Теормин по Основам Кибернетики (1 часть)

created by Кунцьо Степан aka StepLg (321 группа)
created with OpenOffice.org v2.3
date: 21.03.08
version: 0.1
mailto: StepLg@GMail.com

Длина матрицы M — количество ее столбцов.

Ширина матрицы M — количество ее строк.

Покрытие Δ **множества** δ — набор непустых $\{\delta_i\}$ таких, что $\delta=\delta_1\cup\delta_2\cup\ldots\cup\delta_n$, где δ_i — компонента покрытия, а n — длина покрытия.

Разбиение — такое покрытие Δ, которое состоит только из попарно не пересекающихся δ_i

Неприводимое покрытие — такое покрытие Δ, в котором ни одна из компонент не содержится в другой.

Тупиковое покрытие — такое покрытие Δ, в котором ни одна из компонент не содержится в объединении остальных компонент.

Мощность конечного множества A — $|A|$ количество его элементов.

$|A^n|=|A|^n \quad |A^{(n,s)}|=|A|^{(n*s)}$

Число сочетаний — $C_n^k = \dfrac{k!}{n!\,n-k!}$

$n! > (\frac{n}{3})^n$

Формула Стирлинга — $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

Класс τ **-эквивалентности** для отношения τ — максимальное по включению подмножество множества A, состоящее из попарно τ -эквивалентных элементов.

Отношение частичного порядка — отношение, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антсимметричности.

Частично упорядоченное множество (A,τ) — множество, на котором задано отношение частичного порядка τ

Линейно упорядоченное множество (A,τ) — такое множество A, что $\forall a_i, a_j \in A$ следует, что они сравнимы, т.е. $a_i \tau a_j$ или $a_j \tau a_i$

$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — счетный упорядоченный алфавит переменных над множеством A

$P_A=P(X)$ — множество всех функций над A от переменных из X

Несущественная переменная функции $f \in P_A$ — такая переменная x_j что $f(\alpha) = f(\beta)\ \forall \alpha, \beta \in A^n$ таких, что α и β отличаются только по x_j . В противном случае переменная называется **существенной**.

Две **функции** f_1 **и** f_2 **называются равными**, если имеют одни и те же существенные переменные и одинаковым образом отображают A^n , связанную с их существенными переменными на A

$Б$ — **базисное множество** P_A

Существенная функция — функция, все переменные которой являются существенными.

Любая переменная x_j из X считается форумлой глубины 0 над множеством $Б$, которая реализует функцию x_j . Если функция $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in Б$ и для $\forall i \in [1..k]$ определена формула F_i глубины q_i над множеством $Б$, которая реализует функцию f_i из P_A , то запись F вида $F = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ является **формулой** глубины $q = max\{q_1, \ldots, q_k\}$ над $Б$, которая реализует функцию f вида $f = \varphi(f_1, \ldots, f_k)$.

Подформулы — формулы, полученные в процессе индуктивного построения F .

Главные подформулы — формулы $F_1, \ldots F_k$, полученные на последнем шаге индуктивного построения.

Сложность формулы ($L(F)$)— число вхождений в нее функциональных символов (ФС)

Ранг формулы ($R(F)$)— число вхождений в нее символов переменных

Формулы F' **и** F'' **называются равными**, если они реализуют равные функции.

Замыкание множества $Б$ — множество всех функций, реализуемых формулами над $Б$

Множество $Б$ называется **полным**, если его замыкание совпадает с P_A

Двоичный куб (гиперкуб) размерности n — множество B^n , где $B = \{0,1\}$ и $n \in \mathbb{N}$

Расстояние Хэмминга ($\rho(\alpha, \beta)$) — число разрядов, в которых эти наборы отличаются

Совершенная ДНФ (КНФ) — все ее элементарные конъюнкции (элементарные дизъюнкции) существенно зависят от одних и тех же булевых переменных, а их ранг равен числу этих переменных.

Номером $\nu(\alpha)$ набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ считается номером ЭК (ЭД) ранга n от булевых переменных $X(n)$ вида $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ (соответственно $x_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}$), а система из всех таких ФАЛ, упорядоченных по номерам, называется **конъюктивным (соответственно дизъюнктивным) дешифратором порядка** n от булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается через Q_n (соответственно J_n).

Мультиплексорная функция (мультиплексор порядка n):
$$\mu_n(x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_{\nu(\alpha)}$$

$x_1, \ldots, x_n$ — **адресные переменные**.

$y_0, \ldots, y_{2^n-1}$ — **информационные переменные**.

ФАЛ f' **имплицирует (полглощает)** ФАЛ f'', если $f' \to f''$

Импликанта ФАЛ — элементарная конъюнкции, которая имплицирует эту ФАЛ.

Неприводимая ДНФ — ДНФ, покрытие которой неприводимо.

Простая импликанта ФАЛ — такая имликанта, которая не поглощается никакой другой импликантой этой ФАЛ.

Сокращенная ДНФ ФАЛ— дизъюнкция всех простых импликант этой ФАЛ.

Сокращенная ДНФ всегда является неприводимой.

Сокращенной ДНФ соответствует покрытие N_f всеми максимальными по включению гранями множества N_f этой ФАЛ. **Максимальная грань** — компонента этого покрытия.

Пусть $Д_1$ и $Д_2$ — сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а неприводимая ДНФ $Д$ получается из формулы $Д_1 * Д_2$ путем раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $Д$ является сокращенной ДНФ функции $f = f' * f''$

Если неприводимая ДНФ $Д$ получается путем раскрытия скобок и приведения подобных КНФ K ФАЛ f, то $Д$ является сокращенной ДНФ ФАЛ f.

Расширение ДНФ $Д$ — любая ДНФ $Д'$, которую можно получить из $Д$ путем формирования в ней с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности подформул вида $x_i K' \vee \overline{x}_i K''$, применяя к этим подформулам тождества обобщенного склеивания: $x_i K' \vee \overline{x}_i K'' = x_i K' \vee \overline{x}_i K'' \vee K' K''$ и последующего приведения подобных.

Расширение $Д'$ ДНФ $Д$ называется **строгим**, если $Д'$ не содержит элементарных конъюнкций, не являющихся импликантой ни одной из элементарных конъюнкций ДНФ $Д$.

Неприводимая ДНФ является сокращенной ДНФ тогда и только когда, когда она не имеет строгих расширений.

Из любой ДНФ $Д$ ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ путем построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения неприводимой ДНФ, не имеющей строгих расширений.

Тупиковая ДНФ $Д$ ФАЛ f — такая ДНФ, что для любой ДНФ $Д'$, полученной из $Д$ в результате выкидывания букв или целых элементарных конъюнкций из ДНФ $Д$, она реализует некоторую функцию f' отличную от f.

Минимальная ДНФ ФАЛ f — ДНФ, имеющая минимальный ранг среди всех возможных ДНФ, реализующих ФАЛ f.

Кратчайшая ДНФ ФАЛ f — ДНФ, имеющая минимальную длину среди всех возможных ДНФ, реализующих ФАЛ f.

Минимальная ДНФ всегда тупиковая.

Среди кратчайших ДНФ всегда найдется тупиковая.

Ядровая точка ФАЛ f — набор $\alpha \in B^n$ такой, что $\alpha \in N_f$ и α входит только в одну максимальную грань ФАЛ f.

Ядровая грань ФАЛ f — максимальная грань ФАЛ f, содержащая в себе хотя бы одну ядровую точку.

Ядро ФАЛ f — совокупность всех ядровых граней ФАЛ f.

$Д_{\cap T}$ — пересечение всех тупиковых ДНФ ФАЛ f.

$Д_{\sum T}$ — сумма всех тупиковых ДНФ ФАЛ f.

$Д_{\cap T}$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f, которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

Ядровая ФАЛ — такая ФАЛ, все максимальные грани которой являются ядровыми.

ДНФ Квайна ФАЛ f — ДНФ, полученная из сокращенной ДНФ f путем удаления тех элементарных конъюнкций K, для которых грань N_K покрывается ядром f.

ДНФ Квайна включает в себя $Д_{\sum T}$ ФАЛ f

ДНФ Квайна содержится в сокращенной ДНФ ФАЛ f

Пучок ФАЛ f через точку $\alpha \in N_f$ $П_\alpha(f)$ — множество всех проходящих через точку α максимальных граней f

Точка $\beta \in N_f$ называется **регулярной**, если существует точка $\alpha \in N_f$ такая, что имеет место строгое включение $П_\alpha(f) \subset П_\beta(f)$

Регулярная грань ФАЛ f — грань, все точки которой регулярны.

Простая импликанта K ФАЛ f входит в $Д_{\sum T}$ ФАЛ f тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.

Линейная ФАЛ — ФАЛ вида $f(x_1,\ldots,x_n)=a_1 x_1 \oplus \cdots \oplus a_n x_n$ из $P_2(n)$, а $a_1 \ldots a_n$ - булевы константы.

