первой краевой задаче:

$$[2.1] \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u(0, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(l, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

– рассмотрим существование и единственность решения, устойчивость, применение функции Грина. Что же такое решение первой краевой задачи? Очевидно, в случае однородного уравнения теплопроводности ей удовлетворяет множество разрывных функций  $\tilde{u}(x, t)$  вроде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \text{const}, & (x, t) \in \mathbf{Q}_T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{t}) : (\mathbf{0}; 1) \times (\mathbf{0}; \mathbf{T})\}; \\ \tilde{u}(0, t) &= \mu_1(t); & 0 \leq t \leq T; \\ \tilde{u}(l, t) &= \mu_2(t); & 0 \leq t \leq T; \\ \tilde{u}(x, 0) &= \phi(x); & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Поэтому потребуем от функции непрерывность — этим требованием, как мы увидим позже, отсекаются почти все неудобные для исследования функции.

**Определение.** Функция  $u(x, t)$  называется **решением первой краевой задачи для уравнения теплопроводности** [2.1], если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1.  $u \in C[\overline{Q_T}]$ ;
2.  $u_t, u_{xx} \in C[Q_T]$ ;
3.  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям [2.1].

Найдем решение для первой краевой задачи с нулевыми краевыми условиями с однородным уравнением теплопроводности:

$$[2.2] \begin{cases} (1) & u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \leq T; \\ (2) & u(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \\ (3) & u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \\ (4) & u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Искать решение мы будем следующим образом: сначала с помощью преобразований исходного уравнения (важно отметить, что они не всегда будут строгими — это пока не требуется) построим некоторую функцию  $u(x, t)$ , а потом докажем, что при определенных ограничениях на начальные условия данная функция будет решением первой краевой задачи.

Определим новую функцию:

$$v(x, t) = X(x)T(t).$$

Подставив нашу функцию в уравнение теплопроводности, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделим обе части уравнения на  $a^2 X(x)T(t)$ :

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Так как справа и слева стоят функции, зависящие от разных переменных, очевидно, что обе они равны некоторой константе, которую мы обозначим  $-\lambda$ :

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \tag{2.3}$$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \tag{2.4}$$

Записав краевые условия для нашей функции  $v(x, t)$ :

$$\begin{cases} v(0, t) = 0; \\ v(l, t) = 0. \end{cases} \quad , t \in [0; T],$$

получим, что, ввиду ее представления в виде произведения,

$$\begin{cases} X(0) = 0; \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Соединив (2.3) с полученной системой, получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ X(0) = 0; \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Требуется найти все  $\lambda$ , при которых существуют ненулевые решения этой системы. Из курса "Дифференциальные уравнения" известно, что:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, & n \in N - \text{собственные значения.} \\ X_n(x) = c_n^1 \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), & n \in N - \text{соответствующие собственные функции } (c_n^1 - \text{некоторые константы}). \end{cases}$$

Подставляя  $\lambda_n$  в (2.4), получим уравнения вида

$$T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0.$$

Решением, очевидно, будет  $T_n = c_n^2 \exp\{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}$ . Объединив  $X_n(x)$  и  $T_n(t)$ , получим:

$$v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \exp\{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}.$$

Заметим, что все такие функции являются решениями уравнения теплопроводности (1) и удовлетворяют краевым условиям (2),(3).

Определим функцию  $u(x, t)$  как сумму ряда:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t).$$

Заметим, что она удовлетворяет краевым условиям, а в случае равномерной сходимости ряда из производных — и уравнению теплопроводности. Подберем константы так, чтобы выполнялось начальное условие:

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Домножим равенство на  $\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)$  ( $m$  — целое), сделаем замену переменной ( $x \rightarrow s$ ) и проинтегрируем по  $s$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right) ds &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right) ds. \\ \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) dx &= \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{l}{2}, & n = m. \end{cases} \implies \\ \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right) ds &= \frac{l}{2} c_m \implies \\ c_m &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right) ds. \end{aligned}$$

Окончательно получаем формулу для  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \left( \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \exp\{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}. \quad (2.5)$$

Теперь докажем, что эта формула корректна.

**Теорема 2.1** (существования). Пусть функция  $\phi(x)$  такова, что  $\phi(x) \in C^1[0; l]$  и  $\phi(0) = \phi(l) = 0$ . Тогда формула (2.5) определяет класс решений задачи [2.2].

*Доказательство.* (1) Докажем сначала непрерывность полученной функции  $u(x, t)$  в  $\bar{Q}_T$ . Легко видеть, что

$$|u(x, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|,$$

где  $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds$ . Понятно, что если мы докажем сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|$ , то получим

(по признаку Вейерштрасса) равномерную сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x, t)|$ . Так как все функции  $v_n(x, t)$  непрерывны, то и функция  $u(x, t)$  будет непрерывна, так как она определяется равномерно сходящимся рядом из непрерывных функций.

Итак, преобразуем  $\phi_n$ :

$$\begin{aligned} \phi_n &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds = \{\text{интегрирование по частям}\} = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{l}{\pi n} \phi(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \Big|_0^l + \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \phi'(s) \frac{l}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds = \\ &= \frac{1}{n} \int_0^l \frac{l}{\pi} \phi'(s) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds. \end{aligned}$$

Пусть  $\tilde{\phi}_n = \int_0^l \phi'(s) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds$ . Воспользуемся неравенством Бесселя для ортонормированной системы функций  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^l \phi'(s) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \right)^2 \leq \int_0^l (\phi'(s))^2 ds.$$

Теперь мы можем преобразовать нужный нам ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n| = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\tilde{\phi}_n| \leq \{ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}\} \leq \frac{l}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_n^2 \right)$$

Первый ряд, как известно, сходится, сходимость второго мы только что показали. Отсюда получаем сходимость ряда из коэффициентов Фурье  $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|$  и, как было показано ранее, непрерывность функции  $u(x, t)$ .

(2) Теперь покажем существование и непрерывность производных  $u_t, u_{xx}$  в  $Q_T$ . Покажем, к примеру, существование  $u_{xx}$  для всех  $0 < x < l, t_0 < t < T$ , где  $t_0$  — произвольное положительное число. Из этого, очевидно, следует существование  $u_{xx}$  в  $Q_T$ . Продифференцировав формально ряд (2.5), получим:

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sqrt{\frac{2}{l}} \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \exp\{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\}.$$



Легко заметить, что множитель  $\exp\{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t\}$  дает нам равномерную сходимость мажорантного ряда на  $t_0 < t < T$ . Из этого следует равномерная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n)_{xx}(x, t)$  и существование  $u_{xx}(x, t)$  в  $Q_T$ . Непрерывность  $u_{xx}(x, t)$  следует из непрерывности слагаемых ряда. Существование и непрерывность  $u_t$  доказывается аналогично.

(3) То, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет всем условиям [2.2], было показано во время ее построения. Теорема доказана.  $\square$

## 2.4 Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности

Рассмотрим множество  $Q_T = \{(x, t) : (0; l) \times (0; T)\}$ . Обозначим  $\Gamma = \overline{Q_T} \setminus Q_T$ . Докажем, что функция  $u(x, t)$ , удовлетворяющая уравнению теплопроводности, достигает своего максимального (и минимального) значения именно на этой границе.

**Теорема 2.2** (принцип максимального значения). Пусть  $u(x, t) \in C[\overline{Q_T}]$ ,  $u_t, u_{xx} \in C[Q_T]$  и  $u_t = a^2 u_{xx}$  в  $Q_T$ . Тогда

$$\begin{aligned} \max_{\overline{Q_T}} u(x, t) &= \max_{\Gamma} u(x, t); \\ \min_{\overline{Q_T}} u(x, t) &= \min_{\Gamma} u(x, t). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Докажем первое утверждение. Предположим противное: пусть  $\max_{\Gamma} u(x, t) = M$  и существует точка  $(x_0, t_0) \in Q_T$  такая, что  $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . В этом случае определим новую функцию  $v(x, t)$  так:

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0). \quad (2.6)$$

Очевидно, что  $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ . Кроме того, так как  $|\frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  при  $t \in [0; T]$ , то

$$\max_{\Gamma} v(x, t) = \max_{\Gamma} \{u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)\} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что существует внутренняя точка  $(x_1, t_1)$ , в которой  $v(x, t)$  достигает максимума. Согласно необходимому условию максимума дважды дифференцируемой функции,

$$\begin{cases} v_t(x_1, t_1) \geq 0; \\ v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, \end{cases}$$

причем в первом случае строгое неравенство может иметь место только при  $t_1 = T$ .

Продифференцировав (2.6) по  $t$ , получим:

$$u_t(x, t) = v_t(x, t) + \frac{\varepsilon}{2T}.$$

Аналогично, после двойного дифференцирования по  $x$  получаем:

$$u_{xx}(x, t) = v_{xx}(x, t).$$

Из написанной выше системы неравенств следует, что

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \geq a^2 v_{xx}(x_1, t_1) = a^2 u_{xx}(x_1, t_1),$$

что противоречит уравнению теплопроводности. Следовательно, предположение о существовании внутренней точки максимума неверно, поэтому  $\max_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \max_{\Gamma} u(x, t)$ , и первое утверждение доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы (принцип минимума) достаточно перейти от  $u(x, t)$  к функции  $w(x, t) = -u(x, t)$ , которая принимает максимальное значение там, где  $u(x, t)$  принимает минимальное. Теорема доказана.  $\square$

В приложении к краевым задачам принцип максимума выглядит следующим образом. Пусть

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \leq T; \\ u(0, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(l, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Тогда  $\max_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \max\{\max_{t \in [0; T]} \mu_1(t), \max_{t \in [0; T]} \mu_2(t), \max_{x \in [0; l]} \phi(x)\}$ . Это равенство имеет простой физический смысл. Оно означает, что температура стержня не может быть выше температуры на его краях и в начальный момент времени.

## 2.5 Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи

**Теорема 2.3** (единственности). Пусть функции  $u_1(x, t), u_2(x, t)$  таковы, что  $u_i \in C[\overline{Q_T}]$ ,  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C[Q_T]$ ,  $i = 1, 2$ , причем они являются решениями одной и той же первой краевой задачи [2.1]. Тогда  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$  в  $\overline{Q_T}$ .

*Доказательство.* Определим новую функцию  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Тогда  $v \in C[\overline{Q_T}]$ ,  $v_t, v_{xx} \in C[Q_T]$ , и является решением такой краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \leq T; \\ v(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \\ v(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Для функции  $v(x, t)$ , очевидно, выполнены все условия принципа максимума. Применяя его, получим:

$$\begin{cases} \max_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \max_{\Gamma} v(x, t) = 0; \\ \min_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \min_{\Gamma} v(x, t) = 0. \end{cases} \implies v(x, t) \equiv 0 \implies u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

Теорема доказана. □

### Устойчивость решения первой краевой задачи

**Лемма 1.** Пусть функции  $u_1, u_2(x, t)$  таковы, что

$$u_i \in C[\overline{Q_T}], \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C[Q_T], i = 1, 2,$$

причем

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, & 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad i = 1, 2; \\ u_1(0, t) \geq u_2(0, t), & 0 \leq t \leq T; \\ u_1(l, t) \geq u_2(l, t), & 0 \leq t \leq T; \\ u_1(x, 0) \geq u_2(x, 0), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Тогда  $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$  в  $\overline{Q_T}$ .

*Доказательство.* Снова, пусть  $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ . Легко видеть, что  $v \in C[\overline{Q}_T]$ ,  $v_{xx}, v_t \in C[Q_T]$ , причем

$$\begin{cases} v_t(x, t) = a^2 v_{xx}(x, t); \\ v(0, t) \geq 0, & 0 \leq t \leq T; \\ v(l, t) \geq 0, & 0 \leq t \leq T; \\ v(x, 0) \geq 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Воспользовавшись вторым утверждением принципа максимума, получим:

$$\min_{\overline{Q}_T} v(x, t) = \min_{\Gamma} v(x, t) \geq 0 \implies u_1(x, t) \geq u_2(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}_T.$$

Лемма доказана. □

**Теорема 2.4** (устойчивости). Пусть функции  $u_1, u_2(x, t)$  таковы, что

$$\begin{aligned} u_i &\in C[\overline{Q}_T], \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} &\in C[Q_T], \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t \leq T & i = 1, 2; \\ u_i(0, t) = \mu_1^i(t), & 0 \leq t \leq T, & i = 1, 2; \\ u_i(l, t) = \mu_2^i(t), & 0 \leq t \leq T, & i = 1, 2; \\ u_i(x, 0) = \phi_i(x), & 0 \leq x \leq l, & i = 1, 2. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \max_{\overline{Q}_T} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max \left\{ \max_{t \in [0; T]} |\mu_1^1(t) - \mu_1^2(t)|, \max_{t \in [0; T]} |\mu_2^1(t) - \mu_2^2(t)|, \max_{x \in [0; l]} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \right\}$$

*Доказательство.* Снова введем функцию  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} v &\in C[\overline{Q}_T], \\ v_{xx}, v_t &\in C[Q_T], \\ v_t(x, t) &= a^2 v_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Обозначив  $\varepsilon = \max \left\{ \max_{t \in [0; T]} |\mu_1^1(t) - \mu_1^2(t)|, \max_{t \in [0; T]} |\mu_2^1(t) - \mu_2^2(t)|, \max_{x \in [0; l]} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \right\}$ , получим, что

$$\max_{\Gamma} |v(x, t)| \leq \varepsilon.$$

Из этого следует, что  $-\varepsilon \leq v(x, t) \leq \varepsilon$  на  $\Gamma$ . Применив лемму к парам функций  $(-\varepsilon, v(x, t))$  и  $(v(x, t), \varepsilon)$ , получим, что

$$-\varepsilon \leq u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \varepsilon \text{ в } \overline{Q}_T.$$

Теорема доказана. □

Полученное утверждение означает, что из близости исходных данных следует близость полученных решений.

## 2.6 Единственность решения общей краевой задачи

Общая краевая задача формулируется так:

$$[2.3] \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t); & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l; \\ \alpha_1 u(0, t) - \alpha_2 u_x(0, t) = p(t); & 0 \leq t \leq T; \\ \beta_1 u(l, t) + \beta_2 u_x(l, t) = q(t); & 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x); & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — неотрицательные постоянные, причем требуется, чтобы

$$\alpha_1 + \alpha_2 > 0; \quad \beta_1 + \beta_2 > 0.$$

Докажем единственность решения такой задачи.

**Теорема 2.5** (единственности). Пусть в  $Q_T$  функции  $u_1, u_2(x, t)$  таковы, что

$$\begin{aligned} u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x} &\in C[\overline{Q}_T], \quad i = 1, 2; \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} &\in C[Q_T], \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

причем они являются решениями одной и той же задачи [2.3]. Тогда  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$  в  $\overline{Q}_T$ .

*Доказательство.* Для доказательства единственности введем, как обычно, новую функцию  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Тогда, очевидно,  $v, v_x \in C[\overline{Q}_T]$ ,  $v_t, v_{xx} \in C[Q_T]$  и  $v(x, t)$  будет являться решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}; & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l; \\ \alpha_1 v(0, t) - \alpha_2 v_x(0, t) = 0; & 0 \leq t \leq T; \\ \beta_1 v(l, t) + \beta_2 v_x(l, t) = 0; & 0 \leq t \leq T; \\ v(x, 0) = 0; & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Умножив  $v_t = a^2 v_{xx}$  на  $2v$  и учтя, что  $2vv_t = \frac{\partial}{\partial t}(v^2)$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(v^2(x, \tau)) = 2a^2 v(x, \tau) v_{xx}(x, \tau).$$

Из равенства функций следует равенство определенных интегралов:

$$\int_0^l \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}(v^2(x, \tau)) d\tau dx = 2a^2 \int_0^l \int_0^t v(x, \tau) v_{xx}(x, \tau) d\tau dx,$$

причем в правой части мы можем поменять порядок интегрирования:

$$\int_0^l \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}(v^2(x, \tau)) d\tau dx = 2a^2 \int_0^t \left[ \int_0^l v(x, \tau) v_{xx}(x, \tau) dx \right] d\tau. \quad (2.7)$$

Из начального условия следует, что

$$\int_0^l \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}(v^2(x, \tau)) d\tau dx = \int_0^l v^2(x, t) dx.$$

Внутренний интеграл в правой части (2.7) возьмем по частям:

$$\int_0^l v(x, \tau) v_{xx}(x, \tau) dx = v(x, \tau) v_x(x, \tau) \Big|_0^l - \int_0^l (v_x(x, \tau))^2 dx.$$

Из краевых условий легко вывести, что

$$v(l, t)v_x(l, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_1 = 0, \beta_2 > 0; \\ 0, & \text{если } \beta_1 > 0, \beta_2 = 0; \\ -\frac{\beta_1}{\beta_2}v^2(l, t), & \text{если } \beta_1 > 0, \beta_2 > 0. \end{cases},$$

$$v(0, t)v_x(0, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0; \\ 0, & \text{если } \alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0; \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2}v^2(0, t), & \text{если } \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0. \end{cases},$$

для любых  $t \in [0; T]$ .

Из этого следует, что если обозначить

$$P(\tau) = v(x, \tau)v_x(x, \tau)|_0^l = v(l, \tau)v_x(l, \tau) - v(0, \tau)v_x(0, \tau),$$

то  $P(\tau) \leq 0, \forall \tau \in [0; T]$ .

Тогда равенство (2.7) можно переписать так:

$$\int_0^l v^2(x, t) dx - 2a^2 \int_0^t P(\tau) d\tau + 2a^2 \int_0^t \int_0^l v_x^2(x, \tau) dx d\tau = 0.$$

Первое и третье слагаемые, очевидно, неотрицательны; неотрицательность второго следует из неположительности подинтегральной функции. Из этого следует, что все они на самом деле равны нулю. Так как функция  $v(x, t)$  непрерывна, то из того, что  $\int_0^l v^2(x, t) dx = 0$ , следует, что

$$v(x, t) \equiv 0.$$

Отсюда получаем, что  $u_2(x, t) \equiv u_1(x, t)$ . Теорема доказана.  $\square$

## 2.7 Существование решения задачи Коши

Рассмотрим однородную задачу Коши:

$$[2.4] \begin{cases} (1) & u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0; \\ (2) & u(x, 0) = \phi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Действуя так же, как и при поиске решения первой краевой задачи, проведем некоторые преобразования, а потом докажем, что полученная функция будет являться решением.

Определим новую функцию  $v(x, t)$  как произведение двух функций:

$$v(x, t) = X(x)T(t).$$

Потребуем, чтобы она удовлетворяла уравнению теплопроводности:

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив на  $a^2 X(x)T(t)$  и заметив, что слева и справа стоят функции, зависящие от разных переменных, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2,$$

где  $\lambda = const > 0$ .

