Решалка для первой контрольной по урматам за 2009 год. За ошибки пинать Eledwaine.

1 Классификация уравнений

Имеем уравнение вида

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1}$$

1. Составляем новое уравнение:
   $u_{xx} \to (dy)^2$
   !!! $u_{xy} \to -dxdy$ (знак при a_{12} нужно будет поменять - много ошибок в этом месте!)
   $u_{yy} \to (dx)^2$

   Получаем
   $$a_{11}(dy)^2 \; - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \tag{2}$$

2. Решаем квадратное уравнение относительно $\dfrac{dy}{dx}$:

   (a) $D > 0$ - есть два корня $\Rightarrow$ **гиперболический тип**
   $\dfrac{dy}{dx} = k_1 \Rightarrow \varphi_1(x, y) = c_1 = \xi$
   (c_1 - константа, полученная при интегрировании в процессе решения)
   $\dfrac{dy}{dx} = k_2 \Rightarrow \varphi_2(x, y) = c_2 = \eta$
   Для этого типа после преобразований исходного уравнения должны получить уравнение вида
   $$u_{\xi\eta} - \Phi_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{3}$$
   или, для $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$ $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$
   $$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} - \Phi_2(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{4}$$
   (Хорошая возможность проверить конечный результат - сравнить с тем, что должно получиться)

(b) $D < 0$ - есть два комплексных корня $\Rightarrow$ **эллиптический тип**
Берем любой из корней
$\dfrac{dy}{dx} = k_1 \Rightarrow \varphi_1(x, y) = c_1 = \alpha$
$\xi =$Re α
$\eta =$Im α
Должны получить:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{5}$$

(c) $D = 0$ - один корень$\Rightarrow$ **параболический тип**
$\dfrac{dy}{dx} = k \Rightarrow \varphi(x, y) = c = \xi$
η выбираем произвольно, так чтобы $\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$
(обычно подходит x)
Должны получить:

$$u_{\eta\eta} - \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{6}$$

3. Теперь у нас есть ξ и η - функции от x и y. Соответственно, можем посчитать $\xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}; \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$.
Подставляем их в исходное уравнение $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ (не забыть подставить производные первого порядка - частая ошибка!), используя формулы

$$\mathbf{u_x} = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x$$
$$\mathbf{u_y} = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y$$
$$\mathbf{u_{xx}} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}$$
$$\mathbf{u_{xy}} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + 2u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}$$
$$\mathbf{u_{yy}} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}$$

Приводим слагаемые, сверяем с общим видом нужного результата, если не сходится - повторяем все с начала =)

2 Вывод формулы решения уравнения

Рассмотрим на примере (из контрольной):

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} + bU + f(x,t) \quad 0 < x < l \quad t > 0 && (1) \\ U(x,0) &= \varphi(x) && (2) \\ U_x(0,t) &= 0 && (3) \\ U(l,t) &= 0 && (4) \end{aligned}$$

В (3) и (4) может быть и $U, U; U, U_x; U_x, U_x$ - зависит от варианта

1. Решим однородное уравнение:
   $U_t = U_{xx} + bU$ (остальные условия не изменились)
   Представим U в виде $U = T(t)X(x)$:
   $T'X = TX'' + bTX$
   $(T' - bT)X = TX''$
   $\dfrac{T' - bT}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$

   Решим сначала для X:

   $$X'' + \lambda X = 0 \tag{5}$$

   Из краевых условий (3) и (4) получаем
   $X'(0) = 0$, $X(l) = 0$ (при других условиях соответственно можем получить $X, X; X, X'; X', X'$)

   (a) Рассмотрим случай $\lambda > 0$
   $X'' + \lambda X = 0$
   $\alpha^2 + \lambda = 0$
   $\alpha = \pm i\sqrt{\lambda}$
   $X = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$
   $X'(0) = 0 \Rightarrow c_2\sqrt{\lambda}\cos 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$
   $X(l) = 0 \Rightarrow c_1 \cos\sqrt{\lambda}l = 0$
   $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}$

   $$X(x) = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{l}x \tag{6}$$

   Здесь в зависимости от условий (3) и (4) могли получить и другой результат:

ВОЛШЕБНАЯ ТАБЛИЧКА

$$\begin{cases} U(0,t) & I \\ U(l,t) & I \end{cases} \Rightarrow \quad X = \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$$

$$\begin{cases} U(0,t) & I \\ U_x(l,t) & II \end{cases} \Rightarrow \quad X = \sin\frac{\frac{\pi}{2}+\pi n}{l}x \qquad \sqrt{\lambda} = \frac{\frac{\pi}{2}+\pi n}{l}$$

$$\begin{cases} U_x(0,t) & II \\ U(l,t) & I \end{cases} \Rightarrow \quad X = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+\pi n}{l}x \qquad \sqrt{\lambda} = \frac{\frac{\pi}{2}+\pi n}{l}$$

$$\begin{cases} U_x(0,t) & II \\ U_x(l,t) & II \end{cases} \Rightarrow \quad X = \cos\frac{\pi n}{l}x \qquad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$$

(b) Рассмотрим случай $\lambda = 0$
$X'' = 0$, из условий (3) и (4) $X'(0) = 0$ и $X(l) = 0 \Rightarrow$ только вырожденное решение - нам не подходит.