Будем говорить, что ФАЛ $f(x_1,\ldots,x_n)$ **линейно зависит** от булевой переменной x_i, если $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для любых соседних по x_i наборов α и β куба B^n.

Совершенная ДНФ ФАЛ $f \in P_2(n)$ является ее единственной ДНФ тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.

Совершенная ДНФ линейной ФАЛ является ее единственной ДНФ.

ФАЛ $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной, если $f(\alpha) \leq f(\beta)$ для любых наборов $\alpha, \beta \in B^n$ таких, что $\alpha \leq \beta$.

Сокращенная ДНФ $Д$ монотонной ФАЛ $f \in P_2(n)$ является единственной тупиковой ДНФ

Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **цепной (циклической)** функцией длины t, если ее сокращенная ДНФ с геометрической точки зрения представляет собой цепь (соответственно цикл) из t последовательно соединенных ребер $N_1, N_2, \ldots, N_t$ куба B^n

При любом $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ в $P_2(n)$ существует ФАЛ f' и f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ $Д_{\sum M}$ одной, но не входит в $Д_{\sum M}$ другой ФАЛ, и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$

Пусть $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечное множество, а $\mathcal{N} = (N_1, \ldots, N_p)$ — система его подмножеств, образующих покрытие N. Сопоставим паре $(N, \mathcal{N})$ матрицу $M \in B^{p,s}$ такую, что $M\langle i, j\rangle = 1$ тогда и только тогда, когда $a_j \in N_i$.

Будем говорить, что i-тая строка покрывает j-тый столбец, если $M\langle i, j\rangle = 1$.

Будем говорить, что система строк с номерами из $I \in [1 \ldots p]$ образует **покрытие матрицы** M, если каждый столбец матрицы M покрывается хотя бы одной строкой с номером из I, т.е. система подмножеств $\{N_i\}_{i \in I}$ задает покрытие N

Неприводимое покрытие матрицы M — такое покрытие, в котором ни одна строка не покрывается другой строкой.Тупиковое покрытие матрицы M — такое покрытие, в котором ни одна строка не покрывается объединением остальных строк.

Пусть $M \in B^{p,s}$ — матрица без нулевых столбцов. Сопоставим i-той строке матрицы булеву переменную y_i, где $i \in [1 \ldots p]$. Пусть так же набор $\beta \in B^p$ представляет собой значений этих переменных $y = (y_1, \ldots, y_p)$. Тогда сопоставим каждому элементу β множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1 \ldots p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta\langle i\rangle = 1$. Рассмотри ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует ее покрытие. Функцию $F(y)$ будем называть **функцией покрытия** матрицы M.

Функция покрытия F(y_1 , dotslow , y_p) матрицы M in B^{p, s} без нулевых столбцов, задается КНФ вида $F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} \left(\bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M\langle i, j\rangle = 1}} y_i \right)$

В результате раскрытия скобок и приведения подобных в формуле из предыдущей теоремы получается сокращенная ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M.

Пусть для некоторого γ, $0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы $M \in B^{p,s}$ имеется не менее, чем $p * \gamma$ единиц. Тогда покрытие, получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не более, чем $\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^{+}(\gamma s) \rceil + \frac{1}{\gamma}$, где $\ln^{+}(x) = \ln(x), x \geq 1 \quad \ln^{+}(x) = 0, 0 < x < 1$

При любых натуральных $n, m \in \mathbb{N}\ n \leq m$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n 2^m$, протыкающее все грани ранга m.

Пусть для каждой ДНФ Д определена ее «сложность» $\psi(D)$ $\psi(D)\geq 0$, для которой $\psi(D')\geq\psi(D'')$, если D'' получена из D' путем удаления булевых переменных или элементарных конъюнкций. В этом случае будем говорить, что на множестве ДНФ задан **функционал сложности** ψ , обладающий свойством монотонности.

Кратчайшая ДНФ — λ -минимальня ДНФ (минимальная по длине)

Минимальная ДНФ — R -минимальня ДНФ (минимальная по рангу)

Функция Шеннона — $\psi(n)=\max\limits_{f\in P_2(n)}\psi(f)$

Число тупиковых ДНФ у ФАЛ $f\in P_2(n),\ n\geq 4$ вида $f(x_1,\ldots,x_n)=s_3^{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3)\oplus x_4\oplus\cdots\oplus x_n$ равно $5^{2^{n-4}}$

Число минимальных ДНФ у ФАЛ $f\in P_2(n),\ n\geq 4$ вида $f(x_1,\ldots,x_n)=s_3^{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3)\oplus x_4\oplus\cdots\oplus x_n$ равно $2^{2^{n-4}}$

Для любого $n\in\mathbb{N}$ и для почти всех ФАЛ $f\in P_2(n)$ имеют место соотношения:

$\lambda(n)=2^{n-1}$ $\lambda(f)\lesssim\frac{3}{4}2^{n-1}$

$R(n)=n2^{n-1}$ $R(f)\lesssim\frac{3}{4}2^{n-1}$

Пусть $(\Sigma, И)$ модель ненадежной схемы Σ с возможными состояниями $\Sigma=\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_s$, в которых реализуются ФАЛ $f=f_1,f_2,\ldots,f_s$ соответственно от булевых переменных $X(n)$, определенные на множестве наборов $A=\{a_1,\ldots,a_p\}\subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу $M\in B^{p,s}$, где $B\langle i,j\rangle=f_j(a_i)$, считая, что i-той строке (j-тому столбцу) этой матрицы соответствует набор a_i (соответственно функция f_j и состояние Σ_j). Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется **отделимой по столбцам (строкам)**.

Матрица $\widehat{M}$, состоящая из всех различных столбцов матрицы М, называется **таблицей контроля** матрицы М. При этом считается, что каждый столбец матрицы $\widehat{M}$ связан с соответствующим классом неотличимости состояний модели $(\Sigma, И)$.

Цель контроля — множество N , состоящее из тех неупорядоченных пар различных чисел отрезка $[1..s]$, для которых пары состояний (столбцов таблицы M) с соответствующими номерами, необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов.

Диагностика схемы — цель контроля, состоящая из всех возможных пар.

Проверка исправности схемы — цель контроля, состоящая из из пар вида $N=\{(1,2),\ldots,(1,t)\}$

Тест для матрицы M относительно множества N — множество строк матрицы M с номерами из $T\subseteq[1..p]$, такое, что для любой пары $(i,j)\in N$ существует $t\in T$ такое, что $M\langle t,i\rangle\neq M\langle t,j\rangle$

Длина теста — то же самое, что и мощность.

Тупиковый тест — такой тест, который перестает быть тестом при удалении из него любой строки.

Минимальный тест — тест, имеющий минимальную мощность.

Будем говорить, что набор $\tau \subseteq A$ образует тест для модели $(\Sigma, И)$ относительно цели контроля N (или просто тест для $(\Sigma, И, N)$), если соответствующие наборам из τ строки матрицы M образуют тест для (M, N)

Пусть $M \in B^{p,s}$ отделимая по столбцам матрица, а N — связанная с ней цель контроля. Сопоставим i-той строке, $i \in [1..p]$, матрицы M булеву переменную y_i, а каждому набору $\beta \in B^p$ значений этих переменных $y = (y_1, \dots, y_n)$ - множество строк матрицы M с номерами из $I = I(\beta) \subseteq [1 \dots p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta \langle i \rangle = 1$. Рассмотрим ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует тест для (M, N) и будем называть эту функцию $F(y)$ функцией теста для (M, N).

Функция теста $f(y_1, \dots, y_n)$ для отделимой по столбцам матрицы $M \in B^{p,s}$ и цели контроля N может быть задана с помощью КНФ $F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge\limits_{(i,j) \in N}^{s} \left(\bigvee\limits_{\substack{1 \le i \le p \\ M\langle t, i \rangle \ne M\langle t, j \rangle}} y_i \right)$

Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1}, \dots, y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $f(y_1, \dots, y_p)$ может быть получена из КНФ предыдущей теоремы путем раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному со множеством $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ и обратно.

Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы $M \in B^{p,s}$ заключена в пределах: $\lceil \log s \rceil \le l \le (s-1)$

Пусть $\varphi(s),\ t(s),\ p(s)$ - целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента $s \in \mathbb{N}$, для которых $t(s) = \lceil 2 \log s \rceil + \varphi(s),\ p(s) \ge t(s),\ \varphi(s) \underset{s \to \infty}{\to} \infty$. Тогда для почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ первые $t(s)$ строк образуют диагностический тест.

Для любой неотрицательной и неограниченно возрастающей функции $\varphi(s)$ у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ длина минимального диагностического теста не больше, чем $2 \log s + \varphi(s)$

Теормин по Основам Кибернетики (2 часть)
created by Кунцьо Степан aka StepLg (321 группа)
created with OpenOffice.org v2.3
date: 11.04.08
version: 0.1
mailto: StepLg@GMail.com

$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — счетный упорядоченный алфавит Булевых переменных.