**Примечание.** Мы пишем " $-\lambda^2$ ", потому что так нам захотелось. Могли бы и что-нибудь другое написать...

Отсюда получаем два уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; \quad (2.8)$$

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (2.9)$$

Легко видеть, что функция  $X(x) = e^{i\lambda x}$  будет решением (2.8). Аналогично, функция  $T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}$  будет являться решением (2.9). Следовательно,

$$v(x, t) = e^{i\lambda x - a^2 \lambda^2 t}$$

– решение (1). Очевидно, функция

$$u_\lambda = A(\lambda) e^{i\lambda x - a^2 \lambda^2 t}$$

тоже будет решением ( $A(\lambda)$  – некоторая функция). Теперь определим итоговую функцию следующим образом:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x - a^2 \lambda^2 t} d\lambda.$$

Потребуем, чтобы она удовлетворяла начальному условию:

$$u(x, 0) = \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

Согласно теории преобразования Фурье, отсюда легко находится  $A(\lambda)$ :

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda s} \phi(s) ds.$$

Итак, получаем следующий вид функции  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda s} \phi(s) ds \right] e^{i\lambda x - a^2 \lambda^2 t} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\lambda(x-s) - a^2 \lambda^2 t} d\lambda \right] \phi(s) ds.$$

Проведя вычисление внутреннего интеграла (которое мы опускаем), получим окончательную формулу для  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \phi(s) ds. \quad (2.10)$$

Обозначив  $G(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\}$ , получим

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) \phi(s) ds.$$

Покажем, что функция  $G(x, s, t)$  является решением уравнения теплопроводности при фиксированном  $s$ :

$$\begin{aligned} G_x(x, s, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \left(-\frac{2(x-s)}{4a^2 t}\right); \\ G_{xx}(x, s, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \frac{(x-s)^2}{4a^4 t^2} + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \left(-\frac{2}{4a^2 t}\right); \\ G_t(x, s, t) &= -\frac{1}{2\sqrt{4\pi a^2 t^{\frac{3}{2}}}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \frac{(x-s)^2}{4a^2 t^2} \end{aligned}$$

Легко проверить, что  $G_t(x, s, t) = a^2 G_{xx}(x, s, t)$ .

Теперь докажем, что при определенных ограничениях на начальное условие полученная функция будет существовать.

**Теорема 2.6** (существования). Пусть функция  $\phi(x)$  задает начальное условие в задаче Коши [2.4], причем  $\phi(x) \in C(\mathbb{R})$ ,  $|\phi(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Тогда функция  $u(x, t)$ , определяемая формулой (2.10), непрерывна при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , имеет непрерывные частные производные  $u_t, u_{xx}$  при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , удовлетворяет уравнению теплопроводности при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  и  $\forall x_0 \in \mathbb{R} \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \phi(x_0)$ .

**Замечание.** Последнее утверждение теоремы означает, что функция

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \phi(s) ds, & t > 0; \\ \phi(x), & t = 0. \end{cases}$$

непрерывна в  $(x, t)$ :  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ .

*Доказательство.* (1) Докажем непрерывность  $u(x, t)$  при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ . Для этого, очевидно, достаточно доказать, что функция непрерывна в прямоугольнике  $\Pi_{L, t_0, T} = \{(x, t) : -L < x < L; t_0 < t < T\}$ , где  $L, t_0, T$  — произвольные положительные константы.

Подынтегральные функции, очевидно, непрерывны в  $\Pi_{L, t_0, T}$ . Тогда для доказательства непрерывности функции  $u(x, t)$  в  $\Pi_{L, t_0, T}$  достаточно показать равномерную сходимость интеграла (2.10). Чтобы применить признак Вейерштрасса равномерной сходимости, построим такую функцию  $F(s)$ , чтобы

$$\begin{cases} |G(x, s, t)| \leq F(s) \quad \forall x, t \in \Pi_{L, t_0, T}; \\ \text{Интеграл } \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds \text{ сходился.} \end{cases}$$

Для этого оценим показатель экспоненты для различных  $s$ :

$$\begin{aligned} \text{При } |s| \leq 2L & \quad -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \leq 0; \\ \text{При } s \geq 2L & \quad \frac{(x-s)^2}{t} \geq \frac{(L-s)^2}{T} \implies -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \leq -\frac{(L-s)^2}{4a^2 T}; \\ \text{При } s \leq -2L & \quad \frac{(x-s)^2}{t} \geq \frac{(L+s)^2}{T} \implies -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \leq -\frac{(L+s)^2}{4a^2 T}. \end{aligned}$$

При  $t_0 \leq t \leq T$  первый сомножитель в интеграле (2.10) можно оценить так:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}$$

В итоге получаем ограниченность  $|G(x, s, t)|$  сверху:

$$|G(x, s, t)| \leq F(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}, & |s| \leq 2L; \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \exp\left\{-\frac{(L-s)^2}{4a^2 T} + \frac{L^2}{4a^2 T}\right\}, & s \geq 2L; \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \exp\left\{-\frac{(L+s)^2}{4a^2 T} + \frac{L^2}{4a^2 T}\right\}, & s \leq -2L; \end{cases}$$

— слагаемое  $\frac{L^2}{4a^2 T}$  в показателе экспоненты было добавлено для непрерывности  $F(s)$  (очевидно, оно не изменит оценки сверху).

Наличие экспоненты говорит о том, что интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds$  сходится. Таким образом, используя ограниченность  $|\phi(x)|$ , мы можем модуль подынтегральной функции в (2.10) оценить сверху функцией  $MF(s)$ , соответствующий интеграл от которой сходится. По признаку Вейерштрасса мы получаем равномерную сходимость исходного интеграла и непрерывность функции  $u(x, t)$  в  $\Pi_{L, t_0, T}$ .

(2) Покажем непрерывность частных производных на том же прямоугольнике  $\Pi_{L, t_0, T}$ . Докажем непрерывность  $u_{xx}$ . Из формулы для  $G(x, s, t)$  следует, что:

$$|G_{xx}(x, s, t)| = \left| \frac{(x-s)^2}{4a^4 t^2} G(x, s, t) - \frac{1}{2a^2 t} G(x, s, t) \right| \leq F(s) \left[ \frac{1}{2a^2 t_0} + \frac{L^2 + 2Ls + s^2}{4a^4 t_0^2} \right] = F_1(s).$$

Многочлен во втором сомножителе, очевидно, не изменит интегрируемость  $F(s)$ . Тогда получаем

$$u_{xx}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(x, s, t) \phi(s) ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{xx}(x, s, t)| |\phi(s)| ds \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(s) ds < \infty$$

— то есть равномерную сходимость интеграла от производной, а, следовательно, и непрерывность  $u_{xx}(t)$ . Непрерывность  $u_t$  доказывается аналогично.

(3) Мы показали, что функция  $G(x, s, t)$  является решением уравнения теплопроводности. Отсюда получаем:

$$u_t(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x, s, t) \phi(s) ds = a^2 u_{xx}(x, t) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(x, s, t) \phi(s) ds.$$

— то есть функция  $u(x, t)$  тоже удовлетворяет уравнению теплопроводности.

(4) Итак, нам осталось доказать, что

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \phi(x_0).$$

То есть, по определению предела функции

$$\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x, t : t, |x - x_0| < \delta \implies |u(x, t) - \phi(x_0)| < \varepsilon.$$

Фиксируем точку  $x_0$  и произвольное  $\varepsilon > 0$ . Из непрерывности  $\phi(x)$  следует, что

$$\exists \Delta : |x - x_0| < \Delta \implies |\phi(x) - \phi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$



Рассмотрим  $|u(x, t) - \phi(x_0)|$ :

$$|u(x, t) - \phi(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) \phi(s) ds - \phi(x_0) \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{x_0-\Delta} G(x, s, t) \phi(s) ds \right| + \left| \int_{x_0+\Delta}^{+\infty} G(x, s, t) \phi(s) ds \right| + \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G(x, s, t) (\phi(s) - \phi(x_0)) ds \right| + \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G(x, s, t) \phi(x_0) ds - \phi(x_0) \right|.$$

Обозначив по порядку интегралы символами  $J_1, J_2, J_3, J_4$ , получим

$$|u(x, t) - \phi(x_0)| \leq |J_1| + |J_2| + |J_3| + |J_4|.$$

Оценим  $|J_3|$ . Мы уже знаем, что  $|\phi(x) - \phi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$  в  $\Delta$ -окрестности. Тогда, учитывая, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} G ds = 1$ ,

получим

$$|J_3| = \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G(x, s, t) (\phi(s) - \phi(x_0)) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G(x, s, t) ds \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) ds$$

Отсюда получаем, что

$$|J_3| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Теперь потребуем, чтобы  $|x - x_0| < \delta_1 < \frac{\Delta}{2}$ . Все дальнейшие оценки проводятся только для таких  $x$ . Оценим  $|J_4|$ :

$$\begin{aligned} |J_4| &= \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G(x, s, t) \phi(x_0) ds - \phi(x_0) \right| \leq |\phi(x_0)| \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G(x, s, t) ds - 1 \right| = \left\{ z \leftrightarrow \frac{s-x}{\sqrt{4a^2t}} \right\} = \\ &= |\phi(x_0)| \left| \int_{\frac{x_0-\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}}^{\frac{x_0+\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz - 1 \right|. \end{aligned}$$

Уменьшая  $t$ , мы получим стремление верхнего предела интегрирования к  $+\infty$ , а нижнего — к  $-\infty$ .

Следовательно, так как  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = 1$ , то

$$\exists \delta_2 : t < \delta_2 \implies |J_4| \leq |\phi(x_0)| \left| \int_{\frac{x_0-\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}}^{\frac{x_0+\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оценим теперь  $|J_1|$ :

$$\begin{aligned} |J_1| &= \left| \int_{-\infty}^{x_0-\Delta} G(x, s, t) \phi(s) ds \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{x_0-\Delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} M ds \right| = \\ &= \left\{ z \leftrightarrow \frac{-(x-s)}{\sqrt{4a^2 t}} \right\} = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-x+x_0-\Delta}{\sqrt{4a^2 t}}} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

В силу сходимости интеграла, мы можем подобрать такое  $\delta_3$ , что  $\forall t < \delta_3$

$$\frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-x+x_0-\Delta}{\sqrt{4a^2t}}} e^{-z^2} dz \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно,  $|J_1| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Такая же оценка верна и для  $|J_2|$  (доказательство аналогично).

Итак, мы получили, что

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \phi(x_0)| &\leq |J_1| + |J_2| + |J_3| + |J_4| \leq \varepsilon \implies \\ \implies \forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) : \forall x, t : t, |x - x_0| < \delta \quad |u(x, t) - \phi(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана. □

**Следствие 1.** Заметим, что при выполнении условий теоремы ( $\phi(x) \in C(\mathbb{R})$ ,  $|\phi(x)| \leq M$ ) мы получаем ограниченность  $u(x, t)$ :

$$|u(x, t)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x, s, t)| |\phi(s)| ds \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, s, t) ds = M.$$

**Следствие 2.** Также можно получить бесконечную дифференцируемость  $u(x, t)$  на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . В этом случае

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^k \partial t^m}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^p G}{\partial x^k \partial t^m}(x, s, t) \phi(s) ds, \quad (k + m = p)$$

а этот интеграл равномерно сходится, что можно показать теми же рассуждениями, что и в доказательстве теоремы.

**Следствие 3.** Приняв условие задачи Коши, мы получаем «бесконечную» скорость распространения тепла. Представим, что непрерывная функция  $\phi(x) = u(x, 0)$  равна нулю всюду, за исключением некоторого отрезка  $[a; b]$ . Тогда получаем, что

$$u(x, t) = \int_a^b G(x, s, t) \phi(s) ds > 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

## 2.8 Единственность решения задачи Коши

Итак, мы доказали существование решения задачи Коши для ограниченного и непрерывного начального условия. Покажем, что в этом случае решение единственно.

**Теорема 2.7** (единственности). Пусть две функции  $u_1, u_2(x, t)$  непрерывны на  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ , являются решениями одной и той же задачи Коши [2.4], причем

$$\begin{aligned} |u_i(x, t)| &\leq M, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}^+}; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} &\in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда  $u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad \forall (x, t) \in (\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}^+})$

*Доказательство.* Введем новую функцию  $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Очевидно, она также будет непрерывна, причем

$$\begin{cases} u_t, u_{xx} \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+); \\ u_t = a^2 u_{xx}; \\ u(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}; \\ |u(x, t)| \leq 2M, \forall (x, t) \in (\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}^+}). \end{cases}$$

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что функция  $u(x, t)$  тождественно равна нулю, то есть равна нулю в произвольной точке  $(x_0, t_0)$ .

Для этого возьмем такие константы  $L$  и  $T$ , чтобы точка  $(x_0, t_0)$  содержалась в прямоугольнике

$$\Pi_{LT} = \{(x, t) : |x| \leq L, 0 \leq t \leq T\}, \Gamma_{LT} \text{ — его граница.}$$

Рассмотрим новую вспомогательную функцию  $v^L(x, t) = \frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2 t)$ .

Легко проверить, что

$$\begin{cases} v_t^L, v_{xx}^L \in C[\Pi_{LT}]; \\ v_t^L = a^2 v_{xx}^L \in C[\Pi_{LT}]. \end{cases}$$

Кроме того, для нее справедливы такие оценки на границе  $\Gamma_{LT}$ :

$$\begin{aligned} v^L(L, t), v^L(-L, t) &\geq \frac{4M}{L^2}(\frac{L^2}{2} + 0) = 2M; \\ v^L(x, 0) &= \frac{4M}{L^2} \frac{x^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Из исходных оценок для  $u(x, t)$  получаем, что  $v^L(x, t) \geq u(x, t)$  всюду на  $\Gamma_{LT}$ . Согласно принципу максимального значения

$$v^L(x, t) \geq u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Pi_{LT}.$$

Аналогично,  $-v^L(x, t) \leq u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Pi_{LT}$ . Из этого следует, что

$$|u(x_0, t_0)| \leq v^L(x_0, t_0) = \frac{4M}{L^2}(\frac{x_0^2}{2} + a^2 t_0).$$

Устремив  $L$  к бесконечности, получим, что  $|u(x_0, t_0)| \leq v^\infty(x_0, t_0) = 0$ . Теорема доказана.  $\square$

## 2.9 Существование решения первой и второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой

Рассмотрим первую краевую задачу на полупрямой:

$$[2.5] \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0; \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

где  $\phi(0) = 0$ .

Найдем ее решение, доопределив нечетным образом функцию  $\phi(x)$ , задающую начальное условие на всей вещественной оси:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0; \\ -\phi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Соответственно, рассмотрим такую задачу Коши:

$$[2.6] \begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0; \\ U(0, t) = 0, & t \geq 0; \\ U(x, 0) = \Phi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Ее решение нам известно:

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds.$$

Пусть  $u(x, t) = U(x, t)$  при  $(x, t) \in (\overline{\mathbb{R}^+} \times \overline{\mathbb{R}^+})$ . Покажем, что эта функция является решением [2.5]. Из постановки задачи Коши [2.6] очевидно, что

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Проверим выполнение граничного условия:

$$u(0, t) = U(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds$$

Под интегралом стоит произведение четной и нечетной функций, следовательно, он равен нулю. Граничное условие выполнено. Получим теперь полную формулу для решения:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} (-\phi(-s)) ds + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \phi(s) ds = \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \phi(s) ds + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \phi(s) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[ \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \phi(s) ds. \end{aligned}$$

Итак,

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[ \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \phi(s) ds \quad (2.11)$$

– это и есть решение первой краевой задачи на полупрямой.

### Вторая краевая задача на полупрямой

Вторая краевая задача на полупрямой имеет следующий вид:

$$[2.7] \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t \geq 0; \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Снова для поиска решения доопределим функцию, задающую начальное условие, но на этот раз четным образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0; \\ \phi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Изменив исходную задачу, получим такую задачу Коши:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0; \\ U_x(0, t) = 0, & t \geq 0; \\ U(x, 0) = \Phi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Аналогично, решением ее будет функция  $U(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds$ . Пусть  $u(x, t) = U(x, t)$  при  $(x, t) \in (\overline{\mathbb{R}^+} \times \overline{\mathbb{R}^+})$ . Опять же, очевидно, что

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Проверим выполнение краевого условия:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) = U_x(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(-\frac{(x-s)}{2a^2 t}\right) \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds \implies \\ u_x(0, t) = U_x(0, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(\frac{s}{2a^2 t}\right) \exp\left\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Под получившимся интегралом стоят произведение двух четных и одной нечетной функций, следовательно, он обращается в ноль. Граничное условие выполнено. Получим формулу для решения [2.7]:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \phi(s) ds + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \phi(-s) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[ \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \phi(s) ds. \end{aligned}$$

– это решение второй краевой задачи на полупрямой.

## 2.10 Функция Грина для первой краевой задачи

Рассмотрим первую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \leq T; \\ u(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \\ u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Как уже известно, ее решение задается следующим образом:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \left( \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \exp\left\{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}.$$

Мы можем представить его в несколько ином виде, как уже делали при решении задачи Коши:

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, s, t) \phi(s) ds,$$

$$\text{где } G(x, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \exp\left\{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}. \quad (2.12)$$

– **функция Грина для первой краевой задачи.**

Докажем несколько свойств функции Грина.

**Свойство 1.**

$$G(x, s, t) = G(s, x, t).$$

Это свойство очевидно из определения функции Грина.

**Свойство 2.**

$$G(x, s, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+).$$

*Доказательство.* Докажем непрерывность в точке  $(x, s, t)$ . Для этого достаточно заметить, что при  $t > t_0$  ряд равномерно сходится по признаку Вейерштрасса, так как его можно ограничить сходящимся рядом из экспонент:

$$|G(x, s, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \exp\left\{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t_0\right\}.$$

Для доказательства дифференцируемости достаточно заметить, что ряд из производных будет равномерно сходиться, так как при дифференцировании в качестве новых множителей появятся только полиномы от  $n$ , которые не помешают — экспонента все равно обеспечивает сходимость.  $\square$

**Свойство 3.**

$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}; \\ G_t = a^2 G_{ss}. \end{cases}$$

Первое уравнение можно проверить простым дифференцированием формулы (2.12), а второе — дифференцированием уравнения из свойства 1.

**Свойство 4.**

$$G(x, s, t) \geq 0, \quad x, s \in [0; l], \quad t > 0.$$

*Доказательство.* Докажем это для произвольной точки  $(x, s_0, t)$ . Пусть функция  $\phi_h(x)$  равна некоторой положительной функции  $\tilde{\phi}(x)$  на интервале  $(s_0 - h; s_0 + h)$ , а вне этого интервала равна нулю:

$$\phi_h(x) = \begin{cases} \tilde{\phi}(x) > 0, & x \in (s_0 - h; s_0 + h); \\ 0, & x \in [0; l] \setminus (s_0 - h; s_0 + h). \end{cases}$$

Кроме того, она удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \phi_h(x) \in C[0; l]; \\ \int_0^l \phi_h(x) dx = 1. \end{cases}$$

и задает начальное условие в некоторой краевой задаче типа [2.2]. Тогда функция  $u_h(x, t)$ , являющаяся решением этой краевой задачи, задается формулой:

$$\begin{aligned} u_h(x, t) &= \int_0^l G(x, s, t) \phi_h(s) ds = \int_{s_0-h}^{s_0+h} G(x, s, t) \phi_h(s) ds = \\ &= \{ \text{теорема о среднем значении (5.1)} \} = G(x, \theta, t) \int_{s_0-h}^{s_0+h} \phi_h(s) ds = G(x, \theta, t), \quad \theta \in (s_0 - h; s_0 + h). \implies \\ &\implies \lim_{h \rightarrow 0} G(x, \theta, t) = \lim_{h \rightarrow 0} u_h(x, t) \implies \end{aligned}$$

$$G(x, s_0, t) = \lim_{h \rightarrow 0} u_h(x, t). \quad (2.13)$$

Применим принцип максимального значения, зная, что  $u_h(0, t) \equiv 0 \equiv u_h(l, t)$ :

$$\min_{\substack{x \in [0; l] \\ t \in [0; T]}} u_h(x, t) = \min\{0, 0, \min_{x \in [0; l]} \phi_h(x)\} = 0.$$

Согласно (2.13), получаем неотрицательность  $G(x, s_0, t)$ . Свойство 4 доказано.  $\square$

### 3 Уравнения эллиптического типа

Пусть  $\Omega$  — некоторая открытая область в  $\mathbf{E}^3$ , ограниченная поверхностью  $\Sigma$ . Аналогично,  $D$  — некоторая открытая область в  $\mathbf{E}^2$ , ограниченная кривой  $L$ .

