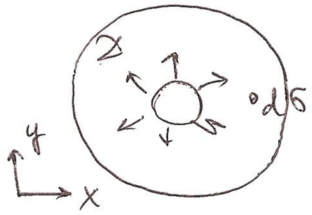
1. Некоторые математические модели, описываемые ур-ями в частных производных.

1) Колебания мембраны



мембрана ≡ упругая мат. поверхность; потенц. энергия ∝ приращению площади

ρ – поверхностная плотность

T_k – кинетическая энергия

T_p – потенциальная энергия

$u = u(x,y,t)$ – отклонение (прогиб) мембраны

k – коэф-т натяжения

σ – площадь мембраны в момент времени t;

$$\sigma = \int_D \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy$$

площадь в полож. покоя:

$$|D| = \int_D dx\,dy$$

Предположения:

- $u = u(x,y,t)$ – дост. гладкая функция
- колебания мембраны малы – пренебр. степенями величин u, u_x, u_y, u_t выше вторых.

$$T_k = \int_D \rho \frac{u_t^2}{2}\,d\sigma; \quad T_p = \left(\int_D k\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,d\sigma - \int_D k\,d\sigma\right) \approx$$

$$\approx \left(\int_D k\left(1+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2\right)d\sigma - \int_D k\,d\sigma\right)$$

Будем считать: $u_x^2, u_y^2 << 1$, т.е. деформации невелики

$$\Rightarrow T_p = \int_D \frac{k}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right)d\sigma$$

Пусть (t_1,t_2) – промежуток времени наблюдения.

Принцип Гамильтона $\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}(T_k-T_p)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}dt\int_D[\rho u_t^2 - k(u_x^2+u_y^2)]\,dx\,dy$

д.б. стационарным и доставлять min $\Rightarrow u(x,y,t)$ – реш-е ур-я Эйлера – Остроградского вариац. задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(k u_y) = 0$$

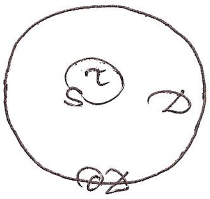
При предположении: u им. 2ые производные в обл-ти D, $\rho, k = const \Rightarrow \rho u_{tt} = k(u_{xx}+u_{yy}) \Rightarrow$

⇒

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \text{ где } a^2 = k/\rho \\ u|_S = 0 \text{ – край закреплён} \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y),\ u_t|_{t=0} = \psi(x,y) \text{ – нач. усл-я} \end{cases}$$

[имеет смысл и трёхмерная задача: $u_{tt} = \Delta u$, $\dim x = 3$]

2) <u>распространение тепла</u>



в среде, заполненной массой:

- удельной теплоёмкостью c
- плотностью ρ
- коэффициентом теплопр-ти k

$u(x,t)$ – температура среды

$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS$ – количество тепла, поступающего в D через S за время (t_1, t_2)

$u(x, t+dt) - u(x,t) \approx u_t dt$ – приращение температуры в рез-те поступления тепла

⇒ ур-е баланса тепла: $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{t_1}^{t_2} \int_\tau c\rho u_t \, d\tau \, dt$ (*) τ – элемент объёма

$\bar{n}$ – внешняя нормаль к S

По ф. Гаусса-Остроградского: $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\tau \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\tau c\rho u_t \, d\tau$

При $c, k, \rho = \text{const}$, ввиду произв-ти пром-ка времени (t_1, t_2) и объёма области D ⇒ $c\rho u_t - k\Delta u = 0$ ⇒ $\underline{u_t = a^2 \Delta u}$, где $a = \frac{k}{c\rho}$.

$$\left.\begin{aligned} & u|_S = f(x), \\ & \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(x), \\ & \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\Big|_S = h(x,t) \end{aligned}\right\} \text{ – возможные кр. усл-я}$$

(*): $\int_S \frac{du}{dn} dS = \int_S (\operatorname{grad} u, n) dS \underset{\text{О-Г}}{=} \int_\tau \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) d\tau$

2. Основные уравнения в ЧП и задачи, корректно поставленные для них.

1) задача Дирихле (первая кр. задача) [для ур-я Лапласа]
Пусть обл-ть $D \subset E_n$, S - граница - $(n-1)$-ая гиперпов-ть.
Задача: опред-ть регулярное в обл-ти D реш-е $u(x)$ ур-я

$$\Delta u = 0 \text{ - ур-е Лапласа},$$

непрерывное в $D \cup S$ (- замкн. область) и удовл. кр-усл-ю:

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y), \; x \in D, \; y \in S, \text{ где}$$

φ - известная, непрерывная, действ. ф-я на S.

2) задача Коши [для волнового уравнения].
Пусть $G \subset E_{n-1}$, $x = (x_1 \dots x_{n-1})$.
Задача: определить регулярное в обл-ти G реш-е $u(x)$ ур-я

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \text{ - волновое ур-е},$$

при начальных усл-ях:

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x_1 \dots x_n)}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0} = \psi(x), \; x \in G,$$

где φ - изв., дост. гладкие, действ. в G ф-ции.

3) первая кр. задача [для ур-е теплопроводности]
Пусть $D \subset E_n$, D - ограничена:
- цилиндрической пов-тью с образующими, $\parallel$-ными оси x_n
- двумя плоскостями $x_n = 0$, $x_n = h$, $h > 0$.

S = часть границы $\uparrow D$ без верхнего основания $x_n = h$.
Задача: определить регулярное в обл-ти D реш-е $u(x)$ ур-я

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \text{ [$\leftarrow$ ур-е теплопроводности при } n=4],$$

удовл. кр. усл-ю: $\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y)$, $y \in S$, $x \in D$,

где φ - изв., дост. гладкая, действ. ф-я на S.

[Регулярное решение ≡ реш-е, им. в обл-сти непрерывные частн. производные].

Корректность постановки:

- единственность решения [$\exists + !$]
- малому изменению нач. данных и пр. части соотв-ет малое изменение реш-е задачи. [уст-ть]

2) корректность пост-ки з. Коши [для волн. ур-я].

$\boxed{T:}$ Задача Коши для волн. ур-я [как однородн., так и неодн.] не может иметь более одного решения.

Док-во: Для простоты, $\measuredangle$ $x_1 = x$ — одно простр. измерение.
Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — реш-е з. Коши для ур-я
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(x,t) \Rightarrow u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ — реш-е ур-я колебания струны: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, удовл. нач. условиям:

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Покажем, что ↑ не может иметь $\neq 0$ реш-е, удовл. усл-ям ↑.
Исп. тождество: $-2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0.$
Интегрируем тождество по Δ-ной обл-сти с вершинами: т. $A(x-t,0)$, $B(x+t,0)$, $C(x,t)$ + исп. ф. Гаусса-Остроградского:

$$\Rightarrow \int_\Delta \left[-2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right] d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_{AB+BC+CA} -2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}\, d\tau - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right] d\xi = 0 \Rightarrow$$

В силу нач. усл-й $\Rightarrow$ вдоль AB: $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{ур-е } BC:\ \xi = -\tau + x + t, \\ \text{ур-е } CA:\ \xi = \tau + x - t \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d\xi = -d\tau \text{ — вдоль } BC, \\ d\xi = d\tau \text{ — вдоль } CA. \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \int_{BC} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau - \int_{CA} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \text{ на } BC \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \text{ на } AC \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ — в т. } C,$$

т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$

Т.к. т. C выбрана произвольно, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ для $\forall$ т. на плоскости (x,t), т.е. $u(x,t) = const$; нач. усл-е: $u(x,0) = 0$ $\Big\} \Rightarrow u(x,t) = 0$ всюду.

[для неоднородн. ур-я нач. усл-е: $u_1(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial}{\partial t} u_1(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x)$ $\Rightarrow$ по ф. Даламбера строим $u_2(x,t)$ — реш-е однородн. ур-я, удовл. неодн. нач. усл-ем. Разность $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ — реш-е неоднородн. ур-я, удовл. однородн. нач. усл-ем].

$\boxed{Т:}$ Малому изменению начальных данных φ, ψ и прав. части g волн. ур-я соответствует малое изм-е реш-е задачи Коши.

<u>Док-во:</u> [на примере однородн. задачи Коши для неодн. ур-я]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(x,t), \quad (t>0 \text{ — без огр-я общности}). \\ u(x,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Пусть $g_1(x,t) - g_2(x,t) = g(x,t)$ — разн-ть пр. частей: $\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -g_1(x,t), \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -g_2(x,t). \end{cases}$

$|g(x,t)| < \varepsilon$

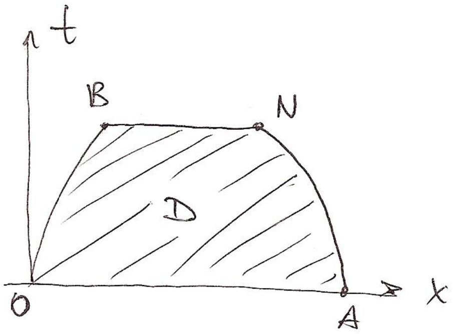
$\Rightarrow$ для разности решений $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ получаем:

$$|u(x,t)| = \frac{1}{2} \left| \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau)\, d\tau_1 \right| < \varepsilon \int_0^{\tau} (t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ малому изм-ю пр. части неодн. ур-я в обл-ти её задания соответствует малое изм-е реш-я з. Коши, если область ограничена по переменному t.

3) корректность постановки первой кр. задачи [для ур-я теплопроводности].

$\boxed{Т:}$ [принцип экстремума] Регулярное решение $u(x,t)$ ур-я $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, непрерывное в $D \cup S \cup B_N$ $\forall$ своего экстремума достигает на S.



Док-во: [случай максимума]

Обозн. M – макс. $u(x,t)$ на замык. $D \cup S \cup BN$. Пусть (от противного) $M \notin S$: $M=(x_0,t_0) \in$
$\in D \cup BN$, тогда:

$\exists$ ф-ю $v(x,t) = u(x,t) + a(T-t)$, $a = const > 0$.

$0 \le t \le T \Rightarrow u(x,t) \le v(x,t) \le u(x,t) + aT$ в $D \cup S \cup BN$

Пусть M_u^S – макс. $u(x,t)$ на S, M_v^S – макс. $v(x,t)$ на S.
По допущению, $M_u^S < M$. Подберём a, т.ч. $a < \frac{M-M_u^S}{T} \Rightarrow$
$\Rightarrow M_v^S \le M_u^S + aT < M_u^S + \frac{M-M_u^S}{T}T = M = u(x_0,t_0) \le v(x_0,t_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow v(x,t)$ не может достигать макс. на S $\Rightarrow$ макс. $M_v' = (x_1,t_1) \in$
$\in D \cup BN$.

1) если $(x_1,t_1) \in D$:
$M_v' = (x_1,t_1)$ – т. макс. $v(x,t)$ на $D \cup S \cup BN \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{M_v'} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_{M_v'} \le 0$,
т.е. $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ge 0$

2) если $(x_1,t_1) \in BN$: (т.е. $t_1 = T$)
$M_v' = (x_1,t_1)$ – т. макс. $v(x,t)$ на $D \cup S \cup BN \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{M_v'} \ge 0$
(x_1,T) явл-ся т. макс-ма $v(x,t)$, как ф-ции x $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 v(x_1,T)}{\partial x_1^2} \le 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{(x_1,T)} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_{(x_1,T)} \ge 0$
подставляем в ↑ $v(x,t) = u(x,t) + a(T-t)$ $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t_1} - a - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ge 0$, $x = x_1$, $t = t_1$ ← т.к. $u(x,t)$ – реш-е исходн. ур-я $\Rightarrow -a \ge 0$ ↯ т.к. $a > 0$.

[аналогично, для min-ма]

Т: Регулярное решение $u(x,t)$ задачи $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, непр. в обл-ти $D \cup S \cup BN$, удовл. усл-ям:
$u|_{OB} = \psi_1(t)$, $u|_{AN} = \psi_2(t)$, $u|_{OA} = \varphi(x)$,
$\psi_1(0) = \varphi(0)$, $\psi_2(A) = \varphi(A)$,
$\exists!$ и устойчиво.

Док-во: 1) Пусть $u_{1,2}(x,t)$ – регулярн. реш-я ур-я ↑, удовл. кр. условиям ↑ $\Rightarrow u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ – рег. решение ур-я ↑, обращ. в 0 на S $\Rightarrow$ {в силу принципа экстремума} $\Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,t)=0$ в DUSUBN $\Rightarrow \nexists \Rightarrow$ реш-е !

2) Если $|u_1|_S - u_2|_S| < \varepsilon,\ \varepsilon>0 \Rightarrow$ {в силу пр. экстремума} $\Rightarrow$

$\Rightarrow |u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon$ всюду в DUSUBN $\Rightarrow$ устойчивость

3) Пусть OB и AN – прямые : $O(0,0)$, $B(0,T)$, $A(l,0)$, $N(l,T)$, причём : $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$, $0\le t\le T$,

$u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le l$, $\varphi(x)$ – непр. дифф на $0\le x\le l$

$\varphi|_{x=0}=\varphi|_{x=l}=0$.

$\varphi(x)$ на $0\le x\le l$ разложима в ряд Фурье:

$\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{l}x$ – абс. равномерно сх-ся, при $t>0$,

т.к. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\pi k}{l}\right)^m e^{-\frac{\pi^2k^2t}{l^2}}=0$, $m=0,1,\ldots$

где $a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx$, $k=1,2,\ldots$ – коэф-ты разложения

$\Rightarrow$ рег. реш-е ур-я Т : $u_k(x,t)=e^{-\pi^2k^2t/l^2}\sin\frac{\pi k}{l}x$,

удовл. кр. усл-ям : $u_k(0,t)=u_k(l,t)=0$

$u_k(x,0)=\sin\frac{\pi k}{l}x$

$u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{\pi^2k^2t}{l^2}}\sin\frac{\pi k}{l}x$ – искомое реш-е $\Rightarrow$ реш-е $\exists$

[пример Адамара некорректно поставленной задачи]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (1)$$

$$u(x,0)=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\nu(x)=\frac{\sin nx}{n} \quad (2)$$

рассм. $u(x,y)=\frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}$ – реш-е (1), удовл. (2).

Т.о., для достаточно большого n ф-ю $\nu(x)$ можно сделать сколь угодно малой, в то время как соотв. реш-е з. Коши для ур-я (1) неограничено при $n\to\infty$ $\Rightarrow$ полученное решение неустойчиво $\Rightarrow$ данная задача НЕ является корректно поставленной.

