

Вопросы к курсу «Дополнительные главы уравнений в частных производных».

ВМиК, 4 курс, I поток. Лектор: Коровина М.В.

2008 г.

1. Типы уравнений в частных производных. Понятие символа. Эллиптические уравнения и дифференциальные операторы.
2. Классификация уравнений второго порядка с n переменными в точке.
3. Характеристики и характеристические поверхности гиперболических уравнений.
4. Классификация уравнений второго порядка с 2-мя неизвестными.
5. Краевые задачи и задачи Коши для уравнений второго порядка (постановка, корректность).
6. Пространство основных функций D (определение, сходимость в D , непрерывность дифференцирования).
7. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Пространство D' . Теорема о равенстве нулю обобщенной функции.
8. Регулярные обобщенные функции. Критерий равенства обобщенных функций. Лемма Дюбуа-Реймона.
9. Сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Простой и двойной слой.
10. Формулы Сохоцкого.
11. Операции над обобщенными функциями (линейная замена переменных, умножение на гладкую функцию, дифференцирование).
12. Первообразная обобщенной функции, ее существование и единственность.
13. Производная кусочно-гладкой функции: 1) в одномерном случае, 2) обобщение на многомерный случай.
14. Прямое произведение обобщенных функций и его свойства.
15. Свертка обобщенных функций. Определение, пример не существования, простейшие свойства.
16. Условия существования свертки (3 теоремы существования). Свойство непрерывности.
17. Обобщенное решение линейных ОДУ. Фундаментальное решение. Существование решения неоднородной задачи.
18. Метод спуска.
19. Построение фундаментального решения линейного ОДУ.
20. Фундаментальные решения для волнового оператора и оператора теплопроводности.
21. Фундаментальные решения для оператора Лапласа.
22. Свойства фундаментальных решений волнового оператора ($n = 1, 2, 3$).
23. Понятие волнового потенциала.
24. Поверхностные волновые потенциалы и их свойства.

25. Обобщенная задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального оператора.
26. Обобщенная задача Коши для волнового оператора.
27. Вывод формул Пуассона, Кирхгофа, Даламбера.
28. Тепловой потенциал и его свойства.
29. Поверхностный тепловой потенциал. Решение обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности.
30. Постановка задачи на собственные значения для эллиптического оператора. Свойства эрмитовости, положительной определенности граничного оператора, свойства собственных значений и собственных функций.
31. Задача Штурма-Лиувилля. Функция Грина этой задачи.
32. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций. Пример: $-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(l) = 0$.
33. Гармонические функции. Формула Грина для $u \in C^2(\bar{G}), \quad u(x) = 0$ вне G . Формула Грина для гармонических функций. Гармоничность поверхностных потенциалов вне поверхности.
34. Теорема о среднем арифметическом, принцип максимума, теорема о стирании особенности гармонической функции. Обобщенные гармонические функции.
35. Метод Фурье для задачи на собственные значения. Применение метода Фурье к задаче $-\Delta u = \lambda u, \quad u|_L = 0$ для прямоугольной и круглой (радиуса R) области.
36. Энергетические пространства. Процесс Ритца.
37. Обобщение процесса Ритца. Метод Бубнова-Галёркина.