#### 3.1 Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка краевых задач. Фундаментальные решения уравнения Лапласа

Рассмотрим такие уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} u_t(x, y, z, t) &= a^2 \Delta u(x, y, z, t) + f_1(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega; & \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}; \\ u_t(x, y, t) &= a^2 \Delta u(x, y, t) + f_2(x, y), & (x, y) \in D; & \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \end{aligned}$$

В случае стационарного теплового процесса ( $u_t \equiv 0$ ) мы получаем уравнения эллиптического типа:  $\Delta u = -f$ . При этом из общего вида получаются два типа уравнений:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -f(x, y, z); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -f(x, y). \end{aligned} \right. & \text{— уравнения Пуассона в } \mathbf{E}^3 \text{ и } \mathbf{E}^2; \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right. & \text{— уравнения Лапласа в } \mathbf{E}^3 \text{ и } \mathbf{E}^2; \end{cases}$$

Эти уравнения широко используются при описании разнообразных стационарных физических полей.

**Определение.** Функция  $u(x, y, z)$  называется **гармонической** в  $\Omega$ , если  $u \in C^2(\Omega)$  и  $\Delta u \equiv 0$  в  $\Omega$ .

Гармонические функции от двух переменных можно получить, используя понятие аналитичности функции комплексного переменного. В курсе ТФКП показывалось, что если функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична, то выполняются условия Коши-Римана для функций  $u, v$ :

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y); \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y). \end{cases}$$

Дифференцируя верхнее равенство по  $x$ , а нижнее — по  $y$ , получим

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y); \\ u_{yy}(x, y) = -v_{xy}(x, y). \end{cases} \implies u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Аналогично — для функции  $v$ . Отсюда можно сделать вывод, что если функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  — аналитическая, то функции  $u, v$  — гармонические.

В дальнейшем мы будем рассматривать в пространстве  $\mathbf{E}^3$  такие задачи:

##### Внутренняя задача Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega; \\ u(x, y, z) = \mu(x, y, z), & (x, y, z) \in \Sigma. \end{cases}$$

##### Внутренняя задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \nu(x, y, z), & (x, y, z) \in \Sigma. \end{cases}$$



### Внешняя задача Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}; \\ u(x, y, z) = \mu(x, y, z), & (x, y, z) \in \Sigma. \end{cases}$$

### Внешняя задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega}; \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \nu(x, y, z), & (x, y, z) \in \Sigma. \end{cases}$$

Естественно обобщить данные задачи на случай уравнения Пуассона. Кроме того, существуют и двухмерные аналоги, например:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in D; \\ u(x, y) = \mu(x, y), & (x, y) \in L. \end{cases} \quad \text{— внутренняя задача Дирихле в } E^2.$$

Докажем, что функция

$$u(x, y, z) = \frac{1}{R_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

( $R_{MM_0}$  — расстояние между точками  $M(x, y, z)$  и  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ) является решением уравнения Лапласа в  $E^3 \setminus M_0$ :

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2} \frac{2(x-x_0)}{R_{MM_0}^3} = -\frac{x-x_0}{R_{MM_0}^3}; & u_{xx} &= -\frac{3(x-x_0)^2}{R_{MM_0}^5} - \frac{1}{R_{MM_0}^5} \\ u_y &= -\frac{1}{2} \frac{2(y-y_0)}{R_{MM_0}^3} = -\frac{y-y_0}{R_{MM_0}^3}; & u_{yy} &= -\frac{3(y-y_0)^2}{R_{MM_0}^5} - \frac{1}{R_{MM_0}^5} \\ u_z &= -\frac{1}{2} \frac{2(z-z_0)}{R_{MM_0}^3} = -\frac{z-z_0}{R_{MM_0}^3}; & u_{zz} &= -\frac{3(z-z_0)^2}{R_{MM_0}^5} - \frac{1}{R_{MM_0}^5} \\ \implies \Delta \frac{1}{R_{MM_0}} &= \frac{3(x-x_0)^2 + 3(y-y_0)^2 + 3(z-z_0)^2}{R_{MM_0}^5} - \frac{3}{R_{MM_0}^3} \equiv 0 \end{aligned}$$

В случае  $E^2$  легко проверить, что функция  $u(x, y) = \ln \frac{1}{\rho_{MM_0}}$ , где  $\rho_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$  будет решением уравнения Лапласа в  $E^2 \setminus M_0$ .

Эти функции называются **фундаментальными решениями** уравнения Лапласа.

## 3.2 1-я и 2-я формулы Грина

### Первая формула Грина

Пусть поверхность  $\Sigma$  состоит из конечного числа замкнутых кусков, имеющих в каждой точке касательную, причем любые прямые, параллельные координатным осям, пересекают ее либо в конечном числе точек, либо по конечному числу отрезков. Тогда в области  $\Omega$  для функции  $\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ , где  $P, Q, R \in C^1(\bar{\Omega})$ , верна формула Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} d\tau. \quad (3.1)$$

Пусть  $u(x, y, z)$  и  $v(x, y, z) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\vec{A} = u \operatorname{gr} v$ . Тогда по формуле (3.1)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (u \operatorname{gr} v) d\tau &= \iint_{\Sigma} (u \operatorname{gr} v, \vec{n}) d\sigma = \\ &= \left\{ (\operatorname{gr} v, \vec{n}) = \frac{\partial v}{\partial n}; \quad \operatorname{div} (u \operatorname{gr} v) = (\operatorname{gr} u, \operatorname{gr} v) + u\Delta v \right\} = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \implies \\ &\iiint_{\Omega} ((\operatorname{gr} u, \operatorname{gr} v) + u\Delta v) d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полученная формула называется **первой формулой Грина**.

### Вторая формула Грина

Поменяем местами в первой формуле Грина функции  $u$  и  $v$ . Вычитая полученное равенство из (3.2), получим **вторую формулу Грина**:

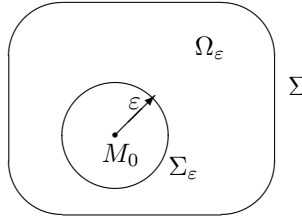
$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (3.3)$$

### 3.3 3-я формула Грина

Используем то, что функция

$$v = \frac{1}{R_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

является решением уравнения Лапласа в пространстве  $\mathbf{E}^3$ . Фиксируем точку  $M_0 \in \Omega$  и окружим ее сферой  $\Sigma_\varepsilon$  достаточно малого радиуса  $\varepsilon$ . Тогда функция  $v \in C^2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ , где  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus S_{M_0}(\varepsilon)$ .



Возьмем некоторую функцию  $u$  такую, что  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Запишем вторую формулу Грина для области  $\Omega_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau &= \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \implies \{\Delta v \equiv 0\} \implies \\ &-\iiint_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u(M) d\tau_M = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) \right) d\sigma_M + \\ &+ \iint_{\Sigma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) \right) d\sigma_M. \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение второго двойного интеграла при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Известно, что единичная нормаль  $\vec{n}$  к сфере  $\Sigma_\varepsilon$  в точке  $\{x, y, z\}$  задается как  $\left\{-\frac{x-x_0}{R_{MM_0}}, -\frac{y-y_0}{R_{MM_0}}, -\frac{z-z_0}{R_{MM_0}}\right\}$ . Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) = \left( \vec{n}, \operatorname{gr} \frac{1}{R_{MM_0}} \right) = \frac{(x-x_0)^2}{R_{MM_0}^4} + \frac{(y-y_0)^2}{R_{MM_0}^4} + \frac{(z-z_0)^2}{R_{MM_0}^4} = \frac{1}{R_{MM_0}^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Тогда этот интеграл преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u d\sigma - \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \\ &= \{ \text{общая теорема о среднем значении} \} = u(M'_\varepsilon) \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{\partial u}{\partial n}(M''_\varepsilon) \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon} = \\ &= 4\pi u(M'_\varepsilon) - 4\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(M''_\varepsilon), \end{aligned}$$

где  $M''_\varepsilon, M'_\varepsilon$  — точки на сфере  $\Sigma_\varepsilon$ .

Устремим  $\varepsilon$  к нулю, учитывая ограниченность  $\frac{\partial u}{\partial n}$ :

$$4\pi u(M'_\varepsilon) - 4\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(M''_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi u(M_0).$$

Перенеся в исходной формуле часть слагаемых в правую часть, получим формулу для  $u(M_0)$ :

$$4\pi u(M_0) = - \iiint_{\Omega} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u(M) d\tau_M - \iint_{\Sigma} \left[ u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) \right] d\sigma_M \quad (3.4)$$

Эта формула называется **третьей формулой Грина**.

Проведя аналогичные рассуждения в  $E^2$ , легко получить двумерные аналоги второй и третьей формул Грина:

$$\begin{aligned} \iint_D (u\Delta v - v\Delta u) ds &= \int_L \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl. \\ 2\pi u(M_0) &= - \iint_D \ln \left( \frac{1}{\rho_{MM_0}} \right) \Delta u ds - \int_L \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{\rho_{MM_0}} \right) - \ln \frac{1}{\rho_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dl. \end{aligned}$$

### 3.4 Свойства гармонических функций

Напомним определение.

**Определение.** Функция  $u$  называется гармонической в области  $\Omega$ , если  $u \in C^2(\Omega)$  и  $\Delta u = 0$  в  $\Omega$ .

**Свойство 1.** Если  $v$  — гармоническая в  $\Omega$ , то

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0,$$

где  $\tilde{\Sigma}$  — произвольная замкнутая поверхность, лежащая в  $\Omega$ .

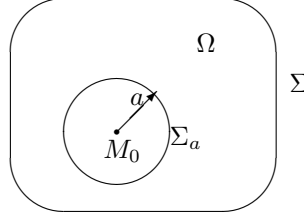
*Доказательство.* Положив в первой формуле Грина (3.2) для области, ограниченной  $\tilde{\Sigma}$ ,  $u \equiv 1$  (очевидно,  $u$  — гармоническая функция), получим

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0.$$

□

**Свойство 2 (Теорема о среднем значении).** Пусть функция  $u$  — гармоническая в  $\Omega$ . Тогда для любой точки  $M_0 \in \Omega$  и для любой сферы  $\Sigma_a$  радиуса  $a$  с центром в  $M_0$ , лежащей в  $\Omega$  справедлива формула:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u(P) d\sigma_P. \quad (3.5)$$



*Доказательство.* Запишем третью формулу Грина (3.4) для внутренности сферы  $\Sigma_a$ :

$$\begin{aligned} 4\pi u(M_0) &= - \iint_{\Sigma_a} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma = \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) = -\frac{1}{a^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{a^2} \iint_{\Sigma_a} u d\sigma + \iint_{\Sigma_a} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \end{aligned}$$

По первому свойству гармонической функции второй интеграл обращается в ноль и мы получаем доказательство формулы (3.5). □

**Свойство 3.** Если функция  $u$  — гармоническая в  $\Omega$ , то она бесконечно дифференцируема в  $\Omega$ .

*Доказательство.* Снова запишем третью формулу Грина (3.4) для  $u(M) = u(x, y, z)$  ( $P(P_x, P_y, P_z) \in \Sigma$ ):

$$\begin{aligned} 4\pi u(x, y, z) &= - \iint_{\Sigma} \left[ u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - P_x)^2 + (y - P_y)^2 + (z - P_z)^2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x - P_x)^2 + (y - P_y)^2 + (z - P_z)^2}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right] d\sigma_P. \end{aligned}$$

Видно, что если точка  $M$  не лежит на границе ( $\Sigma$ ), то подынтегральная функция бесконечно дифференцируема по параметру  $x$  (а также по  $y, z$ ). Известно, что в этом случае и весь интеграл, а следовательно, и функция  $u(M)$  является бесконечно дифференцируемой функцией. □

### 3.5 Принцип максимума для гармонических функций

**Теорема 3.1 (Принцип максимума).** Если функция  $u \in C(\bar{\Omega})$  и гармоническая в  $\Omega$ , то она достигает своего максимума (минимума) на границе области:

$$\begin{aligned} \max_{M \in \bar{\Omega}} u(M) &= \max_{M \in \Sigma} u(M); \\ \min_{M \in \bar{\Omega}} u(M) &= \min_{M \in \Sigma} u(M). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Предположим, что функция достигает, например, максимума в некоторой внутренней точке  $M_0$ :

$$u(M_0) = \max_{M \in \Omega} u(M).$$

Тогда по формуле среднего значения (3.5) ( $a$  — достаточно малое число)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u(P) d\sigma_P \leq \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u(M_0) d\sigma = u(M_0).$$

Так как функция  $u$  — непрерывна, то  $u(P) \equiv u(M_0)$  (то есть максимум достигается на всей сфере). Продолжая эти преобразования нужное количество раз, получим, что максимум достигается и на границе тоже (таким образом, функция тождественно равна константе).  $\square$

### 3.6 Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле

Здесь и далее функции  $\mu$  и  $\nu$  — некоторые заданные функции.

**Определение.** Функция  $u(x, y, z)$  называется **решением внутренней задачи Дирихле**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$[3.1] \left\{ \begin{array}{ll} (1) & u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}), u \in C^2(\Omega); \\ (2) & \Delta u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega; \\ (3) & u(x, y, z) = \mu(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma. \end{array} \right.$$

Докажем теорему единственности непрерывного и гармонического в  $\Omega$  решения.

**Теорема 3.2** (единственности). Пусть функции  $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)$  являются решениями **одной и той же** внутренней задачи Дирихле [3.1]. Тогда  $u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$  в  $\bar{\Omega}$ .

*Доказательство.* Определим новую функцию  $v = u_1 - u_2$ . Легко видеть, что она непрерывна в  $\bar{\Omega}$ , гармоническая в  $\Omega$  и  $v(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \Sigma$ . Тогда для функции  $v$  выполнены все условия принципа максимального значения, следовательно

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\Sigma} v = 0 \\ \min_{\bar{\Omega}} v = \min_{\Sigma} v = 0 \end{array} \right\} \implies v(x, y, z) \equiv 0, (x, y, z) \in \Omega.$$

Теорема доказана.  $\square$

Теперь покажем устойчивость решения внутренней задачи Дирихле, но сначала докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** Пусть функции  $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)$  такие, что:

1.  $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$ ;
2.  $u_1, u_2$  — гармонические в  $\Omega$ ;
3.  $u_1(x, y, z) \geq u_2(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$ .

Тогда  $u_1 \geq u_2$  в  $\Omega$ .

*Доказательство.* Снова рассмотрим функцию  $v = u_1 - u_2$ . Тогда  $v(x, y, z) \geq 0$  на  $\Sigma$ . Воспользовавшись принципом минимума (очевидно, все условия выполнены), получим

$$\min_{\bar{\Omega}} v = \min_{\Sigma} v \geq 0 \implies u_1 \geq u_2 \text{ в } \bar{\Omega}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 3.3** (устойчивости). Пусть функции  $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)$  таковы, что:

$$\begin{cases} (1) & u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega); \\ (2) & \Delta u_1(x, y, z) = \Delta u_2(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega; \\ (3) & u_i(x, y, z) = \mu_i(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\Sigma} |\mu_1 - \mu_2|.$$

*Доказательство.* Обозначим  $\varepsilon = \max_{\Sigma} |\mu_1 - \mu_2|$ ,  $v = u_1 - u_2$ . Тогда  $v$  — гармоническая в  $\Omega$ ,  $-\varepsilon \leq v \leq \varepsilon$  при  $(x, y, z) \in \Sigma$ . Тогда, применяя лемму для пар функций  $(-\varepsilon, v)$  и  $(v, \varepsilon)$  (очевидно, ее условия выполнены), получим, что

$$-\varepsilon \leq v \leq \varepsilon, \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega} \implies |u_1 - u_2| \leq \varepsilon \text{ в } \bar{\Omega}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Пусть каждая функция из последовательности  $u_n(x, y, z)$ , а также функция  $u(x, y, z)$ , является решением соответствующей задачи Дирихле при  $u_n = \mu_n$  на  $\Sigma$ ,  $u = \mu$  на  $\Sigma$ . Тогда из равномерной сходимости  $\mu_n \rightrightarrows \mu$  на  $\Sigma$  следует, что  $u_n \rightrightarrows u$  в  $\Omega$ .

**Замечание.** Доказанные теоремы полностью справедливы и для двумерного случая. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести аналогичные рассуждения.

Теперь рассмотрим другой вариант задачи Дирихле — внешнюю задачу Дирихле.

### 3.7 Единственность решения внешней задачи Дирихле

#### Внешняя задача Дирихле в пространстве

**Определение.** Функция  $u(x, y, z)$  называется решением внешней задачи Дирихле в пространстве, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$[3.2] \begin{cases} (1) & u(x, y, z) \in C(E^3 \setminus \Omega); \\ (2) & u(x, y, z) - \text{гармоническая в } E^3 \setminus \bar{\Omega}; \\ (3) & u(x, y, z) = \mu(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma. \\ (4) & u(x, y, z) \rightrightarrows 0 \quad (\text{равномерно сходится к нулю}) \text{ при } (x, y, z) \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

Докажем, что непрерывное решение единственно.

**Теорема 3.4** (единственности). Пусть  $u_1, u_2(x, y, z)$  — такие функции, что

$$\begin{cases} (1) & u_1, u_2(x, y, z) \in C(E^3 \setminus \Omega); \\ (2) & u_1, u_2 - \text{гармонические в } E^3 \setminus \bar{\Omega}; \\ (3) & u_1, u_2(x, y, z) = \mu(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma. \\ (4) & u_1, u_2(x, y, z) \rightrightarrows 0, \quad (x, y, z) \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z) \text{ в } E^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

*Доказательство.* Пусть  $v(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$ . Тогда  $v$  удовлетворяет условиям теоремы при  $\mu(x, y, z) \equiv 0$ . Докажем, что функция  $v$  тождественно равна нулю.

