Курс «Основы кибернетики» для студентов специализации 01.02.09.01 (математическое и программное обеспечение вычислительных машин)

Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)

Курс является обязательным для всех студентов, обучающихся по специальности 01.02 – прикладная математика и информатика. При этом объём и, в некоторой степени, программа курса варьируются в зависимости от специализации.

Для студентов 3 курса специализации 01.02.09.01 (320-328 группы) курс «Основы кибернетики» читается в 6 семестре в объёме 48 часов лекций, сопровождаемых 16 часами семинарских занятий. Курс завершается экзаменом, на который выносятся как теоретические вопросы, изложенные на лекциях, так и задачи, рассмотренные на семинарских занятиях.

В течение семестра проводятся 4 основных (по 2 часа) и, возможно, несколько промежуточных (до 1 часа) тестов (контрольных) на знание определений, формулировок утверждений и т.п., а также на умение решать задачи. По их результатам (с учётом посещаемости и работы на лекциях, семинарах) выставляется предварительная оценка, которая играет существенную роль при формировании окончательной оценки на экзамене (см. раздел «О проведении экзамена по курсу «Основы кибернетики»).

Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики.

Аннотация

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С.В. Яблонский, читается на факультете ВМК с первых лет его существования. Он является продолжением курса «Дискретная математика» и посвящён изложению основных моделей, методов и результатов математической кибернетики, связанных с теорией дискретных управляющих систем (УС), с задачей схемной или структурной реализации дискретных функций и алгоритмов.

В нём рассматриваются различные классы УС (классы схем), представляющие собой дискретные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Для базовых классов УС (схем из функциональных элементов, формул, контактных схем, автоматных схем), а также некоторых других типов УС, ставятся и изучаются основные задачи теории УС: задача минимизации ДНФ, задача эквивалентных преобразований и структурного моделирования УС, задача синтеза УС, задача повышения надёжности и контроля УС из ненадёжных элементов и др. Рассматриваются также некоторые вопросы сложности алгоритмов. В программу курса входят классические результаты К. Шеннона, С.В. Яблонского, Ю.И. Журавлева и О.Б. Лупанова, а также некоторые результаты последних лет. Показывается возможность практического применения этих результатов.

Программа

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) и связанные с ней задачи

Единичный куб и функции алгебры логики (ФАЛ), представление ФАЛ с помощью ДНФ. Сокращённая ДНФ и тупиковые ДНФ, их «геометрический» смысл.

Способы построения однозначно получаемых ДНФ (сокращённой, пересечения тупиковых, Квайна, суммы тупиковых). Особенности ДНФ для ФАЛ из некоторых классов. Функция покрытия и алгоритм построения всех тупиковых ДНФ, оценка длины градиентного покрытия. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ, оценки максимальных и типичных значений некоторых параметров ДНФ.

II. Основные классы УС. Оценка числа схем, их структурные представления и эквивалентные преобразования

Различные классы УС (классы схем) как структурные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Основные классы УС – формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ), контактные схемы (КС), – их структура, меры сложности, функционирование, полнота. Некоторые частные случаи и обобщения основных классов, оценка числа схем различных типов.

Эквивалентность схем. Понятие подсхемы и принцип эквивалентной замены. Тождества и связанные с ними эквивалентные преобразования УС. Построение полных систем тождеств для формул, СФЭ и КС. Отсутствие конечной полной системы тождеств для КС.

III. Синтез и сложность УС

Задача синтеза УС, сложность ФАЛ и функция Шеннона. Простейшие методы синтеза схем, реализация некоторых ФАЛ и оценка их сложности. Метод каскадов для КС и СФЭ, метод Шеннона. Мощностные методы получения нижних оценок для функций Шеннона. Асимптотически наилучшие методы синтеза формул, СФЭ и КС. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов и индивидуальных ФАЛ.

Автоматные функции, их реализация схемами из функциональных элементов и элементов задержки, схемы с «мгновенными» обратными связями. Схемы на КМОП-транзисторах, задача логического и «физического» синтеза СБИС.

IV. Надёжность и контроль управляющих систем

Схемы из ненадёжных элементов и их надёжность. Теорема Неймана для СФЭ и повышение надёжности СФЭ с помощью элемента голосования.

Самокорректирующиеся КС и простейшие методы их синтеза. Асимптотически наилучшие методы синтеза КС, корректирующих один обрыв или одно замыкание.

Задача контроля УС, тесты для таблиц. Алгоритм построения всех тупиковых тестов, оценки максимального и типичного значений длины диагностического теста.

V. Некоторые вопросы сложности алгоритмов (в счёт часов курса С. А. Абрамова «Вычислительная сложность алгоритмов»)

Полиномиальная сводимость языков, классы P и NP, теорема Кука.