$Б=\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_b\}$ — **базис**, где φ_i $, i \in [1 \ldots b]$, зависит от $k_i \geq 1$ булевых переменных и является существенной ФАЛ при $k_i \geq 2$. Также будем предполагать, что $Б$ - полный базис и в общем случае допускается наличие в нем равных ФАЛ.

$Б_0$ — базис, состоящий из $Б_0=\{\wedge, \vee, \neg\}$

Ранг формулы $R(F)$ равен числу листьев связанного с ней дерева D.

Сложность формулы $L(F)$ равна числу нелистовых вершин связанного с ней дерева D.

Глубина формулы $D(F)$ равна глубине корня связанного с ней дерева D.

Множество всех формул над базисом $Б$ будем обозначать как $U_Б^\Phi$ и будем полагать, что $U^\Phi = U_{Б_0}^\Phi$

Лемма. Для любой формулы $F \in U^\Phi$ *выполняются неравенства:* $R(F)=L_{\wedge,\vee}(F)+1 \leq 2^{D(F)}$*, где* $L_{\wedge,\vee}$ *— число функциональных элементов* $\wedge$ *и* $\vee$ *в формуле* F

Следствие: $D(F) \geq \log(L(F)+1)$

Z — счетный упорядоченный алфавит (выходных) булевых переменных, который не имеет общих булевых переменных с алфавитом X

СФЭ — схема из функциональных переменных

Схема из функциональных элементов над базисом Б называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть Σ, которая состоит из всех истоков Σ, а вершины помечены следующим образом:

1) каждому входу (выходу) сопоставлена булева переменная из X (соответственно, из Z), являющаяся пометкой связанной с ним вершины, причем различным входам сопоставлены различные БП, а упорядоченность вершин во входной и выходной выборках Σ определяется упорядоченностью сопоставленных им булевых переменных.

2) каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена функциональным символом φ_i, причем $k_i = d_\Sigma^+(v)$

Квазидерево, соответсвующее формуле $F \in U_Б^\Phi$ — схема Σ, которая получается из дерева D, связанного с формулой F в результате отождествления листьев с одинаковыми пометками и приписывания его корню булевой переменной из Z.

Квазидерево Σ однозначно определяет формулу F и является схемой из функциональных элементов над базисом $Б$.

Бесповторная булева переменная — такая переменная, которая встречается в формуле только один раз.

Бесповторная формула — формула, в которой все переменные являются бесповторными.

$U^C_Б$ — множество всех схем из функциональных элементов над базисом $Б$ и пусть $U^C = U^C_Б$

Формулы на $Б$ и их системы являются частным случаем схемы из функциональных элементов над $Б$, таким образом $U^Ф_Б \subseteq U^C_Б$.

Схема из функциональных элементов $\Sigma \in U^C_Б$ входит в $U^Ф_Б$ тогда и только тогда, когда все стоки Σ и только они являются ее выходами, а из каждой вершины Σ , отличной ее входов и выходов исходит ровно одна дуга.

Схема функционирования системы из функциональных элементов $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$ над базисом $Б$. Будем давать определение индукцией по $q = 1, 2, \ldots$, определяя для каждой вершины v глубины q в схеме Σ реализуемую в ней формулу $F_v = F_v(x_1, \ldots, x_n)$

1) База. Если $q = 0$, то вершина v — вход Σ , положим $F_v = x_j$, где x_j — входная булева переменная, сопоставленная вершине v .

2) Индукция. Пусть v — вершина глубины $q+1$, $q \geq 0$ схемы Σ , которая имеет пометку φ_i и в которою входит k_i дуг. Причем, дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$ исходит из вершины v_j глубины q_j , причем для чисел $q = max(q_1, \ldots q_{k_i})$. Тогда в вершине v реализуется формула $F_v = F_v(F_1, F_2, \ldots, F_{K_i})$, которая имеет глубину $q+1$. При этом считается, что в вершине v реализуется функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, если ФАЛ f реализуется формулой F_v .

При этом система из функциональных элементов Σ реализует систему ФАЛ F , $F = (f_1, \ldots, f_m)$ или реализует систему булевых уравнений $z_1 = f_1, \ldots z_m = f_m$, если f_j , $j \in 1 \ldots m$ является функцией алгебры логики, реализованной в той выходной вершине СФЭ Σ , которой приписана z_i

Изоморфные СФЭ — если они изоморфны как помеченные графы.

Эквивалентные СФЭ — если они реализуют равные функции алгебры логики.

Висячая вершина СФЭ — вершина, являющаяся стоком, но не являющаяся выходом схемы.

Приведенная схема — такая СФЭ, в которой отсутствуют висячие вершины.

Из любой СФЭ можно получить приведенную путем операции удаления висячих вершин.

В результате отождествления изоморфных квазиподдеревьев в системах квазидеревьев могут получаться приведенные схемы и только они.

$L(\Sigma)$ — **сложность** Σ, то есть число всех ее функциональных элементов

$D(\Sigma)$ — **глубина** Σ, то есть максимальная глубина ее вершин

$R(\Sigma)$ — **ранг** Σ, то есть число дуг, исходящих из ее входов

Для приведенной СФЭ $\Sigma \in U^C$ с одним выходом выполняются неравенства: $R(\Sigma) \leq L_{\wedge,\vee}(\Sigma)+1 \leq 2^{D(\Sigma)}$, где $L_{\wedge,\vee}$ - число функциональных элементов $\wedge$ и $\vee$ в Σ

$U_Б^{\Phi}(L,n)$ — множество формул $F=F(x_1,\dots,x_n)$ над базисом $Б$, для которых $L(F) \leq L$, (индекс $Б_0$ будем опускать).

$U_Б^{\Phi}[D,n]$ — множество формул $F=F(x_1,\dots,x_n)$ над базисом $Б$, для которых $D(F) \leq D$, (индекс $Б_0$ будем опускать).

Исходя из неравенств, связывающих сложность по конъюнкции/дизъюнкции, глубину и ранг для формулы можно вывести следующую оценку: $U^{\Phi}[D,n] \subseteq U^{\Phi}(2^D-1,n)$

Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства: $|U^{\Phi}(L,n)| \leq (8\mathrm{n})^{L+1}$ *и* $|U^{\Phi}[D,n]| \leq (8\mathrm{n})^{2^D}$

Остов приведенной СФЭ $\Sigma(x_1,\dots,x_n,z_1)$ — формула $F(x_1)$ такая, что ее дерево отличается от наддерева СФЭ Σ только пометками листьев.

Для любых натуральных n, L выполняется неравенство $\|U^C(L,n)\| \leq (8(L+n))^{L+1}$

Подстановка для тождества t.

1. Для того, чтобы выделить набор $x=(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$, который состоит из всех различных булевых переменных алфавита X, встречающихся в формуле F и перечисленных в порядке возрастания их номеров, будем записывать ее (формулу) как $F(x)$

2. Результат подстановки $F(F_1,\dots,F_n)$ формулы F_j вместо булевой переменной x_{i_j}, $j=1,\dots n$ в формулу F - такая формула, которая получается из F в результате замены каждого вхождения булевой переменной x_{i_j} на формулу F_j.

3. Формула $F(F_1,\dots,F_n)$ реализует ФАЛ $f(f_1,\dots,f_n)$, где функция алгебры логики f (f_j , $j=1\dots n$) - является ФАЛ, реализуемой F (соответственно F_j)

4. Отсюда следует, если указанную подстановку применить к обеим частям тождества $t:\ F'=F''$, где $F'=F'(x)$, $F''=F''(x)$, мы получим тождество $\hat{t}:\ \hat{F}'=\hat{F}''$, где $\hat{F}'=F'(F_1,\dots,F_n)$, $\hat{F}''=F''(F_1,\dots,F_n)$, которое называется подстановкой для тождества t.

Принцип эквивалентной замены. Если подформулу $\hat{F}'$ (подформулу $\hat{F}''$) формулы F заменить, учитывая тождество $\hat{t}$, эквивалентной ей формулой $\hat{F}''$ (соответственно $\hat{F}'$), то полученная в результате такой замены формула $\check{F}$ будет эквивалентна формуле F, то есть будет справедливо тождество $\check{t}: F=\check{F}$.

Указанный переход будем записывать в виде однократной **выводимости** вида $F \underset{\check{t}}{\mapsto} \check{F}$.

Аналогичный переход от F к $\tilde{F}$ в результате применения одного из тождеств τ (нескольких последовательных применений тождеств из τ) будем записывать как $F \underset{\tau}{\mapsto} \tilde{F}$ (соответственно $F \underset{\tau}{\rightrightarrows} \tilde{F}$). При этом считается. что тождество $\tilde{t} : F = \tilde{F}$ выводится из системы τ и этот факт записывается как $\tau \mapsto \tilde{t}$ или $\tau \rightrightarrows \tilde{t}$ в зависимости от числа переходов.