Предположим противное:  $\exists M_0(x_0, y_0, z_0) \in E^3 \setminus \bar{\Omega} : v(x_0, y_0, z_0) = A > 0$ . Тогда из определения равномерной сходимости существует такая сфера  $\Sigma_R$  радиуса  $R$ , полностью содержащая  $\Omega$  и точку  $M_0$ , что  $|v(x, y, z)| \leq \frac{A}{2}$ ,  $(x, y, z) \in \Sigma_R$ . Тогда

$$\begin{aligned} \max_{\Sigma_R} v(x, y, z) &\leq \frac{A}{2}; \\ \min_{\Sigma_R} v(x, y, z) &\geq -\frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Применив к  $v$  принцип максимального значения в открытой области  $\Omega_R$  (это область, ограниченная снаружи  $\Sigma_R$ , а изнутри —  $\Sigma$ ), получим

$$\begin{cases} \max_{\Omega_R} v = \max_{\Sigma \cup \Sigma_R} v \leq \frac{A}{2}; \\ \min_{\Omega_R} v = \min_{\Sigma \cup \Sigma_R} v \geq -\frac{A}{2}; \end{cases} \implies |v(x_0, y_0, z_0)| \leq \frac{A}{2}.$$

Мы получили противоречие с тем, что  $v(x_0, y_0, z_0) = A$ . Тогда  $v(x, y, z) \equiv 0$  и теорема доказана.  $\square$

Приведем пример, показывающий важность условия (4).

**Пример.** Пусть

$$\begin{aligned} \Omega &: x^2 + y^2 + z^2 < a^2; \\ \Sigma &: x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим такую постановку внешней задачи Дирихле:

1.  $u \in C(E^3 \setminus \Omega)$ ;
2.  $u$  — гармоническая в  $E^3 \setminus \bar{\Omega}$ ;
3.  $u(x, y, z) = C = const$ ,  $(x, y, z) \in \Sigma$ .

Легко видеть, что функции  $u_1(x, y, z) = C$  и  $u_2(x, y, z) = \frac{Ca}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  являются решениями данной задачи, однако  $u_1 \neq u_2$ , поэтому в этой постановке единственность нарушается.

Теперь рассмотрим внешнюю задачу на плоскости.

### Внешняя задача Дирихле на плоскости

**Определение.** Функция  $u(x, y)$  называется **решением внешней задачи Дирихле на плоскости**, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$[3.3] \begin{cases} (1) & u(x, y) \in C(E^2 \setminus D), \quad u \in C^2(E^2 \setminus \bar{D}); \\ (2) & \Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}; \\ (3) & u(x, y) = \mu(x, y), \quad (x, y) \in L. \\ (4) & |u(x, y)| \leq C = const, \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

**Теорема 3.5** (единственности). Пусть  $u_1, u_2(x, y)$  — такие функции, что

$$\begin{cases} (1) & u_1, u_2(x, y) \in C(E^2 \setminus D), \quad u \in C^2(E^2 \setminus \bar{D}); \\ (2) & \Delta u_1(x, y) = \Delta u_2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}; \\ (3) & u_1, u_2(x, y) = \mu(x, y), \quad (x, y) \in L. \\ (4) & |u_i(x, y)| \leq c_i = const, \quad i = 1, 2, (x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

Тогда  $u_1(x, y) = u_2(x, y)$  в  $E^2 \setminus \bar{D}$ .

*Доказательство.* Пусть  $v = u_1 - u_2$ . Тогда функция  $v$ :  $v(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in L$ ,  $|v(x, y)| \leq C = c_1 + c_2$ . Докажем, что  $v(x, y) \equiv 0$ ,  $(x, y) \in E^2 \setminus \bar{D}$ .

Предположим противное: существует точка  $M^*(x^*, y^*)$ ,  $(x^*, y^*) \in E^2 \setminus \bar{D}$ :  $v(x^*, y^*) = A > 0$ . Тогда возьмем  $a$  такое, что окружность  $L_a$  с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$  полностью лежит в  $D$ , и такое  $R$ , что окружность  $L_R$  содержит область  $D$  и точку  $M^*$ . Определим функцию

$$w_R(x, y) = C \frac{\ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{R}{a}}.$$

Видно, что

1.  $w_R(x, y) \in C(E^2 \setminus D)$ ;
2.  $w_R(x, y)$  — гармоническая в  $E^2 \setminus \bar{D}$ ;
3.  $w_R(x, y) \geq 0$  на  $L$ ;
4.  $w_R(x, y) = C$  на  $L_R$ .

Из этого следует, что

$$\begin{cases} |v(x, y)| \leq w_R(x, y), & (x, y) \in L; \\ |v(x, y)| \leq C = w_R(x, y), & (x, y) \in L_R. \end{cases}$$

Применив принцип максимума, получим, что в  $D_{LL_R}$  — области, ограниченной изнутри  $L$  и снаружи  $L_R$

$$\begin{aligned} |v(x, y)| \leq w_R(x, y), & (x, y) \in D_{LL_R} \implies \\ |v(x^*, y^*)| \leq w_R(x^*, y^*) &= C \frac{\ln \frac{a}{R}}{\ln \frac{a}{b}}. \end{aligned}$$

Устремляя  $R$  к бесконечности, получим, что

$$|v(x^*, y^*)| \leq w_\infty(x^*, y^*) = 0.$$

Мы получили противоречие с тем, что  $v(x^*, y^*) = A > 0$ , следовательно  $v(x, y) \equiv 0$ . Теорема доказана.  $\square$

Приведем пример, показывающий важность условия (4).

**Пример.** Пусть

$$\begin{aligned} D : x^2 + y^2 < b^2; \\ L : x^2 + y^2 = b^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим такую постановку внешней задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u \equiv 0 \text{ в } E^2 \setminus \bar{D}; \\ u(x, y) = C = \text{const}, & (x, y) \in L. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции  $u_1(x, y) = C$  и  $u_2(x, y) = C + \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b}$  являются решениями данной задачи, однако функция  $u_2$  не ограничена никакой константой, поэтому в этой постановке единственность нарушается.

### 3.8 Внутренняя задача Неймана. Необходимое условие ее разрешимости. Единственность решения

**Определение.** Функция  $u(x, y, z)$  из  $E^3$  называется **решением внутренней задачи Неймана**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$[3.4] \begin{cases} (1) & u(x, y, z) \in C^1(\bar{\Omega}), & u \in C^2(\Omega); \\ (2) & \Delta u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega; \\ (3) & \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \nu(x, y, z), & (x, y, z) \in \Sigma. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что от функции  $u$  требуется непрерывность вместе с первой производной в  $\bar{\Omega}$ , в отличие от задачи Дирихле, в которой требуется просто непрерывность.

#### Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана



Предположим, что  $u$  — решение [3.4], а  $v$  — произвольная дважды дифференцируемая функция. Запишем для этих функций вторую формулу Грина:

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

Тогда при  $v \equiv 1$  получим

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \nu(x, y, z) d\sigma = 0. \quad (3.6)$$

Равенство (3.6) называется **необходимым условием разрешимости** внутренней задачи Неймана.

Докажем теорему единственности решения задачи Неймана. Легко проверить, что, если  $u$  — решение [3.4], то  $(u + \text{const})$  — тоже решение. Назовем это **тривиальной неоднозначностью**. Докажем, что возможна только такая неоднозначность.

**Теорема 3.6** (единственности). Пусть  $u_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2$ :

- 1)  $u_i \in C^1(\bar{\Omega})$ ;
- 2)  $u_i$  — гармоническая в  $\Omega$ ;
- 3)  $\frac{\partial u_i}{\partial n}(x, y, z) = \nu(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in \Sigma$ .

Тогда  $u_1 - u_2 \equiv \text{const}$ . (Фактически это означает, что при  $\nu \equiv 0$  есть только тривиальное решение.)

*Доказательство.* Запишем первую формулу Грина для двух произвольных дважды дифференцируемых функций  $u$  и  $v$ :

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v + (\text{gr } u, \text{gr } v)) d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

Положим  $\begin{cases} u = u_1 - u_2 & \text{— это будет решение задачи [3.4] при } \nu \equiv 0; \\ v = u. \end{cases}$

Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (u\Delta u + \text{grad}^2 u) d\tau &= \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \\ \implies \iiint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\tau &= 0 \implies u_x \equiv u_y \equiv u_z \equiv 0 \\ \implies u &\equiv \text{const}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

### 3.9 Функция Грина для уравнения Лапласа и ее свойства

Запишем третью формулу Грина в  $\mathbf{E}^3$  для гармонической функции  $u$ :

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) \right] d\sigma_P, \quad P \in \Sigma, \quad M \in \Omega. \quad (3.7)$$

Итак, мы получили выражение для функции  $u(M)$ . Попробуем использовать его для наших задач — Дирихле и Неймана. Запишем вторую формулу Грина ( $v$  — некая гармоническая в  $\Omega$  функция):

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Функции  $u$  и  $v$  — гармонические, следовательно

$$\iint_{\Sigma} \left[ u(P) \frac{\partial v}{\partial n}(P) - v(P) \frac{\partial u}{\partial n}(P) \right] d\sigma_P = 0. \quad (3.8)$$

Вычитая (3.8) из (3.7), получим

$$u(M) = \iint_{\Sigma} \left[ \left( \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v(P) \right) \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v(P) \right) \right] d\sigma_P.$$

Положим

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v(P).$$

Тогда

$$u(M) = \iint_{\Sigma} \left[ G(M, P) \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial G}{\partial n}(M, P) \right] d\sigma_P.$$

Итак, мы получили новую формулу для  $u(M)$  с использованием произвольной гармонической функции  $v$ . Изменяя ее, мы можем получить решения различных задач. Например:

1. Если  $G|_{P \in \Sigma} = 0$ , то  $u(M) = - \iint_{\Sigma} u(P) \frac{\partial G}{\partial n}(M, P) d\sigma_P$  — мы получили формулу для решения задачи

Дирихле [3.1]:

$$u(M) = - \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial G}{\partial n}(M, P) d\sigma_P.$$

2. Если  $\tilde{G} : \left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right|_{P \in \Sigma} = 0$ , то  $u(M) = \iint_{\Sigma} \tilde{G}(M, P) \frac{\partial u}{\partial n}(P) d\sigma_P$  — мы получили формулу для решения

задачи задачи Неймана [3.4]:

$$u(M) = \iint_{\Sigma} \nu(P) \tilde{G}(M, P) d\sigma_P.$$

То есть, мы упростили нахождение решения задач Дирихле и Неймана, сведя их к соответствующим функциям Грина. Дадим теперь четкое определение.

**Определение.** Функция  $G(M, P) : M(x, y, z), P(\xi, \eta, \zeta) \in \bar{\Omega}$  называется **функцией Грина для внутренней задачи Дирихле**, если:

1.  $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} = 0 \quad \forall P \in \Omega, P \neq M$
2. Для  $G(M, P)$  справедливо представление

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v, \text{ где } v \text{ — гармоническая функция в } \Omega. \quad (3.9)$$

3.  $G(M, P)|_{P \in \Sigma} = 0$ .

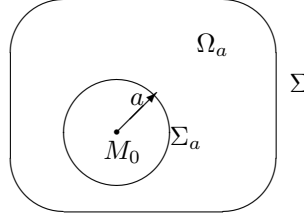
То есть  $\begin{cases} v \text{ — гармоническая в } \Omega \\ v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R_{MP}} \end{cases}$  — это все требования, наложенные нами на  $v$ .

## Свойства функции Грина

### Свойство 1.

$$G(M, P) > 0, \quad M, P \in \Omega, \quad P \neq M.$$

*Доказательство.* Возьмем некоторую точку  $M_0$  внутри  $\Omega$ . Рассмотрим сферу достаточно малого радиуса  $a$  с центром в точке  $M_0$ , и область  $\Omega_a$  между  $\Sigma$  и  $\Sigma_a$ .



Рассмотрим в  $\Omega_a$  функцию Грина от переменных  $M_0, P$ . Тогда в области  $\Omega_a$  она гармоническая. Следовательно, выполнены все условия принципа максимального значения:  $\min_{\Omega_a} G = \min_{\Sigma \cup \Sigma_a} G$ . Так как для  $G(M_0, P)$  справедливо представление (3.9)

$$G(M_0, P) = \frac{1}{4\pi R_{M_0 P}} + v(P), \quad \text{причем} \quad \frac{1}{4\pi R_{M_0 P}} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \infty,$$

а  $v$  — гармоническая (а, значит, и ограниченная) в  $\Omega$  функция, следовательно, можно взять такое  $a$ , что  $G|_{P \in \Sigma_a} > 0$ . Следовательно, так как  $G(M, P)|_{P \in \Sigma} = 0$ , то  $G(M_0, P) \geq 0 \forall P$  из  $\Omega_a$ . Так как функция  $G$  — не константа, следовательно, она не может достигать минимума (то есть нуля) внутри  $\Omega_a$ . Тогда получаем (так как  $a$  можно уменьшать бесконечно), что в  $\Omega$  для любых точек  $P \neq M$   $G(M, P) > 0$ . Утверждение доказано.  $\square$

### Свойство 2.

$$G(M, P) = G(P, M) \quad \forall M, P \in \Omega, \quad M \neq P. \quad (3.10)$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $M_1, M_2$  — две произвольные различные точки из  $\Omega$ . Достаточно доказать, что  $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$ . Обозначим

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= G(M_1, P); \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= G(M_2, P). \end{aligned}$$

Пусть  $\Sigma_\varepsilon^1$  — сфера (и соответствующий ей шар  $\Omega_\varepsilon^1$ ) достаточно малого радиуса  $\varepsilon$ , окружающая  $M_1$ , а  $\Sigma_\varepsilon^2, \Omega_\varepsilon^2$  — аналогичные сфера и шар для  $M_2$ . Возьмем  $\Omega_\varepsilon$  — внутренность  $\Omega$ , не содержащая шаров  $\Omega_\varepsilon^2, \Omega_\varepsilon^1$ . Записав вторую формулу Грина для функций  $u$  и  $v$  (они гармонические в  $\Omega_\varepsilon$  по определению функции Грина), получим

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau &= \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \\ &+ \iint_{\Sigma_\varepsilon^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \implies \{G|_{P \in \Sigma} \implies u|_\Sigma = v|_\Sigma = 0\} \implies \\ &\iint_{\Sigma_\varepsilon^1} \left[ G(M_1, P) \frac{\partial G(M_2, P)}{\partial n} - G(M_2, P) \frac{\partial G(M_1, P)}{\partial n} \right] d\sigma_P + \end{aligned}$$

$$+ \iint_{\Sigma_\varepsilon^2} \left[ G(M_1, P) \frac{\partial G(M_2, P)}{\partial n} - G(M_2, P) \frac{\partial G(M_1, P)}{\partial n} \right] d\sigma_p = 0 \quad (3.11)$$

Рассмотрим первое слагаемое в первом интеграле. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  функции  $\frac{\partial G(M_2, P)}{\partial n}$  и  $v$ , участвующая в представлении (3.9) функции  $G(M_1, P)$ , — гармонические и ограниченные (например, константами  $c_1$  и  $c_2$  соответственно) на  $\Sigma_\varepsilon^1$ . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} (G(M_1, P) \frac{\partial G(M_2, P)}{\partial n}) d\sigma_p &\leq \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} \left| \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} + v \right| \left| \frac{\partial G(M_2, P)}{\partial n} \right| d\sigma_p \leq \\ &\leq \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} \left| \frac{c_1}{4\pi R_{M_1 P}} + c_1 c_2 \right| d\sigma_p = \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} \left| \frac{c_1}{4\pi\varepsilon} + c_1 c_2 \right| d\sigma_p = c_1\varepsilon + 4\pi c_1 c_2 \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Со вторым слагаемым ситуация сложнее. Пользуясь представлением (3.9) для функции  $G(M_1, P)$ , разобьем его на два интеграла.

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon^1} G(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right) d\sigma_p + \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} G(M_2, P) \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma_p.$$

Второй также стремится к нулю с уменьшением  $\varepsilon$  (аналогично описанному выше). Исследуем множитель  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right)$ . По определению,  $\frac{\partial f}{\partial n} \equiv (\vec{n}, \text{gr } f)$ . В нашем случае

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{(\xi - x)}{R_{M_1 P}}, -\frac{(\eta - y)}{R_{M_1 P}}, -\frac{(\zeta - z)}{R_{M_1 P}} \right\}, \quad \text{gr } \frac{1}{R_{M_1 P}} = \left\{ -\frac{(\xi - x)}{R_{M_1 P}^3}, -\frac{(\eta - y)}{R_{M_1 P}^3}, -\frac{(\zeta - z)}{R_{M_1 P}^3} \right\}.$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{M_1 P}} \right) &= \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}^2} \implies \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} G(M_2, P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi R_{M_1 P}} \right) d\sigma_p = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} G(M_2, P) d\sigma_p = \{ \text{формула среднего значения (5.2)} \} = \\ &= \frac{G(M_2, P')}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon^1} d\sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G(M_2, M_1). \end{aligned}$$

Второй интеграл в формуле (3.11) получается из первого заменой переменной и сменой знака. Проводя аналогичные рассуждения, получим, что он стремится к  $G(M_1, M_2)$ . Отсюда получаем формулу

$$G(M_2, M_1) - G(M_1, M_2) = 0,$$

верную для любых различных точек  $M_1, M_2$  из  $\Omega$ . Утверждение доказано.  $\square$

### 3.10 Потенциалы простого и двойного слоя. Потенциал двойного слоя с единичной плотностью

Итак, мы знаем решения уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве:

$$\mathbf{E}^3 : \frac{1}{R_{MP}}; \quad \mathbf{E}^2 : \ln \frac{1}{\rho_{MP}},$$

где  $M(x, y, z)$  — фиксированная точка,  $P(\xi, \eta, \zeta)$  — переменная. Пусть  $\Sigma$  — некоторая замкнутая поверхность, ограничивающая область  $\Omega$ , содержащую точку  $M$ . Рассмотрим в  $\mathbf{E}^3$  следующую функцию

$$v(M) = \iint_{\Sigma} g(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P.$$

и назовем ее **потенциалом простого слоя**. А также функцию

$$u(M) = - \iint_{\Sigma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P$$

и назовем ее **потенциалом двойного слоя**.

Покажем, что  $\forall M \notin \Sigma \quad \Delta v \equiv \Delta u \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \Delta_M v &= \Delta_M \iint_{\Sigma} g(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P = \\ &= \iint_{\Sigma} g(P) \Delta_M \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = 0 \text{ (т.к. } \Delta_M \left( \frac{1}{R_{MP}} \right) \equiv 0). \end{aligned}$$

Для потенциала двойного слоя результат аналогичен:

$$\begin{aligned} \Delta_M u &= \Delta_M \iint_{\Sigma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P = \\ &= \iint_{\Sigma} f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \Delta_M \frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = 0. \end{aligned}$$

Определим понятие потенциала на плоскости. Пусть  $L$  — некоторая замкнутая кривая, окружающая точку  $M(x, y)$ :

$$\begin{aligned} v(M) &= \int_L g(P) \ln \frac{1}{\rho_{MP}} dl_P \text{ — потенциал простого слоя.} \\ u(M) &= - \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P \text{ — потенциал двойного слоя.} \end{aligned}$$

Итак, потенциалы являются гармоническими функциями. Из этого следует, что их можно использовать для решения задачи, к примеру, Неймана, подбирая соответствующие функции  $g$  и  $f$ , которые назовем **плотностями** соответствующих потенциалов.

