§ 2. Постановка начально-краевых задач.

Подводя итог, можно поставить общую задачу:

$C(M)\cdot\rho(M)\cdot u_t = div(k(M)\cdot grad\, u)+F(M,t)$,

$M\in\Omega,\quad t>0$,

$u(M,0)=\varphi(M),\quad M\in\overline{\Omega}=\Omega\cup S$,

$\alpha(P)\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\ge 0$,

начально-краевая задача будет представлена так:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(0,l),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in[0,l],$$

I краевая задача: $u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad t\ge 0$,

II краевая задача: $u_x(0,t)=\nu_1(t),\quad u_x(l,t)=\nu_2(t),\quad t\ge 0$,

III краевая задача:

$u_x(0,t)-h_1u(0,t)=\eta_1(t),\quad u_x(l,t)+h_2u(l,t)=\eta_2(t),\quad t\ge 0$;

$h_1=const>0,\ h_2=const>0$. Граница $S:\{x=0,x=l\}$.

Тогда получим задачу на всей числовой оси:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(-\infty,\infty),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(-\infty,\infty).$$

полубесконечной оси:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(0,\infty),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,\infty),$$

I краевая задача: $u(0,t)=\mu(t),\quad t\ge 0$,

II краевая задача: $u_x(0,t)=\nu(t),\quad t>0$,

III краевая задача: $u_x(0,t)-hu(0,t)=\eta(t),\quad t\ge 0;\quad h>0$.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности ставится следующим образом:

$$u_t=a^2\Delta u+f(M,t),\quad (M,t)\in Q, \tag{2.1}$$
$$u(M,0)=\varphi(M),\quad M\in\overline{\Omega}, \tag{2.2}$$
$$\alpha\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}+\beta u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\in[0,\infty) \tag{2.3}$$
$$\alpha+\beta>0,\quad \alpha\ge 0,\quad \beta\ge 0.$$

Определение. Классическим решением начально-краевой задачи (2.1) – (2.3) называется функция $u(M,t)$, $u(M,t)\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{2,1}(Q)$, непрерывная в цилиндре $\overline{Q}$, имеющая непрерывные производные первого порядка по t и второго порядка по координатам точки M в цилиндре Q, удовлетворяющая в Q уравнению (2.1), начальному условию (2.2) и краевому условию (2.3).

§ 3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы сравнения.

Теорема (принцип максимума).
Решение уравнения теплопроводности
$u_t=a^2\cdot\Delta u,\quad (M,t)\in Q_T$,
непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, большие, чем значения при $t=0$ или на границе S области Ω.

Теорема. Решение уравнения теплопроводности $u_t=a^2\cdot\Delta u,\quad (M,t)\in Q_T$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, меньшие, чем значения при $t=0$ или на границе S области Ω.

Следствие. Из доказанных теорем следует принцип экстремума: значения функции $u(M,t)$ для всех точек $(M,t)\in\overline{Q}_T$ лежат между максимальным и минимальным значениями функции на границе, т.е.

$$\min\Big\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;\,t\in[0,T]}{u(P,t)}\Big\}\le u(M,t)\le\max\Big\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S,\,t\in[0,T]}{u(P,t)}\Big\}.$$

Теорема сравнения 1. Пусть функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t=a^2\cdot\Delta u$, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $u_1(M,0)\ge u_2(M,0),\quad M\in\overline{\Omega}$, и $u_1(P,t)\ge u_2(P,t),\quad P\in S,\quad t\in[0,T]$. Тогда $u_1(M,t)\ge u_2(M,t)$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Теорема сравнения 2. Пусть функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t=a^2\cdot\Delta u$, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $|u_1(M,0)-u_2(M,0)|\le\varepsilon,\quad M\in\overline{\Omega}$, и $|u_1(P,t)-u_2(P,t)|\le\varepsilon,\quad P\in S,\quad t\in[0,T]$. Тогда $|u_1(M,t)-u_2(M,t)|\le\varepsilon$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

§ 4. Единственность и устойчивость решения первой начально – краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводнос:

$$u_t=a^2\Delta u+f(M,t),\quad (M,t)\in Q_T \tag{4.1}$$
$$u(M,0)=\varphi(M),\quad M\in\overline{\Omega} \tag{4.2}$$
$$u(P,t)=\mu(P,t),\quad P\in S,\quad t\in[0,T] \tag{4.3}$$

Теорема единственности решения.