(c) Рассмотрим случай $\lambda < 0$
$X'' + \lambda X = 0$
$\alpha^2 + \lambda = 0$
$\alpha = \pm\sqrt{-\lambda}$
$X = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$
Из условий (3) и (4):
$X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1(-\sqrt{-\lambda}) + c_2\sqrt{-\lambda} = 0$
$X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}l}$
Так как $e^{-\sqrt{-\lambda}l} > 0$ и $e^{-\sqrt{\lambda}l} > 0$, то также только вырожденное решение. В итоге нам подошли только значения $\lambda > 0$.

2. Решим для T при $\lambda > 0$
$T' - bT + \lambda T = 0$
$T' + (b-\lambda)T = 0$
$\frac{T'}{T} = (b-\lambda)$
$T = ce^{(b-\lambda)t}$
Имеем $U(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n e^{(b-\lambda_n)t} X_n$

3. Вернемся к исходному уравнению. Представим $c_n = c_n(t)$
Для каждого n распишем уравнение:

$c_n' e^{(b-\lambda_n)t} X_n + c_n(b-\lambda_n) e^{(b-\lambda_n)t} X_n =$
$= c_n e^{(b-\lambda_n)t} X_n(-\lambda_n) + b c_n e^{(b-\lambda_n)t} X_n + f_n X_n$
f_n - коэффициент из разложения f в ряд Фурье по $X_n : f = \sum\limits_0^\infty f_n X_n$
$c_n' e^{(b-\lambda_n)t} = f_n$
$c_n' = f_n e^{(\lambda_n - b)t}$
$c_n = \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{(\lambda_n - b)\tau} d\tau + \tilde{c}$
Так как $U(x,0) = \varphi(x)$ (из (2)), то
$c_n = \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{(\lambda_n - b)\tau} d\tau + \varphi_n$ $(\varphi = \sum\limits_0^\infty \varphi_n X_n)$

Ответ: $U(x,t) = \sum\limits_{n=0}^\infty (\int\limits_0^t f_n(\tau) e^{(\lambda_n - b)\tau} d\tau + \varphi_n) e^{(b-\lambda_n)t} X_n$

3 Решение уравнения

Решим уравнение вида

$$
\begin{aligned}
u_t &= a^2 u_{xx} + f(x,t) && (1)\\
u(x,0) &= \varphi(x) && (2)\\
u(0,t) &= \mu_1(t) && (3)\\
u(l,t) &= \mu_2(t) && (4)
\end{aligned}
$$

Вместо (3) и (4) могут быть условия с производными, соответственно должно поменяться и решение.

1. Сделаем редукцию:
   Если граничные условия не II II (не две производные):
   $u = v + w \qquad\qquad w = a(t)x + b(t)$
   Подставляем в граничные условия:
   $u(0,t) = \mu_1(t) \quad \Rightarrow \quad b(t) = \mu_1(t)$ или
   $u_x(0,t) = \mu_1(t) \quad \Rightarrow \quad a(t) = \mu_1(t)$
   $u(l,t) = \mu_2(t) \quad \Rightarrow \quad a(t)l + b(t) = \mu_2(t)$ или
   $u_x(l,t) = \mu_2(t) \quad \Rightarrow \quad a(t) = \mu_2(t)$

   Если граничные условия II II (две производные):
   $w(t) = a(t)x^2 + b(t)x$
   Подставляем в граничные условия:

$u_x(0,t) = \mu_1(t) \quad \Rightarrow \quad b(t) = \mu_1(t)$
$u_x(l,t) = \mu_2(t) \quad \Rightarrow \quad 2a(t)l + b(t) = \mu_2(t)$
$\Rightarrow$ Нашли $a(t), b(t)$

2. Модифицируем исходную задачу:
   $v(x,0) = \varphi(x) - w(t=0)$
   $v(0,t) = 0$
   $v(l,t) = 0$
   $v_t + w_t = v_{xx} + f(x,t)(+w_{xx}$, если граничные условия были II II и $w = a(t)x^2 + b(t))$
   В итоге получим новую задачу.

$$v_t = a^2 v_{xx} + f^*(x,t) \qquad (5)$$
$$v(x,0) = \varphi^*(x) \qquad (6)$$
$$v(0,t) = 0 \qquad (7)$$
$$v(l,t) = 0 \qquad (8)$$