Переход вида $F \underset{\tau}{\rightrightarrows} \tilde{F}$ будем называть **эквивалентным преобразованием** формулы F в формулу $\tilde{F}$ на основе системы тождеств τ.

Система тождества τ называется **полной** для элементарных преобразований формул над базисом $Б$, если для любых двух эквивалентных формул F' и F'' над $Б$ имеет место выводимость $F' \underset{\tau}{\rightrightarrows} \tilde{F}''$

Формула с поднятыми отрицаниями — формула, в которой $\neg$ встречается только над булевыми переменными.

Альтернирование $Alt(F)$ формулы F с поднятыми отрицаниями — максимальное изменение типов функциональных элементов $\wedge$ и $\vee$ в цепях дерева, соответствующего формуле F.

Для любой формулы $F \in U^{\Phi}$ с поднятыми отрицаниями существует подобная ей формула $\check{F}$ такая, что $D(\check{F}) \leq \lceil \log(L(F)+1) \rceil + Alt(F)$

Для любой элементарной конъюнкции или элементарной дизъюнкции K существует подобная ей формула $\check{K}$ такая, что $D(\check{K}) = \lceil \log(L(K)+1) \rceil$ и является минимальной по глубине.

Для любой ДНФ или КНФ $\mathcal{L}$ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{L}}$ такая, что $D(\check{\mathcal{L}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{L})+1) \rceil + 1$

Система $\tilde{\tau}^{осн}$ выводима из системы $\tau^{осн}$.

Обобщенная элементарная конъюнкция (ОЭК) — произвольная конъюнкция букв, содержащая в общем случае повторяющиеся и противоположные буквы.

Обобщенная ДНФ (ОДНФ) — дизъюнкция обобщенных элементарных конъюнкций.

Каноническая ОЭК — обычная элементарная конъюнкция и формула $x * \bar{x}$

Каноническая ОДНФ — ДНФ из канонических ОЭК.

Совершенная ОДНФ — совершенная ДНФ и формула $x * \bar{x}$.

Существует элементарное преобразование вида $F \underset{\tau^{М}}{\rightrightarrows} F' \underset{\{t^{D}_{\wedge,\vee}, t^{K}_{\wedge}\}}{\rightrightarrows} F'' \underset{\tau^{ПП}}{\rightrightarrows} \hat{F} \underset{\{t^{D}_{\wedge,\vee}, \tau^{ПП}\}}{\rightrightarrows} \tilde{F}$, где $\tau^{ПП} = \{\tau^{A}, \tau^{K}, \tau^{ПК}, \tau^{ОП}, t^{П}\}$, F' — формула с поднятыми отрицаниями, F'' — обобщенная ДНФ, $\hat{F}$ — каноническая ОДНФ, $\tilde{F}$ — совершенная ОДНФ ФАЛ f

Любую формулу $F(x_1, \ldots, x_n)$, реализующую ФАЛ f, с помощью элементарных преобразований на основе системы тождеств $\tau^{осн}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от булевых переменных $X(n)$

Система $\tau^{осн}$ является полной системой тождеств.

Схемы Σ' и Σ'' являются эквивалентными ($t:\Sigma'\sim\Sigma''$), если реализуют равные системы (матрицы) ФАЛ.

Подстановка — простейшее преобразование, сохраняющее эквивалентность схемы.

Подстановка тождества $\hat{t}:\hat{\Sigma}'\sim\hat{\Sigma}''$ — тождество, которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t:\Sigma'\sim\Sigma''$

Схема Σ' называется **подсхемой** схемы Σ, если $V(\Sigma')\subseteq V(\Sigma)$, $E(\Sigma')\subseteq E(\Sigma)$ и любая вершина $v\in V(\Sigma')$ которая либо относится ко множеству входов (выходов) %SIGMA, либо служит конечной (соответственно начальной) вершиной некоторого ребра из $E(\Sigma')\setminus E(\Sigma)$, является входом (соответственно выходом) схемы Σ'.

Исходя из того, что формула является частным случаем СФЭ, введем следующие понятия:

1. **Формула-слово** F — любая формула $F\in U_Б^Ф$
2. **Формула-граф** $\underline{F}$ — квазидерево, соответствующее формуле-слову.
3. «схемный аналог тождества t» Следовательно, тождеству $t:F'\mapsto F''$, $F',F''\in U_Б^Ф$ будет соответствовать тождество $\underline{t}:\underline{F'}\mapsto\underline{F''}$, $\underline{F'},\underline{F''}\in U_Б^C$, которые соответствуют схемам F' и F''.
4. Множество СФЭ вида $\underline{F}$, где $F\in\Im\subseteq U_Б^Ф$ будем обозначать через $\underline{\Im}$, а систему тождеств $\underline{t}$, где $t\in\tau$, а τ — система тождеств для $U_Б^Ф$, - через $\underline{\tau}$.

С помощью тождеств $\tau_Б^B$ и $\tau_Б^C$ можно избавиться от всех висячих вершин и внутренних ветвлений.

Следствие. Для любой схемы из функциональных элементов $\Sigma\in U_Б^C$ существует элементарная подстановка вида $\Sigma \underset{\{\tau_Б^B,\tau_Б^C\}}{\rightrightarrows} \underline{F}$, где F — формула (система формул) из $U_Б^Ф$

Теорема. Для любой элементарной подстановки вида $F\underset{\{\tau\}}{\rightrightarrows}\hat{F}$, $F,\hat{F}\in U_Б^Ф$, существует моделирующая его элементарная подстановка $\underline{F}\underset{\{\underline{\tau},\tau_Б^B,\tau_Б^C\}}{\rightrightarrows}\underline{\hat{F}}$

Теорема. Если τ – конечная полная система тождеств для ЭП формул из $U_Б^Ф$, то $\{\underline{\tau},\tau^C,\tau^B\}$ – конечная полная система тождеств (КПСТ) для ЭП СФЭ из $U_Б^C$.

Следствие. Система тождеств $\{\underline{\tau}^{осн},\tau^B,\tau^C\}$ – конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из U^C.

Структурное моделирование формул в различных базисах:

1. Пусть имеется два конечных полных базиса: $Б=\{\varphi_i\}_{i=1}^{b}$ $Б'=\{\varphi'_i\}_{i=1}^{b'}$
2. Пусть формула $Ф'_i(x_1,\ldots,x_{k'_i})\in U_{Б'}^Ф$, $k'_i\geq k_i$ реализует ФАЛ φ_i , $i=1\ldots,b$. Заметим, что в случае $k'_i>k_i$ булевы переменные $x_{k_i+1},\ldots,x_{k'_i}$ являются фиктивными переменными формулы $Ф'_i$
3. Положим $Ф'=(Ф'_1,\ldots,Ф'_b)$, $П'=(П'_1,\ldots,П'_b)$, где $П'_i$ — тождество вида $\varphi_i=Ф'_i$, $i=1\ldots b$, а формулы из $Ф'$ (тождества $П'$), будем называть формулами (соответственно тождествами) перехода от базиса $Б$ к базису $Б'$
4. Для формулы $F\in U_Б^Ф$ обозначим через $П'(F)$ формулу над базисом $Б'$, которая получается из формулы F путем замены каждой ее подформулы вида $\varphi_i(F_1,\ldots,F_{k_i})$

формулой $\Phi'_i(F_1, \ldots, F_{k_i}, x_{k_i+1}, \ldots, x_{k'_i})$. То есть П'(F) является результатом подстановки формулы F_j вместо булевой переменной x_j в формулу Φ'_i для всех $j=1 \ldots k_i$. Такой переход от формулы F к формуле $\Pi'(F)$ будем называть структурным моделированием формулы F в базисе $Б'$ на основе формул перехода Φ' или, иначе, на основе тождеств перехода Π'.

Теорема перехода: Пусть τ – КПСТ для ЭП формул из $U_Б^\Phi$, а Π' и Π – системы тождеств для перехода от базиса $Б$ к базису $Б'$ и от базиса $Б'$ к $Б$ соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi'(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из $U_Б^\Phi$.

Следствие: Из системы тождеств $\tau^{осн}$ для ЭП формул из U^Φ указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе $Б$.

Замыкающий контакт — ребро или дуга графа с пометкой x_i

Размыкающий контакт — ребро или дуга графа с пометкой $\overline{x_i}$

Сеть Σ с входами $a'_1, \ldots, a'_p$ и выходами $a''_1, \ldots, a''_q$, в которой все ребра (дуги) помечены переменными $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаниями $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$, называется (p, q) **-контактной схемой (КС)** от БП $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается $\Sigma=\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ или пусть

$\Sigma=\Sigma(x_1, \ldots, x_n, a'_1, \ldots, a'_p, a''_1, \ldots, a''_q)$.