Задача (4.1) – (4.3) может иметь только одно классическое решение.

Определение. Решение задачи (4.1) – (4.3) называется устойчивым, если малым изменениям начальных и граничных условий соответствует малое изменение решения.

Теорема об устойчивости решения.

Классическое решение задачи (4.1) – (4.3) устойчиво по начальным и граничным условиям.

§ 5. Метод разделения переменных для доказательства существования решения начально – краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

Лемма (обобщенный принцип суперпозиции). Пусть $u_n(x,t)$, $n=1,2,3,\dots$, – частные решения линейного однородного дифференциального уравнения $L[u_n]=0$, и все дифференциальные операции над функцией $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t)$ можно проводить путём почленного дифференцирования ряда. Тогда функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $L[u]=0$.

Теорема о рядах Фурье.

Пусть функция $F(x)$, заданная на отрезке $x\in[-l,l]$, периодически продолжена на всю числовую ось с периодом $2l$. Если $F(x)$ имеет на интервале $(-l,l)$ k непрерывных производных, а $(k+1)$ – ая производная кусочно- непрерывна, то сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^k\{|a_n|+|b_n|\}$, где a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $F(x)$ по тригонометрической системе функций $\left\{\cos\frac{\pi n}{l}x,\ \sin\frac{\pi n}{l}x\right\}$:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

$$u_t=a^2u_{xx},\quad x\in\omega_l,\quad t>0, \tag{5.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\overline{\omega}_l, \tag{5.2}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t>0. \tag{5.3}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{5.4}$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,\quad n=1,2,\dots.. \tag{5.5}$$

Теорема о существовании решения. $\overline{\omega}_l=\{x: 0\le x\le l\}$

Пусть функция $\varphi(x)\in C[0,l]$, имеет в области $x\in\overline{\omega}_l$ кусочно – непрерывную производную и $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Тогда задача (5.1) – (5.3) имеет классическое решение, представимое рядом (5.4) с коэффициентами (5.5).

§ 6. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

Постановка задачи:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad (x,t)\in q, \tag{6.1}$$

где $q=\{(x,t):\ x\in R^1, t>0\}$, $\overline{q}=\{(x,t):\ x\in R^1, t\ge 0\}$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in R^1, \tag{6.2}$$

Определение. Классическим решением задачи (6.1) – (6.2) называется функция $u(x,t)$, определённая и непрерывная вместе со своими производными u_t и u_{xx} в q, удовлетворяющая уравнению (6.1) в q, непрерывная по t в $\overline{q}$ и удовлетворяющая условию (6.2).

Теорема единственности.

Задача (6.1) – (6.2) может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{q}$.

§ 7. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

Перейдём к построению решения задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t=a^2u_{xx},\quad (x,t)\in q, \tag{7.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in R^1. \tag{7.2}$$

решение задачи Коши:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi.$$

Определение. Функция $G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ называется функцией Грина или фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Интеграл $u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ называется интегралом Пуассона.

§ 8. Существование решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

Теорема существования решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности.

Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная и ограниченная функция на числовой прямой: $\varphi(x)\in C$, $|\varphi(x)|<M$, $x\in R^1$. Тогда формула $u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ определяет при $(x,t)\in\overline{q}$ классическое решение задачи (7.1) – (7.2).

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi, \tag{9.3}$$

§ 9. Метод функции Грина.

Определение. Функция $G(x,\xi,t)$, определяемая формулой (9.3), называется функцией Грина для первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

§ 10. Интегральные тождества. Доказательства теорем единственности для начально – краевых задач.