3. Основные классификации УЧП и систем.

Пусть $D \subset E^n$, $x=(x_1 \dots x_n)$, $n \geq 2$, и в обл-ти D будем рассм-ть $F(x, \dots, p_{i_1 \dots i_n}, \dots)$, $x \in D$, $i_1, \dots, i_n$:, $i_j \geq 0$, $i_j \in \mathbb{N}$.

$p_{i_1 \dots i_n}$, $i_1+i_2+\dots+i_n=k$, где $k=\overline{0,m}$

Пусть $\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_n}} \neq 0$, $i_1+\dots+i_n=m$

Тогда: $F\left(x, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \dots\right)=0$ (1) – уравнение в частн. произв-ых

Если F – линейная ф-я по $p_{i_1} \dots p_{i_n}$, то

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1 \dots i_n} A^{k}_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x) \quad (2)$$

Если ур-е линейно по старшим производным, то оно КВАЗИЛИНЕЙНО.

Если в (2) $f(x)=0$, то такое ур-е наз. ОДНОРОДНЫМ: $Lu=0$.

Решения однородн. ур-я образ. линейн. пр-во:

u_1 и u_2 – реш-я $\Rightarrow \alpha u_1 + \beta u_2$ – решение

Неоднородн. ур-е имеет единств. реш-е $\Leftrightarrow$ решение однородного ур-я – нулевое:

$Lu=f(x)$ – $\forall$ решение: $u = u_f + u_0$

реш-е однородного

частн. реш-е неоднородного ур-я

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \quad (3)$$

Если $\forall A_{ij}(x)=0$, то ур-е вырождается.

Уравнению (3) сопоставим квадратичную форму

$$Q(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$$

С помощью [невырожденного] преобр-я координат:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_1(\xi_1 \dots \xi_n) \\ \dots \\ \lambda_n = \lambda_n(\xi_1 \dots \xi_n) \end{cases} \qquad \frac{\partial(\lambda_1 \dots \lambda_n)}{\partial(\xi_1 \dots \xi_n)} \neq 0$$

$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2$, где $\alpha_i = -1, 1, 0$ (*) [приведение к главным осям]

Опр.:, Ур-е (3) наз. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ в т. $x \in D$, если только один коэф-т $\uparrow$ $\alpha = -1$, а остальные $(n-1)$ равны 1 (или vise verca) в (*).

Опр.:, Ур-е (3) наз. ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ в т. $x \in D$, если все α_i либо $= 1$, либо $= -1$ в (*).

Опр.:, Ур-е (3) наз. ПАРАБОЛИЧЕСКИМ в т. $x \in D$, если один из коэф-тов $\alpha = 0$ в (*), а остальные — одного знака.

Есть дальнейшая классификация:

Опр.:, Ур-е (3) наз. УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ в т. x, если l коэф-тов $\alpha_i = -1$, а остальные $(n-l) = +1$ в (*).

Опр.:, Ур-е (3) наз. УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИМ в т. x, если l коэф-тов $\alpha_i = 0$, а остальные — одного знака в (*).

Опр.:, Ур-е (3) наз. гиперболическим (эллиптич., параболич.) в обл-ти D, если оно — гиперболическое (эллиптическое, параболическое) в каждой точке обл-ти D.

Приведение дифф ур-я (3) во всей обл-ти возможно только в двумерном случае.

Пусть $F = (F_1, \dots, F_N)$, где $F_i = F_i(x, \dots, p_{i_1 \dots i_n}, \dots)$, $x \in E^n$

$p_{i_1 \dots i_n} = (p^1_{i_1 \dots i_n}, \dots, p^{N_1}_{i_1 \dots i_n})$

Тогда равенство (1'): $F(x, \dots p_{i_1 \dots i_n}, \dots) = 0$, где

$u = (u_1 \dots u_{N_1})$, $p_{i_1 \dots i_n} = \dfrac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} u_k}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$, $\dfrac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_n}} \neq 0$

является системой уравнений в частных производных $N \times N_1$-го порядка.

Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных 2го порядка.

(1) $a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f(x,y)$,

где $a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$ – ф-ции от $(x,y)\in D\subset E^2$.

С помощью невырожденного преобр-я: $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$

$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}\neq 0$, что систему можно обратить;

$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x$

$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y$

$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}$

$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}$

$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+\ldots$

$\Rightarrow \bar a_{11}u_{\xi\xi}+2\bar a_{12}u_{\xi\eta}+\bar a_{22}u_{\eta\eta}+\bar F=0$ (2),

где $\bar a_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\eta_x+a_{22}\eta_x^2$

$\bar a_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y$

$\bar a_{22}=a_{11}\xi_y^2+2a_{12}\xi_y\eta_y+a_{22}\eta_y^2$

Выберем ξ,η т.ч. $\bar a_{11}=0$, $\bar a_{22}=0$

$\boxed{Л}$ 1) Если ф-я $z=\varphi(x,y)$ явл. реш-ем $a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0$ (3), то $y:\varphi(x,y)=C$ – явл. реш-ем ОДУ: $a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0$ (4)

2) Если $\varphi(x,y)=C$ – общий интеграл ОДУ (4), то $z=\varphi(x,y)$ – – решение (3).

Док-во:

1) $\varphi(x,y)=C\Rightarrow$ {дифф-е неявн. ф-ции} $\Rightarrow y'_x=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$

(3) $\Leftrightarrow a_{11}\Big(\underbrace{\frac{\varphi_x}{\varphi_y}}_{y'_x}\Big)^2-2a_{12}\underbrace{\frac{-\varphi_x}{\varphi_y}}_{y'_x}+a_{22}=0$

$\Leftrightarrow a_{11}(y'_x)^2-2a_{12}y'_x+a_{22}=0$

$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2\Big|_{y=f(x,C)}=0$

2) $\varphi(x,y)=C$ – общий интеграл (4)

$\forall(x_0,y_0)\in D$: реш-е (4) – инт. кривая $y=f(x,C_0)\Rightarrow$ дифф-ем эту ф-ю $\Rightarrow$ (3), ч.т.д.

Опр. 1. Ур-е $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0$ наз. характеристическим уравнением уравнения в частных производных.

Полагая $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ – реш-е характеристич. ур-я, $\psi(x,y)$ – другое независимое с ним реш-е характеристич. ур-ния.

$$y'_x = \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}}, \quad y'_x = \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}} \qquad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

1) Если $D > 0$, то ур-е (1) – ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ
2) Если $D < 0$, то ур-е (1) – ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ
3) Если $D = 0$, то ур-е (1) – ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ

1) $\bar{a}_{11} = 0$, $\bar{a}_{22} = 0$ $\quad \begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases} \quad u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$

2) $D = 0$ $\quad \xi = \varphi(x,y)$, η – $\forall$ другое независ. реш-е

$u_{\eta\eta} = \Phi$

3) $D < 0$ $\quad \varphi(x,y)$ – реш., $\varphi^*(x,y)$: $\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}$, $\beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2}$

$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi$

4. Волновое уравнение. Формула Кирхгофа.

Волновое ур-е: $\Delta u - u_{tt} = 0$, $x = (x_1 \dots x_n) \in E^n$, $t \in E^1$, $t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$; $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$. (ЗК)

рассм. $n = 3$: $(*)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. – гиперболическое ур-е в E^4

$\boxed{Л}$ $u(x,t) = \int\limits_S \frac{\mu(y_1,y_2,y_3)}{|y-x|} dS_y$, где $|y-x| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$,

S – сфера с центром т. x и радиусом t: $S = \{|x-y|^2 = t^2\}$.

$\mu(y_1,y_2,y_3) \in C^2$ на S по y_1,y_2,y_3 $\Rightarrow u(x,t)$ – регулярн. реш-е $(*)$ в E^4.
произв. ф-ция

Док-во: Сделаем замену переменных: $y_i = x_i + t\xi_i$, $i=1,2,3$

$\Rightarrow |\xi| = 1 = \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$, σ – сфера с центром в 0 и рад. 1.

$|y-x|^2 = t^2$, $dS_y = t^2 d\sigma_\xi$, где $d\sigma_\xi$ – элемент поверхности $|\xi|=1$

$\Rightarrow u(x,t) = t\int\limits_\sigma \mu(x+t\xi)d\sigma_\xi \Rightarrow \Delta u = t\int\limits_\sigma \sum\limits_{i=1}^3 \frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\int\limits_\sigma \mu(x+t\xi)d\sigma_\xi\right] = \int\limits_\sigma \mu(x+t\xi)d\sigma_\xi + t\int\limits_\sigma \sum\limits_{i=1}^3 \frac{\partial\mu}{\partial y_i}\xi_i d\sigma_\xi =$

$= \frac{u}{t} + \frac{1}{t}I$, где $I = \int\limits_S \left[\frac{\partial\mu}{\partial y_1}\nu_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y_2}\nu_2 + \frac{\partial\mu}{\partial y_3}\nu_3\right]dS_y$, (ν_1,ν_2,ν_3) – внешн. нормаль к сфере.

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\left(u/t + \frac{1}{t}I\right) - \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}$

По ф. Гаусса-Остроградского: $I = \int\limits_{|x-y|\le t} \sum\limits_{i=1}^3 \frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dy = \int\limits_D \Delta\mu\, dy$. D ← внутренность сферы S.

Перейдём от декартовых координат к сферическим ρ, φ, θ:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \rho\cos\varphi\sin\theta, & \theta\in[0,\pi], \\ y_2 = x_2 + \rho\sin\varphi\sin\theta, & \varphi\in[0,2\pi], \\ y_3 = x_3 + \rho\cos\theta \end{cases} \qquad \frac{D(y_1,y_2,y_3)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta \Rightarrow$$

$\Rightarrow dy = \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

$\Rightarrow I = \int\limits_0^t \rho^2 d\rho \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu\, d\varphi$

$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} = t^2\int\limits_\sigma \Delta\mu\, d\sigma_\xi$, т.к. $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = d\sigma_\xi \Rightarrow \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = t\int\limits_\sigma \Delta\mu\, d\sigma_\xi = \Delta u$, ч.т.д.

$tM(\mu) = \frac{1}{4\pi}t\int\limits_\sigma \mu(y)d\sigma_\xi \Rightarrow M(\mu) = \cancel{\frac{1}{4\pi}}\int\limits_\sigma \mu(y)d\sigma_\xi \Rightarrow M(\mu) = \cancel{\frac{1}{4\pi t^2}}\int\limits_S \mu(y)dS_y$

$y = x + t\xi$

$tM(\psi)$ – регулярное решение

$\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]$ – регулярное реш-е, т.к. ур-е им. постоянные коэф-ты

Если $\varphi(x)\in C^3$, $\psi(x)\in C^2$ $\Rightarrow$ $\underline{u(x,t) = \left(tM(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]\right)\cdot\frac{1}{4\pi}}$ ← регул. реш-е в з. Коши (ЗК)

└ ФОРМУЛА КИРХГОФА

$u(x,0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma \varphi(x)d\sigma_\xi = \varphi(x)$; $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma \psi(x)d\sigma_\xi = \psi(x)$

5. Формула Пуассона. Метод спуска.

Решение $u(x_1, x_2, t)$ з. Коши для волн. ур-я с двумя простр. переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (\Delta u = u_{tt}),\ x = (x_1, x_2) \in E^2,\ t \in E^1$$

с нач. данными: $u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, t)\Big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2),$$

которые им. непр. частные производные 3го и 2го порядка соответственно, может быть получено из ф. Кирхгофа

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} tM(\psi) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)] \quad (1)$$ методом спуска

<u>Суть метода:</u> $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $\psi = \psi(x_1, x_2)$

$$(1) \Rightarrow u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y^2| = t^2} \psi(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\, dS_y +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|y^2| = t^2} \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\, dS_y\right]$$ – не завис. от x_3 и удовл. ур-ю и нач. усл. ↑.

$dy_1 dy_2$ – проекция эл-та площади dS_y сферы $|y|^2 = t^2$ на круг $y_1^2 + y_2^2 < t^2$: $dy_1 dy_2 = dS_y \cos(\widehat{i_3, \nu}) = \frac{y_3}{|t|} dS_y$, где i_3 – орт оси x_3, ν – нормаль сферы $|y|^2 = t^2$ в т. (y_1, y_2, y_3)

При выч-нии инт-лов ↑ нижняя ($y_3 < 0$) и верхняя ($y_3 > 0$) половины сферы $|y|^2 = t^2$ проецируются на круг $y_1^2 + y_2^2 < 1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{d}\frac{\psi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{d}\frac{\varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}},$$

где d – круг: $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < t^2$ ↑ ФОР-ЛА ПУАССОНА (2)

[из (2) видно, что для опред-я волны $u(x_1, x_2, t)$ в т. (x_1, x_2, t) недостаточно знания зн-й $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$ на окружности $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = t^2$, так же требуются зн-я нач. данных $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$ во всех точках круга d (не вып-ся принцип Гюйгенса].

6. Уравнение Лапласа. Свойство гармонических функций.

Обозн. $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа; $\Delta u = 0$ – УР-Е ЛАПЛАСА

Опр.: Ф-я $u(x)$ называется гармонической в области D, если она обладает в D непр. частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет ур-ю Лапласа ↑.

Свойства:

1) $u(x)$ – гарм. ф-я в $D \Rightarrow u(\lambda Cx + h)$ – гарм. ф-я, λ – скаляр, C – пост., действ. ортогональн. м-ца порядка n, $h = (h_1 \dots h_n)$ – – постоянный действительный вектор $(x, \lambda Cx + h \in D)$.

▷
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & & \dots \\ c_{in} & \dots & c_{in} \\ \dots & & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} x_i + h_j \Rightarrow \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = c_{ji}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \cdot c_{1i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n} c_{ni} \right) \cdot \lambda$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} c_{1i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n} c_{ni} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} c_{ji} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} c_{ji} \right) \cdot \underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_i}}_{c_{ki} \cdot \lambda} = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ji} c_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \lambda^2 \sum_{i} \sum_{k,j} c_{ji} c_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} = \lambda^2 \sum_{k,j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_{ji} c_{ki}}_{= \begin{cases} 0, & k \ne j, \\ 1, & k = j. \end{cases}} = \lambda^2 \sum_{k} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}$$

← т.к. C – ортогон.