Пусть Σ – контактная схема от булевых переменных $X(n)$ и $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in B^n$. Определим $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\overline{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α, и снятия пометок с остальных ребер Σ.

Функция проводимости $g_{u,v}(x_1, \ldots, x_n)$ от вершины v к вершине u контактной схемы Σ - функция алгебры логики, которая равна 1 на наборе $\alpha\in B^n$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v-u)$ -цепь.

Другие названия функции $g_{u,v}$ — **функция достижимости вершины v из вершины u, функция, реализующаяся между вершинами u и v**

Будем считать что каждой вершине $(1,m)$ -КС $\Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1; a_2, \ldots, a_{m+1})$ реализуется ФАЛ проводимости от входа a_1 к этой вершине и что Σ реализует систему ФАЛ $F=(f_1, \ldots, f_m)$, где f_j — ФАЛ проводимости от a_1 к выхода с пометкой a_{j+1}, $j\in[1, m]$.

Контактное дерево порядка n — $(1, 2^n)$ -КС $D(x_1, \ldots, x_n; a_0; a_1, \ldots, a_{2^n-1})$

Схемы Σ' и Σ'' называются **изоморфными**, если изоморфны соответствующие им графы.

Функция проводимости $K(C)$, где C — множество, состоящее из контактов $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n}$ в КС Σ — ФАЛ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_n}^{\sigma_n}$

Функция отделимости $J(C)$, где C — множество, состоящее из контактов $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n}$ в КС Σ — ФАЛ вида $x_{i_1}^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_{i_n}^{\overline{\sigma}_n}$

Множество C из предыдущих двух примеров называется **проводящим** (**отделимым**), если $K(C)\neq 0$ ($J(C)\neq 1$ соответственно), и **нулевым** (соответственно **единичным**) в противном случае)

Если $C'\subseteq C$, то $K(C')\geq K(C)$ и $J(C')\leq J(C)$

Простейшая π **-схема** — любая (1,1)-КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса. Если π -схемы Σ_1 и Σ_2 уже определены, то (1,1)-КС Σ' (Σ''), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного соединения) тоже является π -схемой. При этом вход(выход) Σ' является результатом отождествления входов (соответственно выходов) Σ_1 и Σ_2, а входом Σ'' является вход Σ_1, выходом Σ'' — выход Σ_2, а выход Σ_1 отождествляется со входом Σ_2 и становится внутренней вершиной Σ''.

Лемма. Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $F\in U^{\Phi}$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(F)=L(\Sigma)$ и обратно.

Каноническая КС для ФАЛ f — схема моделирующая совершенную ДНФ f.

(1, m)-КС называется **приведенной**, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепями, соединяющим ее вход и выходы.

Приведенная КС является связанным графом.

U^K — множество всех КС из неориентированных контактов.

U^{π} — множество всех π -схем

$U^A(L,n)$ — множество приведенных (1,1)-схем Σ от булевых переменных $X(n)$, для которых $L(\Sigma)\leq L$

$|U|$ — число попарно изоморфных схем в U

$\|U\|$ — число попарно не эквивалентных схем в U.

Лемма. При любых натуральных L и n выполняется неравенство $\|U^{\pi}(L,n)\|\leq(16\mathrm{n})^L$

Лемма. При любых натуральных L и n выполняется неравенство $\|U^K(L,n)\|\leq(8\mathrm{nL})^L$

Будем считать, что в каждой вершине (p,q) -КС Σ реализуется столбец, составленный из p ФАЛ проводимости от входов Σ к этой вершине, а сама КС Σ реализует матрицу, которая состоит из q столбцов, реализованных на ее выходах. Таким образом, функционирование КС $\Sigma=\Sigma(x_1,\dots,x_n;a'_1,\dots,a'_p;a''_1,\dots,a''_q)$ представляет собой матрицу $F=F(x_1,\dots,x_n)$ с p строками, q столбцами b и элементами из $P_2(n)$, для которой $F\langle i,j\rangle$ — ФАЛ, реализуемая между a'_i и a''_j, где $i\in[1,p]$, $j\in9[1,q]$, то есть при любом наборе $\alpha,\alpha\in B^n$ матрица $F(\alpha)$ является матрицей достижимости сети $\Sigma|_a$

Любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица $F, F\in(P_2(n))^{m,m}$ реализуется КС $\Sigma=\Sigma(x_1,\dots,x_n;a_1,\dots,a_m)$, которая представляет собой объединение всех КС $\Sigma_{ij}=\Sigma_{ij}(x_1,\dots,x_n;a_i,a_j)$, где $1\leq i<j<m$, а КС Σ_{ij} - π -схема, построенная по совершенной ДНФ ФАЛ $F\langle i,j\rangle$ и считается канонической КС матрицы F.

Система тождеств $\tau_n=\{t_1,\dots,t_5,t_6^{(1)},\dots,t_6^{(n)}\}$ называется системой **обобщенных тождеств** порядка n. Система всех основных тождеств обозначается через τ_∞

Лемма. При $n\geq2$ имеет место выводимость $\tau_n \rightrightarrows \tau^{(n)}$

Теорема о полноте. Система тождеств τ_∞ является полной.

Любая цепь $I_i^{(n)}$, где $i \in [1, 2^n]$, а так же любую цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ путем перестановки контактов, будем называть канонической цепью порядка n.

Каноническая контактная схема $\hat{\Sigma}$ является канонической КС порядка n тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1) любой контакт $\hat{\Sigma}$ принадлежит некоторой канонической цепи порядка n, являющейся подсхемой схемы $\hat{\Sigma}$., причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи.

2) любая внутренняя вершина $\hat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта 1.

3) в КС $\hat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» (см тождество $t_6^{(n)}$) и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка n из пункта 1, которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК.

4) в КС $\hat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t влечет наличие цепи такого же вида, соединяющий полюс a_j с полюсом a_t

Лемма. Для любой КС Σ, где $\Sigma \in U^K$ и $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\hat{\Sigma}(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \hat{\Sigma}$

Лемма. Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП $x_1, \ldots, x_n$ существует ЭП вида $\Sigma' \underset{\tau_n}{\rightrightarrows} \Sigma''$.

Следствие. Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из U^K от БП $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие. Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из U^K

Пусть $\Theta(\Sigma, \alpha) = |(E(\Sigma|_a))| - |(V(\Sigma|_a))| + |(c(\Sigma|_a))|$

Пусть $\Theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \Theta(\Sigma, \alpha)$

Лемма. Если $\Sigma'(x_1, \ldots, x_n) \underset{\{t_1 - t_5\}}{\rightrightarrows} \Sigma''(x_1, \ldots, x_n)$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \underset{\tau_k}{\rightrightarrows} \Sigma''$, $k < n$, то остаток от деления $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ на 2^{n-k} равен 0.

Теорема. В классе U^K не существует конечной полной системы тождеств.

Рассмотрим схему из одной изолированной вершины, являющейся ее входом.

Указанная вершина называется **тождественной вершиной кратности** $k, k \geq 0$, если она одновременно является k-кратным входом данной схемы.

Фиктивная вершина — вершина кратности 0.

Схема $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется **суперпозицией схем** Σ'' и Σ' без общих вершин и входвыходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ'.

Суперпозиция считается **бесповторной**, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ'

Суперпозиция называется **стыковкой**, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ', причем каждый вход Σ' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Суперпозиция $\Sigma=\Sigma''(\Sigma')$ называется **правильной**, если схема Σ реализует набор функций вида $F''(F')$, где F'' и F' — наборы функций, реализованные схемами Σ'' и Σ' соответственно.

Правильная суперпозиция $\Sigma=\Sigma''(\Sigma')$ называется **корректной**, если в любой вершине Σ, которая соответствует выходной вершине Σ', реализуется та же самая функция, что и в Σ'.

Правильная суперпозиция автоматически является корректной, если кратность любой выходной вершины Σ' больше числа присоединяемых к ней входов Σ''.

Схема называется **разделительной** по входам (выходам), если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0.

КС Σ от БП $x_1,\ldots,x_n$ разделительна на наборе $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_a$

Лемма Шеннона. Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma=\Sigma''(\Sigma')$, а F, F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда $F\geq F'\cdot F''$ и $F=F'\cdot F''$, если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Следствие. В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ, $\Sigma=\Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу КС Σ', реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ'

Следствие. Равенство $F=F'\cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Суперпозиция (стыковка) КС вида $\Sigma=\Sigma''(\Sigma')$ называется **правильной**, если она удовлетворяет равенству $F=F'\cdot F''$.

Правильная суперпозиция (стыковка) КС вида $\Sigma=\Sigma''(\Sigma')$ является корректной, если она удовлетворяет требованию разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ, которая соответствует выходу КС Σ'.