В результате получим интегральное тождество:

$$\int_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}dx=\left(a^2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}-a^2\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx. \tag{10.1}$$

$$\iiint_\Omega u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau=a^2\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma-a^2\iiint_\Omega(grad\,u)^2d\tau, \tag{10.2}$$

Теорема.

Если $h_1\ge 0$, $h_2\ge 0$, то третья краевая задача имеет единственное решение.

Теорема.

Если коэффициент $h(P)\ge 0$, $P\in S$, то третья начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в пространственной области Ω имеет единственное классическое решение.

§ 1. Уравнения Лапласа и Пуассона. $\Delta u = 0$, которое называется уравнением Лапласа. При наличии источников тепла получаем уравнение $\Delta u = -f(M)$, которое называется уравнением Пуассона. найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u = -f(M)$ в Ω и граничному условию одного из следующих типов:

I. $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$, (первая краевая задача)

II. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S} = \nu(P)$, (вторая краевая задача)

III. $\alpha \dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta u(P) = \chi(P)$, $P \in S$, (третья краевая

В декартовой системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta_{(x,y,z)} u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

в сферической ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$)

$$\Delta_{(r,\theta,\varphi)} u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

в цилиндрической ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$) –

$$\Delta_{(r,\varphi,z)} u(r,\varphi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

В плоском случае уравнение Лапласа имеет вид $\Delta_{(x,y)} u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в декартовой системе координат, или $\Delta_{(r,\varphi)} u(r,\varphi) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$ – в полярной ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).

§ 2. Гармонические функции. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

Определение. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(M)$, которая в области Ω удовлетворяет уравнению Лапласа, называется гармонической в Ω функцией.

$$R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$u(M, M_0) = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.

Функция $u(M, M_0) = \ln\dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости.

Фундаментальным решением уравнения Лапласа называют такую гармоническую функцию, которая имеет определённого вида особенность в единственной точке M_0.

§ 3. Постановка краевых задач.

Внутренняя задача Дирихле.

Пусть S – замкнутая, достаточно гладкая поверхность, ограничивающая область Ω. Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и принимает на границе S заданные значения: $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$.

Внутренняя задача Неймана.

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, её нормальная производная принимает на границе заданные значения $\left.\dfrac{\partial u(P)}{\partial n}\right|_{P\in S} = \nu(P)$, $P \in S$. $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\nu \in C(S)$.

Внутренняя третья краевая задача.

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, на границе удовлетворяет условию

$\alpha\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta u(P) = \chi(P), P \in S, \alpha + \beta \neq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0.$

$u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\chi \in C(S)$.

Пусть Ω' – область, внешняя к некоторой замкнутой поверхности S.

Внешняя задача Дирихле.

Требуется найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области Ω', непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup S$, принимающую на границе заданные значения $u(M) = \mu(M)$, $M \in S$ и равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности. Стремление к нулю функции $u(M)$ на бесконечности необходимо для единственности решения задачи.

Если рассматривать случай двух переменных, то стремление к нулю функции на бесконечности нужно заменить на условие ограниченности функции на бесконечности.

Внешние краевые задачи II и III типа ставятся аналогично.

§ 4. Первая и вторая формулы Грина. Интегральное представление функции в ограниченной области (третья формула Грина).

Пусть в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью S, заданы две функции $u(M)$ и $v(M)$: $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Функции u, v – произвольные, не обязательно гармонические. Тогда в области Ω справедлива первая формула Грина:

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u\, d\tau = \iint_S v\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\Omega} (grad\, u \cdot grad\, v)\, d\tau . \qquad (4.1)$$

вторую формулу Грина:

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, d\tau = \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma . \qquad (4.3)$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right) d\sigma_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}} d\tau_M , \qquad (4.5)$$

где $M_0 \in \Omega$. Формула (4.5) называется третьей формулой Грина или интегральным представлением функции $u(M)$.

§ 5. Свойства гармонических функций. Формула среднего значения. Принцип максимума гармонической функции.

1. Если функция $u(M)$ гармонична в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью S, то $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$.

2. Формула среднего значения.