◁

2) u_k – $k = \overline{1,m}$ – гарм. $\Leftrightarrow u(x) = \sum_{k=1}^{m} u_k(x) c_k$ – гарм., $c_k = const$

∀ u – гарм.: (*)
$$\underbrace{\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d\tau}_{} = \int \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u \underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}}_{0 \text{ из ур-я Лапласа}} \right) d\tau = \int \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau.$$

Если ∀ u, v – гарм. ф-ции $\Rightarrow \overline{\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\tau} = 0$

↑ док-ся аналогично

Применим ф-лу Остроградского–Гаусса:

$$\underbrace{\quad}_{} \underset{\Gamma-O}{=} \int_S u \frac{\partial u}{\partial n_s} ds = \int_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau \quad (1)$$

$$\overset{r\to 0}{=} \int_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n_S} - u\frac{\partial v}{\partial n_S}\right)dS = 0 \quad (2)$$

(1), (2) – ФОРМУЛЫ ГРИНА

Свойства:

3) Если гарм. в обл-ти D ф-я $u(x)$ непр-на в $D\cup S$ вместе с производными 1го порядка, $u|_S = 0 \Rightarrow u(x) = 0$ для $\forall x \in D\cup S$ (св-во единственности гармонической функции).

$\triangleright \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau = \int_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,\ i=\overline{1,n},\ x\in D$, т.е. $u(x) = const$ для $\forall x\in D$, $u(y)=0,\ y\in S$ $\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ {в силу непр-ти $u(x)$ в $D\cup S$ – замкн.} $\Rightarrow u(x) = 0,\ \forall x\in D\cup S$ $\triangleleft$.

4) Интеграл, взятый по гр-це S от нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, $u(x)$ – гарм. в обл-ти D, непр. вместе со своими первыми производными, $= 0$: $\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_y}dS_y = 0$ [положив в (2) $v(x) = 1,\ x\in D$].

Рассм. ур-е для опред-я фунд. реш-я ур-я Лапласа:

$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = 0$ ← УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА.

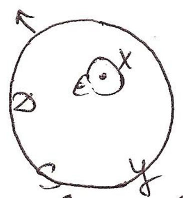
$u=1$ – решение. Ищем реш-е в виде $u=r^k$:

$k(k-1)r^{k-2} + (n-1)kr^{k-2} = 0$

$-2k + k^2 + nk = 0 \Rightarrow k=0 \vee k=2-n \Rightarrow u=1 \vee u=r^{2-n}$

$\measuredangle\ E(r) = \begin{cases} -\ln r, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)r^{n-2}}, & n>2 \end{cases}$ ← Пусть $r=|x-y|$

$E(x,y)$ – потенциал единичн. заряда, помещённого в т. X.



y на S, $S=\partial\Omega$

ω_n – площадь ед. сферы в E^n, $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

$\Rightarrow E(x,y) = \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}$ – гарм. и по x, и по y, при $x\neq y$. $S\cup |x-y|=\varepsilon$ – гр-ца обл-ти гарм-ти ф-й u и E.

Рассм. $\int_S \left(E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_S} - u\frac{\partial E}{\partial n_S}\right)dS_y = -\int_{|x-y|=\varepsilon}\left(E\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} - u\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}\right)dS_\varepsilon$

$I_1 = \int_{|x-y|=\varepsilon} E\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon = E_\varepsilon(x,y)\int_{|x-y|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon = 0$

$I_2 = \int_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon = \int_{|x-y|=\varepsilon} u(x)\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon + \int_{|x-y|=\varepsilon}[u(y)-u(x)]\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon =$

$$\ominus\; u(x)\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}\underbrace{\frac{\partial E}{\partial \bar n_\varepsilon}\,dS_\varepsilon}_{=\frac{\omega_n\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}}} + \{0\} = \omega_n u(x)$$

$$\left\{\frac{\partial E}{\partial \bar n_\varepsilon} = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{1}{r^{n-1}}\right\}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\left\{E(x,y)\frac{\partial u}{\partial \bar n_s} - u\frac{\partial E(x,y)}{\partial \bar n_s}\right\}dS$$

Теорема о среднем для гармонической функции!

Из интегрального представления имеем:

$$E(x,y) = \begin{cases} -\ln R, & n=2,\\ \dfrac{1}{(n-2)R^{n-2}}, & n>2\end{cases}$$

$$I_1 = \int\limits_{C_R} E\frac{\partial u}{\partial n_{C_R}}\,dS_{C_R} = E(R)\int\limits_{C_R}\frac{\partial u}{\partial n_{C_R}}\,dS_{C_R} = 0$$

$$I_2 = \int\limits_{C_R} u\frac{\partial E}{\partial \bar n_{C_R}}\,dS_{C_R} = \omega_n u(x)$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{C_R} u\,dS_{C_R}\frac{1}{R^{n-1}} = $$

$$= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{C_R} u(y)\,dS_y$$ — т. о среднем по поверхности сферы.

$$|y-x| = \rho \le R: \quad u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}}\int\limits_{C_\rho} u(y)\,dS_y \;\Big|\cdot \rho^{n-1}\int_0^R d\rho$$

интегрируем $\Rightarrow$ $$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n}\int\limits_{C_R} u(y)\,d\tau_y$$ — т. о среднем по шару

$\boxed{\text{Т}}$ [принцип экстремума для гармонической функции]: Внутри области гармоничности гарм. ф-я не достигает ни своего наибольшего, ни своего наименьшего значения (если она не постоянная)

Док-во: [от противного]:

М – макс.
m – мин.

$$u(x_0) = M = \frac{n}{\omega_n R^n}\int\limits_{\Omega_R} u(y)\,d\tau_y.$$ Но должно быть $u(y) < M$ – окр. т. x_0 в некоторой Ω_R, т.к. x_0 – т. макс.

$\Rightarrow u(y) = M$ ※ ч.т.д.

Гамма-функция: $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$

(7.) Уравнение Лапласа. Формула Грина. Нужно также присовокупить мат-л б. (6).

Пусть в обл-ти Q ($\partial Q \in C^1$) задан $A(x)=(A_1(x)\ldots A_n(x))$ – вектор, $A_i(x)\in C(\overline{Q})\cap C^1(Q)$, $i=\overline{1,n}$.

$\boxed{T}$ [из анализа, ф. Остроградского] Если ф-я $\operatorname{div} A(x) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ – непр. в $\overline{Q}$ [или даже интегр-ма по Q] $\Rightarrow$ спр-ва формула:

$$\int\limits_Q \operatorname{div} A(x)\,dx = \int\limits_{\partial Q} A(x) n(x)\,dS,$$ где n – ед. вектор внешней нормали к ∂Q ~~Q~~.

Пусть $u(x)\in C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q})$, $v\in C^1(\overline{Q})$, ф-я $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ – интегр-ма по Q. Т.к. $v\Delta u = v\operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u\nabla v$, где $\nabla u\nabla v = \underset{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{u_{x_1}}\underset{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{v_{x_1}} + \ldots + \underset{\frac{\partial u}{\partial x_n}}{u_{x_n}}\underset{\frac{\partial v}{\partial x_n}}{v_{x_n}}$, то по ф. Остроградского T имеем:

(1) $$\int\limits_Q v\Delta u\,dx = \int\limits_{\partial Q} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \int\limits_Q \nabla u\nabla v\,dx,$$ т.к. $\nabla u\cdot n\big|_{\partial Q} = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial Q}$ ~~(1)~~

Если $u,v\in C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q})$, $\Delta u, \Delta v$ – интегр-мы по Q, то им. место ф-ла:
$$\int\limits_Q u\Delta v\,dx = \int\limits_{\partial Q} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \int\limits_Q \nabla v\nabla u\,dx \quad (2)$$

(1)-(2) - вычитая почленно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_Q (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int\limits_{\partial Q}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS \quad (3)$$ (2), (3) – ф. ГРИНА

<u>Связь с ур-ем Лапласа,</u> $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0\right]$

Если $u(x), v(x)$ – гарм. ф-ции $\in C^1(D\cup S)$, им. интегрир. 2<u>ые</u> произв-ые в D, то левая часть (3) $=0$, получаем:

$$\int\limits_{\partial Q}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS = 0 \quad (4)$$

В фор-ле (1) положив $u=v$ при тех же ↑ усл-ях $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_Q u\Delta u\,dx = 0 \Rightarrow \text{получаем: } \int\limits_{\partial Q} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\limits_Q \nabla u\nabla u\,dx$$

или $$\int\limits_{\partial Q} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\limits_Q \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

(8.) Уравнение Лапласа. Функция Грина.

Обозн. $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа; $\Delta u = 0$ — УР-Е ЛАПЛАСА.

Опр.: Ф-ей Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в обл-ти D называется ф-я $G(x,\xi)$ двух точек x и $\xi \in D \cup S$, обладающая свойствами:

$$E(x,y) = \begin{cases} -\log|x-y|, & n=2, \\ -\frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, & n>2. \end{cases}$$

1) $G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi)$, где E — элементарн. реш-е ур-я Лапласа, $g(x,\xi)$ — гарм. ф-я как по $x \in D$, так и по $\xi \in D$;

2) когда точка x или ξ лежит на гр-це S обл-ти D, то $G(x,\xi) = 0$. $\left[g(x,\xi)\big|_S = -E(x,\xi)\big|_S \right]$

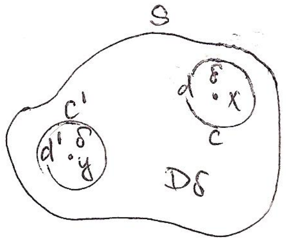
Свойства ф. Грина:

\+ 1) $G(x,\xi) \geq 0$ всюду в D

▷ Обозн. $D_\delta \subset D$, D_δ — вне шара $|y-\xi| \leq \delta$, $\xi \in D$, δ — дост. мало. $\lim\limits_{x \to \xi} G(x,\xi) = +\infty \Rightarrow$ при дост. малом δ: $\underbrace{G(x,\xi) > 0 \text{ при } |x-\xi| < \delta}_{(1)} \Rightarrow$ на гр-це обл-ти D_δ: $G(x,\xi) \geq 0 \Rightarrow$ {в силу принципа экстремума} $\Rightarrow \underbrace{G(x,\xi) \geq 0, \ \forall x \in D_\delta}_{(2)}$. (1), (2) $\Rightarrow G(x,\xi) \geq 0$, $\forall x \in D \cup S$.

\+ 2) Функция Грина $G(x,y)$ симметрична относительно т. x и y.

▷ Удалим из обл-ти D замкн. шары $|z-x| \leq \delta$ и $|z-y| \leq \delta$, дост. малого радиуса, вместе с т. x и y. Оставшееся обозн. D_δ.



$v(z) = G(z,y)$ — гарм-на в $D \setminus d'$,

$u(z) = G(z,x)$ — гарм-на в $D \setminus d$

D_δ — область гармоничности G

По ф. Грина $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_S \left[v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \right] dS_y = 0$$

применяем ф-лу ↑ для области $D_\delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_S \left[G(z,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n_z} - G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} \right] dS_z = \left(\int\limits_C + \int\limits_{C'} \right) \left[G(x,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n_z} - G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} \right] dS_z,$$

где n_z — внешняя нормаль в т. z на S и на сферах $C: |z-x| = \delta$, $C': |z-y| = \delta$.

$G(z,x) = G(z,y) = 0,\ z \in S$ => перепишем ↑ в виде:

$$\int_C \left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial n_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} \right] dS_z =$$

$$= \int_{C'} \left[G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} - G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial n_z} \right] dS_z$$

$G(z,x) = E(z,x) + g(z,x),\ G(z,y) = E(z,y) + g(z,y)$,

где $g(z,x)$ и $g(z,y)$ – гарм. ф-ции $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow G(x,y) = G(y,x)$ при $\delta \to 0$ ◁

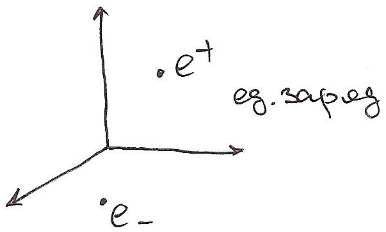
3) При известной ф-ции Грина решение задачи Дирихле о нахождении гарм. в D ф-ции $u(x)$, непр. в $D \cup S$, удовл. гр. условию $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0),\ x_0 \in S,\ x \in D$, может быть найдено из

$u(x) = -\dfrac{1}{\omega_n} \displaystyle\int_S \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi} \varphi(\xi)\, dS_\xi$, где φ – заданная действ. непр. ф-я,

$\omega_n = \dfrac{1}{\Gamma(n/2)} 2\pi^{n/2}$ – площадь единичной сферы в E_n,

Γ – гамма-функция Эйлера.

Физическая интерпретация функции источника



$$G(x,y) = \frac{e_+}{(n-2)\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}} + \frac{e_-}{(n-2)\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + (x_i + y_i)^2}}$$

Функция источника для ед. сферы: $G(x,y) = E(x,y) - E\left(|x|y, \frac{x}{|x|}\right)$

$\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| = \left[|x|^2|y|^2 - 2xy + 1 \right]^{1/2} = \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right| = |y| \left| x - \frac{y}{|y|^2} \right| = |x| \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|$

$\Rightarrow g(x,y) = -E\left(|x|y, \frac{x}{|x|}\right)$ при $|x| < 1,\ |y| < 1$ – гарм. по x и y.

при $|x| = 1 \vee |y| = 1$: $|y - x| = \left[|x|^2 - 2xy + 1 \right]^{1/2} = \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right| = \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|$

$\Rightarrow G(x,y)$ ↑ удовлетворяет требованиям ф-ции Грина

По формуле интегрального представления для гармонических ф-й:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left(G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n} \right) dy = -\frac{1}{\omega_n} \int_S u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\, dS_y$$

При $|y| = 1$ имеем: $\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = -\displaystyle\sum_{i=1}^n \left\{ \dfrac{y_i(y_i - x_i)}{|y - x|^n} - |x| \dfrac{y_i\left(|x|y_i - \frac{x_i}{|x|}\right)}{\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|^n} \right\} =$

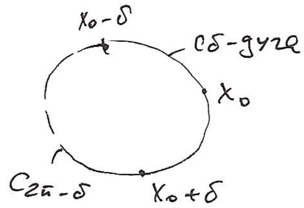
$= -\dfrac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \Rightarrow u(x) = \dfrac{1}{\omega_n} \displaystyle\int_S u(y) \dfrac{1 - |x|^2}{|y - x|^n}\, dS_y \Rightarrow u(x) = \dfrac{1}{\omega_n} \displaystyle\int_S u(y) \dfrac{\partial G(x,y)}{\partial n}\, dS_y$

└ ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

8.3.