3. Решим новую задачу.
   (в контрольной, скорее всего, $f^*(x,t)$ представляет собой некую сумму sin и cos)
   Поскольку предыдущую задачу мы расписали подробно, для решения этой воспользуемся табличкой. $v = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n X_n$ (X_n берем из таблички в соответствии с граничными условиями)
   В контрольной работе обычно остаются несколько n, для которых f_n из разложения Фурье $f(x,t)$ по X_n не равны 0. Для каждого такого n решаем уравнение
   $v_n' = v_n(-\lambda_n)$ **(не $-\sqrt{\lambda_n}$!!!)** $+f_n$ **(не $f_n X_n$!!!)**

   (a) $v_n' = v_n(-\lambda_n)$
   $\dfrac{v_n'}{v_n} = -\lambda_n$
   $v_n = ce^{-\lambda_n t}$

   (b) $c = c(t)$
   $c'e^{-\lambda_n t} + ce^{-\lambda_n t}(-\lambda_n) = ce^{-\lambda_n t}(-\lambda_n) + f_n$
   $c'e^{-\lambda_n t} = f_n$
   $c = \int\limits_0^t f_n(\tau)e^{\lambda_n \tau} d\tau + \varphi_n$ (φ_n - из $v_n(0) = \varphi_n$, $\varphi = \sum\limits_0^{\infty} \varphi_n X_n$)

$v_n = (\int\limits_0^t f_n(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau + \varphi_n) e^{-\lambda_n t}$

Ответ: $u = w + \sum v_n X_n$

4 Решение уравнения

Решить уравнение вида

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + u \qquad 0 < x < \pi & (1) \\ u(x,0) &= \varphi(x) & (2) \\ u(0,t) &= 0 & (3) \\ u(l,t) &= 0 & (4) \end{aligned}$$

Вместо условий (3) и (4), опять же, могут быть и условия с производными. Решать можем двумя путями:

1. По формуле $u(x,t) = \sum\limits_0^\infty u_n(t) X_n(x)$, где X_n и λ_n берутся из таблички в соответствии с (3) и (4), а $u_n = e^{(1-\lambda_n a^2)t} \varphi_n$ (эту формулу легко получить из ответа ко 2 задаче), $\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi$, φ_0 лучше рассмотреть отдельно, чтобы не получилось $n = 0$ в знаменателе.

2. Или сделаем замену $u = e^{bt} v$:
   $b e^{bt} v + e^{bt} v_t = a^2 e^{bt} v_{xx} + e^{bt} v$
   Выберем $b = 1$, чтобы сократились слагаемые с v
   $u = e^t v$
   Новая задача:

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} & (5) \\ v(x,0) &= \varphi(x) & (6) \\ v(0,t) &= 0 & (7) \\ v(\pi,t) &= 0 & (8) \end{aligned}$$

   $v = \sum\limits_0^\infty v_n X_n$
   $v_n = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t}$
   В итоге $u = v e^t = \varphi_n e^{(1-\lambda_n a^2)t}$, что совпало с формулой из 1 (надеюсь, так можно решать =))

5 Опять решение уравнения

Тут вроде как несколько вариантов задачек:

1. Уравнение

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty && (1) \\ u(x,0) &= \begin{cases} u_0 & , x \in [a,b] \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases} && (2) \end{aligned}$$

   Решаем с помощью функции Грина
   $u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})\varphi(\xi)d\xi = \dots$
   $\varphi(\xi)$ в нашем случае - u_0 или 0.
   Далее делаем замену переменной, чтобы получить интеграл вида $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-x^2}dx = \Phi(z)$
   $\dots = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_a^b exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})d\xi = \{z = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\} =$
   $\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x+a}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+b}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz = \frac{u_0}{2}\Big(\Phi(\frac{x+b}{2a\sqrt{t}}) - \Phi(\frac{x+a}{2a\sqrt{t}})\Big)$

2. Еще уравнение

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x,t) && (3) \\ u(x,0) &= \varphi(x) && (4) \end{aligned}$$

   Причем $f(x,t)$ - что-то $^*\cos$ или $\sin$, как и $\varphi(x)$
   Разбиваем на две задачи:

   (a) $u_t = u_{xx} + f^*(t)(cos$ или $sin)$
   $u(x,0) = 0$
   Ищем решение в виде $g(t) * (cos$ или sin - то, что было в $f(x,t))$ - подставляем в текущую задачу, решаем относительно $g(t)$
   $u_1 = g(t) * (cos$ или $sin)$.

   (b) $u_t = u_{xx}$
   $u(x,0) = \varphi(x)$
   Аналогично ищем $u_2 = g(t) * (cos$ или sin - то, что было в $\varphi(x))$.

$u = u_1 + u_2$

3. И еще одно

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{5}$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{6}$$

Если U - решение (5) без начального условия, то
$u = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2ct}} exp\Big(\frac{-cx}{1+4a^2ct}\Big)\, U\Big(\frac{x}{1+4a^2ct}; \frac{t}{1+4a^2ct}\Big)$

c находим из начального условия.