Рассмотрим более детально потенциал двойного слоя на плоскости:

$$u(M) = - \int_L f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P. \quad (3.12)$$

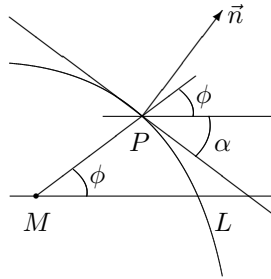
Предположим гладкость кривой  $L$  и непрерывность (в некотором смысле) ее касательных. В соответствии с этим преобразуем выражение  $-\frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) &= \left\{ \rho_{MP} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right\} = -\frac{1}{\rho_{MP}} \frac{1}{2} \frac{2(\xi - x)}{\rho_{MP}} = -\frac{\xi - x}{\rho_{MP}^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) &= -\frac{\eta - y}{\rho_{MP}^2}; \\ \overrightarrow{MP} = \{\xi - x; \eta - y\} &\implies -\frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{\rho_{MP}} \right) = -(\vec{n}, \operatorname{gr} \ln \left( \frac{1}{\rho_{MP}} \right)) = (\vec{n}, \frac{\overrightarrow{MP}}{\rho_{MP}^2}) = \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} \implies \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(M) = \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P. \quad (3.13)$$

Пусть  $u_e(M) = \int_L \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P$  — потенциал с единичной плотностью. Вычислим его, используя полярную систему координат. Проведем через точку  $M$  некоторую ось и будем от нее считать угол  $\phi$ . Обозначим за угол  $\alpha$  из промежутка  $[0; \frac{\pi}{2}]$  угол между касательной к кривой  $L$  в точке  $P$  и этой осью. Тогда будут справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n}) &= \frac{\pi}{2} - \phi - \alpha; \\ \Rightarrow \cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n}) &= \sin(\phi + \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_e(M) &= \int_L \frac{\sin(\phi + \alpha)}{\rho_{MP}} dl_P. \end{aligned} \quad (3.14)$$



Перейдем в координатах точки  $P(\xi, \eta)$  от прямоугольной системы координат к полярной:

$$\begin{aligned} \xi &= r(\phi) \cos \phi; & d\xi &= [(r'(\phi) \cos(\phi) - r(\phi) \sin(\phi))]d\phi; \\ \eta &= r(\phi) \sin \phi; & d\eta &= [(r'(\phi) \sin(\phi) + r(\phi) \cos(\phi))]d\phi; \end{aligned} \quad (*)$$

$$\text{Из рисунка можно увидеть, что } \begin{cases} d\xi = -dl \cos \alpha; \\ d\eta = dl \sin \alpha. \end{cases}$$

Преобразуем подынтегральную функцию в (3.14):

$$\begin{aligned} \sin(\phi + \alpha) dl &= \sin \phi \cos \alpha dl + \cos \phi \sin \alpha dl = \begin{cases} d\xi = -dl \cos \alpha \\ d\eta = dl \sin \alpha \end{cases} = \\ &= \cos \phi d\eta - \sin \phi d\xi = (*) = (r' \cos \phi \sin \phi + r \cos^2 \phi - r' \sin \phi \cos \phi + r \sin^2 \phi) d\phi = r d\phi \\ \Rightarrow \cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n}) dl &= r(\phi) d\phi \\ \Rightarrow u_e(M) &= \int_L \frac{r(\phi)}{r(\phi)} d\phi = 2\pi. \end{aligned}$$

Аналогично получим, что если точка лежит вне области или на границе, то будут выполнены соотношения

$$u_e(M) = \begin{cases} \pi, & M \in L \\ 0, & M \notin \overline{D} \end{cases}.$$

Итак,

$$u_e(M) = \begin{cases} 2\pi, & M \in D; \\ \pi, & M \in L; \\ 0, & M \notin \overline{D}. \end{cases} \quad (3.15)$$

## Свойства потенциалов

Теперь, зная выражение для потенциала с единичной плотностью, выведем некоторые свойства нашего исходного потенциала. Для этого нам понадобится

**Определение.** Интеграл  $\int_L F(P, M) dl_P$  называется **равномерно сходящимся** в точке  $M_0 \in L$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists V(M_0)$  – окрестность точки  $M_0$  и дуга  $l \in L$  такая, что интеграл  $\int_l F(P, A) dl_P$  сходится  $\forall A \in V(M_0)$  и  $|\int_l F(P, A) dl_P| \leq \varepsilon$ .

Будем пользоваться следующей теоремой без доказательства:

**Теорема 3.7.** Пусть функция  $F(P, M)$  непрерывна всюду при  $P \neq M$ . Тогда интеграл  $\int_l F(P, M) dl_P$  является непрерывной функцией в тех точках, где он равномерно сходится.

Возьмем на границе  $L$  некоторую точку  $M_0$  и рассмотрим функцию  $u(M) - f(M_0)u_e(M)$ .

**Теорема 3.8.** Если в (3.12) функция  $f(P)$  непрерывна в точке  $M_0$ , то функция  $u(M) - f(M_0)u_e(M) -$  непрерывна в точке  $M_0$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} u(M) - f(M_0)u_e(M) &= (3.13) = \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P - \int_L f(M_0) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P = \\ &= \int_L (f(P) - f(M_0)) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P \end{aligned}$$

Из непрерывности нашей функции  $\forall \varepsilon > 0$  следует существование такой окрестности точки  $M_0$ , где  $|f(P) - f(M_0)| \leq \varepsilon$ . Следовательно, переходя к полярным координатам с центром в точке  $M_0$ , получим

$$\left| \int_L (f(P) - f(M_0)) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P \right| = \left| \int_L (f(P) - f(M_0)) d\phi \right| \leq \varepsilon \left| \int_L d\phi \right| = 2\pi\varepsilon$$

– при наложенных нами на кривую условиях.

Получаем, что интеграл равномерно сходится и теорема доказана. □

Теперь, используя формулу (3.15) для функции  $u_e(M)$  и утверждение теоремы, получим, что функция  $u(M)$  в точке  $M_0$  имеет тот же вид, что и функция  $u_e(M)f(M_0)$ . Мы получили

**Следствие 1.**

$$\begin{aligned} &u_{\text{внутр}}(M_0) = \lim_{\substack{M \rightarrow M_0; \\ M \in D}} u(M); \\ \text{Обозначим} &u_{\text{внеш}}(M_0) = \lim_{\substack{M \rightarrow M_0; \\ M \notin D}} u(M). \\ \text{Тогда} &u_{\text{внутр}}(M_0) = u(M_0) + \pi f(M_0); \\ &u_{\text{внеш}}(M_0) = u(M_0) - \pi f(M_0). \end{aligned}$$

Таким образом, на контуре можно представить потенциал так:

$$u(M_0) = \frac{u_{\text{внеш}}(M_0) + u_{\text{внутр}}(M_0)}{2}.$$

**Следствие 2.** Функция  $u(M)$  непрерывна при  $M \in L$ , если  $f(P)$  непрерывна на  $L$ .

*Доказательство.* Мы имеем на контуре  $f(M)u_e(M) = \pi f(M)$ ;  $u(M) - f(M_0)u_e(M) = \psi(M)$  — некоторая непрерывная функция. Тогда функция  $u(M)$  представима в виде  $u(M) = \pi f(M) + \psi(M)$ .  $\square$

### 3.11 Сведение задачи Дирихле к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле в  $\mathbf{E}^2$ :

$$[3.5] \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u(x, y) \in C(\bar{D}); \\ (2) \quad u(x, y) - \text{гармоническая в } D; \\ (3) \quad u(x, y) = \mu(x, y), \quad (x, y) \in L. \end{array} \right.$$

Будем искать решение в виде потенциала двойного слоя. Пусть

$$\bar{u}(M) = \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P$$

Тогда условие (2) сразу выполняется. Попробуем получить условия (1) и (3), изменяя  $f(P)$ . Определим новую функцию

$$u(M) = \begin{cases} \bar{u}(M), & M \in D; \\ \bar{u}_{\text{внутр}}(M), & M \in L, \end{cases}$$

где  $\bar{u}_{\text{внутр}}(M) = \lim_{\substack{A \rightarrow M; \\ A \in \bar{D}}} \bar{u}(A)$ .

Легко проверить, что полученная функция будет непрерывной в  $\bar{D}$ . Чтобы получить условие (3), воспользуемся следствием 1 из теоремы 3.8. Тогда получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_{\text{внутр}}(M) = \pi f(M) + \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P, \quad M \in L; \\ \bar{u}_{\text{внутр}}(M) = \mu(M), \quad M \in L. \end{array} \right. \implies$$

$$\pi f(M) + \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P = \mu(M), \quad M \in L \quad (3.16)$$

Полученное уравнение относительно функции  $f(P)$  называется **интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода**. Следующую теорему примем без доказательства:

**Теорема 3.9** (альтернатива Фредгольма). *Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет единственное непрерывное решение  $\forall \mu(M) \in C(L)$  тогда и только тогда, когда однородное уравнение (3.16) (т.е.  $\mu(M) \equiv 0$ ) имеет только нулевое решение.*

Используя это утверждение, докажем единственность решения задачи Дирихле [3.5].

**Определение.** Контур  $L$  называется строго выпуклым, если, какие бы две точки на нем мы не взяли, отрезок, их соединяющий, лежит целиком внутри контура.

**Теорема 3.10** (существования и единственности). *Пусть область  $D$  строго выпукла ( $L$  — строго выпуклый контур). Тогда внутренняя задача Дирихле [3.5] имеет единственное решение для любой непрерывной на  $L$  функции  $\mu(M)$ .*

*Доказательство.* Согласно альтернативе Фредгольма, достаточно доказать, что уравнение

$$\pi f(M) + \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P = 0, \quad M \in L. \quad (3.17)$$



имеет только нулевое решение. Возьмем такую точку  $M_0 \in L$ , что  $|f(M_0)| = \max_{M \in L} |f(M)|$ . Мы знаем, что согласно формуле для потенциала с единичной плотностью (3.15),

$$\pi f(M_0) = \int_L f(M_0) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{M_0 P}, \vec{n})}{\rho_{M_0 P}} dl_P, \quad M_0 \in L.$$

Кроме того, так как  $f(M)$  — решение (3.17), то

$$\pi f(M_0) + \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{M_0 P}, \vec{n})}{\rho_{M_0 P}} dl_P = 0.$$

Складывая полученные равенства, получаем:

$$\int_L [f(P) + f(M_0)] \frac{\cos \angle(\overrightarrow{M_0 P}, \vec{n})}{\rho_{M_0 P}} dl_P = 0$$

Из определения  $M_0 : |f(M_0)| \geq |f(P)| \forall P \in L$  и того, что

$$\frac{\cos \angle(\overrightarrow{M_0 P}, \vec{n})}{\rho_{M_0 P}} = \frac{d\varphi}{dl_P} > 0,$$

получаем, что  $f(M_0) + f(P) \equiv 0 \quad (\forall P \in L)$ .

Взяв  $P = M_0$ , получим  $f(M_0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ . Теорема доказана. □

## 4 Уравнения гиперболического типа

### 4.1 Постановка задач для уравнения колебаний

Рассмотрим несколько уравнений гиперболического типа.

Пусть функция  $u(x, t) \in C^2((x, t) : 0 < x < l, t > 0)$ . Тогда уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (4.1)$$

называется **уравнением колебаний идеальной струны**.

В случае функции от двух пространственных переменных  $u(x, y, t)$ :

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (x, y) \in D, \quad t > 0$$

– это **уравнение колебаний упругой мембраны**.

Рассмотрим уравнение (4.1). Мы можем задать **начальные условия**:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \text{ — интерпретируется как смещение струны от положения равновесия;}$$

и **краевые условия**:

$$\begin{cases} u(l, t) = \mu(t), & t > 0; \\ u_x(l, t) = \nu(t), & t > 0; \\ u(l, t) + \alpha u_x(l, t) = \theta(t), & t > 0. \end{cases} \quad (\text{ в закрепленном случае } \mu \equiv 0)$$

– обычно мы берем некоторые из них.

Краевые задачи ставятся аналогично случаю уравнений параболического типа. Вот пример **первой краевой задачи**.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u(0, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(l, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Вот она же для **полупрямой**:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = \mu(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Также можно рассмотреть обыкновенную **задачу Коши**

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & -\infty < x < +\infty; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

### 4.2 Формула Даламбера. Существование, устойчивость и единственность решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для уравнения колебаний:

$$[4.1] \begin{cases} (1) & u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T; \\ (2) & u(x, 0) = \phi(x), & -\infty < x < +\infty; \\ (3) & u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Пусть  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  и является решением задачи Коши [4.1]. Определим новые переменные  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\begin{cases} \xi = x + at; \\ \eta = x - at. \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2}; \\ t = \frac{\xi - \eta}{2a}. \end{cases}$$

Определим новую функцию  $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right)$ .

Найдем частные производные этой функции:

$$\begin{aligned} v_\xi &= u_x\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \frac{1}{2} + u_t\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) \frac{1}{2a}; \\ v_{\xi\eta} &= u_{xx}(\dots) \frac{1}{4} + u_{xt}(\dots) \left(-\frac{1}{4a}\right) + u_{tx}(\dots) \frac{1}{4a} + u_{tt}(\dots) \left(-\frac{1}{4a^2}\right) = \\ &= u_{xx}(\dots) \frac{1}{4} - \frac{1}{4a^2} u_{tt}(\dots) = \{ \text{уравнение колебаний} \} = 0. \end{aligned}$$

Теперь проведем обратное интегрирование:

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \xrightarrow{\text{инт-ие по } \xi} v_\eta(\xi, \eta) = \tilde{f}_1(\eta) \xrightarrow{\text{инт-ие по } \eta} v(\xi, \eta) = \int \tilde{f}_1(\eta) d\eta + f_2(\xi)$$

$$\implies v(\xi, \eta) = f_1(\eta) + f_2(\xi) \implies \{u(x, t) = v(x + at, x - at)\} \implies$$

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \quad (4.2)$$

где  $\tilde{f}_1, f_1, f_2$  — некоторые функции, получающиеся при интегрировании.

Итак, мы получили общий вид для функции  $u$ , являющейся решением уравнения колебаний. Попробуем найти  $f_1$  и  $f_2$ , используя начальные условия:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \phi(x); \\ u_t(x, 0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \implies \begin{cases} -f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + C; \\ f_1(x) + f_2(x) = \phi(x). \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} f_2(x) = \frac{\phi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{c}{2}; \\ f_1(x) = \frac{\phi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2}. \end{cases} \implies \{u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)\} \implies$$

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (4.3)$$

Полученное выражение называется **формулой Даламбера**.

**Теорема 4.1** (существования и единственности решения задачи Коши). Пусть функция  $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ . Тогда существует и единственна функция  $u(x, t)$  такая, что  $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  и является решением задачи Коши [4.1], где функции  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  определяют начальные условия.

*Доказательство.* **Существование** проверяется непосредственной подстановкой с использованием условий (1)–(3) и условий теоремы.

**Единственность** следует из того, что для любой функции, удовлетворяющей условиям (1)–(3), справедливо представление по формуле Даламбера, а оно подразумевает только одну функцию. Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 4.2** (устойчивости). Пусть  $\phi_1, \phi_2(x) \in C^2(\mathbb{R}), \psi_1, \psi_2(x) \in C^1(\mathbb{R})$  и ограничены на  $\mathbb{R}$ . Тогда, если  $u_1, u_2(x, t)$  – решения задач типа [4.1] с  $\phi_1, \psi_1$  и  $\phi_2, \psi_2$  в качестве начальных условий соответственно, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|.$$

*Доказательство.* Из формул Даламбера (4.3) для  $u_1, u_2$  следует:

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2| &\leq \left| \frac{\phi_1(x+at) - \phi_2(x+at)}{2} \right| + \left| \frac{\phi_1(x-at) - \phi_2(x-at)}{2} \right| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} d\xi \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| T. \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

### 4.3 Характеристики уравнения в частных производных второго порядка

Классическое уравнение в частных производных второго порядка имеет следующий вид:

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (4.4)$$

Поставим ему в однозначное соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (4.5)$$

Тогда функции (кривые), являющиеся решением (4.5), называются **характеристиками уравнения** (4.4).

Например, для уравнения колебаний

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

уравнение для получения характеристик выглядит так:

$$a^2(dt)^2 - (dx)^2 = 0.$$

Из него получаем

$$\begin{cases} a dt + dx = 0; \\ a dt - dx = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x + at = const; \\ x - at = const. \end{cases}$$

– это две прямые, являющиеся характеристиками гиперболического уравнения.

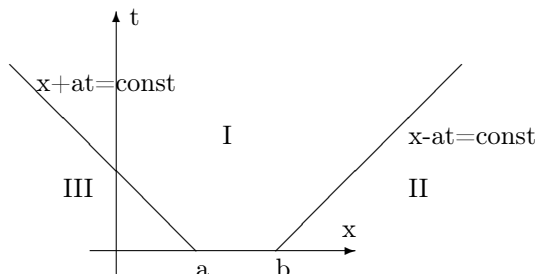
Пусть функция  $u(x, t)$  является решением некоторой задачи Коши. Возьмем в I четверти плоскости ОХТ произвольную точку  $(x_0, t_0)$ . Через нее проходят только две характеристики:  $x-at = x_0-at_0$ ,  $x+at = x_0+at_0$ . Они пересекают ось ОХ в точках  $(x_0+at_0, 0)$ ,  $(x_0-at_0, 0)$ , образуя при этом так называемый **характеристический треугольник**.

Записав для функции  $u(x, t)$  в точке  $u(x_0, t_0)$  формулу Даламбера (4.3):

$$u(x_0, t_0) = \frac{\phi(x_0 - at_0) + \phi(x_0 + at_0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(\xi) d\xi,$$

получим, что значения функции  $u(x, t)$  в произвольной точке внутри характеристического треугольника определяются только значениями функций  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$  на его основании. Это — важная особенность гиперболического уравнения, которая станет понятна на следующем примере:

Пусть функции  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$  равны нулю вне некоторого отрезка  $[a; b]$ . Тогда в областях II, III функция  $u(x, t)$  будет, как легко видеть из формулы Даламбера, тождественно равна нулю. Этот факт показывает конечную скорость (в течение времени  $t$ ) распространения сигнала  $u(x, t)$  (по оси  $x$ ) в гиперболическом уравнении.



Напротив, в задаче Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

решение, как показывалось ранее, имеет вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \phi(s) ds$$

Видно, что если функция  $\phi(s)$  непрерывна, неотрицательна и в некоторой точке отлична от нуля, то

$$u(x, t) > 0 \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

То есть, мы как бы получаем то, что сигналы в случае уравнения теплопроводности распространяются практически мгновенно.