Предварительный список вопросов к экзамену по курсу «Основы кибернетики» (весенний семестр 2011-2012 уч. года, 320-328 группы, лектор - профессор С.А. Ложкин).

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и разложение Шеннона, критерий единственности ДНФ. См. [1:гл.1,§§2,5].
2. Сокращённая ДНФ и способы её построения [1:гл.1,§3].
3. Тупиковая ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в тупиковые ДНФ и его локальность. См. [1:гл.1,§4].
4. Особенности ДНФ линейных и монотонных ФАЛ. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ. См. [1:гл.1,§§5,6].
5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о «протыкающих» наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ. См. [1:гл.1,§6].
6. Задача минимизации ДНФ. Поведение функций Шеннона и оценки типичных значений для ранга и длины ДНФ. См. [1:гл.1,§7].
7. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и нижние оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров – длины сокращённой ДНФ, числа тупиковых ДНФ [1:гл.1,§§1,3,7]. Теорема Ю.И. Журавлёва о ДНФ сумма минимальных [1:гл.1,§5].

II. Основные классы дискретных управляющих систем. Оценка числа схем, их структурные представления и эквивалентные преобразования

8. Формулы, способы их задания и эквивалентные преобразования [1:гл.1,§1, гл.3,§1]. Оптимизация подобных формул по глубине [1:гл.2,§2].
9. Задача эквивалентных преобразований схем на примере формул. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $Б_0$. См. [1:гл.3,§2].
10. Задание формул графами, схемы из функциональных элементов (СФЭ). Оценка числа формул и СФЭ в базисе $Б_0=\{\&,\vee,\neg\}$. См. [1:гл.2,§§2,3].
11. Эквивалентные преобразования СФЭ, моделирование эквивалентных преобразований формул в классе СФЭ. Моделирование эквивалентных преобразований в различных базисах, теорема перехода. См. [1:гл.3,§§1,3].
12. Контактные схемы (КС) и π-схемы, оценка их числа. Особенности функционирования многополюсных КС. См. [1:гл.2,§§5,6].
13. Эквивалентные преобразования КС. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств. См. [1:гл.3,§4].
14. Полнота системы основных тождеств. Отсутствие конечной полной системы тождеств в классе всех КС. См. [1:гл.3,§5].
15. Операция суперпозиции схем и её корректность. Разделительные КС и лемма Шеннона. См. [1:гл.2,§§1,6].
16. Некоторые модификации и частные случаи основных классов схем (каскадные КС и BDD, КМОП-схемы, вычисляющие программы и др.) [1:гл.2,§§4,7].

III. Синтез и сложность управляющих систем

17. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций. См. [1:гл.4,§1].
18. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем. См. [1:гл.4,§2], [7:§7].

19. Метод каскадов для КС и СФЭ, примеры его применения. Метод Шеннона. См. [1:гл.4,§3].
20. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование ФАЛ переменными. Синтез схем для некоторых дешифраторов и мультиплексоров. См. [1:гл.4,§§6,7].
21. Методы синтеза формул в базисе $Б_0$, поведение функции Шеннона для глубины ФАЛ [1:гл.4,§6].
22. Нижние мощностные оценки функций Шеннона [1:гл.4,§4].
23. Дизъюнктивно-универсальные множества ФАЛ. Асимптотически наилучший метод О.Б. Лупанова для синтеза СФЭ в базисе $Б_0$. См. [1:гл.4,§5].
24. Асимптотически наилучший метод синтеза КС [1:гл.4,§7].
25. Реализация автоматных функций схемами из функциональных элементов и элементов задержки, схемы с «мгновенными» обратными связями. См. [7:§8], [2: часть I, разд. I, гл. 3, §§2-3].
26. Схемы на КМОП-транзисторах и реализация ими простейших функций. Задача логического синтеза СБИС. См. [1:гл.2,§7], [9].

IV. Надёжность и контроль управляющих систем.

27. Самокорректирующиеся КС и методы их построения. Асимптотически наилучший метод синтеза КС, корректирующих 1 обрыв (1 замыкание). См. [4:§7], [2: часть 3, разд. 2, §1].
28. Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста. См. [1:гл.1,§8].

V. Некоторые вопросы сложности алгоритмов.

29. Полиномиальная сводимость языков. Классы P и NP, NP-полнота, формулировка теоремы Кука. Примеры NP – полных проблем. См. [6:§§4.1,4.5-4.8].
30. Доказательство теоремы Кука [6:§4.6].

Типовые задачи к экзамену

I. Задачи на ДНФ.

1. По заданной ФАЛ построить её сокращённую ДНФ, ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых, все тупиковые ДНФ.