Рассм. $n=2$:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^2} f(y)\,d\psi \quad (*)$$



$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{C\delta} \frac{1-x^2}{|y-x|}\,ds$$

$$\forall\ u(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))\,ds = \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C\delta} \frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))\,dS}^{I_1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C_{2\pi-\delta}} \frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))\,ds}_{I_2}$$

Фиксир. $\varepsilon>0,\ \delta(\varepsilon):\ |I_1| \le \varepsilon/2,\ |I_2| \le \varepsilon/2\ (x \to x_0)$

$\Rightarrow |u(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = f(x_0),\ |x|<1,\ |x_0|=1$

$\Rightarrow$ ф-ла Пуассона (*) даёт решение задачи Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x)\big|_{x=x_0} = f(x_0) \end{cases}$

Шар радиуса R: $u(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int_R \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^{n-2}} u(y)\,dS_y$

9. Эллиптические уравнения общего вида. Сопряж. оператор. Формула Грина.

Лин. дифф. опер-р 2го порядка: $Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + c(x)u$, (1)

$A_{ij} = A_{ji}$, A_{ij}, B_i, C – зад. в $D_0 \subset E_n$ действ. функции.

При наличии 1ых произв. коэф-тов A_{ij}, можно перейти к виду:

(2) $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$, где $e_i(x) = B_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}$, $i=\overline{1,n}$

При наличии 1ых произв-ых $e_i(x)$, вводится сопр. оператор:

(3) $L^*v \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i v) + cv$

Опр.: Оператор L наз. самосопряжённым, если $Lu = L^*u$, $\forall u$.

Т: [критерий самосопряжённости]: L – самосопр. $\Leftrightarrow e_i(x) = 0, x \in D_0$.

Док-во: ($\Leftarrow$) – очевидно (подстановка в (2) и (3)).

($\Rightarrow$) $Lu = L^*u$. Возьмём а) $\underline{u=1}$, тогда: $\sum_{i=1}^{n} 0 = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i}{\partial x_i}$ (**)

б) $\underline{u = x_j}$, тогда: $e_j(x) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i x_j) = -x_j\sum \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - e_j \Rightarrow$

$\Rightarrow 2e_j(x) + x_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i}{\partial x_i}}_{0\ (**)} = 0$, $j=\overline{1,n} \Rightarrow e_j(x) = 0$ $\forall j = \overline{1,n}$, ч.т.д.

$u(x), v(x) \in C^{2,0}(D_0)$, по ф-лам (1), (3) имеем тождество:

$v Lu - u L^*v = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v - \frac{\partial v}{\partial x_i}u\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i uv)$ (*)

Пусть $D \subset D_0$. Запишем ф-лу Остроградского-Гаусса для $p_1(x), \dots, p_n(x) \in C^{2,0}(D \cup S)$:

$\int_D \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial x_i}\, d\tau_x = \int_S \sum_{i=1}^{n} p_i(y)\cos\widehat{\nu y_i}\, dS_y$, ν – ед. внешн. нормаль к $S = \partial D$ в т. $y \in S$

$\int$(*) + ф-ла Остроградского – Гаусса $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_D (vLu - uL^*v)\, d\tau_x = \int_S \left[a\left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN}\right) + buv\right] dS_y$ – ФОРМУЛА ГРИНА

где N – ед. вектор – конормаль в т. $y \in S$, напр. косинусами: $\cos\widehat{Ny_i} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cos\widehat{\nu y_i}$, $i=\overline{1,n}$ ⊃

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos \widehat{\nu y_i} \right)^2 , \quad b = \sum_{i=1}^{n} e_i \cos \widehat{\nu y_i}$$

(10.) Эллиптические уравнения, элементарные решения, потенциалы, принцип экстремума.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \qquad A_{ij} = A_{ji}$$

$$a_{ij} = \frac{\text{алгебр. дополн-е к эл-ту } A_{ij}(x)}{\det\|A_{ij}\| = A}$$

Введём ф-ю $\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$

Введём ф-ю Леви:
$$\Psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(x,y)^{\frac{2-n}{n}}}{(n-2)\sqrt{A(y)}\,\omega_n}, & n>2, \text{ где } \omega_n - \text{площадь ед. сферы в } E_n \\ -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}}\ln\sigma, & n=2 \end{cases}$$

Когда $A_{ij} = 0,\ i \neq j,\ A_{ii} = 1,\ i = \overline{1,n} \Rightarrow \sigma(x,y) = |x-y|^2,\ A(y) = 1$

$\Rightarrow \omega_n \Psi(x,y)$ – элементарное решение уравнения Лапласа в пр-ве E_n

$$\omega_n \Psi(x,y) = E(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}, & n>2 \\ -\ln|x-y|, & n=2 \end{cases}$$

Ф-я $u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{D} E(x,y)\mu(y)\,d\tau_y$ наз. ньютоновым потенциалом объёмных масс, распределённых по обл-ти D с пл-тью μ.

Рассм. $n=2 \Rightarrow Lu = \Delta u + \sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$

Будем искать $u(x)$ в виде: $u(x) = \omega(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{D}\ln|x-y|\,\mu(y)\,d\tau_y$

$\Rightarrow \mu(x) + \int\limits_{D} K(x,y)\mu(y)\,d\tau_y = g(x)$, где $g(x) = L\omega(x) - f(x)$,

а $K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} + C(x)\ln|x-y|\right]$

L это – интегр. ур-е Фредгольма, ядро которого имеет особенность при $x = y$.

Т: [Принцип экстремума]: Если в области D всюду $C(x) < 0$, то регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного ур-я $Lu = 0$ ни в одной точке $x \in D$ не может достигать ни отрицательного минимума, ни положительного максимума.

Док-во: Пусть $u(x)$ в т. $x \in D$ достиг. отрицат. минимума,

тогда →

$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,n}$; $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_i \lambda_j \geq 0$, где $\lambda_1 \dots \lambda_n$ - $\forall$ действит. параметры

$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \lambda_j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ki} \lambda_i \right)^2 \Rightarrow A_{ij} = \sum_{s=1}^{n} g_{si}\, g_{sj}$, $i,j = 1 \dots n$

$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,s=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} g_{si} g_{sj} \geq 0 \Rightarrow \{u(x) < 0\} \Rightarrow \Delta u > 0$ $\times\!\!\times$

$\Delta u = 0$

ч.т.д.

(11) Гиперболическое уравнение общего вида. Сопряжённые операторы. Функция Римана.

Канонический вид: $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + A(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + C(x,y)u = F_1(x,y)$

Замена:

$\xi = x+y,\ \eta = x-y \Rightarrow \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F,$

где $4a = A+B,\ 4b = A-B,\ 4c = C,\ 4F = F_1$.

$u(\xi,\eta) = u_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$.

характеристики уравнения ↑ : $\xi = const,\ \eta = const$.

Предполагая дифф-ть коэф-тов a и b, вводится оператор

$L^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv$, где L^* – сопряжённый к L.

Опр.: Решение $v(\xi,\eta)$ сопряжённого уравнения

$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv = 0$, удовл. на характ-ках $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ условиям: $v(\xi_1,\eta) = e^{\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)d\eta_2}$, $v(\xi,\eta_1) = e^{\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)d\xi_2}$,

где (ξ_1,η_1) – произв. фиксир. точка обл-ти D задания ур-я $Lu = F$, наз. <u>ФУНКЦИЕЙ РИМАНА</u>.

(при доп. требовании непр-ти $\frac{\partial a}{\partial\xi}$, $\frac{\partial b}{\partial\eta}$ и c ф-я Римана существует)

Проинтегрируем сопряжённое уравнение: $\left(\int_{\xi_1}^{\xi}\int_{\eta_1}^{\eta}\right)$

$v(\xi,\eta) + v(\xi_1,\eta_1) - v(\xi,\eta_1) - v(\xi_1,\eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)d\xi_2 -$

$- \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)d\xi_2$

$+ \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 = 0$

Из опр-я $\Rightarrow v(\xi,\eta_1) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)d\xi_2 = 1$

$v(\xi_1,\eta) - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 = 1$. $v(\xi_1,\eta_1) = 1$ — ?

$\Rightarrow$ полученное равенство можно записать в виде линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода относ-но $v(\xi,\eta)$.

$v(\xi,\eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)d\xi_2 = \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)d\eta_2 = 1$

L такое уравнение имеет единственное решение

– ф-ция Римана

$v = R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$: Из определения $\Rightarrow$

$$\frac{\partial R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta} - a(\xi_1,\eta)R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)=0$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi} - b(\xi,\eta_1)R(\xi,\eta_1,\xi_1,\eta_1)=0 \qquad R(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=1$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1} + a(\xi,\eta_1)R(\xi,\eta,\xi,\eta_1)=0$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1} + b(\xi_1,\eta)R(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1)=0 \qquad R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1$$

Очевидно, что $\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\eta_1}\left[u(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)-R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)\right]=$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial\eta_1}-aR\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\eta_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial\xi_1}-bR\right)\right] \leftarrow$$

интегрируем по ξ_1 и η_1 в промежутках: $\xi_0\le\xi_1\le\xi,\ \eta_0\le\eta_1\le\eta$

$$\Rightarrow u(\xi,\eta)=u(\xi_0,\eta_0)R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)+$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi}R(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_1,\eta_0)}{\partial\xi_1}+b(\xi_1,\eta_0)u(\xi_1,\eta_0)\right]d\xi_1+$$

$$+\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_0,\eta_1;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_0,\eta_1)}{\partial\eta_1}+a(\xi_0,\eta_1)u(\xi_0,\eta_1)\right]d\eta_1+$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi,\eta_1,\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1.$$

При $u(\xi,\eta)=R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\Rightarrow\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)LR(\xi_0,\eta_0;\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1=0.$

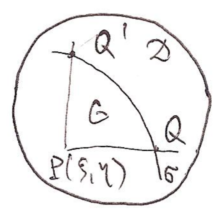
$\Rightarrow$ ф-я Римана относительно последней пары переменных ξ_1,η_1 является решением однородного уравнения $LR(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0$.

Аналогично, при непрерывной правой части $F(\xi,\eta)$ ур-я $Lu=F$ одним из его частных решений является функция

$$u_0(\xi,\eta)=\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)F(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1.$$

12. Гиперболические уравнения общего вида. Задача Коши.

$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F$; $L^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv$



σ — разомкнутая дуга Жордана с непр. кривизной, не имеющая точек касания с характеристиками

Q' и Q — точки пересечения характеристики с кривой

Для $\forall$ дважды дифф в обл-ти G ф-й $u(\xi_1,\eta_1)$, $v(\xi_1,\eta_1)$ верно тождество: $2(vLu - uL^*v) = \frac{\partial}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v - \frac{\partial v}{\partial\xi_1}u + 2buv\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v - \frac{\partial v}{\partial\eta_1}u + 2auv\right)$.

Проинтегрируем по обл-ти G тождество ↑ и применим ф-лу Грина: $\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_{\partial G}(P\,dx + Q\,dy)$

$$\Rightarrow 2\iint\limits_G (vLu - uL^*v)\,d\xi\,d\eta = \int\limits_{\partial G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v - \frac{\partial v}{\partial\eta_1}u + 2auv\right)d\eta_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v - \frac{\partial v}{\partial\xi_1}u + 2buv\right)d\xi_1\right]$$

Пусть $u(\xi_1,\eta_1) = u(P')$ ↑ — решение ур-я $Lu = F$ $\quad P = (\xi,\eta)$

$v(\xi_1,\eta_1) = v(P') = R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = R(P',P)$ — ф-ция Римана

$$\Rightarrow u(P) = \frac{1}{2}u(Q)R(Q,P) + \frac{1}{2}u(Q')R(Q',P) + \iint\limits_G F(P')R(P',P)\,d\xi_1\,d\eta_1 - \frac{1}{2}\int\limits_{QQ'}\left[\frac{\partial u(P')}{\partial N}R(P',P) - u(P')\frac{\partial R(P',P)}{\partial N}\right]d\sigma_{P'} - \int\limits_{QQ'}\left[a(P')\frac{\partial\xi_1}{\partial N} + b(P')\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\cdot R(P',P)u(P')\,d\sigma_{P'}$$

где $\frac{\partial}{\partial N} = \frac{\partial\xi_1}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\xi_1}$, ν — внешняя нормаль дуги σ в точке P'

Если в правой части будем считать, что u и $\frac{\partial u}{\partial N}$ — произвольно заданные на σ дост. гладкие функции, то $u(P)$ — решение $Lu = F$

Если искомое решение $u(P)$ и $\frac{\partial u(P)}{\partial l}$, где l — заданный на σ вектор, который нигде не совпадает с касательной к σ, известны на σ: $u(P) = \varphi(P)$, $\frac{\partial u(P)}{\partial l} = \psi(P)$, $P \in \sigma$,

где φ и ψ — соотв. дважды и один раз дифф-ые, то $\frac{\partial u}{\partial N}$ всегда можно определить однозначно.

$\Rightarrow$ полученная ф-ла даёт решение задачи: $\boxed{Lu = F,\ u(P) = \varphi(P),\ \frac{\partial u(P)}{\partial l} = \psi(P)\quad P \in \sigma}$

[из процесса получ. ф-лы ↑ $\Rightarrow$ реш-е единств. и устойч.]

(13) Гиперболические уравнения общего вида. Задача Гурса.