Если $u(M)$ – гармоническая функция в области Ω, то для любой точки $M \in \Omega$ имеет место представление $u(M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a^M} u(P)\, d\sigma_P$, где Σ_a^M – сфера радиуса a с центром в точке M, целиком лежащая в Ω, т.е. $\Sigma_a^M \subset \Omega$.

3. Существование всех производных у гармонической функции.

4. Принцип максимума гармонической функции.

Рассмотрим область Ω, ограниченную поверхностью S, $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$.

Теорема.

Пусть функция $u(M)$ гармонична в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Тогда она достигает своего максимального и минимального значения на границе области $\overline{\Omega}$, т.е. $\max\limits_{M\in\overline{\Omega}} u(M) = \max\limits_{M\in S} u(M)$, $\min\limits_{M\in\overline{\Omega}} u(M) = \min\limits_{M\in S} u(M)$.

Следствие.

Если две гармонические функции $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $u(M)\big|_{M\in S} \le v(M)\big|_{M\in S}$, то всюду в Ω $u(M) \le v(M)$.

§ 6. Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле.

Функция $u(M)$ называется решением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, если $u(M)$ определена и непрерывна в $\overline{\Omega}$, гармонична в Ω, а на границе S принимает заданные значения: $u(P)\big|_{P\in S} = \mu(P)$, $\mu \in C(S)$.

Теорема единственности решения задачи Дирихле. Задача Дирихле не может иметь более одного классического решения.

Определение. Задача называется устойчивой, если малым изменениям входной информации соответствует малое изменение решения.

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \|\mu_1 - \mu_2\|_{C(S)} = \max_{P\in S} |\mu_1(P) - \mu_2(P)|,$$

$$\rho(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{M\in\overline{\Omega}} |u_1(M) - u_2(M)|.$$

Определение. Решение задачи Дирихле называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho(\mu_1, \mu_2) < \delta(\varepsilon)$ следует $\rho(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Теорема. Для задачи Дирихле, если $\rho(\mu_1, \mu_2) \le \varepsilon$, то $\rho(u_1, u_2) \le \varepsilon$.

§ 7. Внутренняя задача Неймана в пространстве.

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана:

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega, \qquad (7.1)$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = v(P), \quad P \in S. \qquad (7.2)$$

Определение. Классическим решением задачи Неймана называется функция $u(M)$, которая непрерывна вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные производные второго порядка в открытой области Ω, гармонична в Ω, а её нормальная производная на границе удовлетворяет условию $\frac{\partial u(P)}{\partial n} = v(P)$, $P \in S$.

Теорема.

Решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной, т.е. если $u_1(M)$ и $u_2(M)$ – решения одной и той же задачи Неймана, то $u_1(M) - u_2(M) = const$.

Определение. Классическим решением третьей краевой задачи называется функция $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая условиям (7.3), (7.4).

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. Если функция $h(P)$ неотрицательна всюду на S, не равна тождественно нулю и непрерывна на S, то третья краевая задача не может иметь более одного решения.

§ 8. Внешние краевые задачи в пространстве.

п. 1. Внешняя задача Дирихле.

Рассмотрим область Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S в пространстве R^3. Тогда область $\Omega' = R^3 \setminus \overline{\Omega}$ будет внешней к области Ω в R^3, $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup S$. Поставим внешнюю задачу Дирихле:

найти функцию $u(M)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}'$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в открытой области Ω', принимающую на границе области $\overline{\Omega}'$ заданные значения $u(P)\big|_{P\in S} = \mu(P)$, а на бесконечности равномерно стремящуюся к нулю. $u(M) \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega}')$.

Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле в пространстве. Внешняя задача Дирихле в пространстве R^3 может иметь только одно решение.

п. 2. Регулярность гармонических функций на бесконечности. Формулы Грина в неограниченной области.

Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Определение. Функция $u(M)$, $M \in R^3$, называется регулярной на бесконечности, если при всех достаточно больших r выполнены неравенства

$$|u| \le \frac{A}{r}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad A = const.$$

Обозначим через Ω' область, являющуюся внешней к S. $R^3 = \Omega \cup S \cup \Omega'$.