II. Задачи на эквивалентные преобразования и структурное моделирование.

1. По заданным эквивалентным формулам или КС построить эквивалентное преобразование, переводящее их друг в друга с помощью основных тождеств.
2. По заданной формуле построить подобную ей формулу минимальной глубины.
3. По заданной формуле с поднятыми отрицаниями построить моделирующую её π-схему и обратно.
4. По данной каскадной КС построить инверсную каскадную КС.

III. Задачи на синтез схем.

1. По заданной ФАЛ с помощью простейших методов, метода каскадов или метода Шеннона построить реализующую её СФЭ или КС.
2. Оценить сверху или снизу сложность конкретной ФАЛ или сложность самой сложной ФАЛ из заданного множества в заданном классе схем.

IV. Задачи на самокоррекцию и тесты.

1. По заданной КС построить эквивалентную ей самокорректирующуюся КС.
2. По заданной таблице или КС и списку её неисправностей построить все тупиковые проверяющие (диагностические) тесты.

План семинарских занятий

Семинар 1 (I нед. – 08.II, II нед. – 15.II)

Представление ФАЛ с помощью ДНФ. Сокращённая ДНФ и методы её построения

Теоретический материал [1: с. 27-35], [5: с. 47, 296-298].

В классе. Из [5]: гл. I – 2.3 (3); гл. IX – 2.1 (1,2), 2.5 (1,5), 2.6 (1,5), 2.3 (1,2), 2.2 (1,2), 2.9 (1,2).

На дом. Из [5]: гл. I – 2.3 (4); гл. IX – 2.1 (3), 2.5 (2,6), 2.6 (2,6), 2.2 (3,4), 2.3 (3,4), 2.9 (6).

Семинар 2 (I нед. – 22.II, II нед. – 29.II)

Ядро и ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых. Построение всех тупиковых ДНФ.

Теоретический материал [1: с. 38-43, 51-55], [5: с. 301-302].

В классе. Из [5, гл. IX]: 3.1 (1, 5), 3.3 (1, 2 – построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых), 3.4 (3), 3.6 (1, 4, 7).

На дом. Из [5, гл. IX]: 3.1 (4, 6), 3.3 (3, 4 – построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых), 3.4 (4), 3.6 (3, 6, 8).

Семинар 3 (I нед. – 07.III, II нед. – 14.III)

Эквивалентные преобразования формул. Оптимизация подобных формул по глубине.

Теоретический материал [1: с. 146-161, 86-90], [4: с. 19].

В классе. Из [4]: 3.1 (1), 3.3 (1, 4), 3.8 (1-3), 3.9 (1); построить формулу минимальной глубины подобную формуле $x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3 \vee x_1\,x_3 \vee \bar{x}_2\,\bar{x}_4\,\bar{x}_5 \vee x_4\,x_5\,x_6$.

На дом. Из [4]: 3.1 (2), 3.3 (3, 6), 3.8 (5-9), 3.9 (2); построить формулу минимальной глубины подобную формуле $x_1 \vee \bar{x}_2\,\bar{x}_3\,\bar{x}_4\,x_5 \vee x_2\,x_3\,x_4 \vee x_4\,x_5 \vee \bar{x}_5\,x_6$.

Семинар 4 (21.III)

Моделирование формул и π-схем. Эквивалентные преобразования КС.

Теоретический материал [1: с.115-117, 169-185].

В классе. Из [4]: по заданной формуле с поднятыми отрицаниями построить моделирующую π-схему и обратно; 4.1 (2, 4, 6-8), 4.3 (1).

На дом. Из [4]: 4.1 (9-12), 4.3 (3).

Семинар 5 (04.IV)

Сложность ФАЛ и простейшие методы синтеза схем. Метод Шеннона.

Теоретический материал [1: с. 186-210].

В классе. Из [5: гл. X]: 1.1 (2, 3, 4, ФАЛ μ_1 – как в классе СФЭ, так и в классе КС, а также ФАЛ $(x_1 \vee x_2)\,x_3 \vee (\bar{x}_1 \vee x_2)\,x_4$ – в классе КС); 2.4 (1); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем; разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

На дом. Из [5: гл. X]: 1.1 (5-7), 2.4 (2); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем; разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

Семинар 6 (18.IV)

Каскадные КС, метод каскадов для КС и СФЭ.

Теоретический материал [1: с. 186-210], [4: с. 49-50].

В классе. Из [5: гл. X]: 2.13 (1, 7), 2.14 (1), 2.14 (5 – как КС и СФЭ) и т.п. Для заданной каскадной КС построить инверсную к ней КС.

На дом. Из [5: гл. X]: 2.13 (2, 6), 2.14 (2), 2.14 (6 – как КС, так и СФЭ). Для заданной каскадной КС построить инверсную к ней КС.

Семинар 7 (I нед. – 02.V, II нед. – 25.IV)

Асимптотически наилучшие методы синтеза, синтез схем для ФАЛ из специальных классов. Синтез самокорректирующихся КС.