Тождества:

ассоциативности: $t_\circ^{A}: x_1\circ(x_2\circ x_3)=(x_1\circ x_2)\circ x_3$

коммутативности: $t_\circ^{K}: x_1\circ x_2=x_2\circ x_1$

отождествления БП: $t_\circ^{ОП}: x\circ x=x$

где $\circ\in\{\wedge,\vee\}$

дистрибутивность $\circ$ относительно $\diamond$: $t^{D}_{\circ,\diamond}: x_1\circ(x_2\diamond x_3)=(x_1\circ x_2)\diamond(x_1\circ x_3)$

тождества де Моргана: $\overline{(\overline{x}_1)}=x_1$ $\quad\overline{x_1\circ x_2}=\overline{x}_1\diamond\overline{x}_2$

где $(\circ,\diamond)\in\{(\wedge,\vee),(\vee,\wedge)\}$

тождества подстановки констант:

$t^{ПК}_{0,\wedge}: x_1\wedge(x_2\wedge\overline{x}_2)=x_2\wedge\overline{x}_2 \qquad t^{ПК}_{0,\vee}: x_1\vee(x_2\wedge\overline{x}_2)=x_1$

$t^{ПК}_{1,\wedge}: x_1\wedge(x_2\vee\overline{x}_2)=x_1 \qquad t^{ПК}_{1,\vee}: x_1\vee(x_2\vee\overline{x}_2)=x_2\vee\overline{x}_2$

поглощение: $t^{П}: x_1\vee x_1x_2=x_1$

обобщенное склеивание:

$t^{ОС}: x_1x_2\vee\overline{x}_1x_3=x_1x_2\vee\overline{x}_1x_3\vee x_2x_3$

$\tau^{осн}=\{t^M_\wedge, t^M_\neg, t^A_\wedge, t^K_\wedge, t^{ОП}_\wedge, t^D_{\wedge,\vee}, t^{ПК}_{1,\wedge}, t^{ПК}_{0,\wedge}\}$

$\tau^{A}=\{t^A_\wedge, t^A_\vee\}$

$\tau^{K}=\{t^K_\wedge, t^K_\vee\}$

$\tau^{ОП}=\{t^{ОП}_\wedge, t^{ОП}_\vee\}$

$\tau^{D}=\{t^D_{\wedge,\vee}, t^D_{\vee,\wedge}\}$

$\tau^{ПК}=\{t^{ПК}_{0,\wedge}, t^{ПК}_{1,\wedge}, t^{ПК}_{0,\vee}, t^{ПК}_{1,\vee}\}$

$\tau^{\widetilde{осн}}=\{\tau^M, \tau^A, \tau^K, \tau^{ОП}, \tau^D, \tau^{ПК}, t^{П}\}$

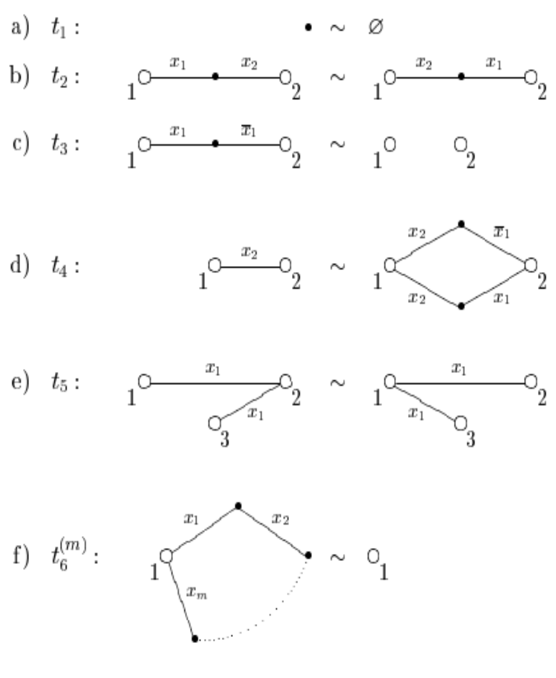

Рис. 7.1: основные тождества для КС

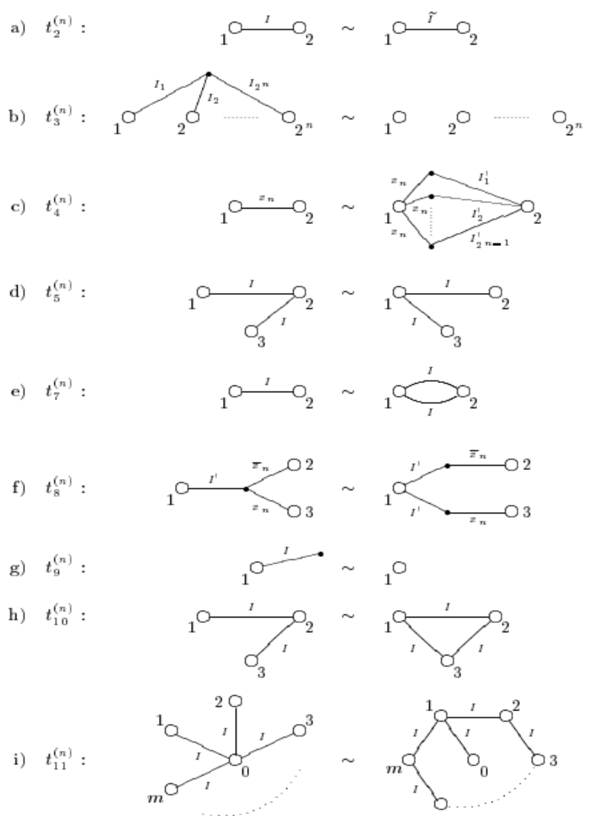

Рис. 7.8: обобщенные тождества порядка n для КС

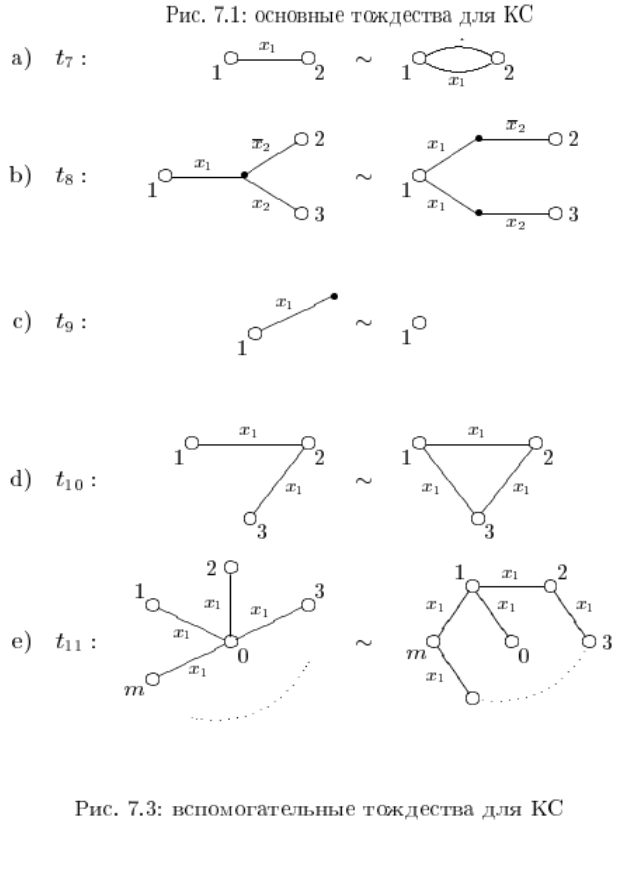

Рис. 7.3: вспомогательные тождества для КС

Теормин по Основам Кибернетики (3 часть)
created by Кунцьо Степан aka StepLg (321 группа)
created with TEX/ Kile
date: 03.05.08
version: 0.3
mailto: StepLg@GMail.com

Задача синтеза — построение по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит к заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности.

$\mathcal{U}$ — полный класс схем в том смысле, что каждую систему ФАЛ можно реализовать некоторой его схемой Σ.

Ψ — некоторый функционал сложности схем класса $\mathcal{U}$, то есть отображение $\mathcal{U}$ на множество неотрицательных действительных чисел.

Функционал сложности Ψ обладает свойством **монотонности**, если $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$, $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ путем удаления вершин или ребер.

Сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F в классе $\mathcal{U}$ — минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют F

Минимальная схема для ФАЛ F в классе $\mathcal{U}$ относительно функционала Ψ — такая схема Σ, реализующая F, для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$.

Функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно функционала сложности Ψ — $\Psi(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} \Psi(f)$

Для сложности $L(F)$ ФАЛ $F = F(f_1, \ldots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства $\max\limits_{0 \leq i \leq m}(L(f_i)) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^{m} L(f)_i$

Лемма Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \neq 0$ существует формула $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, и π-схема Σ_f, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства: $L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1$, $L(\Sigma_f) \leq n \cdot |N_f|$ (1.1)

Следствие В соответствии с леммой из 2.3 параграфа 2 главы 2 (книги) формулу $\mathcal{F}_f$ можно выбрать так, что $T(\mathcal{F}_f) \leq \lceil \log n + \log |N_f| \rceil + 1$

Следствие В силу неравенств (1.1) и с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π-схемой сложности 2, а так же формулой из $\mathcal{U}^{\Phi}$, имеющей сложность 2, выполняются неравенства
$L^C(n) \leq L^{\Phi}(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1$
$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 1$
$L^K(n) \leq L^{\pi}(n) \leq n \cdot 2^n$

Лемма Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$ и $f = 0$, существуют π-схема Σ_f и формула $F_f, F_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, которые реализуют f и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства: $L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2$, $L(F_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4$.