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F$$

из формулы б. 11

$$u(\xi,\eta) = u(\xi_0,\eta_0)R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)\Big[\frac{\partial u(\xi_1,\eta_0)}{\partial\xi_1} + b(\xi_1,\eta_0)u(\xi_1,\eta_0)\Big]d\xi_1 + \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0,\eta_1;\xi,\eta)\Big[\frac{\partial u(\xi_0,\eta_1)}{\partial\eta_1} + a(\xi_0,\eta_1)u(\xi_0,\eta_1)\Big]\cdot d\eta_1 + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1$$

— $u(\xi,\eta)$ — реш-е $Lu=F$

интегрируем по частям:

$$\Rightarrow u(\xi,\eta) = R(\xi,\eta_0;\xi,\eta)u(\xi,\eta_0) + R(\xi_0,\eta;\xi,\eta)u(\xi_0,\eta) - R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)u(\xi_0,\eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi}\Big[b(t,\eta_0)R(t,\eta_0;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}R(t,\eta_0;\xi,\eta)\Big]\cdot u(t,\eta_0)\,dt + \int_{\eta_0}^{\eta}\Big[a(\xi_0,\tau)R(\xi_0,\tau;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial\tau}R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\Big]u(\xi_0,\tau)\,d\tau + \int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}R(t,\tau;\xi,\eta)F(t,\tau)\,d\tau$$

← если в правой части заменить $u(\xi,\eta_0)$ и $u(\xi_0,\eta)$ на произвольные непр. дифф. ф-ции, а $u(\xi_0,\eta_0)$ — на const, то получ. $u(\xi,\eta)$ — регулярное реш-е $Lu=F$.

$$\Rightarrow \begin{cases} Lu = F \\ u(\xi,\eta_0) = \varphi(\xi) \\ u(\xi_0,\eta) = \psi(\eta) \end{cases}$$

← задача Гурса

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ — непр. дифф.

$\varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0)$.

↑ такая задача имеет единств. устойчивое реш-е $u(\xi,\eta)$:

$$u(\xi,\eta) = R(\xi,\eta_0;\xi,\eta)\varphi(\xi) + R(\xi_0,\eta;\xi,\eta)\psi(\eta) - R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\varphi(\xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi}\Big[b(t,\eta_0)R(t,\eta_0;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}R(t,\eta_0;\xi,\eta)\Big]\varphi(t)\,dt + \int_{\eta_0}^{\eta}\Big[a(\xi_0,\tau)R(\xi_0,\tau;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\Big]\psi(\tau)\,d\tau + \int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}R(t,\tau;\xi,\eta)F(t,\tau)\,d\tau.$$

(14) Классическое решение. Метод разделения переменных. Собственные функции и собственные значения.

Опр.: Классическими называются регулярные решения уравнений в частных производных, удовлетворяющие соотв. краевым, начальным, смешанным и т.д. условиям рассматриваемой задачи в обычном смысле, т.е. в каждой точке носителя данных.

Метод разделения переменных

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)u$$

Будем искать решение в виде: $u(x,t) = v(x)w(t)$

$$\Rightarrow w(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)v\right] = v(x)\left[\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2} + \right.$$

$$\left. + \beta(t)\frac{dw}{dt} + \gamma(t)w\right].$$

Для того, чтобы рав-во ↑ выполнялось для $\forall x$ и t в обл-ти задания ур-я, необходимо и достаточно двух равенств:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + [C(x)+\lambda]v = 0$$

$$\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2} + \beta(t)\frac{dw}{dt} + [\gamma(t)+\lambda]w = 0 \qquad \text{где } \lambda = \text{const}$$

$\Rightarrow$ получим ОДУ и уравнение в частных производных, в котором независимых переменных на единицу меньше.

ПРИМЕР: Колебания упругой мембраны

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \Psi(x,y) \text{ в } G, \\ u(x,y,t) = 0,\ t \geq 0,\ (x,y) \in S = \partial G \end{cases}$$

метод разделения переменных $\Rightarrow$

$$\Delta v(x,y) + \lambda v(x,y) = 0 \quad \text{и} \quad w''(t) + \lambda w(t) = 0, \quad \lambda = \text{const}$$

$$v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S$$

L зн-е λ, для кот. задача имеет нетрив. решение, наз. собств. зн-ем, а $v(x,y)$ — соответствующей λ собств. ф-ей.

если $\Delta v + \lambda v = 0$, то

Имеет место тождество: $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \lambda v^2$

$\Rightarrow$ интегрируем и применим ф-лу Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_G (v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy = \int\limits_S \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial \nu}}_{0 \text{ на } S} ds + \lambda \int\limits_G v^2 dx\,dy = \lambda \int\limits_G v^2 dx\,dy \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda > 0$, т.к. $v(x,y) \not\equiv 0$ и действ. $\Rightarrow \lambda = \mu^2$, где $\mu = const \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow w(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t$, где $c_1, c_2 = const$

Достаточно ограничиться $\mu > 0$!

$\Rightarrow u_n(x,y,t) = v_n(x,y)(a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)(a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t)$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x,y) = \varphi(x,y)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n v_n(x,y) = \psi(x,y)$, $(x,y) \in G$

$\{v_n\}$ – ЛНЗ и $\int\limits_G v_n v_m\,dx\,dy = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$

$\Rightarrow$ будем считать, что $\{v_n\}$ – ортонормированная

$\Rightarrow a_n = \int\limits_G \varphi(x,y) v_n(x,y)\,dx\,dy$, $b_n = \left[\int\limits_G \psi(x,y) v_n(x,y)\,dx\,dy\right]\frac{1}{\mu_n}$.

15. Вариационные методы. Метод Ритца. с привлечением материала 20 - 21.

В вариационном исчислении имеются методы решения вариационных задач, в которых не используются ур-я в ЧП. Эти методы применительно к задачам для уравнений в ЧП принято называть вариационными или прямыми методами.

Метод Ритца: минимизация функционала $\Phi(u)$

$\{v_n\}$, $n=1,2,\dots$ — полная с-ма допустимых функций

Составим последовательность: $\{u_n=\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\}$, $n=1,2,\dots$, $c_k=const$

Определим коэффициенты c_k, $k=\overline{1,n}$, т.ч. выр-е $\varphi_n=\Phi(u_n)$, как ф-я $c_1\dots c_n$ было минимальным.

ПРИМЕР: $\quad Y(u)=\dfrac{D(u)}{H(u)}$, где $\quad D(u)=\int\limits_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$

$H(u)=\int\limits_G u^2(x,y)\,dx\,dy$

$G=\{0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$ и $\underline{H(u)=1}$ — усл-е

В качестве полной системы возьмём $\{\sin kx \sin ly\}$, $k,l=1,2,\dots$

$\{u_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}\sin kx \sin ly\}$, $n,m=1,2,\dots$

u_{mn} являются допустимыми для функционала $Y(u)$

и $d_{mn}=D(u_{mn})=\dfrac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2(k^2+l^2)$

$H(u_{mn})=\dfrac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2=1$

$\Rightarrow$ надо найти минимум d_{mn} при условии, что $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2=\dfrac{4}{\pi^2}$

$\Rightarrow$ получаем задачу на условный экстремум.

$\Rightarrow$ решая $\uparrow$, получаем, что для $\forall\, min$: $c_{kl}=0$ при $k\neq 1$ и $l\neq 1$ одновременно и $c_{11}=\dfrac{2}{\pi}$, $d_{mn}=2$.

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} u_{mn}=u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\sin x\sin y$, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d_{mn}=D(u)=2=\lambda$

$\Rightarrow$ построили реш-е задачи на собств. зн-е: $\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0, & в\ G\\ u(x,y)=0 & в\ S=\partial G\end{cases}$

За решение задачи минимизации $Y(u)$ при $H(u)=1$ можно принять функцию $u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x,y)$, где c_k, $k=1,2,\dots$ опред-ся из задачи: $\begin{cases} d_n(c_1\dots c_k)=D(u_n)=min,\\ h_n(c_1\dots c_k)=H(u_n)=1.\end{cases}$

$\Rightarrow u_n$ — приближённое решение собственной функции.

$\lambda_n=D(u_n)$ — приближённое собственное значение.

16. Метод Бубнова-Галёркина. с привлечением материала 20 - 21, 15.

Задача на собств. зн-я: $\begin{cases} \Delta u+\lambda u=0 \text{ в } G, \\ u(x,y)=0 \text{ в } S=\partial G \end{cases}$

$\Rightarrow$ минимизация функционала $J(u)=\dfrac{D(u)}{H(u)}$.

$D(u)=\int\limits_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$, $H(u)=\int\limits_G u^2(x,y)\,dx\,dy$, $H(u)=1$.

$\Rightarrow \{v_n\}$, $n=1,2,\dots$ – полная система допустимых функций

$\{u_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k\}$, $n=1,2,\dots$, $c_k=const$

Коэффициенты c_k определяются из равенств:

$H(\Delta u_n+\lambda u_n, v_m)=0$, $m=\overline{1,n} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} H(\Delta v_k+\lambda v_k, v_m)\,c_k=0$, $m=\overline{1,n}$

$\Rightarrow$ получим однородную СЛАУ, в которой число неизвестных равно числу уравнений. Такая система имеет нетривиальн. решения $\Leftrightarrow$

$$\det\begin{bmatrix} H(\Delta v_1+\lambda v_1, v_1) & \dots & H(\Delta v_n+\lambda v_n, v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ H(\Delta v_1+\lambda v_1, v_n) & \dots & H(\Delta v_n+\lambda v_n, v_n) \end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ отсюда находим λ

c_k, $k=\overline{1,n}$ – нетривиальные решения системы

$\Rightarrow u_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k$

17. Обобщённые решения задач для уравнений эллиптического типа.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x),\ x \in G,$$

где $G \subset E_n$ – огр. и $S = \partial G$ – $(n-1)$-мерная поверхность

$u(x) = g(x),\ x \in S$, $g(x)$ – действ. непр. функция

Понятие решения задачи Дирихле будет обобщено для однородного краевого условия $u(x) = 0,\ x \in S$

Опр.: В предположении, что A_{ij}, l_i, c – ограниченные измеримые функции и $f \in L_2(G)$, под обобщённым реш-ем в пр-ве W_2^1 задачи $Lu = f,\ x \in G,\ u(x) = 0,\ x \in S$ понимается функция $u(x) \in \mathring{W}_2^1$, для которой имеет место тождество:

$$\int_G \left(-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv - fv\right) dx = 0,\ \forall x \in \mathring{W}_2^1,$$

причём под $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ понимаются обобщённые производные ф-ции $u(x)$ первого порядка.

[Говорят, что ф-я $v(x)$ явл-ся обобщённой производной порядка m ф-ции $u(x)$, если имеет место тождество:

$$\int_G u D^m \varphi\, dx = (-1)^m \int_G v\varphi\, dx \quad \text{для } \forall \varphi \text{ – финитной, с компактн. носителем в } G\ ]$$

Если обобщ. реш-е $u(x) \in C^{2,0}(G)$, и ф-ции A_{ij} – дост. гладкие, то тождество из определения можно переписать в виде:

$$\int_G (Lu - f)v\, dx = 0. \Rightarrow \{\text{требуя непр-ть } Lu \text{ и } f\} \Rightarrow \text{что } u(x)$$

явл-ся классическим решением задачи

Пусть $\exists L^* = L^* w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(l_i w) + cw$

Опр.: Обобщ. решением сопряжённого уравнения $L^* w = 0$, $w(x) = 0,\ x \in S$ наз. ф-я $w(x) \in \mathring{W}_2^1$, т.ч.:

$$\int_G \left(-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(l_i w)v + cwv\right) dx = 0 \text{ для } \forall v \in \mathring{W}_2^1.$$

Задача $L^* w = 0$, $w(x) = 0$ при $x \in S$ наз. сопряжённой с задачей $Lu = f$, $u(x) = 0$ при $x \in S$.

Аналогично: обобщ. реш-е $w(x)$ из $C^{2p}(G)$ является классическим решением.

$\boxed{\text{Утв.1}}$ Однородная задача Дирихле для однородного уравнения $Lu=0$ и сопряжённая с ней задача имеют одинаковое, не более, чем конечное число ЛНЗ решений.

$\boxed{\text{Утв.2}}$ Для разрешимости задачи $Lu=f$, $u(x)=0$, $x\in S$ необх. и дост-но, чтобы ф-я $f(x)$ удовлетворяла условиям:

$\int\limits_G f w_i\,dx=0$, где w_i, $i=\overline{1,l}$ – все ЛНЗ реш-я сопряж. задачи

$\boxed{\text{Утв.3}}$ В области достаточно малой меры однородная задача $Lu=0$, $u(x)=0$, $x\in S$, имеет только тривиальное решение.

$\boxed{\text{Т:}}$ Задача $Lu=f$ в G, $u(x)=0$, $x\in S$ разрешима для $\forall f$ и, притом, однозначно $\Leftrightarrow$ соответствующая ей однородная задача $Lu=0$ в G, $u(x)=0$, $x\in S$ не имеет нетривиальных решений.

[из $\boxed{\text{Т}}$ ↑ и $\boxed{\text{Утв.3}}$ ↑ $\Rightarrow$ в области достаточно малой меры $\exists!$ решение].

ПРИМЕР: $u(x,0)=0$, $x\in G$, $\Delta u=-f(x)$, $f\in L_2$

$$\int\limits_G fv\,dx=F(v)=\{\text{т. Рисса}\}\overset{\exists u,\text{ т.что}}{=}(u,v)=\int\limits_G \nabla u\nabla v\,dx,\ \forall v$$

$\Rightarrow \exists$ обобщённое реш-е $u(x)$: $\int\limits_G(\nabla u\nabla v-fv)\,dx=0$

Если $f(x)\equiv 0$ $\Rightarrow$ u_0 – обобщённое решение, т.что $\int\limits_G(\nabla u_0)^2dx=0$

$\Rightarrow u_0(x)\overset{\text{п.в.}}{\equiv}0$ в G $\Rightarrow$ имеет место единственность.

Опр.: Оператор L для уравнения второго порядка

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(\ )u=f(x),$$

по опред-ю, обладает свойством равномерной эллиптичности, если для соотв. ему квадратичной формы

$Q(\lambda_1\dots\lambda_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ $\exists\, K_0,K_1>0$, т.ч.:

$$K_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\le Q(\lambda_1\dots\lambda_n)\le K_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

18. Обобщённые решения классических задач для уравнений гиперболического типа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = f(x,t), \text{ где } Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{n} e_i(x,t)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x,t)u$$

L - равномерно эллиптичный в $\Omega \subset E_{n+1}$

$G \subset E_n$ - огр. обл-ть, $Q = \{G \times (0<t<T)\} \subset \Omega$

$S = \{\partial G \times (0 \le t \le T)\}$, $T = const > 0$

$$u(x,0) = \tau(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \nu(x), \quad u|_S = 0.$$

Опр.: Обобщённым решением данной задачи в пространстве $W_2^1(Q)$ наз. ф-я $u(x,t) \in W_2^1$, удовлетворяющая нач. условиям и тождеству:

$$\int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\right) dx dt =$$

$$= \int_G \nu(x) v(x,0) dx + \int_Q f v dx dt, \quad \forall v(x,t) \in \mathring{W}_2^1(Q) \text{ и } v(x,T) = 0.$$

Чтобы тождество имело смысл, достаточно потребовать, чтобы A_{ij}, e, c - ограничены и измеримы, а $f \in L_2(Q)$, $\nu \in L_2(G)$.