## 4.4 Задача на полупрямой. Метод продолжений

### Первая краевая задача

Первая краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой с однородным краевым условием имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (1) & u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ (2) & u(0, t) = 0, & t > 0; \\ (3) & u(x, 0) = \phi(x), & x \geq 0; \\ (4) & u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Добавим условия сопряжения

$$\begin{cases} \phi(0) = 0; \\ \psi(0) = 0. \end{cases}$$

для обеспечения непрерывности функций  $u(x, t)$  и  $u_t(x, t)$  в нуле.

Найдем решение данной краевой задачи, расширив ее до случая всей прямой. Доопределим нечетным образом функции  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  на всей прямой, задав новые функции  $\Phi$  и  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0; \\ -\phi(-x), & x < 0. \end{cases} \\ \Psi(x) &= \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0; \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим модифицированную задачу Коши:

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t) = a^2 U_{xx}(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0; \\ U(x, 0) = \Phi(x); \\ U_t(x, 0) = \Psi(x). \end{cases}$$

В данном случае для нахождения  $U(x, t)$  мы можем применить формулу Даламбера:

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi.$$

Возьмем в качестве нужной нам функции  $u(x, t)$  при  $x, t \geq 0$  функцию  $U(x, t)$ . Очевидно, что условия (1), (3) и (4) при  $x, t \geq 0$  выполняются сразу — это следует из определения функций  $\Psi(x)$  и  $\Phi(x)$ . Выполнение условия (2) следует из следующих преобразований:

$$u(0, t) \stackrel{def}{=} U(0, t) = \frac{\Phi(-at) + \Phi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi.$$

В силу нечетности соответствующих функций первое и второе слагаемые обращаются в ноль, что и дает выполнение условия (2). Итак, мы доказали, что построенная нами функция  $u(x, t)$  — решение первой краевой задачи. Выразим  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  через исходные функции  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  соответственно:

$$\begin{aligned} \text{При } x \geq at & \begin{cases} \Phi(x + at) = \phi(x + at); \\ \Phi(x - at) = \phi(x - at); \\ \Psi(\xi) = \psi(\xi), \text{ при } \xi \in [x - at; x + at]. \end{cases} \\ \text{При } x < at & \begin{cases} \Phi(x + at) = \phi(x + at); \\ \Phi(x - at) = -\phi(at - x); \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь запишем вспомогательную формулу для решения первой краевой задачи:

$$\begin{aligned} \text{При } x < at & \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi = \int_{x-at}^0 \Psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \Psi(\xi) d\xi = \int_{x-at}^0 -\psi(-\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \\ & = \{ \text{положим } -\xi = \xi \} = \int_{at-x}^0 \psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Тогда общая формула будет такой:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x \geq at; \\ \frac{\phi(at + x) - \phi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi) d\xi, & x < at. \end{cases}$$

## Вторая краевая задача

Вторая краевая задача на полупрямой с однородным краевым условием имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, t > 0; \\ (2) \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0; \\ (3) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \geq 0; \\ (4) \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \geq 0. \end{array} \right.$$

Будем действовать так же, как и в предыдущем случае, однако здесь нас устроит только четное продолжение:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0; \\ \phi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0; \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Новая задача Коши и решение для нее по формуле Даламбера будут выглядеть так же, как и в предыдущем случае:

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi.$$

Аналогично, пусть  $u(x, t) = U(x, t)$ ,  $x, t > 0$ . Тогда выполнение условий (1),(3),(4) опять же очевидно. Проверим условие (2). Дифференцируя формулу Даламбера и используя то, что у четной функции  $\Psi(t)$  производная нечетна, получим

$$u_x(0, t) = U_x(0, t) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\Psi(at) - \Psi(-at)].$$

Из нечетности  $\Phi'(t)$  и четности  $\Psi(t)$  видно, что оба слагаемых равны нулю. Общая формула для  $u(x, t)$  получается аналогично.

#### 4.5 Метод разделения переменных для доказательства существования решения первой краевой задачи

Рассмотрим на отрезке  $[0; l]$  ортонормированные системы функций:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Определим коэффициенты Фурье так:

$$\phi_n = \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds;$$

$$\tilde{\phi}_n = \int_0^l \phi(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds.$$

Тогда из курса математического анализа известно, что, если  $\phi(x) \in C[a; b]$ , то ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_n^2$  сходятся. Запомним это и перейдем к **первой краевой задаче** с однородным уравнением колебаний и

однородными краевыми условиями:

$$[4.2] \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0; \\ (2) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \\ (3) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \\ (4) \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{array} \right.$$

Найдем ее решение следующим способом: проведем преобразования, приводящие к некоторой функции  $u(x, t)$ , а потом докажем, что при определенных условиях на функции  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  эта функция будет существовать и являться решением исходной задачи.

Будем искать решение в виде:

$$v(x, t) = X(x)T(t) \text{ — пусть это некоторая не равная тождественно нулю функция.}$$

Подставив  $v(x, t)$  в уравнение колебаний, получим:

$$\begin{aligned} T''(t)X(x) &= a^2 X''(x)T(t) \implies \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — некоторая константа.

Отсюда получаются два уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l; \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \end{array} \right.$$

При  $X(0) = X(l) = 0$  функция  $v(x, t)$ , очевидно, будет удовлетворять условию (2).

Найдем нетривиальные решения следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \\ X(0) = X(l) = 0. \end{array} \right.$$

Как уже говорилось при выводе решения для уравнения теплопроводности, нам подойдут такие собственные значения и соответствующие им собственные функции:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \\ X_n(x) &= \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Подставим найденные  $\lambda_n$  в уравнение для  $T(t)$ :

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t) = 0 \implies T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right),$$

где  $a_n, b_n$  — некоторые константы.

Итак, мы нашли функции  $X_n(x), T_n(t)$ , для которых выполняются условия (1),(2).

Положим  $v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ . Очевидно, для этой функции тоже выполняются условия (1),(2).



Найдем константы  $a_n, b_n$  из условий (3), (4), положив  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t)$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \right];$$

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \implies a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds;$$

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \frac{\pi na}{l} \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \implies \frac{\pi na}{l} b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \implies$$

$$b_n = \frac{2}{\pi na} \int_0^l \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds.$$

Итак, мы нашли константы, запишем полную формулу:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds + \frac{2}{\pi na} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (4.6)$$

Теперь сформулируем те условия, при которых она будет корректна.

**Теорема 4.3** (существования). *Пусть*

$$\begin{aligned} \phi(x) &\in C^3[0; l], \quad \phi(0) = \phi(l) = \phi'(0) = \phi'(l) = 0; \\ \psi(x) &\in C^2[0; l], \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{aligned}$$

Тогда функция  $u(x, t)$ , определяемая формулой (4.6), обладает следующими свойствами:  $u(x, t) \in C^2 \{[0; l] \times [0; T]\}$  ( $T$  – произвольное  $> 0$ ), и удовлетворяет условиям (1)-(4) (является решением краевой задачи [4.2]).

*Доказательство.* Докажем, что  $u(x, t) \in C^2 \{[0; l] \times [0; T]\}$ . Пусть

$$\begin{aligned} \phi_n &= \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds = \{ \text{интегрирование по частям} \} = \\ &= -\phi(s) \frac{l}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \Big|_0^l + \frac{l}{\pi n} \int_0^l \phi'(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds = \\ &= \{ \text{еще раз интегрирование по частям} \} = \left( \frac{l}{\pi n} \right)^2 \phi'(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \Big|_0^l - \left( \frac{l}{\pi n} \right)^2 \int_0^l \phi''(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds = \\ &= \left( \frac{l}{\pi n} \right)^3 \phi''(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \Big|_0^l - \left( \frac{l}{\pi n} \right)^3 \int_0^l \phi'''(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds. \end{aligned}$$

Положим  $\widehat{\phi}_n = \int_0^l \phi'''(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds$ . Тогда  $n^3 |\phi_n| = \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 |\widehat{\phi}_n|$ .

По упомянутому ранее свойству ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\phi}_n^2$  сходится. Покажем, что из этого следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\phi_n|$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\phi_n| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\widehat{\phi}_n| \leq \left\{ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \right\} \leq \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\phi}_n^2 \right]$$

Итак, у нас оба слагаемых представляют собой сходящиеся ряды, поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\phi_n|$  сходится по мажорантному признаку.

Аналогично, пусть

$$\begin{aligned} \psi_n &= \int_0^l \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds = \{\text{интегрирование по частям}\} = \\ &= -\psi(s) \frac{l}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \Big|_0^l + \frac{l}{\pi n} \int_0^l \psi'(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds = \\ &= \{\text{еще раз интегрирование по частям}\} = \left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 \psi'(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \Big|_0^l - \left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 \int_0^l \psi''(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \end{aligned}$$

Аналогично, можно показать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n |\psi_n|$  — сходится.

Ограничив  $|\cos(\frac{\pi n}{l} at)|$  и  $|\sin(\frac{\pi n}{l} at)|$  единицей, получим, что ряд (4.6) для  $u(x, t)$  равномерно сходится по признаку Вейерштрасса (мажорантой является, очевидно, сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} |\phi_n| + \frac{2}{\pi n a} |\psi_n| \right]$ ). Кроме того, функция  $u(x, t)$  в данном случае непрерывна на  $[0; l] \times [0; T]$ .

Точно так же, для существования и непрерывности первой и второй производных по  $x$  достаточно доказать равномерную сходимость ряда из соответствующих производных в формуле (4.6). Продифференцировав по  $x$ , получим

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \right] \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \\ u_{xx}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \end{aligned}$$

Тогда (по признаку Вейерштрасса) достаточно показать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} \left( \frac{2}{l} |\phi_n| - \frac{2}{\pi n a} |\psi_n| \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left( \frac{2}{l} |\phi_n| - \frac{2}{\pi n a} |\psi_n| \right).$$

Она же следует из только что доказанных свойств для рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\phi_n|$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} n |\psi_n|$ . Проведя те же самые рассуждения для производных по  $t$ , получим в итоге, что  $u(x, t) \in C^2 \{[0; l] \times [0; T]\}$ .

В этом случае легко проверить, что функция  $u(x, t)$ , задаваемая формулой (4.6), удовлетворяет уравнению колебаний (то есть условию (1)). То, что такая функция  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям (2)-(4), видно из ее построения — краевые и начальные условия были учтены. Теорема доказана.  $\square$

Итак, решение построено. Докажем, что при некоторых условиях оно единственно.

## 4.6 Интеграл энергии. Единственность решения краевых задач для уравнения колебаний

Рассмотрим общую первую краевую задачу:

$$[4.3] \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, 0 < t < T; \\ u(0, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(l, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Докажем единственность ее решения.

**Теорема 4.4** (единственности). Пусть функции  $u_1, u_2(x, t) \in C^2\{[0; l] \times [0; T]\}$  и являются решениями одной и той же краевой задачи [4.3]. Тогда  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$  на  $\{[0; l] \times [0; T]\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $v(x, t) = u_1 - u_2$ . Очевидно, функция является решением нашей краевой задачи с тождественно равными нулю функциями  $f, \phi, \psi, \mu_1, \mu_2$ . Таким образом,  $v(x, t) \in C^2\{[0; l] \times [0; T]\}$  и

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t < T; \\ v(0, t) \equiv v(l, t) \equiv v(x, 0) \equiv v_t(x, 0) \equiv 0. \end{cases}$$

Понятно, требуется доказать, что  $v(x, t) \equiv 0$ .

Определим функцию

$$E(t) = \int_0^l [(v_t(x, t))^2 + a^2 (v_x(x, t))^2] dx$$

и назовем ее **интегралом энергии**. В физической интерпретации с точностью до константы это полная энергия, к примеру, нашей колеблющейся струны.

Очевидно, при наших условиях на функцию  $v$  функция  $E(t)$  дифференцируема. Тогда ее производная вычисляется так:

$$E'(t) = \int_0^l [2v_t(x, t)v_{tt}(x, t) + 2a^2 v_x(x, t)v_{xt}(x, t)] dx.$$

Преобразуем второе слагаемое в интеграле интегрированием по частям по  $x$ :

$$E'(t) = \int_0^l [2v_t(x, t)v_{tt}(x, t) - 2a^2 v_{xx}(x, t)v_t(x, t)] dx + 2a^2 v_x(x, t)v_t(x, t)|_0^l.$$

Заметим, что, так как  $v(x, t)$  — решение уравнения колебаний, подынтегральная функция тождественно равна нулю. Продифференцировав краевые условия по  $t$ , получим, что  $v_t(0, t) \equiv 0 \equiv v_t(l, t)$ . Из этого следует, что и внеинтегральное слагаемое обращается в ноль. Итак,  $E'(t) \equiv 0$ , или, что то же самое,

$$E(t) = \int_0^l [(v_t(x, t))^2 + a^2 (v_x(x, t))^2] dx \equiv const.$$

На самом деле мы просто получили еще один вид закона сохранения энергии — в замкнутой системе, описываемой уравнениями [4.3], количество энергии постоянно. Очевидно,

$$E(t) = E(0) = \int_0^l [(v_t(x, 0))^2 + a^2 (v_x(x, 0))^2] dx.$$

Из начальных условий получаем, что  $v_t(x, 0) = v_x(x, 0) = 0$ ,  $0 \leq x \leq l$ , а, следовательно,

$$E(0) = 0 \implies E(t) \equiv 0.$$

Из неотрицательности подынтегральных функций получаем, что

$$v_t(x, t) \equiv v_x(x, t) \equiv 0.$$

Из этого следует, что  $v \equiv const$ , а из начальных условий следует, что  $v \equiv 0$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание.** Все утверждения верны и для задач с краевыми условиями второго рода:

$$\begin{cases} v_x(0, t) = 0; \\ v_x(l, t) = 0. \end{cases}$$

— это ничего не меняет в доказательстве, кроме способа доказательства равенства нулю внеинтегрального слагаемого, а также верны для краевых условий смешанного вида.

## 4.7 Задача с данными на характеристиках. Эквивалентная система интегральных уравнений

Рассмотрим следующую задачу:

$$[4.4] \begin{cases} (1) & u_{xy}(x, y) = a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) + f(x, y, u(x, y)), & 0 < x < l_1, & 0 < y < l_2; \\ (2) & u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l_1; \\ (3) & u(0, y) = \psi(y), & 0 \leq y \leq l_2. \end{cases}$$

Эта задача с нелинейным уравнением гиперболического типа называется **задачей Гурса**. По данному ранее определению характеристиками уравнения (1) будут функции, удовлетворяющие уравнению

$$dx dy = 0.$$

Это дает семейство прямых вида  $x = const$ ,  $y = const$ . Таким образом, наша функция  $u(x, y)$  задается данными на характеристиках  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

**Определение.** Функция  $u(x, y)$  называется **решением задачи** [4.4], если  $u(x, y) \in C^2\{[0; l_1] \times [0; l_2]\}$  и удовлетворяет условиям (1)-(3).

Докажем существование и единственность решения данной задачи в несколько этапов. Сначала покажем, что задача [4.4] эквивалентна некоторой системе нелинейных интегральных уравнений.

Пусть функция  $u(x, y)$  — решение задачи [4.4]. Тогда, интегрируя уравнение (1) сначала по  $y$ , а потом по  $x$ , получим

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= u_x(x, 0) + \int_0^y a(x, \eta)u_x(x, \eta) d\eta + \int_0^y b(x, \eta)u_y(x, \eta) d\eta + \int_0^y f(x, \eta, u(x, \eta)) d\eta; \\ u(x, y) &= u(0, y) + u(x, 0) - u(0, 0) + \int_0^x \int_0^y a(\xi, \eta)u_x(\xi, \eta) d\eta d\xi + \int_0^x \int_0^y b(\xi, \eta)u_y(\xi, \eta) d\eta d\xi + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Введем две новые функции

$$\begin{cases} v(x, y) = u_x(x, y); \\ w(x, y) = u_y(x, y). \end{cases}$$

Тогда, используя начальные условия (2)-(3), уравнение (4.7) можно переписать в виде

$$u(x, y) = \psi(y) + \phi(x) - \phi(0) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)v(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)w(\xi, \eta)] d\eta d\xi + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\eta d\xi. \quad (4.8)$$

Продифференцировав по  $x$ , получим

$$v(x, y) = \phi'(x) + \int_0^y [a(x, \eta)v(x, \eta) + b(x, \eta)w(x, \eta)] d\eta + \int_0^y f(x, \eta, u(x, \eta)) d\eta. \quad (4.9)$$

Аналогично, по  $y$ :

$$w(x, y) = \psi'(y) + \int_0^x [a(\xi, y)v(\xi, y) + b(\xi, y)w(\xi, y)] d\xi + \int_0^x f(\xi, y, u(\xi, y)) d\xi. \quad (4.10)$$

Итак, если  $u(x, y)$  — решение задачи [4.4], то существуют функции  $v(x, y)$ ,  $w(x, y)$ , удовлетворяющие уравнениям (4.8)-(4.10). Обратно, из существования непрерывных функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , являющихся решениями уравнений (4.8) - (4.10), следует, что  $v = u_x$ ;  $w = u_y$ . Также непосредственным дифференцированием можно убедиться, что функция  $u(x, y)$  будет являться решением задачи [4.4].

## 4.8 Существование решения задачи с данными на характеристиках

**Теорема 4.5** (существования). Пусть выполняются следующие четыре условия:

1.  $a(x, y), b(x, y) \in C\{[0; l_1] \times [0; l_2]\}$
2.  $f(x, y, p) \in C\{[0; l_1] \times [0; l_2] \times \mathbf{E}\}$  — то есть мы заменили функцию  $u(x, y)$  переменной  $p$ , принимающей любые значения.
3.  $|f(x, y, p_1) - f(x, y, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|$ ,  $\forall x \in [0; l_1], \forall y \in [0; l_2], \forall p_1, p_2 \in E$  — условие Липшица по  $p$ .
4.  $\phi(x) \in C^1[0; l_1], \psi(y) \in C^1[0; l_2], \phi(0) = \psi(0)$ .

Тогда существует решение задачи [4.4].