Теоретический материал [1, с. 215-216, 222-224].

В классе. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ равных 1 при x_1=1 (КС), класса всех самодвойственных ФАЛ (СФЭ), класса всех ФАЛ

симметричных по первым трем БП (КС), класса операторов из трёх ортогональных ФАЛ (СФЭ). Из [4]: 7.9 (б), 7.10 (1), 7.13 (по книге [4] 2002 года: 7.7 (б), 7.8 (1), 7.11 (1)).
На дом. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ, равных 0 при $x_1=x_2=0$ (КС), класса, состоящего из всех тех ФАЛ, у которых любая подфункция от первых трёх БП линейна, класса операторов из трёх строго ортогональных ФАЛ (СФЭ). Из [4]: 7.9 (в), 7.10 (2), 7.11 (а) (по книге [4] 2002 года: 7.7 (в), 7.8 (2), 7.9 (а)).

Семинар 8 (28.IV)
Тесты для таблиц, тесты для контактных схем.
Теоретический материал: [1: с. 65-72, 51-55], [4: с.32-34, 37-38].
В классе. Из [4]: 5.1 (1, 2 – все тупиковые диагностические тесты), 5.1 (3 – все тупиковые проверяющие тесты), 6.2, 6.4, 6.11 (если хватит времени).
На дом. Из [4]: 5.1 (5 – все тупиковые диагностические тесты, 6 – все тупиковые проверяющие тесты), 6.3, 6.5, 6.14.

Предварительный график проведения основных тестов (контрольных работ)

Раздел I:	тест-контрольная №1 – **12 марта**
Раздел II:	тест-контрольная №2 – **9 апреля**
Разделы III-IV:	тест-контрольная №3 – **5 мая**
	тест-контрольная №4 – **14 мая**

О проведении экзамена по курсу «Основы кибернетики»

Для студентов, имеющих предварительную оценку «5», экзамен проводится в форме собеседования по программе курса на определения, формулировки утверждений и идеи их доказательства, методы решения задач (для данной категории студентов 18 мая планируется провести досрочный экзамен). Для студентов, имеющих предварительную оценку «2», экзамен представляет собой письменный тест-контрольную.

Все остальные студенты (с предварительной оценкой «3-», «3» и «4») получают билет с двумя вопросами и одной задачей и после 15-20 минутной подготовки отвечают на него сначала на уровне определений, формулировок утверждений и идей их доказательства, а также методов решения задач. Затем студент, по усмотрению экзаменатора, должен раскрыть те или иные детали доказательства утверждений из вопросов билета по конспектам или иным источникам, а также полностью или частично решить задачу билета в течение выделенного специально для этого времени. Студенты, набравшие не менее 80% от суммы баллов по задачам тестов-контрольных соответствующего раздела, от решения билетной задачи данного типа освобождаются. Последний этап экзамена представляет собой описанное выше собеседование по другим вопросам или задачам программы.

В соответствии с общими правилами итоговая экзаменационная оценка не может превосходить предварительную оценку больше, чем на один балл. Студент, который имеет предварительную оценку «3» или «4» и не претендует на более высокую итоговую оценку, сдаёт экзамен, как правило, по упрощённой процедуре (в форме собеседования по билету и программе без предварительной подготовки) с целью подтверждения этой оценки.

Дополнительные лекции (консультации)

— **13 февраля**, $10^{\underline{30}}$, ауд. П-6 (вместо лекции В.А. Серебрякова);
— **6, 13, 20, 27 марта**, $14^{\underline{35}}$ и $16^{\underline{20}}$, ауд. П-6 (вместо лекций С.А. Абрамова);
— **4 мая**, $14^{\underline{35}}$, ауд. П-13 (консультация к контрольной №3);
— **11 мая**, $12^{\underline{50}}$, ауд. П-13 (консультация к контрольной №4).

Литература

Основная:

1. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. – М.: МГУ, 2004.
2. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. – М.: Высшая школа, 2007.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
4. Алексеев В.Б., Вороненко А.А., Ложкин С.А., Романов Д.С., Сапоженко А.А., Селезнёва С.Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». – М.: МГУ, 2011.
5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Алексеев В.Б. Введение в теорию сложности алгоритмов. – М.: Изд-во МГУ, 2002.

Дополнительная:

7. Алексеев В.Б., Ложкин С.А. Элементы теории графов, схем и автоматов. – М.: МГУ, 2000.
8. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1974.
9. Ложкин С.А., Марченко А.М. Математические вопросы проектирования СБИС. – http://mathcyb.cs.msu.su (учебники).
10. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: МГУ, 1984.
11. Нигматулин Р.Г. Сложность булевых функций. – М.: Наука, 1991.