Следствие $L^{\pi}(n) \leq 2^{n+1} - 2$ (1.2)

Следствие $L^{\Phi}(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4$ (1.3)

Задача синтеза часто возникает для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

- линейной ФАЛ порядка n, то есть ФАЛ $l(n)$ или $\bar{l}(n)$
- мультиплексорной ФАЛ $\mu(n)$ порядка n
- дешифратора $\vec{Q}(n)$ (дизъюнктивного дешифратора $\vec{J}(n)$) порядка n

- универсальной системы $\vec{P}_2(n)$ порядка n, состоящей из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Для любого натурально n выполняются неравенства:

$$\begin{array}{rclrcll} L^C(\vec{Q}_n) & \leq & 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}) & L^K(\vec{Q}_n) & \leq & 2^{n+1} - 2 & (1.4) \\ L^\pi(\mu_n) & \leq & 3 \cdot 2^n - 2 & L^\Phi(\mu_n) & \leq & 2^{n+2} - 3 & (1.5) \\ L^C(l_n) & \leq & 4n - 4 & L^C(\bar{l}_n) & \leq & 4n - 4 + \lfloor \frac{1}{n} \rfloor & (1.6) \end{array}$$

Лемма Если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то $L^C(f) \geq n - 1$, $\quad L^K(f) \geq n \quad$ (1.7). Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая переменная $x_i, i \in [1 \ldots k]$ не является ни монотнонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то $L^C(f) \geq n$, $\quad L^K(f) \geq n + k \quad$ (1.8)

Следствие $\begin{array}{rclrcl} L^C(l_n) & \geq & n & L^K(l_n) & \geq & 2n \\ L^C(\mu_n) & \geq & 2^n + n & L^K(\mu_n) & \geq & 2^n + 2n \end{array}$

Лемма Для системы $F = F(f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ, отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство: $L^K(F) \geq m$ (соответственно $L^C_{\text{Б}}(F) \geq m$)

Следствие $\begin{array}{rclrcl} L^C(\vec{Q}_n) & \geq & 2^n & L^K(\vec{Q}_n) & \geq & 2^n \\ L^C(\vec{J}_n) & \geq & 2^n & L^K(\vec{J}_n) & \geq & 2^n \\ L^C_{\text{Б}}(\vec{P}_2(n)) & \geq & 2^{2^n} - n & L^K(\vec{P}_2(n)) & \geq & 2^{2^n} - 2 \end{array}$

Лемма Для каждого натурального n в $\mathfrak{U}^C_{\text{Б}}$ существует универсальная СФЭ U_n порядка n, сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Лемма Если разделительная по выходам $(1, m)$-КС Σ реализует m различных ФАЛ отличных от 0, то $L(\Sigma) \geq 2m - 2$.

Следствие Контактное дерево порядка n является минимальной разделительной $(1, 2^n)$-КС, реализующей систему ФАЛ Q_n.

Лемма Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то $L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum\limits_{j=1}^{m} |N_{f_j}|$

Следствие $L^K(J_n) \geq 2^{n+1} - 2$

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v, а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v, объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v. Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ **операции присоединения** вершины v к вершине w.

Две вершины СФЭ называются **эквивалентными**, если в них реализуются равные ФАЛ.

Приведенная схема называется **строго приведенной**, если в ней нет эквивалентных и висячих вершин.

Лемма Для каждого натурального n в $\mathfrak{U}^C_{\text{Б}}$ существует универсальная СФЭ $\mathfrak{U}_n$ порядка n, сложность которой равна $2^{2^n} - n$

Метод каскадов позволяет по произвольной системе функций алгебры логики $F = (f_1, \ldots, f_m)$, $F \in P_2^m(n)$ строить $(1, m)$-КС Σ_f , $\Sigma_f \in \mathfrak{U}^K$ и СФЭ U_F , $U \in \mathfrak{U}^C$, которые реализуют F.

Будем считать, что все $f_1, \ldots, f_m$ системы F различны, отличны от констант и для каждой БП x_i , $1 \leq i \leq n$, среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от x_i. Разложим ФАЛ $f_1, \ldots, f_m$ сначала по БП x_1, потом по БП x_2 и т.д. При этом построим последовательности множеств G_i и $\hat{G}_i$, состоящих из ФАЛ от БП $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$, где $i = 1, \ldots, n$ такие, что

1. G_i состоит из всех различных ФАЛ $g(x_i, \ldots, x_n)$ вида $g = f_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $1 \leq j \leq m$, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1} \in B^{i-1})$

2. $\hat{G}_i$ состоит из всех различных функций $g, g \in G_i$, которые существенно зависят от x_i.

Следовательно $G_1 = f_1, \ldots, f_m$, $\hat{G}_n \subseteq \{x_n, \overline{x}_n\}$, а множества $\hat{G}_1, \ldots, \hat{G}_n$ не пусты и попарно не пересекаются.
Далее, любую ФАЛ $g, g \in \hat{G}_i$, $1 \leq i \leq n$, можно представить в виде $g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \overline{x}_i g_0 \vee x_i g_1$, где $g_\sigma = g(\sigma, x_i + 1, \ldots, x_n)$, и, следовательно, $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$ для всех $\sigma, \sigma \in B$. Если при этом для некоторого $\sigma, \sigma \in B$, ФАЛ $g_{\overline{\sigma}}$ равна 0, то вместо этого неравенства будем использовать разложение $g = x_i^\sigma g_\sigma$, где $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$.
Пусть $(1,1)$-КС $\check{\Sigma}_{n+1}$ представляет собой изолированный вход, который одновременно является выходом и реализует константу 1. Пусть, далее, для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, уже построена $(1, \check{m}_{i+1})$-КС $\check{\Sigma}_{i+1}$, реализующая систему ФАЛ $\check{G}_{i+1} \cup \{1\}$. Построим тогда $(1, \check{m}_i)$-КС $\check{\Sigma}_i$, которая реализует систему ФАЛ $\check{G}_i \cup \{1\}$ следующим образом:

1. КС $\check{\Sigma}_i$ содержит КС $\check{\Sigma}_{i+1}$ в качестве подсхемы, на выходах которой (они одновременно являются выходами $\check{\Sigma}_i$) реализуются ФАЛ из множества $\check{G}_{i+1} \cup \{1\}$

2. *а здесь большой пункт про то, как это реализуется на схеме. с картинками. стр.20 "Лекции Ложкина (3 часть)"*

и здесь еще целый абзац заключения о том, как и что. Короче если кому попадется этот вопрос на тесте — неудачнег :(

Каскадная КС – приведенная КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения 1 или 2 противоположных контактов и операций переименования выходов.

Каскадная КС считается **полной**, если она была построена без использования операции присоединения 1 контакта. Вершина ККС, введенная с помощью операции присоединения 1 контакта, называется **неполной вершиной**.

Будем говорить, что ККС Σ'' является дополнением неполной ККС Σ', если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$

Лемма Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства: $L^K(l_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \lfloor \frac{1}{n} \rfloor$, $L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n}$

Теорема Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения: $L^K(n) \lesssim 4(\frac{2^n}{n}), L^C(n) \lesssim 8(\frac{2^n}{n})$, которые вытекают из мощностных соотношений

$$\begin{array}{ll} \Sigma_f \in \mathcal{U}^K & L(\Sigma_f) \leq \frac{4 \cdot 2^n}{n - 2\log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) \\ \Sigma_f \in \mathcal{U}^C & L(\Sigma_f) \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2\log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) \end{array}.$$

Пусть $\mathcal{U}$ — некий класс схем, Φ — функционал сложности, а $\Phi(n)$ — функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно Φ. $\mathcal{U}(\Phi, n)$ — мн-во тех схем Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Phi(\Sigma) \leq \Phi$.
Мощностное неравенство вытекает из определений: $\|\mathcal{U}(\Phi(n), n)\| = 2^{2^n}$
Если для некоторого натурально n и действительных $\hat{\Phi}, \delta$, $0 < \delta < 1$ выполняется

неравенство $\|\mathfrak{U}(\hat{\Phi},n)\| \leq \delta \cdot 2^{2^n}$, то $\Phi(f) \geq \hat{\Phi}$ для не менее, чем $(1-\delta)\cdot 2^{2^n}$ ФАЛ $f \in P_2(n)$.