*Доказательство.* Так как [4.4] эквивалентно (4.8)-(4.10), докажем, что существуют непрерывные функции  $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ , удовлетворяющие (4.8)-(4.10). Найдем эти функции последовательностью итераций, а итерационный процесс построим следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, y) = v_0(x, y) = w_0(x, y) = 0; \\ u_{n+1}(x, y) = \psi(y) + \phi(x) - \phi(0) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)v_n(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)w_n(\xi, \eta)] d\eta d\xi + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, u_n(\xi, \eta)) d\eta d\xi; \\ v_{n+1}(x, y) = \phi'(x) + \int_0^y [a(x, \eta)v_n(x, \eta) + b(x, \eta)w_n(x, \eta)] d\eta + \int_0^y f(x, \eta, u_n(x, \eta)) d\eta; \\ w_{n+1}(x, y) = \psi'(y) + \int_0^x [a(\xi, y)v_n(\xi, y) + b(\xi, y)w_n(\xi, y)] d\xi + \int_0^x f(\xi, y, u_n(\xi, y)) d\xi. \end{array} \right.$$

Докажем сходимость этого процесса. Для этого оценим разность между членами последовательностей  $u_n, v_n, w_n$ . Из определения итерации для  $u_n$  и условия (3) теоремы следует, что

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &\leq \int_0^x \int_0^y [|a(\xi, \eta)||v_n(\xi, \eta) - v_{n-1}(\xi, \eta)| + |b(\xi, \eta)||w_n(\xi, \eta) - w_{n-1}(\xi, \eta)|] d\eta d\xi + \\ &+ \int_0^x \int_0^y L|u_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Пусть  $M = \max\{\max |a(x, y)|, \max |b(x, y)|, L\}$  при  $(x, y) \in \{[0; l_1] \times [0; l_2]\}$ . Тогда

$$|u_{n+1} - u_n| \leq M \int_0^x \int_0^y [|v_n(\xi, \eta) - v_{n-1}(\xi, \eta)| + |w_n(\xi, \eta) - w_{n-1}(\xi, \eta)| + |u_n(\xi, \eta) - u_{n-1}(\xi, \eta)|] d\eta d\xi. \quad (4.11)$$

Аналогично, для функций  $v_n, w_n$ :

$$|v_{n+1} - v_n| \leq M \int_0^y [|v_n(x, \eta) - v_{n-1}(x, \eta)| + |w_n(x, \eta) - w_{n-1}(x, \eta)| + |u_n(x, \eta) - u_{n-1}(x, \eta)|] d\eta; \quad (4.12)$$

$$|w_{n+1} - w_n| \leq M \int_0^x [|v_n(\xi, y) - v_{n-1}(\xi, y)| + |w_n(\xi, y) - w_{n-1}(\xi, y)| + |u_n(\xi, y) - u_{n-1}(\xi, y)|] d\xi. \quad (4.13)$$

Заметим, что все элементы итерационного процесса — непрерывные функции. Из этого следует, что функции  $|u_1|, |v_1|, |w_1|$  ограничены некоторой константой  $H$ . Из определения нулевых членов последовательности получаем, что

$$|u_1 - u_0| \leq H; \quad |v_1 - v_0| \leq H; \quad |w_1 - w_0| \leq H.$$

Используя это, оценим разности следующего порядка:

$$|u_2 - u_1| \leq M \int_0^x \int_0^y 3H d\xi d\eta = 3HMxy \leq 3HM \frac{(x+y)^2}{2};$$

$$|v_2 - v_1| \leq M \int_0^y 3H d\eta = 3HM y \leq 3HM(x+y);$$

$$|w_2 - w_1| \leq M \int_0^x 3H d\xi = 3HM x \leq 3HM(x+y).$$

Для доказательства равномерной сходимости наших последовательностей нам надо будет построить некий мажорантный ряд, но сначала докажем следующую оценку:

$$\begin{aligned} |u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y)| &\leq 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^n}{n!}; \\ |v_n(x, y) - v_{n-1}(x, y)| &\leq 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}; \\ |w_n(x, y) - w_{n-1}(x, y)| &\leq 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

где  $K = 2 + l_1 + l_2$ .

Доказательство проведем по индукции.

**База индукции.** При  $n = 2$  оценка верна — доказано выше.

**Предположение индукции.** Предположим, что она верна для  $n$ . Докажем ее для  $n + 1$ .

**Индуктивный переход.** Оценим разность  $|u_{n+1} - u_n|$ , используя предположение индукции:

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &\leq M \int_0^x \int_0^y \left[ 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(\xi + \eta)^n}{n!} + 2 \cdot 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} \right] d\xi d\eta \leq \\ &\leq 3HM^n K^{n-2} \left[ \int_0^x \frac{(\xi + \eta)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_0^y d\xi + 2 \int_0^x \frac{(\xi + \eta)^n}{n!} \Big|_0^y d\xi \right]. \end{aligned}$$

Вычислим интегралы, при этом при подстановке пределов интегрирования в первообразную отбросим нижние подстановки. Их слагаемые отрицательны, поэтому для исходной разности получаем такую оценку сверху:

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &\leq 3HM^n K^{n-2} \left[ \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} + 2 \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \right] = 3HM^n K^{n-2} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left[ \frac{x+y}{n+2} + 2 \right] \leq \\ &\leq \left\{ \frac{x+y}{n+2} + 2 \leq l_1 + l_2 + 2 = K \right\} \leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Итак, предположение индукции для последовательности  $u_n$  доказано. Доказательство оценки для остальных двух последовательностей будет похожим:

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - v_n| &\leq M \int_0^y \left[ 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(\xi+\eta)^n}{n!} + 2 \cdot 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \right] d\eta \leq \\ &\leq \{ \text{отбрасывание отрицательных слагаемых} \} \leq \\ &\leq 3HM^n K^{n-2} \left[ \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} + 2 \frac{(x+y)^n}{n!} \right] = 3HM^n K^{n-2} \frac{(x+y)^n}{n!} \left[ \frac{x+y}{n+1} + 2 \right] \leq \\ &\leq 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Следовательно, и вторая оценка верна. Доказательство третьей оценки совершенно аналогично доказательству второй, поэтому опускается.

Теперь докажем равномерную сходимость последовательностей  $u_n, v_n, w_n$ . Очевидно, что каждый член такой последовательности можно представить как частичную сумму соответствующего ряда:

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &= \sum_{m=1}^n (u_m(x, y) - u_{m-1}(x, y)); \\ v_n(x, y) &= \sum_{m=1}^n (v_m(x, y) - v_{m-1}(x, y)); \\ w_n(x, y) &= \sum_{m=1}^n (w_m(x, y) - w_{m-1}(x, y)). \end{aligned}$$

Для оценки слагаемых первого ряда мы доказали оценку:

$$|u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y)| \leq 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(x+y)^n}{n!} \leq 3HM^{n-1} K^{n-2} \frac{(l_1 + l_2)^n}{n!} = C \frac{a^n}{n!}, \quad C, a = \text{const.}$$

Известно, что ряд вида  $\sum_{n=1}^{\infty} C \frac{a^n}{n!}$  сходится — отсюда по признаку Вейерштрасса получаем равномерную сходимость последовательности  $u_n$ . Из непрерывности слагаемых следует непрерывность предельной функции:

$$u_n(x, y) \Rightarrow u(x, y) \in C\{[0; l_1] \times [0; l_2]\}.$$

Аналогично, для двух других последовательностей:

$$\begin{aligned} v_n(x, y) &\Rightarrow v(x, y) \in C\{[0; l_1] \times [0; l_2]\}; \\ w_n(x, y) &\Rightarrow w(x, y) \in C\{[0; l_1] \times [0; l_2]\}. \end{aligned}$$

Теперь мы имеем право перейти в записи итерационного процесса к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . При этом получим в точности уравнения (4.8)-(4.10), а это и означает существование функций  $u, v, w$ , являющихся решением этой системы уравнений. Из предположения эквивалентности этой системы уравнений исходной задаче на характеристиках [4.4] получаем, что теорема полностью доказана.  $\square$

## 4.9 Единственность решения задачи с данными на характеристиках

Итак, мы доказали существование решения задачи [4.4]. Теперь докажем его единственность — очевидно, это эквивалентно единственности решения системы интегральных уравнений (4.8)-(4.10).

**Теорема 4.6** (единственности решения задачи [4.4]). *Пусть существуют две системы функций  $\{u_1(x, y), v_1(x, y), w_1(x, y)\}$  и  $\{u_2(x, y), v_2(x, y), w_2(x, y)\}$ , являющиеся решениями системы интегральных уравнений (4.8)-(4.10), причем выполнены условия (1)-(4) теоремы 4.5 (существования решения задачи [4.4]). Тогда функции*

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y), \quad V(x, y) = v_1(x, y) - v_2(x, y), \quad W(x, y) = w_1(x, y) - w_2(x, y)$$

тождественно равны нулю в  $\Pi_{l_1 l_2} = \{[0; l_1] \times [0; l_2]\}$ . (То есть системы функций совпадают.)

*Доказательство.* Итак,  $u_1, u_2$  — решения (4.8):

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \psi(y) + \phi(x) - \phi(0) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)v_1(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)w_1(\xi, \eta)] d\eta d\xi + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, u_1(\xi, \eta)) d\eta d\xi; \\ u_2(x, y) &= \psi(y) + \phi(x) - \phi(0) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)v_2(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)w_2(\xi, \eta)] d\eta d\xi + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, u_2(\xi, \eta)) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Вычитая одно из другого и применяя условие Липшица для функции  $f(x, y, p)$ , получим:

$$\begin{aligned} |u_2 - u_1| &\leq \int_0^x \int_0^y [M|v_2(\xi, \eta) - v_1(\xi, \eta)| + M|w_2(\xi, \eta) - w_1(\xi, \eta)| + M|u_2(\xi, \eta) - u_1(\xi, \eta)|] d\eta d\xi \implies \\ |U(x, y)| &\leq \int_0^x \int_0^y [M|V(\xi, \eta)| + M|W(\xi, \eta)| + M|U(\xi, \eta)|] d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Аналогичный результат справедлив для  $V(x, y), W(x, y)$ :

$$\begin{aligned} |V(x, y)| &\leq \int_0^y [M|V(x, \eta)| + M|W(x, \eta)| + M|U(x, \eta)|] d\eta; \\ |W(x, y)| &\leq \int_0^x [M|V(\xi, y)| + M|W(\xi, y)| + M|U(\xi, y)|] d\xi. \end{aligned}$$

Докажем, что из этого следует равенство нулю этих функций в  $\Pi_{l_1 l_2}$ . Для начала покажем, что они равны нулю в прямоугольнике  $\Pi_{x_0 y_0} = \{[0; x_0] \times [0; y_0]\}$ , где  $x_0, y_0$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} 3x_0 y_0 M < 1; \\ 3x_0 M < 1; \\ 3y_0 M < 1. \end{cases}$$

Положим

$$\bar{U} = \max_{\Pi_{x_0 y_0}} |U(x, y)|; \quad \bar{V} = \max_{\Pi_{x_0 y_0}} |V(x, y)|; \quad \bar{W} = \max_{\Pi_{x_0 y_0}} |W(x, y)|.$$

Не ограничивая общности, пусть  $\bar{U} \geq \max\{\bar{V}, \bar{W}\}$ . Тогда из неравенства (4.14) следует, что

$$\begin{aligned} |U(x, y)| &\leq M \int_0^x \int_0^y [\bar{U} + \bar{V} + \bar{W}] dy dx \leq 3Mx_0 y_0 \bar{U}, \quad (x, y) \in \Pi_{x_0 y_0} \implies \\ \implies \bar{U} &\leq 3Mx_0 y_0 \bar{U}. \end{aligned}$$



Так как  $3x_0y_0M < 1$ , то это выполняется только при  $\bar{U} = 0$ . Из этого, очевидно, следует, что функции  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  тождественно равны нулю в  $\Pi_{x_0y_0}$ .

На следующем шаге мы берем такое  $x_1$ , что

$$\begin{cases} 3(x_1 - x_0)y_0M < 1; \\ 3(x_1 - x_0)M < 1; \\ 3y_0M < 1. \end{cases}$$

и рассматриваем прямоугольник  $\Pi_{x_1y_0}$ . Тогда неравенство (4.14) переписется так:

$$|U(x, y)| \leq M \int_{x_0}^x \int_0^y [\bar{U} + \bar{U} + \bar{U}] dy dx, \quad (x, y) \in \Pi_{x_1y_0}.$$

Действуя аналогично предыдущему шагу, получим, что функции  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  тождественно равны нулю в  $\Pi_{x_1y_0}$ . Продолжая подобные рассуждения, можно за конечное число шагов показать равенство нулю этих функций в  $\Pi_{l_1y_0}$ , а затем и в  $\Pi_{l_1l_2}$ .

Теорема доказана.  $\square$

## 4.10 Сопряженный дифференциальный оператор

Будем действовать в пространстве  $\mathbf{E}^n$ . Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — набор переменных, а  $u(x)$  — функция от  $n$  переменных.

**Определение.** Дифференциальный оператор  $L[u]$  от некоторой функции  $u(x) \in C^2(\mathbf{E}^n)$  определяется как

$$L[u] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u, \quad (4.15)$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i \in C^2(\mathbf{E}^n)$ ,  $c$  — некоторые функции. Так как частные производные второго порядка в данном случае не зависят от порядка дифференцирования, то принимается соглашение:  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ .

**Определение.** Каждому дифференциальному оператору  $L[u]$  можно поставить во взаимно однозначное соответствие так называемый **сопряженный оператор** к  $L$ :

$$M[v] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}(x) v)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n (b_i(x) v)_{x_i} + c(x) v.$$

**Определение.** Дифференциальный оператор  $L[u]$  называется **самосопряженным**, если  $L[u] = M[u]$ . Нам понадобится следующая формула:

$$vL[u] - uM[v] = \sum_{i=1}^n (p_i(x))_{x_i}, \quad (4.16)$$

где  $p_i(x) = \sum_{j=1}^n [v a_{ij} u_{x_j} - u (a_{ij} v)_{x_j}] + b_i u v$ .

Для доказательства этой формулы просто подставим выражение для  $p_i(x)$  в правую часть и перегруппи-

пируем слагаемые:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (p_i(x))_{x_i} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [va_{ij}u_{x_j x_i} - u(a_{ij}v)_{x_j x_i}] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(va_{ij})_{x_i} u_{x_j} - u_{x_i} (a_{ij}v)_{x_j}] + \\
&+ \sum_{i=1}^n [vb_i u_{x_i} + u(b_i v)_{x_i}] + cuv - cuv = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n va_{ij}u_{x_j x_i} + \sum_{i=1}^n vb_i u_{x_i} + cuv - \\
&- \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u(a_{ij}v)_{x_j x_i} + \sum_{i=1}^n u(b_i v)_{x_i} + cuv \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(va_{ij})_{x_i} u_{x_j} - u_{x_i} (a_{ij}v)_{x_j}] = \\
&= vL[u] - uM[v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(va_{ij})_{x_i} u_{x_j} - u_{x_i} (a_{ij}v)_{x_j}].
\end{aligned}$$

Оставшаяся двойная сумма равна нулю — это следует из симметричности индексов слагаемых. Отсюда получаем, что формула (4.16) верна.

### Связь с сопряженным оператором из линейной алгебры

В линейной алгебре определением для оператора  $A^*$ , сопряженного к оператору  $A$ , было соотношение:

$$(Au, v) = (u, A^*v)$$

которое должно было выполняться для любых  $u, v$  из  $\mathbf{E}^n$ .

Посмотрим, как согласуется с данным определением наше.

**Пример 1.** Пусть  $\Omega \subset \mathbf{E}^3$ , и скалярное произведение определяется так:

$$(f, g) = \iiint_{\Omega} fg \, d\tau, \quad f, g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}).$$

Тогда для функций  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  и таких, что  $u, v|_{\Sigma} = 0$ , где  $\Sigma$  — граница  $\Omega$ , верно, что

$$(v, L[u]) = (M[v], u).$$

Покажем это:

$$\begin{aligned}
(v, L[u]) - (M[v], u) &= \iiint_{\Omega} (vL[u] - uM[v]) \, d\tau = \{(4.16)\} = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \right) d\tau = \\
&= \{\vec{P} = (p_1, p_2, p_3)\} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{P} \, d\tau = \{ \text{формула Остроградского-Гаусса (5.3)} \} = \\
&= \iint_{\Sigma} (\vec{P}, \vec{n}) \, d\sigma = \{\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)\} = \iint_{\Sigma} (p_1 n_x + p_2 n_y + p_3 n_z) \, d\sigma = 0
\end{aligned}$$

—  $p_i|_{\Sigma} = 0$  в силу граничного условия для  $u, v$ .

**Пример 2.** Простейшим примером самосопряженного оператора является оператор Лапласа, к примеру, в  $\mathbf{E}^3$ :

$$L[u] = \Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}.$$

Легко проверить, что  $M[v] = \Delta v$ .

## 4.11 Метод Римана

Рассмотрим в  $\mathbf{E}^2$  для функции  $u(x, y)$  такой дифференциальный оператор:

$$L[u] = u_{xy} + a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) + c(x, y)u(x, y). \quad (4.17)$$

По определению, сопряженный к нему имеет следующий вид:

$$M[v] = v_{xy} - (a(x, y)v)_x - (b(x, y)v)_y + c(x, y)v.$$

Таким образом, в обозначениях формулы (4.15):  $a_{11} = a_{22} = 0$ ,  $a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}$ ,  $b_1 = a$ ,  $b_2 = b$ ,  $c = c$ . Легко видеть, что  $p_1$ ,  $p_2$ , используемые в (4.16), считаются так:

$$p_1 = \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv;$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv.$$

Пусть теперь на плоскости  $OXY$  задана кривая  $y = f(x)$ , причем  $\forall x f'(x) < 0$ . График ее обозначим  $L_f$ .

Будем обозначать символом  $R_f^+$  полуплоскость, точки которой лежат выше графика функции  $f(x)$ :  $R_f^+ = \{(x, y) : y > f(x)\}$ .

Рассмотрим такую краевую задачу (как нетрудно заметить, это задача на уравнение гиперболического типа): **[4.5]**

$$\begin{cases} (1) & L[u] = F(x, y), & (x, y) \in R_f^+; & (L[u] \text{ определяется формулой (4.17)}) \\ (2) & u(x, y) = \phi(x, y), & (x, y) \in L_f; \\ (3) & \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \psi(x, y), & (x, y) \in L_f. \end{cases}$$

Будем искать ее решение в  $R_f^+$ . Покажем, как его можно вычислить в произвольной точке  $A(x_0, y_0) \in R_f^+$ .

Для этого соединим точку  $A$  с кривой  $L_f$  отрезками, параллельными осям координат, получив на пересечении точки  $B(x_0, y_0)$  и  $C(x_0, y)$ . Обозначим символом  $L$  контур, образованный отрезками  $AB$  и  $AC$  и дугой  $BC$ , а внутренность его — символом  $D$ .

Воспользуемся формулой (4.16) для сопряженного дифференциального оператора  $M[v]$  ( $v$  — некоторая функция):

$$\iint_D (vL[u] - uM[v]) ds = \iint_D \left( \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) ds.$$

Для преобразования правой части воспользуемся формулой Грина для криволинейных интегралов:

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) ds.$$

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D (vL[u] - uM[v]) ds &= \int_L -p_2 dx + p_1 dy = \{ \text{Части контура параллельны осям координат} \} = \\ &= \int_B^C \left\{ \left[ \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv \right] dy - \left[ \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv \right] dx \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \int_C^A \left[ \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv \right] dy + \int_B^A \left[ \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv \right] dx. \quad (4.18)$$

Как известно,  $(vu)_y = vu_y + uv_y$ ;  $(vu)_x = vu_x + uv_x$ . Используя эти формулы, преобразуем два последних интеграла в (4.18):

$$\begin{aligned} & \int_C^A \left[ \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv \right] dy + \int_B^A \left[ \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv \right] dx = \\ & = \underbrace{\int_C^A \left[ \frac{1}{2}(uv)_y - uv_y + auv \right] dy}_{I_{CA}} + \underbrace{\int_B^A \left[ \frac{1}{2}(vu)_x - uv_x + buv \right] dx}_{I_{BA}} \end{aligned}$$

До этого мы определяли функцию  $v$  просто как дважды непрерывно дифференцируемую. Теперь потребуем, чтобы  $M[v] = 0$ , а точнее, чтобы она являлась решением такой задачи:

$$\begin{cases} (4) & v_{xy} - (a(x, y)v)_x - (b(x, y)v)_y + c(x, y)v = 0, \quad x \leq x_0, y \leq y_0; \\ (5) & v(x_0, y) = \exp\left\{ \int_x^y a(x_0, s) ds \right\}, \quad y \leq y_0; \\ (6) & v(x, y_0) = \exp\left\{ \int_{x_0}^x b(s, y_0) ds \right\}, \quad x \leq x_0. \end{cases}$$

Это задача с данными на характеристиках вида [4.4]. В предыдущих разделах было показано, что существует и единственная функция  $v(x, y)$ , являющаяся ее решением. Будем считать, что она нам известна, и будем использовать именно эту функцию.