При $\tau(x) \equiv 0$ накладываются доп. усл-я относительно гладкости коэффициентов, ф-ции $\nu(x)$ и гр-цы обл-ти Q для классического решения задачи

[Сначала было другое определение:

$\{f_k(x,t)\}_{k=1,2,\dots}$ - огр. посл-ть, $f_k(x,t) \in L_2(G)$.

$f_k(x,t) \to f(x,t)$ для $\forall$ фиксированного $t \in (0,T)$

Если $\forall x$ задача при $f = f_k$ имеет единственное классическое решение $u_k(x,t) \in L_2(Q)$, и ф-я $u(x,t)$ - предел $\{u_k(x,t)\}$ в $L_2(G)$ при $\forall$ фиксир. $t \in (0,T)$, то эту ф-ю наз. обобщ. реш-ем з-чи]

Рассм. ПРИМЕР:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t) \text{ в } Q, \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \ x \in G, \ u|_S = 0 \end{cases}$$

Будем использовать определение через предел послед-ти:

$$E_k^2(t) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right] dx = \int_0^t dt_1 \int_G \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t_1} f_k(x,t_1)\, dx$$

{ Докажем последнее равенство: $u_k(x,0) = u_{k_t}(x,0) = 0$, $x \in G$, $u_k|_S = 0$

$$\frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial t_1^2} - \Delta u_k(x,t_1) = f_k(x,t) \text{ в } Q \;\Big|\cdot \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t_1} \text{ и инт. по } Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1)\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t_1}\, dx = \int_0^t dt_1 \int_G \Big[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 +$$

$$+ \nabla u_k \nabla \frac{\partial u_k}{\partial t_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx.$$

Поменяем порядок интегрирования и применим ф-лу Остроградского-Гаусса:

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1)\frac{\partial u_k(x,t_1)}{\partial t_1}\, dx = \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right]\Bigg|_{t_1=0}^{t_1=t} dx -$$

$$- \int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x}\, dS_x$$, где N_x - ед. вектор внешней нормали к ∂G в т. x.

Из усл. $\Rightarrow \left.\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right|_{t_1=0} = 0$, $\left.\nabla u_k\right|_{t_1=0} = 0$, $x \in G$ и $\int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x} dS_x = \int_0^t dt_1 \int_S \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x} dS_x = 0 \Rightarrow$ т.к. $u_k|_{t_1=0} = 0$

$\Rightarrow$ ч.т.д. }

$$\frac{d}{dt}[E_k^2(t)] = 2E_k(t)\frac{d}{dt}E_k(t) = \int_G \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} f_k(x,t)\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow 2E_k \frac{d}{dt}E_k(t) \le \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \|f_k\| \\ &\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \underset{\text{из }(*)}{\le} \sqrt{2}\,E_k(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dE_k(t)}{dt} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_k\|$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow E_k(t) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \|f_k(t_1)\|\, dt_1 \Rightarrow \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \le \int_0^t \|f_k(t_1)\|\, dt_1 \\ &2\|u_k\|\frac{d}{dt}\|u_k\| = 2\int_G u_k \frac{\partial u_k}{\partial t}\, dx \le 2\|u_k\|\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u_k\| \le \int_0^t \|f_k(t_1)\|\, dt_1 \Rightarrow \|u_k\| \le \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \|f_k(t_2)\|\, dt_2 =$$

$= \int_0^t (t-t_1)\|f_k(t_2)\|\, dt_2 \Rightarrow$ из огр-я $\{f_k\}$ следует огр. $\{u_k\}$ в $L_2(G)$ для $\forall t \in [0,T]$

Т.к. $\{f_k\}$ - сх-ся $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 : \|f_{N+p} - f_N\| < \varepsilon$, $\forall p > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|u_{N+p}(x,t) - u_N(x,t)\| \le \frac{\varepsilon}{2}t^2$, $\forall t \in [0,T]$

$\Rightarrow \{u_k\}$ - фунд. $\Rightarrow$ сх-ся в $L_2(G) \Rightarrow \{u_k\} \to u \in L_2(G) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ обобщ. решение.

(19.) Обобщённые решения классических задач для уравнений параболического типа.

$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(x,t)$, L - равн. эллиптич. в $\Omega \subset E_{n+1}$

$G \subset E_n$ - огр. обл-ть, $Q = \{G \times (0 < t < T)\} \subset \Omega$, $S = \{\partial G \times (0 \le t \le T)\}$, $T = const > 0$

$u(x,0) = \varphi(x) \in G$, $u(x_0,t) = \Psi(t)$, $(x_0,t) \in S$

Опр.: Под обобщённым решением задачи при $\Psi(t) \equiv 0$ в W_2^1 в предположении, что $\varphi \in L_2(Q)$, понимается ф-я $u(x,t) \in \mathring{W}_2^1$, т.ч.:

$$\int_Q \left(-u \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\right) dx\,dt =$$
$$= \int_G \varphi v(x,0)\,dx + \int_Q f v\,dx\,dt, \text{ где } \forall v(x,t) \in \mathring{W}_2^1 \text{ и } v(x,T) = 0$$

Классическое решение задачи $u(x,t)$ при $\Psi(t) \equiv 0$ также удовлетворяет тождеству.

[аналогично гиперболич. типу, обобщ. реш-е ↑ можно ввести через последовательности]

<u>ПРИМЕР:</u> $\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = f_k(x,t)$, $(x,t) \in Q$

$u_k(x,0) = 0$, $x \in G$; $u_k|_S = 0$ $\quad S = \partial G$

Пусть $\exists !$ классич. реш-е u_k.

Справедлива оценка: $|u_k(x,t)| \le T M_k$, если $\max\limits_{(x,t) \in Q \cup \partial Q} |f_k(x,t)| \le M_k$

Доказательство оценки:

$\triangleright$ Пусть $\exists\, (x_0,t_0)$: $u_k(x_0,t_0) > T M_k \Rightarrow$

$\Rightarrow v(x,t) = u_k(x,t) + M_k(T-t)$ достигает макс. в $Q \cup \partial Q$ $\leftarrow$ ※ с тем, что $\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = -f_k(x,t) + M_k > 0$. Если $u_k(x,t) < -T M_k \to$ ※ $\triangleleft$.

$\{f_k\}$ - фундаментальна $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0$: $|f_{N+p} - f_N| < \varepsilon$, $\forall p > 0$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(u_{N+p} - u_N) = f_{N+p} - f_N \\ &u_{N+p}(x,0) - u_N(x,0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |u_{N+p} - u_N| \le T\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{u_k\}$ - фундаментальна $\Rightarrow \exists\, u(x,t)$: $\{u_k\} \rightrightarrows u(x,t)$

$u(x,t)$ - обобщ. решение.

20. Вариационные методы. Первая вариационная задача.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in G$$

$u(x,y)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in S$, $\varphi(x,y)$ - непр. в S

$D(u)=\int\limits_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$ - интеграл Дирихле

Опр.: Функции, непр. в $G\cup S$ и имеющие кус.-непр. производные первого порядка в G, такие что для них существует интеграл Дирихле↑, и они удовлетворяют краевому условию, наз-ся допустимыми функциями.

Опр.: Первая вариационная задача - это задача отыскания среди допустимых функций той функции, для которой интеграл Дирихле минимален.

Т.: [принцип Дирихле] Если заданная на S ф-я $u(x,y)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны. [справедливость этого утверждения будет доказана при дополнительных предположениях]

Док-во: $\Rightarrow$ $u(x,y)$ - реш-е 1ой вариационной задачи $\Rightarrow$ б. рассматривать
$\Rightarrow$ класс допустимых функций: $u(x,y)+\varepsilon h(x,y)$, где $\varepsilon=const$, $h(x,y)$ - допустимая функция: $h(x,y)=0,\ (x,y)\in S$.

$D(u+\varepsilon h)=D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)=\Psi(\varepsilon)$,

где $D(u,h)=\int\limits_G (u_x h_x+u_y h_y)\,dx\,dy$

$\Rightarrow$ необх. усл-е экстремума $\Rightarrow$ $\Psi'_\varepsilon=2D(u,h)+2\varepsilon D(h)$

$\Psi'\big|_{\varepsilon=0}=0 \Rightarrow D(u,h)=0$
т.к. в классе $u+\varepsilon h$ min достигается при $\varepsilon=0$. (u-реш-е 1 вар. зад.)

Пусть $u(x,y)$ и $h(x,y)$ и S являются настолько гладкими, что

$u_x h_x+u_y h_y=(u_x h)_x+(u_y h)_y-h\Delta u$

$$\underbrace{\int\limits_G ((u_x h)_x+(u_y h)_y)\,dx\,dy}_{\int\limits_S h\frac{\partial u}{\partial \nu}ds \,=\, 0}=\int\limits_G \Delta u\, h\,dx\,dy+\underbrace{\int\limits_G (u_x h_x+u_y h_y)\,dx\,dy}_{0}\ \Rightarrow$$

$\int\limits_S h\frac{\partial u}{\partial\nu}ds$, где ν - внешняя нормаль к S.
$=0$, т.к. $h|_S=0$

$\Rightarrow \int\limits_G h \Delta u \, dx\, dy = 0$

$\Rightarrow$ при предположении, что Δu – непр. ф-я в G, в силу произвольности $h \Rightarrow \Delta u(x,y) = 0$.

$\Leftarrow$ $u(x,y)$ – решение з. Дирихле. Опять же рассм-ся $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$ – класс допустимых функций

и $D(u,h) = \int\limits_S \underbrace{h}_{0 \text{ на } S} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int\limits_G h \underbrace{\Delta u}_{0} \, dx\, dy = 0 \Rightarrow D(u+\varepsilon h) = D(u) + \varepsilon^2 D(h)$.

$D(u) \leq D(u+\varepsilon h) = D(u) + \varepsilon^2 D(h)$

$\Rightarrow u$ – минимизирует интеграл Дирихле, ч.т.д.

21. Вариационные методы. Вторая вариационная задача

$\Delta u + \lambda u = 0$, $(x,y) \in G$, $\lambda = const$

$u(x,y) = 0$, $(x,y) \in S$

Задача на собственные значения: найти λ, при которых имеются нетривиальные решения.

$$\mathcal{Y}(u) = \frac{\mathcal{D}(u)}{H(u)}, \text{ где } \mathcal{D}(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy, \quad H(u) = \int_G u^2(x,y)\,dx\,dy$$

Опр.: Допустимыми для ф-ла $\mathcal{Y}(u)$ функциями будем считать отличные от постоянной, удовлетворяющие гр. усл-ю, непрерывные в $G \cup S$ действит. ф-ции с кусочно-непр. в G производными первого порядка, для которых инт-л Дирихле $\exists$-ет.

Опр.: Вторая вариационная задача — это задача нахождения в классе допустимых функций минимума ф-ла $\mathcal{Y}(u)$ и построение соответствующей минимизирующей функции.

Утв.: При определённых дополнительных предположениях при наличии решения второй вариационной задачи, если $u(x,y)$ — минимизирующая ф-я, то $\lambda = \mathcal{Y}(u)$ явл. наименьшим собств. числом задачи на собств. значения, а $u(x,y)$ — соотв. λ собств. функцией.

Док-во: $u(x,y)$ — мин. ф-я; $\lambda = \mathcal{Y}(u) = \dfrac{\mathcal{D}(u)}{H(u)} > 0$

Класс допустимых функций: $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$, $\varepsilon = const$, $h(x,y)$ — допустимая ф-я

$$F(\varepsilon) = \frac{\mathcal{D}(u+\varepsilon h)}{H(u+\varepsilon h)} = \frac{\mathcal{D}(u) + 2\varepsilon \mathcal{D}(u,h) + \varepsilon^2 \mathcal{D}(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u,h) + \varepsilon^2 H(h)},$$

где $\mathcal{D}(u,h) = \int_G (u_x h_x + u_y h_y)\,dx\,dy$, $H(u,h) = \int_G u h\,dx\,dy$

$\Rightarrow$ необх. усл-е экстремума $\Rightarrow F'(0) = 0$, т.е.:

$$F'(0) = 2\,\frac{H(u)\mathcal{D}(u,h) - \mathcal{D}(u)H(u,h)}{H^2(u)} = 0 \Rightarrow H(u)\mathcal{D}(u,h) - \mathcal{D}(u)H(u,h) = 0$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow H(u)\left[\mathcal{D}(u,h) - \lambda H(u,h)\right] = 0 \Rightarrow \mathcal{D}(u,h) - \lambda H(u,h) = 0$

$\mathcal{D}(u,h) = -\int\limits_G \Delta u h \, dx dy$

$\mathcal{D}(u,h)$

[т.к. $\int\limits_G \left((u_x h)_x + (u_y h)_y\right) dx dy = \int\limits_G \Delta u h \, dx dy + \int\limits_G (u_x h_x + u_y h_y) \, dx dy$

$\int\limits_S h \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$, где ν - внешняя нормаль к S

0, т.к. $h|_S = 0$

при дополнительных условиях гладкости на ф-ции $u(x,y)$, $h(x,y)$ и контур S области G]

$\Rightarrow \int\limits_G [\Delta u h + \lambda u h] \, dx dy = 0 \Rightarrow$ при дополнительном требовании непрерывности $\Delta u \Rightarrow \Delta u + \lambda u = 0$. в виду произв-сти h.

Если λ^* - отличное от 0 собств. значение, u^* - соотв. λ^* собств. ф-я

$\Rightarrow H(\Delta u^* + \lambda^* u^*, u^*) = -\mathcal{D}(u^*) + \lambda^* H(u^*) = 0 \Rightarrow \lambda^* = \frac{\mathcal{D}(u^*)}{H(u^*)} \geq \frac{\mathcal{D}(u)}{H(u)} = \lambda$

$\Rightarrow \lambda$ - наименьшее собств. зн-е, ч.т.д.