Для любых натуральных n и L справедливы неравенства:
$|\mathfrak{U}^C(L,n)| \leq (8\cdot(L+n))^{L+1}$
$|\mathfrak{U}^\Phi(L,n)| \leq (8n)^{L+1}$
$|\mathfrak{U}^K(L,n)| \leq (8nL)^L$
$|\mathfrak{U}^\pi(L,n)| \leq (16n)^L$.

Лемма Для положительных действительных чисел a, y, q из неравенств $a\log q > 1$, $(ay)^y \geq q$ следует неравенство $y \geq \frac{\log q}{\log a \log q}\left(1+\frac{\log\log a\log q}{\log ae\log q}\right)$, где e – основание натуральных логарифмов, а из неравенств $a>1, ay \geq q$ – неравенство $y \geq \frac{\log q}{\log a}$

Теорема Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1,2,\ldots$,такой, что $\varepsilon(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(n) \;\to\; 0$, выполняются неравенства:

$$\begin{array}{rcl} L^C(n) & \geq & (1+\varepsilon(n))\frac{2^n}{n} \\ L^\Phi(n) & \geq & (1-\varepsilon(n))\frac{2^n}{\log n} \\ L^K(n) & \geq & (1-\varepsilon(n))\frac{2^n}{n} \\ L^\pi(n) & \geq & (1-\varepsilon(n))\frac{2^n}{\log n} \\ D(n) & \geq & n-\log\log n-\varepsilon(n) \end{array}$$

Следствие

$$\begin{array}{rcl} L^C(n) & \gtrsim & \frac{2^n}{n} \\ L^\Phi(n) & \gtrsim & \frac{2^n}{\log n} \\ L^K(n) & \gtrsim & \frac{2^n}{n} \\ L^\pi(n) & \gtrsim & \frac{2^n}{\log n} \\ T(n) & \geq & n-\log\log n-o(1) \end{array}$$

Следствие Нижние оценки из теоремы при указанных в доказательстве значениях $\varepsilon(n)$ справедливы для сложности (глубины) почти всех ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, при их реализации в соответствующих классах схем.

$$\begin{array}{ll} L^C(n) & \varepsilon = \frac{\log n - 6}{n} \\ L^\Phi(n) & \varepsilon = \frac{6}{\log n} \\ L^K(n) & \varepsilon = \frac{4}{n} \end{array}$$

Лемма Для класса ФАЛ Q такого, что $\log n = o(\log\log|Q(n)|)$, выполняются следующие асимптотические неравенства

$$\begin{array}{rcl} L^K(\mathcal{Q}(n) & \gtrsim & \frac{\log \mathcal{Q}(n)}{\log\log \mathcal{Q}(n)} \\ L^C(\mathcal{Q}(n) & \gtrsim & \frac{\log \mathcal{Q}(n)}{\log\log \mathcal{Q}(n)} \end{array}$$

Множество ФАЛ G, $G \in P_2(m)$, называется **дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ)** порядка m и ранга p, если любая ФАЛ $g,\ g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде $g = g_1 \vee \cdots \vee g_p$, $g_i \in G\ \forall i = 1,\ldots,p$.

Пусть $\Pi = (\pi_1,\ldots,\pi_p)$ - разбиение куба B^m, и пусть для всех i , $i = 1,\ldots,p$ ФАЛ $\phi_i(x_1,\ldots,x_m)$ — характеристическая ФАЛ множества π_i, а $G^{(i)}$ — множество всех таких ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, которые обращаются в 0 не в π_i. Тогда множество ФАЛ $G = G^{(0)} \cup \cdots \cup G^{(p)}$ является ДУМ порядка m и ранга p. ДУМ G будем называть **стандартным ДУМ** порядка m и высоты s, где $s \leq 2^m$, если выполнены соотношения:

- $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$, $s_1 = s_2 = \cdots = s_{p-1} = s$, $s_p = 2^m - (p-1)s \leq s$.
- $\Pi = (\pi_1,\ldots,\pi_p)$ — разбиение куба B_m на последовательные отрезки, то есть такое разбиение, что номер любого набора из множества π_i меньше номера любого набора из множества π_j , если $i < j$
- Для любого $i \in [1 \ \ldots \ p]$ мощность $|\pi_i| = s_i$.

Компоненты разбиения Π будем при этом называть **полосами ДУМ** G, а ФАЛ $\phi_1,\ldots,\phi_p$ — его **характеристическими ФАЛ**.

Лемма Для любых натуральных p, m, s, где $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$, существует ДУМ G порядка m и ранга p такое, что:

- $\lambda = |G| \leq p2^s$
- в G имеется система из p ортогональных ФАЛ $\phi_1, \dots, \phi_p$, обладающих тем свойством, что для любой ФАЛ $g, g \in P_2(m)$, и некоторых ФАЛ $g_1, \dots, g_p$ из G справедливо не только представление $g = g_1 \vee \dots \vee g_p$, но и представление $g = \phi_1 g_1 \vee \dots \vee \phi_p g_p$.

Оценка $L^C(\mathfrak{Q}(n)) \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}$

Множество $\delta, \delta \subseteq B^q$, называется m-регулярным множеством наборов куба B^q, если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все префиксы длины m наборов из δ различны.

Лемма Для любого m-регулярного множества наборов $\delta, \delta \subseteq B^q$, система множеств $\varDelta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$, где $\delta_i = \delta \oplus \alpha$ и $\nu(\alpha) = i - 1$ при всех $i, i = 1, \dots, 2^{q-m}$, образует разбиение куба B^q на m-регулярные подмножества.

Лемма Для любых натуральных $m, \lambda, q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m-регулярное разбиение $\varDelta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \dots, x_q$, либо с ее отрицанием.

Теорема Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, в $\mathcal{U}^\Phi$ существует реализующая ее формула $\mathcal{F}_f$, для которой $\begin{array}{rcl} L(\mathcal{F}_f) & \leq & \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{2\log\log n + O(1)}{\log n}\right) \\ D(\mathcal{F}_f) & \leq & n - \log\log n + 8 + o(1) \end{array}$

Следствие $L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}$ $\quad D(n) \sim n - \log\log n \pm O(1)$

Следствие $L^\pi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}$

Лемма Для функции Шеннона $L^{KBC}(n)$ имеет место асимптотическое равенство $L^{KBC}(n) \sim \frac{2^n}{n}$

Теорема Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что $L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n}\left(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)$

Следствие Отсюда с учетом нижней оценки вытекает, что $L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}$

Следствие Отсюда с учетом нижней оценки вытекает, что $L^{\vec{K}}(n) \sim \frac{2^n}{n}$

Лемма Для системы ФАЛ Q_n при $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство $L^K(Q_n) \leq 2^n + O(\frac{2^n}{n})$

Следствие $L^K(Q_n) \sim 2^n$

Лемма Для системы ФАЛ J_n при $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство $L^K(J_n) \leq 2^{n+1} + O(\frac{2^n}{n})$

Следствие $L^K(J_n) \sim 2^{n+1}$

Самокорректирующиеся КС. 2 возможных неисправных состояния:

- Состояние обрыва – контакт не проводит
- Состояние замыкания – контакт проводит при любых значениях управляющей им БП

КС Σ является (p, q)-самокорректирующейся КС или, иначе, корректирует p обрывов и q замыканий, где $p \geq 0, q \geq 0$, если любая КС Σ', которая может быть получена из КС Σ в результате обрыва не более, чем p, и замыкания не более, чем q, контактов, эквивалентна Σ.

Обозначим через $\mathcal{U}^K_(p, q)$ множество всех (p, q)- самокорректирующихся КС и заметим, что $\mathcal{U}^K_(0, 0) = \mathcal{U}^K$.

Лемма Для любых $p \geq 0, q \geq 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС Σ' , $\Sigma' \in \mathfrak{U}^K_(p,q)$, для которой $L(\Sigma') \leq (p+1)(q+1)L(\Sigma)$.

Будем называть **однородной** любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа. Представление КС Σ в виде объединения ее однородных подсхем без общих контактов будем называть **однородным разбиением** КС Σ, а минимальное число подсхем в таких разбиениях будем обозначать через $\zeta(\Sigma)$.

Лемма Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей $(1,0)$- и $(0,1)$-самокорректирующиеся КС Σ и Σ'' соответственно такие, что $L(\Sigma') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma) \quad L(\Sigma'') \leq L(\Sigma) + \zeta(\Sigma)$

Этот способ позволяет установить асимптотику функции Шеннона для сложности КС из UK(0,1) и UK(1,0).

Функция Шеннона: $L^K_{(p,q)}(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} L^K_{(p,q)}(f)$.

Очевидно, что $L^K(f) \leq L^K_{(p,q)}(f) \quad L^K(n) \leq L^K_{(p,q)}(n)$.

Теорема Для $n = 1, 2, \ldots$ имеет место следующие асимптотические равенства $L^K_{(1,0)}(n) \sim L^K_{(0,1)}(n) \sim \frac{2^n}{n}$