Теорема. Пусть функции $u(M)$ и $v(M)$ регулярны на бесконечности и $u, v \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega}')$. Тогда для $u(M)$ и $v(M)$ имеет место первая формула Грина.

$$\iiint_{\Omega'} u \Delta v d\tau = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\Omega'} (grad\, u \cdot grad\, v) d\tau. \qquad (8.2)$$

получим вторую формулу Грина:

$$\iiint_{\Omega'} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma. \qquad (8.3)$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right) d\sigma_P -$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'} \frac{\Delta u(M)}{R_{M_0M}} d\tau_M.$$

п. 3. Единственность решений внешней задачи Неймана и третьей краевой задачи.

Пусть снова Ω' – неограниченная область, внешняя к замкнутой поверхности S. В третьей краевой задаче надо найти регулярную гармоническую функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega',$

$u \in C^1(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega'),$

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P),$

$P \in S, \quad h(P) \ge 0, \quad h(P) \in C(S).$

Теорема.

Внешняя третья краевая задача имеет единственное классическое решение, если $h(P) \ge 0$ и не равна тождественно нулю на границе области.

Теорема. Внешняя задача Неймана в R^3 имеет единственное классическое решение.

§ 9. Внешние краевые задачи на плоскости.

Определение. Функция двух переменных $u(x, y)$ называется регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле. Пусть в R^2 имеется ограниченная область D с границей γ и внешней к ней областью D'. $R^2 = D \cup \gamma \cup D'$. Тогда внешняя задача Дирихле заключается в нахождении функции $u(x, y)$, непрерывной в области $\overline{D}' = D' \cup \gamma$, гармоничной в области D', удовлетворяющей условию $u(P) = \mu(P)$, $P \in \gamma$, и ограниченной на бесконечности.

Теорема. Внешняя задача Дирихле на плоскости может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Внешняя задача Неймана:

$\Delta u(M) = 0, \quad M \in D', \quad u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D'),$

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P), \quad P \in \gamma, \quad n$ – нормаль к границе γ в очке P,

функция $u(M)$ регулярна на бесконечности.

Внешняя третья краевая задача:

$\Delta u(M) = 0, \quad M \in D', \quad u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D'),$

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P), \quad P \in \gamma, \quad \eta, h \in C(\gamma),\ n$ – нормаль к границе γ в точке P,

функция $h(P)$ не равна тождественно нулю,

функция $u(M)$ регулярна на бесконечности.

Лемма. Для гармоничных в D' функций, регулярных на бесконечности, справедливы следующие оценки первых производных:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2} \quad \text{при} \quad r > r_0.$$

Теорема. Для функций, гармоничных в области D' на плоскости и регулярных на бесконечности, справедливы формулы Грина:

$\displaystyle\iint_{D'} v\Delta u\, ds = \int_\gamma v\frac{\partial u}{\partial n} dl - \iint_{D'} (grad\, u \cdot grad\, v) ds$ – первая формула Грина,

$\displaystyle\iint_{D'} (v\Delta u - u\Delta v) ds = \int_\gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dl$ – вторая формула Грина.

Теорема единственности решения внешней третьей краевой задачи. Если $h(P) \ge 0$ и $h(P)$ не равна тождественно нулю, то внешняя третья краевая задача на плоскости

$\Delta u(M) = 0, \quad M \in D', \quad u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D'),$

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P), \quad P \in \gamma,$

может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Теорема. Классическое решение внешней задачи Неймана на плоскости, ограниченное и регулярное на бесконечности, определяется с точностью до постоянного слагаемого.