Пусть λ_1 - наименьшее, u_1 - соотв. λ_1 собств. ф-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow Cu_1(x,y)$ - собств. ф-я $\Rightarrow$ без ограничения общности можно считать, что $H(u_1) = 1$, $\mathcal{D}(u_1) = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_2$ можно найти из

$\min \mathcal{Y}(u) = \mathcal{Y}(u_2) = \lambda_2$, $H(u, u_1) = 0$

Аналогично док-ву $\uparrow \Rightarrow \mathcal{D}(u_2, \xi) - \lambda_2 H(u_2, \xi) = 0$, $\forall \xi : H(\xi, u_1) = 0$

оно же верно для $\forall \eta$: $\xi(x,y) = \eta(x,y) - H(\eta, u_1) u_1$

$\Rightarrow \mathcal{D}(u_2, \xi) - \lambda_2 H(u_2, \xi) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{D}(u_2, \eta) - \lambda H(u_2, \eta) = 0$

Аналогично $\Rightarrow H(\Delta u_2 + \lambda_2 u_2, h) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta u_2 + \lambda u_2 = 0$, ч.т.д.

Аналогично для $\forall n$: $\lambda_n = \mathcal{Y}(u_n) = \min \mathcal{Y}(u)$

$H(u) = 1$, $H(u, u_i) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$

22. Разрывные решения в уравнениях газовой динамики. Законы сохранения на разрыве.

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0 & \text{— уравнение неразрывности}\\ \rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 & \text{— уравнение движения} \\ \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)+\rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(pv)=0 & \text{— уравнение сост-я газа}\end{cases}$$

$$(1)\cdot v+(2) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2)+\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

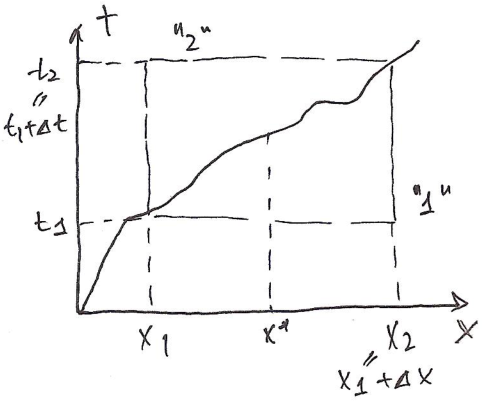
$$(1)\cdot\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)+(3) \Rightarrow \left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)+\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)+$$
$$+\rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(pv)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\rho\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\rho v+pv\right)=0$$

Проинтегрируем от x_1 до x_2, от t_1 до t_2:

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho\Big|_{t_1}^{t_2}dx+\int_{t_1}^{t_2}\rho v\Big|_{x_1}^{x_2}dt=0; \quad \int_{x_1}^{x_2}\rho v\Big|_{t_1}^{t_2}dx+\int_{t_1}^{t_2}(\rho v^2+p)\Big|_{x_1}^{x_2}dt=0$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\Big|_{t_1}^{t_2}dx+\int_{t_1}^{t_2}\left(\rho v\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)+pv\right)\Big|_{x_1}^{x_2}dt=0$$



? Какими условиям должны удовлетворять функции справа и слева от разрыва?

При $\Delta t, \Delta x\to 0$ контур стянется в точку:

$$\int_{x_1}^{x_2}[\rho_{t_2}-\rho_{t_1}]dx=-\int_{t_1}^{t_2}[(\rho v)_{x_2}-(\rho v)_{x_1}]dt \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow}\Big[\rho_{t_2}\big|_{x=x^*}-\rho_{t_1}\big|_{x=x^{**}}\Big]\frac{\Delta x}{\Delta t}=-(\rho v)_{x_2,\,t_1^*}+(\rho v)_{x_1,\,t_2^{**}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\rho_2-\rho_1)U=-(\rho v)_2+(\rho v)_1 \Rightarrow$$ перейдём в с-му коорд-т, связанную с разрывом: $u_1=U-v_1$, $u_2=U-v_2$ $\Rightarrow \boxed{\rho_1u_1=\rho_2u_2}$

Аналогично, из 2ух других уравнений $\Rightarrow \boxed{p_1+\rho_1u_1^2=p_2+\rho_2u_2^2}$

$$\rho_1u_1\left(\varepsilon_1+\frac{u_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho_1}\right)=\rho_2\left(\varepsilon_2+\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho_2}\right).$$

$U=\lim\frac{\Delta x}{\Delta t}$ — скорость движения разрыва

23. Условия Гюгонио. с использованием (22).

Законы сохранения на разрыве:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}, \text{ где } W = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$$

потенциал

внутр. энергия ед. объёма

энергия единичного объёма $E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon$

$$\left\{ \text{ур-я: } \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + \overset{\varepsilon + \frac{p}{\rho}}{W}\right)\right] \end{array} \right\}$$

Процесс адиабатический $\Rightarrow$ нет потока тепла $(dQ = 0)$.

изменение объёма

$$dQ = d\varepsilon + p\,d\tau \Rightarrow d\varepsilon = -p\,d\tau = -p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

$$\Rightarrow d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = \varepsilon\,d\rho + \frac{p}{\rho}\,d\rho = w\,d\rho$$

$$p = R\rho T, \quad \varepsilon = c_v T$$

$$W = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v}\overset{p/\rho}{RT} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \Rightarrow W = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_1}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2}}$$

Гюгонио (предположительно)

[например, для двухатомного газа, $\gamma = 7/5$]

Если мощный взрыв: $p_2 \gg p_1$

$$\Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma + 1 + \underbrace{(\gamma-1)\frac{p_1}{p_2}}_{\sim 0}}{\gamma - 1 + \underbrace{(\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}}_{\sim 0}} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \rho_1 \cdot 6 = \frac{12/5}{2/5}$$

уплотнение

напр.

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\frac{p_2}{\rho_1}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)}\frac{p_1}{\rho_2}}$$

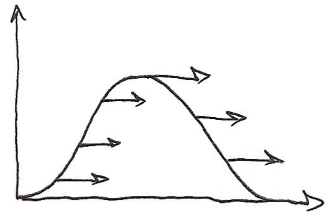
не поддаются измерению, можно только посчитать.

Если газ покоится $\Rightarrow v_1 = 0 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\frac{p_1}{\rho_2}}$.

(24.) Нелинейные уравнения. Решение типа бегущей волны. Уравнение Кортвега де Фриса и sin Гордона.

<u>Опр.:</u> Если в $Lu=\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{i_1\dots i_n} A^k_{i_1\dots i_n}\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}} = f(x)$ $A^k_{i_1\dots i_n}$ зависят не только от $x=(x_1\dots x_n)$ [а, например, ещё и от u], то ур-е наз. нелинейным.

$u(x,t)=f(x-vt) \equiv$ решение типа "бегущая волна";



<u>Уравнение Кортвега де Фриса</u>

Ф-я $\eta(x,t)$, опис. процесс распр-я длинных волн на поверхности воды приближ-но удовл-ет ур-ю:

$\eta_t + c_0\left(1+\frac{3}{2h_0}\eta\right)\eta_x + \frac{h_0^2}{6}c_0\eta_{xxx}=0$, где h_0 – глубина жидкости,

$c_0=\sqrt{gh_0}$ – скорость длинных волн на мелкой воде, g – ускор-е свободного падения.

Лин. замена пер-ых ↑ $\Rightarrow$ $u_t - 6uu_x + u_{xxx}=0$ (1)

└ канонический вид ур-я Кортвега де Фриса

[подходит для опис-я волн малой конечной амплитуды в диспергирующих средах]

Зависимость ф-ции $u(x,t)$ от координаты будем рассматривать, как для ф-й из класса потенциалов: $u(x,t)$ – рег. ф-я, опред. при действит. x и дост. быстро асимптотически обращ-ся в 0 со всеми своими производными:

$$0=u(\pm\infty,t)=u_x(\pm\infty,t)=u_{xx}(\pm\infty,t)=\dots \quad (*)$$

[во все моменты времени t]

<u>Замечательное св-во:</u> Наличие у ур-я ↑ бесконечного числа законов сохранения (интегралов движения):

$$I_0=\underset{\text{const}}{\underset{\parallel}{\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx}},\quad I_2=\underset{\text{const}}{\underset{\parallel}{\int_{-\infty}^{\infty}u^2(x,t)dx}},\quad I_4=\underset{\text{const}}{\underset{\parallel}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u^3+\frac{1}{2}u_x^2\right]dx}},\ \dots$$

$[I_0]$ – проинтегр. ур-е (1) по простр. пер-ым:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t\,dx + \underbrace{6\int_{-\infty}^{+\infty} u u_x\,dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx}\,dx}_{=0 \text{ по } (*)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = const}$$

$[I_2]$ – умн. (1) на $2u(x,t)$ и проинтегр. по пространственным переменным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2u u_t\,dx + 6\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 2\left(\frac{u^3}{3}\right)_x dx}_{} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 2u u_{xxx}\,dx}_{} = 0$$

$= 0$ по $(*)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = const}$$

$[I_4]$ – умн. (1) на $(u^2 + 2u_{xx})$ и интегр.

↳ можно построить "изящный" метод точн. реш-я, основанный на обр. задаче рассеяния для одномерн. стационарного ур-я Шредингера:

$$\Psi_{xx} + (\lambda - u(x,t))\Psi = 0,$$ где $u(x,t)$ – потенциал, λ – числ. парам-р.

Опр.: Ф-ю $f(x,t)$ наз. быстроубывающей, если

$$\max_{0\le t\le T}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)\,|f(x,t)|\,dx < \infty$$

↑ далее, будем предп-ть, что $u(x,t)$ – быстроуб. потенциал.

Две задачи для ур-я Шредингера ↑:

(1) нахождение λ, т.е. ур-е ↑ им. нетрив. решения $\Psi(x,t) \in L_2(R^1)$ [т.е. задача о нахожд. собств. зн-й (квантовомеханич. уровней энергии) т. наз. связанных состояний, определяемых нормир. в $L_2(R^1)$ волн. ф-ями $\Psi(x,t)$].

└ реш-е задачи имеется при $\lambda < 0$:

асимптотика: $\Psi_m(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} C_m(t)\,e^{-\chi_m x}$, где

$\lambda_m = -\chi_m^2$ – собств. зн-е, $\Psi_m(x,t)$ собств. функции,

$$C_m(t) = \lim_{x\to\infty}\Psi_m(x,t)\,e^{\chi_m(t)x}$$

(2) нахождение при $\lambda > 0$ ограниченных решений ур-я ↑ с заданным хар-ром асимпт. поведения:

$$\Psi(x,t) \xrightarrow{x\to+\infty} e^{-ikx} + b(k,t)\, e^{ikx}$$

$$\Psi(x,t) \xrightarrow{x\to-\infty} a(k,t)\, e^{-ikx} \quad \longleftarrow \quad k^2 = \lambda \text{ и ф-ции } a(k,t), \; b(k,t) \text{ подлежат опред-ю}$$

[т.е. задача рассеяния плоской волны единичн. амплитуды на потенциале $u(x,t)$, где $a(k,t)$ – коэф-т прохождения, $b(x,t)$ – коэф-т отражения: $|a(k,t)|^2 + |b(k,t)|^2 = 1$].

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ≡ найти данные рассеяния $\{\chi_m, C_m\}$, $\{a(k,t), b(k,t)\}$ при известн. $u(x,t)$.

ОБР. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ≡ vice versa ↑.

└ однозначно разрешима, осн. на реш. интегр. ур-я Гельфанда – Левитана.

Солитонные решения

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \; t>0, \; -\infty < x < +\infty, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

└ реш-е задачи Коши [с нач. ф-ей $u_0 = -\dfrac{2}{ch^2 x}$ или подобн.] м. быть получено методом обратной задачи ↑:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\alpha \frac{2}{ch^2\left[\frac{1}{2}\alpha(x-x_0) - \frac{\alpha^3}{2}t\right]} \qquad \left[\alpha = 2,\; x_0 = 0 \text{ для } u_0 = -\frac{2}{ch^2 x}\right]$$

↑ решения такого вида наз. солитонными. Они описывают бегущие волны неизм. формы, им. скорость ∼ амплитуде решения.

<u>Опр.:</u> Солитонами наз. такие решения нелинейных уравнений, которые им. вид бегущих уединённых волн, взаимодействующих таким образом, что после взаим-я они сохраняют неизменной свою форму, получая лишь приращение в фазах [↑ частицеподобные свойства].

Синус-уравнение Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u$$

[часто встречается в физике и технике]

[выписать сколько-нибудь общее решение весьма затрудн-но]

Будем искать реш-е в виде: $u = f(x - \lambda t) = f(\xi)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda f'(\xi) \; ; \; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 f''(\xi) \; ; \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(\xi)$$

$\Rightarrow \lambda^2 f'' = a^2 f'' + \sin f$

$$(\lambda^2 - a^2) f'' = \sin f \Rightarrow f'' = \frac{\sin f}{\lambda^2 - a^2} \quad \Big| \cdot 2f'$$

$$\Downarrow$$

$$2f'f'' = 2f' \frac{\sin f}{\lambda^2 - a^2}$$

интегрируем!

$$(f')^2 = -\frac{2}{\lambda^2 - a^2}(\cos f - C)$$

$$f' = \pm\sqrt{\frac{2}{\lambda^2 - a^2}}\sqrt{-\cos f + C}$$

$$(*) \quad \frac{df}{\sqrt{C - \cos f}} = \pm\sqrt{\frac{2}{\lambda^2 - a^2}}\, d\xi$$

разделяем переменные

Пусть $C = 1$, тогда:

$$\frac{df}{\sqrt{1 - \cos f}} = \frac{df}{\sqrt{2\sin^2 \frac{f}{2}}} = \frac{2\, d\frac{f}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{f}{2}\right|}$$

$\Rightarrow$ ур-е (*) перепишется в виде:

$$\int \frac{df}{\sin f/2} = \pm\frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}\xi + C_1$$

25. Вывод уравнения КДВ. (ур-ние мелкой воды и Буссинеска).