Вернемся к выражению (4.18), подставив туда функцию  $F(x, y)$  из исходного уравнения (1) для  $u(x, y)$ :

$$\iint_D v(x, y)F(x, y)ds = \int_B^C \left\{ \left[ \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv \right] dy - \left[ \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv \right] dx \right\} + I_{CA} + I_{BA}.$$

Воспользуемся тем, что в интегралах  $I_{CA}$ ,  $I_{BA}$  одна из координат фиксирована. Из условия (4) для  $v(x, y)$  легко получить, что  $v_y - av = 0$  при  $x = x_0$ . Таким образом,

$$I_{CA} = \int_C^A \left[ \frac{1}{2}(uv)_y - uv_y + auv \right] dy = \int_C^A \left[ \frac{1}{2}(uv)_y - u(v_y - av) \right] dy = \frac{1}{2}(uv) \Big|_A - \frac{1}{2}(uv) \Big|_C.$$

Аналогично,  $v_x - bv = 0$  при  $y = y_0$ . Следовательно,

$$I_{BA} = \int_B^A \left[ \frac{1}{2}(uv)_x - uv_x + buv \right] dx = \int_B^A \left[ \frac{1}{2}(uv)_x - u(v_x - bv) \right] dx = \frac{1}{2}(uv) \Big|_A - \frac{1}{2}(uv) \Big|_B.$$

Итак, выражение (4.18) можно переписать так:

$$\iint_D v(x, y)F(x, y)ds = \int_B^C \left\{ \left[ \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv \right] dy - \left[ \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv \right] dx \right\} + uv \Big|_A - \frac{1}{2}(uv) \Big|_C - \frac{1}{2}(uv) \Big|_B.$$

Отсюда легко получить значение функции  $u(x, y)$  в точке  $A(x_0, y_0)$ :

$$u(x_0, y_0)v(x_0, y_0) = - \int_B^C \left\{ \left[ \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv \right] dy - \left[ \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv \right] dx \right\} + \\ + \frac{1}{2}(uv) \Big|_C + \frac{1}{2}(uv) \Big|_B + \iint_D v(x, y)F(x, y)ds.$$

Из граничных условий (5),(6) для  $v(x, y)$  следует, что  $v(x_0, y_0) = 1$ . Тогда получаем, что:

$$u(x_0, y_0) = - \int_B^C \left\{ \left[ \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv \right] dy - \left[ \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv \right] dx \right\} + \\ + \frac{1}{2}(uv) \Big|_C + \frac{1}{2}(uv) \Big|_B + \iint_D v(x, y)F(x, y)ds. \quad (4.19)$$

Это и есть окончательная формула для  $u(x_0, y_0)$ . Может показаться, что нам неизвестны частные производные  $u(x, y)$  на контуре. Покажем, что их можно найти из граничных условий (2),(3):

$$\begin{cases} u(x, f(x)) = \phi(x, f(x)); \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, f(x)) = \psi(x, f(x)). \end{cases}$$

Единичный вектор  $\vec{\tau}$  касательной к  $L_f$  имеет следующий вид:  $\vec{\tau} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}; \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right\}$ .

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}.$$

$\frac{\partial u}{\partial \tau}$  находится из следующих преобразований:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, f(x)) = u_x(x, f(x)) + u_y(x, f(x))f'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, y).$$

Как известно,  $\frac{\partial u}{\partial n} = (\vec{n}, \text{gr } u)$ . Единичный вектор нормали к  $L_f$ , ортогональный вектору  $\vec{\tau}$ , считается так:

$$\vec{n} = \left\{ \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}; -\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right\}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

Окончательно, из граничных условий получаем систему для поиска  $u(x, y)$  на контуре  $L$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, f(x)) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} f'(x); \\ \psi(x, f(x)) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}. \end{cases}$$

Ее определитель нигде не равен нулю. Отсюда следует, что  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  существуют и их можно определить однозначно.

Итак, мы обосновали корректность формулы (4.19). Используемый для ее получения метод называется **методом Римана**.

**Замечание.** Формула Даламбера является частным случаем формулы (4.19).

## 4.12 Обобщенные решения

Встречаются случаи, когда решения прикладных задач бывают разрывными. Такие решения нельзя получить стандартными формулами из данного курса, однако их можно представить, к примеру, как предел "обычных" решений.

### Обобщенные решения в форме предельного перехода

**Общий подход.** Пусть функцию  $u$  надо найти из уравнения  $L[u] = 0$ , причем на нее наложены условия в виде некоторых функций  $F$  и  $\Phi$ . Если такая задача не имеет решения (например, из-за того, что  $F \notin C^2$ ,  $\Phi \notin C^2$ ), то мы строим равномерно сходящиеся последовательности:

$$F_n \rightrightarrows F, \quad \Phi_n \rightrightarrows \Phi,$$

где  $F_n \in C^2$ ,  $\Phi_n \in C^2$ . Тогда, если существует решение (функция  $u_n$ ), соответствующее функциям  $F_n$  и  $\Phi_n$ , то в качестве  $u$  берем предел функций  $u_n$ :

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

при условии, что последовательность  $u_n$  равномерно сходится к  $u$ .

**Пример.** Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = \phi(x), & -\infty < x < +\infty; \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Известно, что если  $\phi \in C^2(\mathbf{E})$ ,  $\psi \in C^1(\mathbf{E})$ , то решение задается формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

Теперь пусть в аналогичной задаче функции  $\bar{\phi}, \bar{\psi}$  всего лишь непрерывны — то есть мы не можем воспользоваться формулой Даламбера.

Будем работать в полосе  $0 < t \leq T$ . Потребуем, чтобы  $\bar{\phi} = \bar{\psi} = 0$  вне отрезка  $[-d; d]$ , где  $d$  — некоторая константа. (Такое свойство обозначается как  $\text{supp } \bar{\phi}, \bar{\psi} = [-d; d]$ .)

Предположим, что существуют такие функции  $\phi_n(x), \psi_n(x)$ , что  $\phi_n \in C^2(\mathbf{E})$ ,  $\psi_n \in C^1(\mathbf{E})$ , причем  $\phi_n(x) = \psi_n(x) = 0$  для  $|x| \geq 2d$  и

$$\begin{cases} \phi_n(x) \rightrightarrows \bar{\phi}(x); \\ \psi_n(x) \rightrightarrows \bar{\psi}(x). \end{cases} \quad \text{на отрезке } [-2(d + aT); 2(d + aT)].$$

Для решения задач Коши, соответствующих функциям  $\phi_n$  и  $\psi_n$ , справедлива формула Даламбера:

$$u_n(x, t) = \frac{\phi_n(x - at) + \phi_n(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_n(\xi) d\xi \implies u_n(x, t) \in C^2\{\mathbf{E} \times [0; T]\}.$$

Назовем решением предел таких функций:  $\bar{u}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t)$ .

Определение будет корректным, если мы покажем, что в прямоугольнике  $\Pi = \{(x, t) : -2d - aT \leq x \leq 2d + aT, 0 \leq t \leq T\}$  последовательность  $u_n(x, t)$  равномерно сходится (очевидно, вне его все ее члены тождественно равны нулю). Для этого докажем, что  $u_n$  — фундаментальная последовательность, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \forall m > M, \forall p > 0 \quad |u_{m+p}(x, t) - u_m(x, t)| < \varepsilon \quad \forall (x, t) \in \Pi.$$

Оценим эту разность через формулу Даламбера:

$$|u_{m+p}(x, t) - u_m(x, t)| \leq \frac{|\phi_{m+p}(x+at) - \phi_m(x+at)|}{2} + \frac{|\phi_{m+p}(x-at) - \phi_m(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_{m+p}(\xi) - \psi_m(\xi)| d\xi.$$

Полученную сумму можно сделать меньше любого наперед заданного  $\varepsilon$  — это следует из равномерной сходимости, а, следовательно, и фундаментальности последовательностей  $\phi_n, \psi_n$ .

Отсюда получаем, что

$$u_n(x, t) \rightrightarrows \bar{u}(x, t), (x, t) \in \Pi, \text{ причем } \bar{u}(x, t) \in C[\Pi].$$

Кроме того, так как  $u_n(\pm(2d+aT), t) = 0$ , то  $\bar{u}(\pm(2d+aT), t) = 0$ , и  $\bar{u}(x, t) = 0$  вне  $\Pi$ .

Построенная таким образом функция называется **обобщенным решением в форме предельного перехода**.

Возникает вопрос: единственно ли такое решение (ведь последовательности  $\phi_n, \psi_n$  мы выбирали произвольно)? Для ответа на этот вопрос возьмем любые две пары последовательностей  $\phi_n^1, \phi_n^2$  и  $\psi_n^1, \psi_n^2$  такие, что

$$\begin{cases} \phi_n^1 \rightrightarrows \bar{\phi}, \phi_n^2 \rightrightarrows \bar{\phi}; \\ \psi_n^1 \rightrightarrows \bar{\psi}, \psi_n^2 \rightrightarrows \bar{\psi}. \end{cases}$$

Предположим, что им соответствуют два решения:  $\bar{u}^1(x, t), \bar{u}^2(x, t)$ , являющихся пределами полученных по формуле Даламбера членов последовательностей  $u_n^1$  и  $u_n^2$  соответственно. Докажем, что  $\bar{u}^1(x, t) \equiv \bar{u}^2(x, t)$ . Для этого оценим их разность:

$$|\bar{u}^1(x, t) - \bar{u}^2(x, t)| \leq |\bar{u}^1(x, t) - u_n^1(x, t)| + |u_n^1(x, t) - u_n^2(x, t)| + |\bar{u}^2(x, t) - u_n^2(x, t)|.$$

Первое и третье слагаемые стремятся к нулю в силу равномерной сходимости функций  $u_n^1$  и  $u_n^2$  к  $\bar{u}^1$  и  $\bar{u}^2$  соответственно. Оценим второе, применяя формулу Даламбера:

$$|u_n^1(x, t) - u_n^2(x, t)| \leq \frac{|\phi_n^1(x+at) - \phi_n^2(x+at)|}{2} + \frac{|\phi_n^1(x-at) - \phi_n^2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_n^1(\xi) - \psi_n^2(\xi)| d\xi.$$

Оно также стремится к нулю, так как последовательности  $\phi_n^1, \phi_n^2$  и  $\psi_n^1, \psi_n^2$  сходятся к одним и тем же функциям — к  $\bar{\phi}$  и  $\bar{\psi}$  соответственно. Отсюда получаем равенство  $\bar{u}^1(x, t)$  и  $\bar{u}^2(x, t)$ .

### Обобщенное решение в смысле интегрального тождества

Другим примером применения обобщенных решений может быть случай, когда в уравнении Пуассона

$$\Delta u = -f(x, y, z).$$

функция  $f$  не является дважды дифференцируемой — то есть "нормального" решения нет (т.к. всегда  $\Delta u \in C^2$ ).

**Общий подход.** Пусть в области  $\Omega \subset \mathbf{E}^3$  с границей  $\Sigma$  функция  $u(x_1, x_2, x_3)$  определяется уравнением  $L[u] = F$ , где

$$L[u] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^3 b_i(x) u_{x_i} + c(x) u.$$

Тогда сопряженный к  $L$  оператор задается так:

$$M[v] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (a_{ij}(x)v)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^3 (b_i(x)v)_{x_i} + c(x)v.$$

Будем рассматривать только такие функции  $v$ , что  $v \in C^2(\Omega)$ ,  $\text{supp } v \subset \Omega$  (полностью внутри  $\Omega$ ). Известно, что, если  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , то справедлива формула (4.16):

$$\iiint_{\Omega} (vL[u] - uM[v]) d\tau = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{P} d\tau = \{ \text{формула Остроградского - Гаусса (5.3)} \} = \iint_{\Sigma} (\vec{P}, \vec{n}) d\sigma.$$

Из условий на  $v$  получаем, что функции  $v, v_x, v_y, v_z$ , а, следовательно, и вектор-функция  $\vec{P}$  обращаются в нуль на  $\Sigma$ . Отсюда получаем, что

$$\iiint_{\Omega} (vL[u] - uM[v]) d\tau = 0.$$

Используем, что  $L[u] = F$ :

$$\iiint_{\Omega} vF d\tau = \iiint_{\Omega} uM[v] d\tau. \quad (4.20)$$

Полученное выражение для  $u$  называется **обобщенным решением в смысле интегрального тождества**. Таким образом, мы преобразовали исходное уравнение для  $u$ , "перевосив" требование непрерывной дифференцируемости на функцию  $v$ , потребовав также, чтобы она была не равна нулю лишь в области, лежащей строго внутри  $\Omega$ .



## 5 Приложение. Вспомогательные формулы и определения

**Определение.** Пусть функция  $\phi(x, y, z)$  задана в пространстве  $\mathbf{E}^3$ . Тогда ее **градиентом** называется вектор-функция  $\text{gr } \phi = \{\phi_x, \phi_y, \phi_z\}$ , определенная всюду, где существуют все частные производные функции  $\phi(x, y, z)$ .

**Определение.** Пусть вектор-функция  $\vec{A}(x, y, z)$  имеет вид:

$$\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}.$$

Тогда ее **дивергенцией** называется функция  $\text{div } \vec{A} = P_x + Q_y + R_z$ , определенная всюду, где существуют соответствующие производные.

Пусть функция  $f(t)$  непрерывна на отрезке  $[t_1; t_2]$ . Тогда для нее справедлива **теорема о среднем значении**:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = f(t^*)(t_2 - t_1), \quad (5.1)$$

где  $t^*$  — некоторая точка из этого отрезка.

Пусть функция  $f(x, y, z)$  непрерывна в замкнутой области  $\Omega$ . Тогда для нее справедлива **обобщенная теорема о среднем значении**:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = f(P^*)V_{\Omega}, \quad (5.2)$$

где  $P^*$  — некоторая точка из области  $\Omega$ , а  $V_{\Omega}$  — объем этой области.

Пусть поверхность  $\Sigma$  области  $\Omega$  состоит из конечного числа замкнутых кусков, имеющих в каждой точке касательную, причем любые прямые, параллельные координатным осям, пересекают ее либо в конечном числе точек, либо по конечному числу отрезков. Тогда для функции  $\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ , где  $P, Q, R \in C^1(\bar{\Omega})$  имеет место **формула Остроградского-Гаусса**:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{A} d\tau \quad (5.3)$$

### Слова благодарности

Я выражаю искреннюю благодарность всем тем, кто помог мне в работе над данным конспектом: прежде всего нашему лектору — Денисову Александру Михайловичу, который не просто обеспечил меня материалами, но и помог исправить огромное количество ошибок; моим друзьям: Бекетовой Елене, чей конспект привнес в этот труд множество недостающих формул и пояснений, Пospelову Алексею — за постоянную помощь в решении технических проблем, Кругловой Елене — за моральную поддержку, в которой я так часто нуждался, а также всем тем, кто сподвиг меня на эту работу.

Без вас я бы не справился. Спасибо всем большое!!!

Кроме того, прошу всех, кто найдет еще ошибки и/или неточности в данном материале, сообщить об этом на enlightened@mail.ru. Я не Кнут, деньги платить за это не могу, но благодарен буду.

# Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Классификация уравнений с частными производными второго порядка</b>                                      | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Уравнения параболического типа</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Вывод уравнения теплопроводности в пространстве . . . . .   | 3         |
| 2.2      | Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной. Постановка основных задач . . . . .         | 4         |
| 2.3      | Существование решения первой краевой задачи. Метод разделения переменных . . . . .                          | 5         |
| 2.4      | Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности . . . . .                                     | 9         |
| 2.5      | Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи . . . . .                                       | 10        |
| 2.6      | Единственность решения общей краевой задачи . . . . .   | 12        |
| 2.7      | Существование решения задачи Коши . . . . .   | 13        |
| 2.8      | Единственность решения задачи Коши . . . . .  | 18        |
| 2.9      | Существование решения первой и второй краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой . . . . . | 19        |
| 2.10     | Функция Грина для первой краевой задачи . . . . .   | 21        |
| <b>3</b> | <b>Уравнения эллиптического типа</b>  | <b>24</b> |
| 3.1      | Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка краевых задач. Фундаментальные решения уравнения Лапласа . . . . . | 24        |
| 3.2      | 1-я и 2-я формулы Грина . . . . .   | 25        |
| 3.3      | 3-я формула Грина . . . . .   | 26        |
| 3.4      | Свойства гармонических функций . . . . .  | 27        |
| 3.5      | Принцип максимума для гармонических функций . . . . .   | 28        |
| 3.6      | Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле . . . . .                                   | 29        |
| 3.7      | Единственность решения внешней задачи Дирихле . . . . .   | 30        |
| 3.8      | Внутренняя задача Неймана. Необходимое условие ее разрешимости. Единственность решения . . . . .            | 32        |
| 3.9      | Функция Грина для уравнения Лапласа и ее свойства . . . . .   | 33        |
| 3.10     | Потенциалы простого и двойного слоя. Потенциал двойного слоя с единичной плотностью . . . . .               | 36        |
| 3.11     | Сведение задачи Дирихле к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода . . . . .                            | 40        |
| <b>4</b> | <b>Уравнения гиперболического типа</b>  | <b>42</b> |
| 4.1      | Постановка задач для уравнения колебаний . . . . .  | 42        |
| 4.2      | Формула Даламбера. Существование, устойчивость и единственность решения задачи Коши . . . . .               | 42        |
| 4.3      | Характеристики уравнения в частных производных второго порядка . . . . .                                    | 44        |
| 4.4      | Задача на полупрямой. Метод продолжений . . . . .   | 45        |
| 4.5      | Метод разделения переменных для доказательства существования решения первой краевой задачи . . . . .        | 47        |
| 4.6      | Интеграл энергии. Единственность решения краевых задач для уравнения колебаний . . . . .                    | 51        |
| 4.7      | Задача с данными на характеристиках. Эквивалентная система интегральных уравнений . . . . .                 | 52        |
| 4.8      | Существование решения задачи с данными на характеристиках . . . . .   | 53        |
| 4.9      | Единственность решения задачи с данными на характеристиках . . . . .  | 56        |
| 4.10     | Сопряженный дифференциальный оператор . . . . .   | 57        |
| 4.11     | Метод Римана . . . . .  | 59        |
| 4.12     | Обобщенные решения . . . . .  | 62        |
| <b>5</b> | <b>Приложение. Вспомогательные формулы и определения</b>  | <b>65</b> |