§ 10. Функция Грина задачи Дирихле. Свойства функции Грина.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u(M) = -f(M), \quad M \in \Omega, \quad u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),$$
$$u(P) = \mu(P), \quad P \in S.$$

Запишем интегральное представление решения этой задачи:

Если потребовать, чтобы выполнялось условие $G(M_0, P) = 0, \quad P \in S$, то

$$u(M_0) = -\iint_S u(P) \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n_P} d\sigma_P - \\ - \iiint_\Omega \Delta u(M) G(M_0, M) d\tau_M. \qquad (10.3)$$

Определение. Функция $G(M_0, M)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, если

1. $G(M_0, M) = \dfrac{1}{4\pi R_{M_0 M}} + v(M)$, где функция $v(M)$ гармонична всюду в области Ω;
2. $G(M_0, P) = 0, \quad P \in S$.

Свойства функции Грина.

1. $G(M_0, M) > 0$, если $M, M_0 \in \Omega$.
2. Функция Грина симметрична относительно точек M_0 и M: $G(M_0, M) = G(M, M_0)$.

§ 1. Постановка начально-краевых задач для уравнения колебаний.

Поставим начально – краевую задачу для уравнения колебаний в ограниченной области. Пусть задана ограниченная область Ω с границей S, допускающей применение формул Грина. Задача состоит в определении в цилиндрической области $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0, \infty)$ функции $u(M,t)$, удовлетворяющей уравнению колебаний

$$u_{tt}(M,t) - a^2 \Delta u(M,t) = f(M,t), \\ (M,t) \in Q = \Omega \times (0, \infty), \qquad (1.1)$$

начальным условиям

$$u(M,0) = \varphi(M), \quad u_t(M,0) = \psi(M), \quad M \in \overline{\Omega},$$

и граничным условиям (1.2)

$$\alpha(P) \frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P} + \beta(P) u(P,t) = \chi(P,t), \quad P \in S, t \in [0, \infty), \qquad (1.3)$$

где $\alpha(P) + \beta(P) \neq 0, \alpha(P) \geq 0, \beta(P) \geq 0$.

Определение. Классическим решением начально – краевой задачи называется функция $u(M,t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутой области $\overline{Q}$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытой области Q, удовлетворяющая в Q уравнению колебаний (1.1), в области $\overline{\Omega}$ – начальным условиям (1.2), а на поверхности S при $t \in (0, \infty)$ – граничным условиям (1.3). $u(M,t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$.

§ 2. Задачи Коши для уравнения колебаний на прямой.

п.1. Метод Даламбера.

Сформулируем задачу Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0, \qquad (2.1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^1. \qquad (2.2)$$

Определение. Классическим решением задачи (2.1), (2.2) называется функция $u(x,t)$, определенная при $x \in R^1, t \geq 0$ и непрерывная вместе со своей первой производной по t в области $x \in R^1, t \geq 0$, имеющая непрерывные вторые производные в области $x \in R^1, t > 0$ и удовлетворяющая уравнению (2.1) и начальным условиям (2.2).

Рассмотрим сначала задачу для **однородного** уравнения колебаний и неоднородных начальных условий:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0, \qquad (2.3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^1. \qquad (2.4)$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) называется формулой Даламбера, а метод построения решения задачи (2.3), (2.4) называется методом Даламбера.

п. 2. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^1. Тогда классическое решение задачи Коши (2.3), (2.4) существует, единственно и определяется формулой Даламбера.

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда непосредственной проверкой устанавливаем, что функция $u(x,t)$, представимая формулой Даламбера, является классическим решением задачи. Существование решения доказано.

Теорема устойчивости решения задачи Коши. Пусть функции $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ – начальные данные двух задач Коши

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^1,$$

$$\tilde{u}_{tt}(x,t) = a^2 \tilde{u}_{xx}(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0,$$
$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{\psi}(x), \quad x \in R^1.$$

Пусть они удовлетворяют условиям $|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq \varepsilon$, $x \in R^1$, $\int_\alpha^\beta |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 (\beta - \alpha)$ для любых действительных постоянных α и β и любого $\varepsilon > 0$. Тогда для решений этих задач $u(x,t)$ и $\tilde{u}(x,t)$ при $t \in [0, T]$ выполнено неравенство $|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \leq \varepsilon(1+T), \quad x \in R^1, \quad t \in [0, T]$.