Ур-ние Навье-Стокса $\qquad \bar v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\frac{\partial \bar v}{\partial t} + \boxed{(\bar v \nabla)\bar v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f \qquad \sqcup = v_1\frac{\partial v_i}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_i}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_i}{\partial z}$$

– всего 3 уравнения $(i=1,2,3)$

$\operatorname{div}\bar v = 0$ ← ур-ние неразрывности

$$v(r,t)|_{t=0} = v_0(\xi), \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\overset{v_1}{\dot x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\overset{v_2}{\dot y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\overset{v_3}{\dot z}$$

$\eta v|_S = 0, \ v_n|_S = 0$ ← условие непротекания $\qquad (\bar v\nabla) = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + v_3\frac{\partial}{\partial z}$

на поверхности: $p|_{S^+} = p|_{S^-}$

$\forall$ ур-ние Эйлера: $\frac{d\bar v}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f, \ \operatorname{div}\bar v = 0$

$f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$ – потенциальная сила

умножим ур-е ↗ на $\rho\bar v$ и проинтегрируем:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac12\rho|\bar v|^2\right) + \bar v\nabla p + \bar v\nabla U = 0$$

Считаем, что поле стационарно, т.е. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac12\rho|\bar v|^2 + U\right) + \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Энергия: $\varepsilon = \frac12\rho|\bar v|^2 + U \Rightarrow \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac12\rho\bar v\nabla|\bar v|^2 + \bar v\nabla p + \bar v\nabla U = 0$

$\{\bar a\nabla\varphi = \operatorname{div}(\bar a\varphi) - \varphi\operatorname{div}\bar a\}$

$\bar\Pi = \bar v\left(p + \frac12\rho|v|^2 + U\right)$ – вектор Умова-Пойтинга

$$\Rightarrow \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}\bar\Pi$$

Закон сохранения энергии: $\frac{d}{dt}\int_\tau \varepsilon\, d\tau + \int_S \bar\Pi\bar n\, dS = 0$

Пусть движение жидкости стационарно:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac12\rho|\bar v|^2 + U + p\right) = 0 \Rightarrow \frac12\rho|v|^2 + U + p = \text{const}$$ – интеграл Бернулли

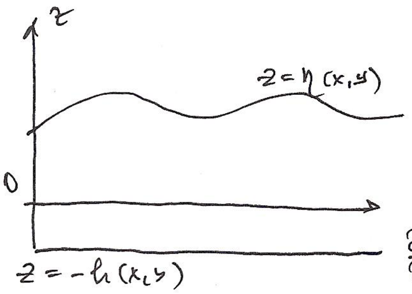
Пусть движение потенциально: $\bar v = \nabla\Phi$, Φ – потенциал скорости

Подставим в уравнение Эйлера: $\nabla\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + (\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi = f$,

$$(\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi = \nabla\left(\frac12|\nabla\Phi|^2\right) \Rightarrow \nabla\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac12|\nabla\Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho}\right] = 0 \qquad f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac12|\nabla\Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho} = c(t)$$ – интеграл Бернулли-Коши

уравнение неразрывности $\Rightarrow \underbrace{\operatorname{div}\nabla}_{\Delta}\Phi = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0.$



$\Delta\Phi = 0.$ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz + p = 0$ — инт-л Бернулли

$\xi = \eta(x,y,t) - z$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\eta + \Phi_x\eta_x + \Phi_y\eta_y - \Phi_z\big|_{z=\eta(x,y,t)} = 0$

$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ — усл-е непротекания

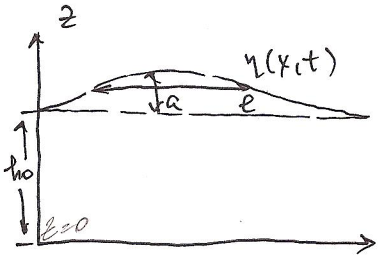
$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta(x,y,z)\big|_{z=\eta(x,y,t)} = -p_0(x,y,t)$

└ интеграл Бернулли-Коши

нач. скорости: $\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x,y,z)$,

$\eta|_{t=0} = \eta_0(x,y)$

Теория мелкой воды: перейдём к одномерному по координате движению



Вводятся безразмерные параметры:

$\alpha = \frac{a}{h_0}$ (в дальнейшем, $\alpha < 1$); $\beta = \frac{h_0^2}{l^2}$, где

a — характеристическая амплитуда волны, l — длина волны

Безразмерные величины: $\frac{x}{l}$, $\frac{z}{h_0}$, $\frac{t\sqrt{gh_0}}{l}$, $\frac{(\eta - h_0)}{a}$ $\frac{\sqrt{gh_0}}{gla}\Phi$ ← обозн. x, z, t, η, Φ

Вместо ур-е Лапласа: $\beta\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0$, $0 < z < 1 + \alpha\eta$; $\Phi_z|_{z=0} = 0$ ← усл. непротек.

При $z = 1 + \alpha\eta$: $\eta_t + \alpha\Phi_x\eta_x - \frac{1}{\beta}\Phi_z = 0$; $\Phi_t + \eta + \frac{1}{2}\alpha\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\Phi_z^2 = 0$

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\beta^m\frac{z^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}f(x,t)$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} \eta_t + \frac{\partial}{\partial x}[(1+\alpha\eta)f_x] - \left\{\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3\frac{\partial^4}{\partial x^4}f + \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha\eta)^2\eta_x\frac{\partial^3}{\partial x^3}f\right\}\beta + O(\beta^2) = 0, \\ \eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 - \frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial t} + \alpha f_x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \alpha f_{xx}^2\right\}\beta + O(\beta^2) = 0. \end{cases}$$

Считаем, что $0 < \beta \ll 1$ (волна сильно размазана). Опустим члены более высокого порядка: $\eta_t + [(1+\alpha\eta)f_x]_x = 0$

$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 = 0$

Обозн. $u = f_x + \Phi_x$. Дифф-ем 2ое ур-е по x и возвращаемся к размерным переменным:

$$\begin{cases} \eta_t + [(h_0+\eta)u]_x = 0 \\ u_t + uu_x + g\eta_x = 0 \end{cases}$$ уравнения мелкой воды

Пусть $\alpha \ll 1$, т.е. амплитуда мала $\Rightarrow \eta_t + u_x = 0$, $u_t + \eta_x = 0$ $\quad f_x = u \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta_{tt} = c_0^2\eta_{xx}$, где $c_0^2 = gh_0$ — получились обычные волны

Пусть $\alpha = O(\beta)$. Из (*) получим: ↓

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)u]_x - \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0 \\ u_t + 2\underbrace{uu_x}_{} + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xxt} = 0 \end{cases}$$ — уравнения Буссинеска

порождает нелинейную волну

Они описывают волны малой амплитуды на мелкой воде.

Если выделить волны, бегущие только вправо → получим ур-е КдВ:

Ищем реш-е в виде: $u = A_0(\eta) + \alpha A_1(\eta) + \beta B_1(\eta) + O(\alpha^2+\beta^2)$,

а η в виде: $\eta_t + \eta_x = \alpha C_1(\eta) + \beta C_2(\eta) + O(\alpha^2+\beta^2)$ ⇒ подставим в ур-я:

$$\eta_t + [A_0]_x + \alpha[(\eta A_0)_x + (A_1)_x] + \beta[(B_1)_x + \frac{1}{6}(A_0)_{xxx}] + O(\alpha^2+\beta^2) = 0$$

$$[A_0]_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + A_0(A_0)_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}(A_0)_{xxt}] + O(\alpha^2+\beta^2) = 0$$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_x + 2\eta\eta_x] + \beta[(B_1)_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}] = 0$$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + \eta\eta_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}] = 0$$

$A_1 = \eta^2\sigma$, $B_1 = \sigma\eta_{xx}$

$\sigma = -\frac{1}{4}$, $\sigma = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0$$

$$\eta_t + c_0\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{h_0}\right)\eta_x + \frac{1}{6}h_0^2 c_0 \eta_{xxx} = 0$$

в каноническом виде: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$

УРАВНЕНИЕ KDV.

27. Автомодельные решения нелинейных уравнений.

$$u_t = (k(u)\,u_x)_x$$

? При каких k температура будет неограниченно возрастать?

Будем искать решение типа бегущей волны:

$u(x,t) = f(x-\lambda t) = f(\xi)$ — автомодельное решение

$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda \frac{df}{d\xi}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{d\xi}\left(k(f)\frac{df}{d\xi}\right) = -\lambda \frac{df}{d\xi}$

$\Rightarrow k(f)\frac{df}{d\xi} + \lambda f = C$

Пусть, для определённости, $C = 0$.

$\Rightarrow \frac{k(f)}{f}\frac{df}{d\xi} = -\lambda$

добавим условие финитности решений: $\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta}\,d\eta < \infty$

Введём $\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta}\,d\eta$, $u \geq 0$, $\Phi(0) = 0$

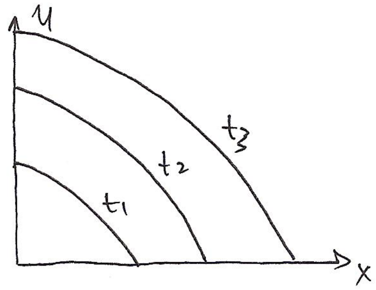
$\Rightarrow \int_0^{f(\xi)} \frac{k(\eta)}{\eta}\,d\eta = -\lambda(\xi - \xi_0) \Rightarrow \Phi(f(\xi)) = -\lambda(\xi - \xi_0) \Rightarrow f(\xi) = \Phi^{-1}(-\lambda\xi)$ ($\xi_0 = 0$).

$\Rightarrow u_A(t,x) = \Phi^{-1}[\lambda(\lambda t - x)^*]$ (обозн. $*$: $\Phi \neq 0$: $\lambda t - x > 0$; $\Phi = 0$: $\lambda t - x < 0$)

Пусть $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma = const \Rightarrow \Phi^{-1}(u) = \left(\frac{\sigma}{k_0}u\right)^{1/\sigma}$

$\Rightarrow u_A(t,x) = \left[\frac{\sigma}{k_0}\lambda(\lambda t - x)\right]^{1/\sigma}$

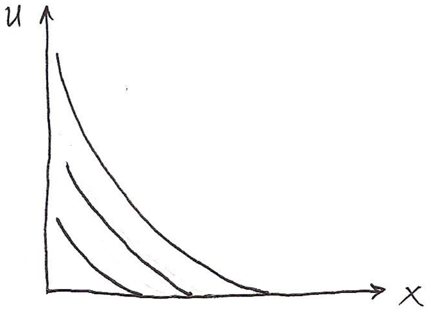
$\Phi(u) = k_0 \int \eta^{\sigma-1}\,d\eta = \frac{k_0}{\sigma}\eta^\sigma\Big|_0^u = \frac{k_0 u^\sigma}{\sigma}$



Пусть $k(u) = |\ln u|^{-1}$, $x \in (0, 1/2)$, $k(u) > 0$, $k(0) = 0$

$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta}\,d\eta$ ← расх-ся

$\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta}\,d\eta = \int_0^u \frac{d\eta}{\ln|\eta|\,\eta}$



Пусть $k(u) = u\exp(-u)$, $u > 0$

$$u_A(t,x) = \begin{cases} -\ln[1 - \lambda(\lambda t - x)], & 0 \leq x \leq \lambda t \\ 0, & x > \lambda t \end{cases}$$

Рассм. $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$

ищем в виде:

$\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\,dx = E_0$, $u(t,x) = t^\alpha \theta(\xi)$, $\xi = \frac{x}{t^\beta}$ — автомодельное реш-е

Подставим $\Rightarrow \alpha t^{\alpha-1}\theta - \beta t^{\alpha-1}\sum_{i=1}^N \frac{\partial\theta}{\partial\xi_i} = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta}\,\nabla_\xi(\theta^\sigma \nabla_\xi \theta)$

Можно сократить, если $\alpha - 1 = \alpha(\sigma+1) - 2\beta$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} t^{\alpha}\theta(\xi)\,dx = t^{\alpha+N\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\theta(\xi)\,d\xi \Rightarrow \alpha+N\beta=0,$$ чтобы энергия сохранялась

$$\Rightarrow \eta^{N-1}\theta^{\sigma}\theta' + \frac{1}{N\sigma+2}\theta\eta^N = 0,\ \eta>0,\ \theta^{\sigma}\theta'(0)=0.$$

$\nearrow$ подбирается автомодельная переменная

Рассм. $u_t = (u^{\sigma}u)_x$, $\sigma = const$, $t>0$, $x>0$, $u(0,x) = u_0$, $x>0$

$u_0^{\sigma+1} \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $u(t,0) = u_1(t)$, $t>0$

Возьмём степенной граничный режим: $u_1(t) = (1+t)^m$, $t>0$, $m = const$

Будем искать автомодельное реш-е в виде: $u_A(t,x) = (1+t)^m\theta_A(\xi)$,

где $\xi = \frac{x}{(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}}$. Сделаем замену: $t \to \frac{t}{\alpha}$, $x \to \frac{x}{\alpha^{\frac{1+m\sigma}{2}}}$, $u \to \alpha^m u$

$\Rightarrow$ автомодельное уравнение: $$\left.\begin{aligned}&(\theta_A^{\sigma}\theta_A')' + \frac{1+m\sigma}{2}\theta_A'\xi - m\theta_A = 0\\ &\theta_A(0)=1,\ \theta_A(\infty)=0\end{aligned}\right\}\ \text{ОДУ}$$

Возьмём экспоненциальный граничный режим: $u(t) = e^t$, $t>0$

$u_A(t,x) = e^t f_A(\eta)$, $\eta = \frac{x}{\exp\left(\frac{\sigma t}{2}\right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_A^{\sigma}f_A')' + \frac{\sigma}{2}f_A'\eta - f_A = 0,\ \eta>0;\ f_A(0)=1,\ f_A(\infty)=0.$$

Рассмотрим задачу с внешним источником: $u_t = (u^{\sigma}u_x)_x + u^{\beta}$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$, $\beta>1$

$$u_A(t,x) = (T_0 - t)^{\frac{-1}{\beta-1}}\theta_A(\xi),\ \xi = \frac{x}{(T_0-t)^m}\in\mathbb{R},\ \theta_A(\xi)\geq 0$$

Возьмём $m = [\beta - (\sigma+1)]/[2(\beta-1)]$

Будем считать начальные условие чётными: $u_0(-x) = u_0(x)$, $x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \theta(t,\xi) = (T_0-t)^{1/(\beta-1)}u(t,\xi(T_0-t)^m),\ t\in[0,T_0]$$

$$(\theta_A^{\sigma}\theta_A')' - m\theta_A'\xi - \frac{1}{\beta-1}\theta_A = 0$$

[важно не т. найти автомодельн. реш-е, но и исслед. устойч-ть]