п. 3. Существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний на прямой.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,\quad (2.9)$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in R^1.\quad (2.10)$$

Теорема. Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ в области $x\in R^1$, $t>0$. Тогда задача (2.9), (2.10) имеет решение, оно единственно и определяется формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

§ 3. Построение решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на полупрямой методом продолжений.

Рассмотрим задачи о распространении волн на полупрямой $x\in[0,\infty)$. Эти задачи ставятся следующим образом:

Найти решение уравнения

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0,\quad (3.1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t)=\mu(t)\ \text{ или }\ u_x(0,t)=\nu(t),\quad t\ge 0,\quad (3.2)$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\ge 0.\quad (3.3)$$

Решение каждой из этих двух задач можно представить как сумму решений двух задач: с однородными начальными условиями, но с неоднородным граничным условием, и с неоднородными начальными условиями, но с однородным граничным.

Рассмотрим сначала начально-краевую задачу с однородным условием Дирихле:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0,\quad (3.4)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\ge 0,\quad (3.5)$$

$$u(0,t)=0,\quad t\ge 0.\quad (3.6)$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,\\ x>0,\quad 0<t\le\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz,\\ x>0,\quad t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу с однородным условием Неймана:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0,\quad (3.7)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\ge 0,\quad (3.8)$$

$$u_x(0,t)=0,\quad t\ge 0.\quad (3.9)$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,\\ x>0,\quad 0<t\le\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(z)dz+\int_0^{at-x}\psi(z)dz\right\},\\ x>0,\quad t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

§ 4. Существование решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой с неоднородным краевым условием.

Рассмотрим начально-краевую задачу в области $x\ge 0$ для однородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями и неоднородным краевым условием Дирихле:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad x\ge 0,$$

$$u(0,t)=\mu(t),\quad t\ge 0.$$

Будем искать решение в виде бегущей вправо волны: $u(x,t)=f(x-at)$, где $f(z)$ – достаточно гладкая функция.

$$f(z)=\begin{cases}0,\quad 0<t<\dfrac{x}{a},\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right),\quad t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Аналогичными рассуждениями решается и задача с неоднородным краевым условием Неймана.

§ 5. Начально-краевые задачи для уравнения колебаний в пространстве и на отрезке.

п.1. Единственность решений начально – краевых задач для уравнения колебаний в пространстве.

Теорема единственности решения задачи в пространстве. Задача (1.1) – (1.3) может иметь только одно классическое решение.

п.2. Единственность решений начально – краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

Сформулируем начально – краевую задачу на отрезке:

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,\ (5.2)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,t)=\psi(x),\quad 0\le x\le l,\quad (5.3)$$

$$\left[\alpha_1(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_1(x)u(x,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\chi_1(t),\quad (5.4)$$

$$\left[\alpha_2(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_2(x)u(x,t)\right]\Bigg|_{x=l}=\chi_2(t),\quad t\ge 0.$$

Теорема единственности решения задачи на отрезке. Задача (5.2) – (5.4) может иметь только одно классическое решение.

п. 3. Теоремы существования решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке с граничными условиями I типа:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{5.5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0,\\ \varphi(0)=\varphi(l)=0,\quad \psi(0)=\psi(l)=0. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Метод разделения переменных (этот метод подробно изучается на семинарских занятиях) даёт

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cos\omega_n t+\frac{B_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x\ , \tag{5.8}$$

$$\omega_n=\frac{\pi na}{l},\quad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi,$$

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

Теорема. Пусть начальные данные удовлетворяют следующим условиям: функция $\varphi(x)\in C^2[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную третью производную, функция $\psi(x)\in C^1[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную вторую производную, причём $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$. Тогда существует классическое решение задачи (5.5) – (5.7), представимое формулой (5.8).

$$G(x,\xi,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\omega_n(t-\tau). \tag{5.16}$$

Определение. Функция $G(x,\xi,t-\tau)$, определяемая формулой (5.16), называется функцией Грина или функцией влияния мгновенного точечного импульса на отрезке.